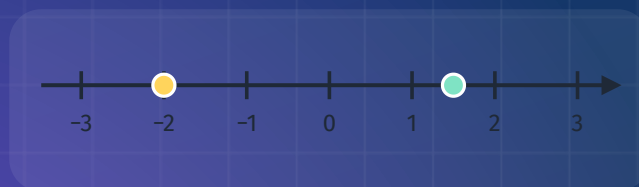
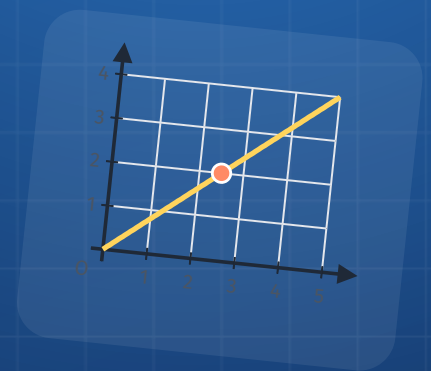
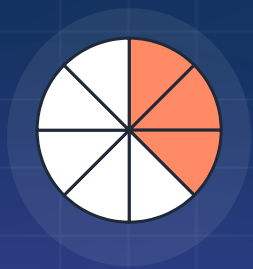


ΠΛΗΡΕΣ ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΜΕΝΟ ΒΟΗΘΗΜΑ

Μαθηματικά Α' Γυμνασίου

Μέρος Α' · Αριθμητική – Άλγεβρα

Όλη η θεωρία με απλά λόγια, εκατοντάδες λυμένα παραδείγματα, «παγίδες» και συχνά λάθη, άλυτες ασκήσεις κλιμακούμενης δυσκολίας με τις λύσεις τους.



7 κεφάλαια · 35 μαθήματα

Θεωρία βήμα-βήμα

Λυμένα παραδείγματα

Προσοχή & συχνά λάθη

Άλυτες ασκήσεις με λύσεις

Επαναληπτικά ανά κεφάλαιο



mathgreece.com

Το δωρεάν, πλήρες και ολοκληρωμένο online φροντιστήριο
Μαθηματικών
για Γυμνάσιο, Λύκειο και Πανεπιστήμιο

Τάσος Κοβατσίδης
Μαθηματικός

Πρόλογος

Αγαπητή μαθήτριά, αγαπητέ μαθητή,

η Α' Γυμνασίου είναι η χρονιά που τα Μαθηματικά «αλλάζουν πίστα». Όσα έμαθες στο Δημοτικό — οι πράξεις, τα κλάσματα, οι δεκαδικοί — ξαναεμφανίζονται, αλλά τώρα με **ακρίβεια**, με **κανόνες** και με **ορολογία**. Παράλληλα έρχονται καινούργιες έννοιες, όπως οι **εξισώσεις**, τα **ανάλογα ποσά** και οι **αρνητικοί αριθμοί**, που θα σε συνοδεύουν σε όλα τα επόμενα χρόνια.



Το βοήθημα αυτό γράφτηκε με ένα και μόνο στόχο: **να καταλάβεις** — όχι απλώς να αποστηθίσεις. Γι' αυτό κάθε μάθημα ξεκινά από κάτι απλό και οικείο, προχωρά σιγά-σιγά στη θεωρία, τη «δείχνει» με εικόνες και σχήματα και τη δουλεύει με πολλά λυμένα παραδείγματα. Μετά από είκοσι και πλέον χρόνια στην τάξη, ξέρω πολύ καλά πού «σκοντάφτουν» οι μαθητές· αυτά τα σημεία θα τα βρεις σημειωμένα ως **Προσοχή!** και **Συχνό λάθος**.

Στο τέλος κάθε μαθήματος υπάρχουν **άλυτες ασκήσεις** διαβαθμισμένης δυσκολίας και στο τέλος κάθε κεφαλαίου μια **ανακεφαλαίωση με επαναληπτικές ασκήσεις**. Όλες οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου. Η συμβουλή μου: **προσπάθησε πρώτα μόνος σου** και κοίτα τη λύση μόνο για να ελέγξεις το αποτέλεσμα ή όταν έχεις πραγματικά κολλήσει.

Αν κάπου χρειαστείς περισσότερη βοήθεια, το **mathgreece.com** είναι πάντα ανοιχτό για σένα: ένα **πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο** με βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις, κουίζ και παιχνίδια γνώσεων.

Καλή μελέτη και... καλή επιτυχία!

Τάσος Κοβατσίδης

Μαθηματικός · mathgreece.com

Πώς να διαβάσεις αυτό το βοήθημα

Το βιβλίο χωρίζεται σε **7 κεφάλαια**, όσα και τα κεφάλαια του Μέρους Α' της ύλης. Κάθε κεφάλαιο έχει το δικό του **χρώμα** και τη δική του **πλαϊνή ετικέτα** στο δεξί άκρο της σελίδας, ώστε να το βρίσκεις αμέσως. Στην κορυφή κάθε σελίδας γράφεται πάντα **σε ποιο κεφάλαιο και σε ποιο μάθημα βρίσκεσαι**. Κάθε μάθημα ξεκινά σε νέα σελίδα με μια χρωματιστή «ταμπέλα» σαν αυτή:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 1.3 Δυνάμεις φυσικών αριθμών

Μέσα στα μαθήματα θα συναντήσεις τα παρακάτω πλαίσια:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Στα πλαίσια αυτά θα βρίσκεις τους **ορισμούς**, τους **κανόνες** και τις **ιδιότητες** — δηλαδή όσα πρέπει να ξέρεις «απ' έξω και ανακατωτά».



Παράδειγμα 1

Κάθε λυμένο παράδειγμα έχει πρώτα την **εκφώνηση**...

ΛΥΣΗ

...και μετά τη **λύση**, γραμμένη βήμα-βήμα, όπως θα την έγραφες στο τετράδιό σου ή σε ένα διαγώνισμα.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Η κουκουβάγια μας, η **Γλαύκα**, σε ειδοποιεί για σημεία που θέλουν ιδιαίτερη προσοχή.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

Εδώ βλέπεις πώς **δεν** πρέπει να λύσεις...

✓ ΣΩΣΤΟ

...και εδώ πώς είναι το σωστό.

Από κάτω εξηγείται **γιατί** γίνεται το λάθος, ώστε να μην το ξανακάνεις.



ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ιστορικά στοιχεία, περιέργειες και εφαρμογές από την καθημερινή ζωή.

Συνέχισε στο **mathgreece.com**



Σε κάθε μάθημα θα σε περιμένει μια υπενθύμιση: στο mathgreece.com υπάρχουν βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις, κουίζ και παιχνίδια γνώσεων για το ίδιο ακριβώς μάθημα.



Οι ασκήσεις

Κάθε άσκηση έχει δίπλα της τελείες δυσκολίας:

●●● εύκολη, ●●● μέτρια, ●●● απαιτητική.

Ξεκίνα πάντα από τις εύκολες!

Οι λύσεις

Στο τέλος του βιβλίου, οργανωμένες ανά **κεφάλαιο** και **μάθημα**, με τον ίδιο αριθμό που έχει η άσκηση. Η ενότητα των λύσεων έχει τη δική της ετικέτα **Λ**.

Περιεχόμενα

Πάτησε πάνω σε έναν τίτλο για να μεταφερθείς απευθείας στη σελίδα του (στην ηλεκτρονική μορφή).

1 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Οι φυσικοί αριθμοί 8

1.1	Φυσικοί αριθμοί – Διάταξη φυσικών – Στρογγυλοποίηση	9
1.2	Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών	15
1.3	Δυνάμεις φυσικών αριθμών	22
1.4	Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα	27
1.5	Χαρακτήρες διαιρετότητας – ΜΚΔ – ΕΚΠ – Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων	32
★	Ανακεφαλαίωση – Επαναληπτικές ασκήσεις	40

2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Τα κλάσματα 42

2.1	Η έννοια του κλάσματος	43
2.2	Ισοδύναμα κλάσματα	49
2.3	Σύγκριση κλασμάτων	54
2.4	Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων	58
2.5	Πολλαπλασιασμός κλασμάτων	63
2.6	Διαίρεση κλασμάτων	68
★	Ανακεφαλαίωση – Επαναληπτικές ασκήσεις	73

3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Δεκαδικοί αριθμοί 75

3.1	Δεκαδικά κλάσματα – Δεκαδικοί αριθμοί – Διάταξη δεκαδικών – Στρογγυλοποίηση	76
3.2	Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς – Δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό	82
3.3	Υπολογισμοί με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης	88
3.4	Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών	91
3.5	Μονάδες μέτρησης	95
★	Ανακεφαλαίωση – Επαναληπτικές ασκήσεις	101

4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 · Εξισώσεις και προβλήματα 103

4.1	Η έννοια της εξίσωσης – Οι εξισώσεις $a + x = b$, $x - a = b$, $a - x = b$, $ax = b$, $a : x = b$, $x : a = b$	104
4.2	Επίλυση προβλημάτων	110
4.3	Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων	114

★ Ανακεφαλαίωση – Επαναληπτικές ασκήσεις	119
--	-----

5 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 · Ποσοστά 121

5.1 Ποσοστά	122
5.2 Προβλήματα με ποσοστά	127
★ Ανακεφαλαίωση – Επαναληπτικές ασκήσεις	132

6 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 · Ανάλογα ποσά – Αντιστρόφως ανάλογα ποσά 134

6.1 Παράσταση σημείων στο επίπεδο	135
6.2 Λόγος δύο αριθμών – Αναλογία	139
6.3 Ανάλογα ποσά – Ιδιότητες αναλόγων ποσών	143
6.4 Γραφική παράσταση σχέσης αναλογίας	146
6.5 Προβλήματα αναλογιών	149
6.6 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά	153
★ Ανακεφαλαίωση – Επαναληπτικές ασκήσεις	157

7 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 · Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί 159

7.1 Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) – Η ευθεία των ρητών – Τετμημένη σημείου	160
7.2 Απόλυτη τιμή ρητού – Αντίθετοι ρητοί – Σύγκριση ρητών	163
7.3 Πρόσθεση ρητών αριθμών	166
7.4 Αφαίρεση ρητών αριθμών	170
7.5 Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών	173
7.6 Διαίρεση ρητών αριθμών	176
7.7 Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών	179
7.8 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό	182
7.9 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο	185
7.10 Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών	188
★ Ανακεφαλαίωση – Επαναληπτικές ασκήσεις	191

ΛΥΣΕΙΣ · Κεφάλαιο 1: Οι φυσικοί αριθμοί 193

ΛΥΣΕΙΣ · Κεφάλαιο 2: Τα κλάσματα 197

ΛΥΣΕΙΣ · Κεφάλαιο 3: Δεκαδικοί αριθμοί 201

Λ ΛΥΣΕΙΣ · Κεφάλαιο 4: Εξισώσεις και προβλήματα 204

Λ ΛΥΣΕΙΣ · Κεφάλαιο 5: Ποσοστά 206

Λ ΛΥΣΕΙΣ · Κεφάλαιο 6: Ανάλογα ποσά – Αντιστρόφως ανάλογα ποσά 207

Λ ΛΥΣΕΙΣ · Κεφάλαιο 7: Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί 210

1

Κεφάλαιο 1

Οι φυσικοί αριθμοί

Οι φυσικοί αριθμοί είναι η **βάση όλων των Μαθηματικών**. Σε αυτό το κεφάλαιο οργανώνουμε όσα ήδη ξέρεις από το Δημοτικό, μαθαίνουμε τις **ιδιότητες των πράξεων** που κάνουν τους υπολογισμούς γρήγορους και σίγουρους, γνωρίζουμε τις **δυνάμεις** και ανακαλύπτουμε τα «μυστικά» της **διαιρετότητας**: τους πρώτους αριθμούς, τον Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 1.1 Φυσικοί αριθμοί – Διάταξη – Στρογγυλοποίηση
- 1.2 Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός
- 1.3 Δυνάμεις φυσικών αριθμών
- 1.4 Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα
- 1.5 Χαρακτήρες διαιρετότητας – ΜΚΔ – ΕΚΠ – Πρώτοι παράγοντες
- ★ Ανακεφαλαίωση & επαναληπτικές ασκήσεις



Βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις και κουίζ
για όλο το κεφάλαιο, δωρεάν στο
mathgreece.com

N

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 1.1

Φυσικοί αριθμοί – Διάταξη φυσικών – Στρογγυλοποίηση

1

ΦΥΣΙΚΟΙ

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ ποιοι είναι οι **φυσικοί αριθμοί** και πώς τους διαβάζουμε και τους γράφουμε σωστά
- ✓ τι σημαίνει **αξία θέσης** ενός ψηφίου
- ✓ να **συγκρίνεις** και να **διατάσσεις** φυσικούς αριθμούς και να τους τοποθετείς πάνω σε μια ευθεία
- ✓ να **στρογγυλοποιείς** έναν αριθμό σε οποιαδήποτε τάξη

1 Οι φυσικοί αριθμοί

Από τότε που ο άνθρωπος άρχισε να μετράει πρόβατα, σπόρους ή μέρες, χρειάστηκε αριθμούς. Οι αριθμοί με τους οποίους **μετράμε** πλήθος αντικειμένων λέγονται **φυσικοί αριθμοί**. Τους γράφουμε στη σειρά, ξεκινώντας από το μηδέν:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Οι αριθμοί $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 100, 101, \dots$ λέγονται **φυσικοί αριθμοί**.

Οι φυσικοί αριθμοί είναι **άπειροι**: όσο μεγάλο φυσικό κι αν σκεφτείς, προσθέτοντας 1 βρίσκεις έναν ακόμη μεγαλύτερο. Γι' αυτό δεν υπάρχει «μεγαλύτερος φυσικός αριθμός».

Μερικές λέξεις που θα χρησιμοποιούμε συνέχεια:

- **Επόμενος** ενός φυσικού είναι ο αριθμός που βρίσκουμε αν του προσθέσουμε 1. Ο επόμενος του 49 είναι ο 50.
- **Προηγούμενος** ενός φυσικού είναι ο αριθμός που βρίσκουμε αν του αφαιρέσουμε 1. Ο προηγούμενος του 50 είναι ο 49. Το 0 **δεν** έχει προηγούμενο φυσικό.
- **Διαδοχικοί** λέγονται δύο ή περισσότεροι φυσικοί που ο καθένας είναι επόμενος του άλλου, π.χ. 17, 18, 19.
- **Άρτιοι** (ζυγοί) λέγονται οι φυσικοί που διαιρούνται ακριβώς με το 2: 0, 2, 4, 6, ... Τελειώνουν σε 0, 2, 4, 6 ή 8.
- **Περιττοί** (μονοί) λέγονται οι φυσικοί που δεν διαιρούνται ακριβώς με το 2: 1, 3, 5, 7, ... Τελειώνουν σε 1, 3, 5, 7 ή 9.



Στην ευθεία των φυσικών οι άρτιοι (μπλε) και οι περιττοί (κόκκινοι) εναλλάσσονται: άρτιος, περιττός, άρτιος, ...

**ΠΡΟΣΟΧΗ!**

Το **μηδέν** είναι φυσικός αριθμός και μάλιστα **άρτιος** (αφού $0 : 2 = 0$ ακριβώς). Είναι ο **μικρότερος** φυσικός αριθμός.

1

ΦΥΣΙΚΟΙ

**Παράδειγμα 1**

Να γράφεις: **α)** τους τρεις διαδοχικούς φυσικούς που ο μεσαίος είναι ο 1.000, **β)** τον επόμενο και τον προηγούμενο του 3.099, **γ)** τους περιττούς αριθμούς μεταξύ 40 και 50.

ΛΥΣΗ

α) Ο προηγούμενος του 1.000 είναι ο 999 και ο επόμενος ο 1.001. Άρα: 999, 1.000, 1.001.

β) Επόμενος: $3.099 + 1 = 3.100$. Προηγούμενος: $3.099 - 1 = 3.098$.

γ) Οι περιττοί τελειώνουν σε 1, 3, 5, 7, 9: 41, 43, 45, 47, 49.

2 Ψηφία, τάξεις και αξία θέσης

Για να γράψουμε **οποιοδήποτε** φυσικό αριθμό χρησιμοποιούμε μόνο **δέκα σύμβολα**, τα **ψηφία**: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Το «μυστικό» είναι ότι **η θέση** ενός ψηφίου μέσα στον αριθμό καθορίζει πόσο αξίζει. Στον αριθμό 555 υπάρχουν τρία ίδια ψηφία, αλλά το πρώτο αξίζει 500, το δεύτερο 50 και το τρίτο μόνο 5! Γι' αυτό το σύστημά μας λέγεται **δεκαδικό θεσιακό σύστημα αρίθμησης**: κάθε θέση αξίζει **δέκα φορές** περισσότερο από τη θέση που βρίσκεται αμέσως δεξιά της.

Δισεκατ.	Εκ. εκατομ.	Δεκ. εκατομ.	Εκατομ.	Εκ. χιλ.	Δεκ. χιλ.	Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
			3	5	0	8	0	2	7
2	0	4	0	0	0	0	6	1	0

Για να διαβάζονται εύκολα, χωρίζουμε τα ψηφία ανά **τρία από τα δεξιά με τελεία**. Κάθε τριάδα είναι μια **κλάση**: κλάση των μονάδων, των χιλιάδων, των εκατομμυρίων, των δισεκατομμυρίων. Έτσι ο πρώτος αριθμός του πίνακα γράφεται 3.508.027 και διαβάζεται «τρία εκατομμύρια πεντακόσιες οκτώ χιλιάδες είκοσι επτά». Ο δεύτερος γράφεται 2.040.000.610 και διαβάζεται «δύο δισεκατομμύρια σαράντα εκατομμύρια εξακόσια δέκα».

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΑΡΙΘΜΟΥ

Κάθε φυσικός μπορεί να γραφτεί ως **άθροισμα** των αξιών των ψηφίων του. Αυτό λέγεται **ανάπτυγμα** του αριθμού. Για παράδειγμα:

$$3.508.027 = 3 \cdot 1.000.000 + 5 \cdot 100.000 + 0 \cdot 10.000 + 8 \cdot 1.000 + 0 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7$$

Τα μηδενικά «κρατάνε» τη θέση κενή — χωρίς αυτά ο αριθμός θα άλλαζε τελείως!

Παράδειγμα 2

Στον αριθμό 74.916.352 να βρεις: **α)** το ψηφίο των εκατοντάδων χιλιάδων, **β)** την αξία του ψηφίου 4, **γ)** πόσες **χιλιάδες** συνολικά περιέχει ο αριθμός.

ΛΥΣΗ

Τοποθετούμε τα ψηφία στις θέσεις τους: 7 δεκ. εκατομμύρια, 4 εκατομμύρια, 9 εκ. χιλιάδες, 1 δεκ. χιλιάδες, 6 χιλιάδες, 3 εκατοντάδες, 5 δεκάδες, 2 μονάδες.

α) Το ψηφίο των εκατοντάδων χιλιάδων είναι το 9.

β) Το 4 βρίσκεται στη θέση των εκατομμυρίων, άρα αξίζει 4.000.000.

γ) «Κόβουμε» τα τρία τελευταία ψηφία: ο αριθμός περιέχει 74.916 ολόκληρες χιλιάδες (και περισσεύουν 352 μονάδες).

× ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

«Τρεις χιλιάδες πέντε» → 30005

✓ ΣΩΣΤΟ

«Τρεις χιλιάδες πέντε» → 3.005

Οι χιλιάδες γράφονται **μπροστά** από **τρία** ψηφία (εκατοντάδες, δεκάδες, μονάδες). Αν δεν υπάρχουν εκατοντάδες ή δεκάδες, γράφουμε **μηδενικά** στη θέση τους. Ένας γρήγορος έλεγχος: μετά την τελεία των χιλιάδων πρέπει να υπάρχουν πάντα **ακριβώς τρία ψηφία**.

3 Σύγκριση και διάταξη φυσικών αριθμών

Αν φανταστούμε μια ευθεία και σημειώσουμε πάνω της το 0 και, με **ίσα βήματα** προς τα δεξιά, τους αριθμούς 1, 2, 3, ..., παίρνουμε την **ευθεία των φυσικών αριθμών**. Όσο πιο δεξιά βρίσκεται ένας αριθμός, τόσο **μεγαλύτερος** είναι.



Ο αριθμός 8 (σημείο B) είναι δεξιότερα από τον 3 (σημείο A), άρα $8 > 3$.

ΣΥΜΒΟΛΑ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ

Για δύο φυσικούς α και β ισχύει **ένα και μόνο ένα** από τα παρακάτω:

$$\alpha = \beta \quad \alpha < \beta \text{ (το } \alpha \text{ είναι μικρότερο του } \beta) \quad \alpha > \beta \text{ (το } \alpha \text{ είναι μεγαλύτερο του } \beta)$$

Η «μύτη» του συμβόλου δείχνει πάντα τον **μικρότερο** αριθμό, ενώ το «ανοιχτό στόμα» είναι στραμμένο προς τον **μεγαλύτερο**.

ΠΩΣ ΣΥΓΚΡΙΝΟΥΜΕ ΔΥΟ ΦΥΣΙΚΟΥΣ

- 1 Μετράμε τα ψηφία τους. **Μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει τα περισσότερα ψηφία.**
- 2 Αν έχουν το ίδιο πλήθος ψηφίων, συγκρίνουμε τα ψηφία **ένα-ένα από τα αριστερά**. Στο πρώτο ζευγάρι που διαφέρουν, μεγαλύτερος είναι ο αριθμός με το μεγαλύτερο ψηφίο.



Παράδειγμα 3

Να συγκρίνεις: **α)** 9.987 και 10.002, **β)** 458.391 και 458.319.

ΛΥΣΗ

α) Ο 9.987 έχει 4 ψηφία ενώ ο 10.002 έχει 5. Άρα $9.987 < 10.002$, παρόλο που το 9 είναι μεγαλύτερο από το 1!

β) Έχουν και οι δύο 6 ψηφία. Συγκρίνουμε από αριστερά: $4 = 4$, $5 = 5$, $8 = 8$, $3 = 3$, $9 > 1$. Άρα $458.391 > 458.319$.

Όταν γράφουμε αριθμούς από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, λέμε ότι τους γράφουμε σε **αύξουσα σειρά**· από τον μεγαλύτερο στον μικρότερο, σε **φθίνουσα σειρά**. Μπορούμε επίσης να γράψουμε διπλή ανισότητα: το $5 < 7 < 12$ σημαίνει ότι το 7 βρίσκεται **ανάμεσα** στο 5 και στο 12.



Παράδειγμα 4

Να γράψεις σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς: 30.450, 3.045, 30.405, 304.500, 3.540.

ΛΥΣΗ

Πρώτα ομαδοποιούμε με βάση το πλήθος ψηφίων: τετραψήφιοι οι 3.045 και 3.540, πενταψήφιοι οι 30.450 και 30.405, εξαψήφιος ο 304.500. Μέσα σε κάθε ομάδα συγκρίνουμε από αριστερά:

$$3.045 < 3.540 < 30.405 < 30.450 < 304.500$$

4 Στρογγυλοποίηση

Η εφημερίδα γράφει ότι στον αγώνα ήταν «περίπου 45.000 θεατές», ενώ στην πραγματικότητα ήταν 44.873. Στην καθημερινή ζωή συχνά δεν χρειαζόμαστε τον ακριβή αριθμό, αλλά μια **κοντινή, πιο «στρογγυλή» τιμή** του, που θυμόμαστε και χρησιμοποιούμε εύκολα. Αυτή η διαδικασία λέγεται **στρογγυλοποίηση**.



Ο αριθμός 44.873 είναι πιο κοντά στο 45.000 παρά στο 44.000· στρογγυλοποιημένος στις χιλιάδες γίνεται 45.000.

ΚΑΝΟΝΑΣ ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ

- 1 Εντοπίζουμε το ψηφίο της τάξης στην οποία θέλουμε να στρογγυλοποιήσουμε (το «υπογραμμίζουμε»).
- 2 Κοιτάμε **μόνο το αμέσως επόμενο ψηφίο** προς τα δεξιά.
- 3 Αν αυτό είναι 0, 1, 2, 3 ή 4, το υπογραμμισμένο ψηφίο **μένει ίδιο**.
- 4 Αν είναι 5, 6, 7, 8 ή 9, το υπογραμμισμένο ψηφίο **αυξάνεται κατά 1**.
- 5 Όλα τα ψηφία δεξιά του υπογραμμισμένου γίνονται **μηδενικά**.



Παράδειγμα 5

Να στρογγυλοποιήσεις τον αριθμό 2.738.461: **α)** στις δεκάδες, **β)** στις εκατοντάδες, **γ)** στις χιλιάδες, **δ)** στις δεκάδες χιλιάδες, **ε)** στα εκατομμύρια.

ΛΥΣΗ

α) Δεκάδες: ψηφίο 6, επόμενο $1 < 5 \Rightarrow 2.738.460$.

β) Εκατοντάδες: ψηφίο 4, επόμενο $6 \geq 5 \Rightarrow$ το 4 γίνεται 5: 2.738.500.

γ) Χιλιάδες: ψηφίο 8, επόμενο $4 < 5 \Rightarrow 2.738.000$.

δ) Δεκάδες χιλιάδες: ψηφίο 3, επόμενο $8 \geq 5 \Rightarrow 2.740.000$.

ε) Εκατομμύρια: ψηφίο 2, επόμενο $7 \geq 5 \Rightarrow 3.000.000$.



Παράδειγμα 6

Να στρογγυλοποιήσεις τον 59.962 στις εκατοντάδες.

ΛΥΣΗ

Το ψηφίο των εκατοντάδων είναι 9 και το επόμενο είναι $6 \geq 5$, οπότε το 9 πρέπει να αυξηθεί κατά 1 και να γίνει «10». Αυτό σημαίνει ότι γράφουμε 0 στις εκατοντάδες και **κρατάμε 1** για τις χιλιάδες. Οι 599 εκατοντάδες γίνονται 600 εκατοντάδες:

$$59.962 \approx 60.000$$

Το σύμβολο $\approx$ διαβάζεται «περίπου ίσο».



ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

1.449 στις εκατοντάδες: «1.449 $\rightarrow$ 1.450 $\rightarrow$ 1.500»

✓ ΣΩΣΤΟ

1.449 στις εκατοντάδες: επόμενο ψηφίο $4 < 5$, άρα 1.400

Η στρογγυλοποίηση γίνεται **με μία κίνηση**, κοιτάζοντας **μόνο** το ψηφίο αμέσως δεξιά της τάξης που μας ενδιαφέρει. Οι «αλυσιδωτές» στρογγυλοποιήσεις οδηγούν σε λάθος αποτέλεσμα.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Μετά τη στρογγυλοποίηση ο αριθμός **δεν πρέπει να «μικρύνει» σε πλήθος ψηφίων**: τα ψηφία δεξιά της τάξης γίνονται **μηδενικά**, δεν σβήνονται. Ο 2.738.461 στις χιλιάδες είναι 2.738.000 και **όχι** 2.738!



ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Οι αρχαίοι Έλληνες έγραφαν τους αριθμούς με **γράμματα** του αλφαβήτου: $\alpha' = 1$, $\beta' = 2$, $\iota' = 10$, $\rho' = 100$. Το σύστημα που χρησιμοποιούμε σήμερα, με τα δέκα ψηφία και το μηδέν, ήρθε από την Ινδία μέσω των Αράβων και διαδόθηκε στην Ευρώπη τον 13ο αιώνα. Γι' αυτό τα ψηφία μας λέγονται και **ινδο-αραβικά**.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Δες το βίντεο-μάθημα για τους φυσικούς αριθμούς και τη στρογγυλοποίηση και λύσε τα σχετικά κουίζ για να ελέγξεις αμέσως τι έμαθες.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 1.1

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να γράψεις με ψηφία τους αριθμούς:
α) επτά χιλιάδες τριάντα β) πενήντα χιλιάδες οκτώ
γ) δύο εκατομμύρια εκατό χιλιάδες δ) τρία δισεκατομμύρια πέντε

2 ●●● Να γράψεις ολογράφως τους αριθμούς: α) 40.706, β) 1.200.015, γ) 905.090.

3 ●●● Να γράψεις τον επόμενο και τον προηγούμενο των αριθμών: α) 8.999, β) 70.000, γ) 1.

4 ●●● Στον αριθμό 6.093.548 να βρεις την αξία καθενός από τα ψηφία 6, 9, 5 και να γράψεις το ανάπτυγμά του.

5 ●●● Να συμπληρώσεις με το κατάλληλο σύμβολο $<$, $>$ ή $=$:
α) 10.010 _____ 10.100 β) 99.999 _____ 100.000
γ) 7.508 _____ 7.058 δ) 3 χιλιάδες _____ 300 δεκάδες

6 ●●● Να γράψεις σε **φθίνουσα** σειρά: 12.021, 12.201, 1.221, 12.012, 121.002.

7 ●●● Να στρογγυλοποιήσεις τον αριθμό 4.385.926 στις: α) δεκάδες, β) εκατοντάδες, γ) χιλιάδες, δ) εκατοντάδες χιλιάδες.

8 ●●● Να στρογγυλοποιήσεις: α) τον 9.951 στις δεκάδες, β) τον 9.951 στις εκατοντάδες, γ) τον 199.500 στις χιλιάδες.

9 ●●● Να βρεις όλους τους φυσικούς x για τους οποίους ισχύει $996 < x \leq 1.003$. Πόσοι από αυτούς είναι άρτιοι;

10 ●●● Με τα ψηφία 3, 0, 8, 5 (το καθένα μία φορά) να γράψεις: α) τον μεγαλύτερο τετραψήφιο αριθμό, β) τον μικρότερο τετραψήφιο αριθμό, γ) τον μεγαλύτερο **περιττό** τετραψήφιο αριθμό.

11 ●●● Ένας αριθμός στρογγυλοποιημένος στις εκατοντάδες δίνει 7.300. Ποιος είναι ο **μικρότερος** και ποιος ο **μεγαλύτερος** φυσικός που μπορεί να είναι;

12 ●●● Ο πληθυσμός μιας πόλης είναι 138.647 κάτοικοι. Ο δήμαρχος δήλωσε «περίπου 140.000» και μια εφημερίδα έγραψε «περίπου 139.000». Σε ποια τάξη στρογγυλοποίησε ο καθένας; Ποια δήλωση είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 1.2

Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

1

ΦΥΣΙΚΟΙ

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τους **όρους** και τις **ιδιότητες** της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού
- ✓ πώς οι ιδιότητες κάνουν τους υπολογισμούς **ευκολότερους** (και νοερούς)
- ✓ πότε γίνεται η **αφαίρεση** στους φυσικούς και πώς ελέγχεται
- ✓ την **επιμεριστική ιδιότητα** και τη χρήση της
- ✓ την **προτεραιότητα των πράξεων** και τον ρόλο των **παρενθέσεων**

1 Η πρόσθεση

Η πρόσθεση είναι η πιο φυσική πράξη: **συγκεντρώνουμε** ποσότητες. Αν έχεις 25 € και η γιαγιά σου δώσει 15 €, τώρα έχεις $25 + 15 = 40$ €.

Οι αριθμοί που προσθέτουμε λέγονται **προσθετέοι** και το αποτέλεσμα **άθροισμα**.



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ

- **Αντιμεταθετική:** η σειρά των προσθετέων δεν αλλάζει το άθροισμα: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
- **Προσεταιριστική:** μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τους προσθετέους όπως θέλουμε: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
- **Ουδέτερο στοιχείο το 0:** αν προσθέσουμε 0, ο αριθμός δεν αλλάζει: $\alpha + 0 = \alpha$.

Χάρη σε αυτές τις ιδιότητες μπορούμε να αλλάζουμε σειρά και να ομαδοποιούμε τους προσθετέους ώστε να σχηματίζουμε **«στρογγυλά» αθροίσματα** (δεκάδες, εκατοντάδες...) και να κάνουμε τους λογαριασμούς **με το μυαλό**.



Παράδειγμα 1

Να υπολογίσεις με τον πιο σύντομο τρόπο: $47 + 38 + 53 + 62 + 100$.

ΛΥΣΗ

Ψάχνουμε ζευγάρια που δίνουν στρογγυλά αθροίσματα: $47 + 53 = 100$ και $38 + 62 = 100$.

$$47 + 38 + 53 + 62 + 100 = (47 + 53) + (38 + 62) + 100 = 100 + 100 + 100 = 300$$

2 Η αφαίρεση

Η αφαίρεση απαντά σε ερωτήσεις όπως «πόσα μένουν;», «πόσο λιγότερα;», «πόσα λείπουν;». Στην αφαίρεση $\mu - \alpha = \delta$ ο μ λέγεται **μειωτέος**, ο α **αφαιρετέος** και το αποτέλεσμα δ **διαφορά**.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αφαίρεση του φυσικού α από τον φυσικό μ (με $\mu \geq \alpha$) λέγεται η πράξη με την οποία βρίσκουμε τον φυσικό δ που, αν τον **προσθέσουμε** στον α , δίνει μ :

$$\mu - \alpha = \delta \iff \alpha + \delta = \mu$$

Δηλαδή η αφαίρεση είναι η **αντίστροφη** πράξη της πρόσθεσης. Γι' αυτό την **ελέγχουμε** με πρόσθεση: διαφορά + αφαιρετέος = μειωτέος.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Στους φυσικούς αριθμούς η αφαίρεση $\mu - \alpha$ γίνεται **μόνο όταν** $\mu \geq \alpha$. Το $5 - 8$ δεν έχει αποτέλεσμα φυσικό αριθμό (θα το «λύσουμε» στο Κεφάλαιο 7 με τους αρνητικούς). Επίσης η αφαίρεση **δεν** έχει αντιμεταθετική ιδιότητα: $10 - 4 = 6$, ενώ το $4 - 10$ δεν γίνεται στους φυσικούς.



Παράδειγμα 2

Να γίνει η αφαίρεση $7.205 - 3.689$ και να ελεγχθεί το αποτέλεσμα.

ΛΥΣΗ

Κάνουμε την πράξη κάθετα, «δανειζόμαστε» όπου χρειάζεται: $7.205 - 3.689 = 3.516$.

Έλεγχος: $3.516 + 3.689 = 7.205$ ✓. Αφού η διαφορά συν τον αφαιρετέο δίνει τον μειωτέο, η πράξη είναι σωστή.



Παράδειγμα 3

Ο Νίκος γεννήθηκε το 2013 και ο παππούς του το 1948. Πόσα χρόνια μεγαλύτερος είναι ο παππούς; Πόσων χρόνων θα είναι ο παππούς όταν ο Νίκος θα είναι 30 ετών;

ΛΥΣΗ

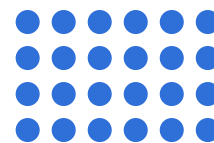
Διαφορά ηλικίας: $2013 - 1948 = 65$ χρόνια. Η διαφορά ηλικίας **δεν αλλάζει** με τα χρόνια, άρα όταν ο Νίκος θα είναι 30, ο παππούς θα είναι $30 + 65 = 95$ ετών.

3 Ο πολλαπλασιασμός

Ο πολλαπλασιασμός είναι ένας σύντομος τρόπος να γράφουμε **επαναλαμβανόμενη πρόσθεση** του ίδιου αριθμού:

$$\underbrace{6 + 6 + 6 + 6}_{4 \text{ φορές}} = 4 \cdot 6 = 24$$

Οι αριθμοί που πολλαπλασιάζουμε λέγονται **παράγοντες** και το αποτέλεσμα **γινόμενο**. Για τον πολλαπλασιασμό χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\cdot$ ή το $\times$.



Τέσσερις σειρές με έξι
τελείες: $4 \cdot 6 = 24$ τελείες

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

- **Αντιμεταθετική:** $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
- **Προσεταιριστική:** $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
- **Ουδέτερο στοιχείο το 1:** $\alpha \cdot 1 = \alpha$
- **Απορροφητικό στοιχείο το 0:** $\alpha \cdot 0 = 0$ — αν ένας παράγοντας είναι 0, όλο το γινόμενο είναι 0

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΜΕ 10, 100, 1.000, ...

Για να πολλαπλασιάσουμε έναν φυσικό με 10, 100, 1.000, ... **γράφουμε στο τέλος του** τόσα μηδενικά όσα έχει ο 10, 100, 1.000, ...

$$37 \cdot 10 = 370, \quad 37 \cdot 100 = 3.700, \quad 37 \cdot 1.000 = 37.000$$



Παράδειγμα 4

Να υπολογίσεις νοερά: **α)** $25 \cdot 37 \cdot 4$, **β)** $5 \cdot 19 \cdot 20$, **γ)** $125 \cdot 8 \cdot 13$.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιούμε αντιμεταθετική και προσεταιριστική ιδιότητα για να φτιάξουμε γινόμενα 10, 100, 1.000:

$$\text{α)} \quad 25 \cdot 37 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 37 = 100 \cdot 37 = 3.700$$

$$\text{β)} \quad 5 \cdot 19 \cdot 20 = (5 \cdot 20) \cdot 19 = 100 \cdot 19 = 1.900$$

$$\text{γ)} \quad 125 \cdot 8 \cdot 13 = (125 \cdot 8) \cdot 13 = 1.000 \cdot 13 = 13.000$$



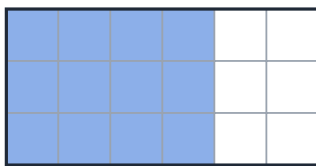
ΚΟΛΠΟ ΤΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΗ

Αξίζει να θυμάσαι τα «μαγικά ζευγάρια»: $2 \cdot 5 = 10$, $4 \cdot 25 = 100$, $20 \cdot 5 = 100$, $8 \cdot 125 = 1.000$, $2 \cdot 500 = 1.000$. Με αυτά πολλοί δύσκολοι πολλαπλασιασμοί γίνονται παιχνιδάκι!

4 Η επιμεριστική ιδιότητα

Φαντάσου ότι αγοράζεις 3 σάντουιτς των 4 € και 3 χυμούς των 2 €. Μπορείς να υπολογίσεις το κόστος με δύο τρόπους: είτε $3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 12 + 6 = 18$ €, είτε σκεπτόμενος ότι αγοράζεις 3 «μενού» των 4 +

$2 = 6 \text{ €} : 3 \cdot (4 + 2) = 3 \cdot 6 = 18 \text{ €}$. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο! Αυτό εκφράζει η **επιμεριστική ιδιότητα**.



Το ορθογώνιο $3 \times (4 + 2)$ αποτελείται από ένα κομμάτι 3×4 (χρωματιστό) και ένα 3×2 (λευκό).

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

$$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$

Ο πολλαπλασιασμός **επιμερίζεται** («μοιράζεται») σε κάθε όρο της παρένθεσης. Όταν τη διαβάζουμε από δεξιά προς τα αριστερά, λέμε ότι **βγάζουμε κοινό παράγοντα**: $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta + \gamma)$.



Παράδειγμα 5

Να υπολογίσεις με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας: **α)** $7 \cdot 103$, **β)** $15 \cdot 98$, **γ)** $46 \cdot 27 + 46 \cdot 73$, **δ)** $38 \cdot 112 - 38 \cdot 12$.

ΛΥΣΗ

α) $7 \cdot 103 = 7 \cdot (100 + 3) = 700 + 21 = 721$

β) $15 \cdot 98 = 15 \cdot (100 - 2) = 1.500 - 30 = 1.470$

γ) Κοινός παράγοντας το 46: $46 \cdot 27 + 46 \cdot 73 = 46 \cdot (27 + 73) = 46 \cdot 100 = 4.600$

δ) Κοινός παράγοντας το 38: $38 \cdot 112 - 38 \cdot 12 = 38 \cdot (112 - 12) = 38 \cdot 100 = 3.800$

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

$$5 \cdot (8 + 2) = 5 \cdot 8 + 2 = 42$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$5 \cdot (8 + 2) = 5 \cdot 8 + 5 \cdot 2 = 40 + 10 = 50$$

Ο αριθμός έξω από την παρένθεση πολλαπλασιάζεται με **κάθε** όρο της παρένθεσης, όχι μόνο με τον πρώτο. Έλεγχος: $5 \cdot 10 = 50$.

5 Αριθμητικές παραστάσεις – Προτεραιότητα πράξεων

Μια σειρά αριθμών που συνδέονται με σύμβολα πράξεων, όπως $8 + 2 \cdot 5$, λέγεται **αριθμητική παράσταση**. Αν κάνεις πρώτα την πρόσθεση βγαίνει 50, ενώ αν κάνεις πρώτα τον πολλαπλασιασμό βγαίνει 18. Για να βγάζουν όλοι **το ίδιο** αποτέλεσμα, οι μαθηματικοί συμφώνησαν μια **σειρά προτεραιότητας**.

Η ΣΕΙΡΑ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

- 1 Πρώτα γίνονται οι πράξεις **μέσα στις παρενθέσεις** (αν υπάρχουν πολλές, ξεκινάμε από την πιο «εσωτερική»).
- 2 Μετά υπολογίζονται οι **δυνάμεις** (θα τις δούμε στο επόμενο μάθημα).
- 3 Μετά γίνονται οι **πολλαπλασιασμοί** και οι **διαιρέσεις**, από αριστερά προς τα δεξιά.
- 4 Τέλος γίνονται οι **προσθέσεις** και οι **αφαιρέσεις**, από αριστερά προς τα δεξιά.

Άρα $8 + 2 \cdot 5 = 8 + 10 = 18$. Αν θέλουμε να γίνει πρώτα η πρόσθεση, **πρέπει** να βάλουμε παρένθεση: $(8 + 2) \cdot 5 = 10 \cdot 5 = 50$.



Παράδειγμα 6

Να υπολογίσεις τις παραστάσεις:

α) $40 - 3 \cdot 8 + 6$ β) $(40 - 3) \cdot 8 + 6$ γ) $5 \cdot [36 - 2 \cdot (4 + 9)]$

ΛΥΣΗ

α) Πρώτα ο πολλαπλασιασμός, μετά από αριστερά προς τα δεξιά: $40 - 3 \cdot 8 + 6 = 40 - 24 + 6 = 16 + 6 = 22$

β) Πρώτα η παρένθεση: $(40 - 3) \cdot 8 + 6 = 37 \cdot 8 + 6 = 296 + 6 = 302$

γ) Από μέσα προς τα έξω: $5 \cdot [36 - 2 \cdot 13] = 5 \cdot [36 - 26] = 5 \cdot 10 = 50$



ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

$$20 - 5 + 3 = 20 - 8 = 12$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$20 - 5 + 3 = 15 + 3 = 18$$

Προσθέσεις και αφαιρέσεις έχουν **την ίδια** προτεραιότητα· γίνονται **με τη σειρά που εμφανίζονται, από αριστερά προς τα δεξιά**. Η πρόσθεση δεν «προηγείται» της αφαίρεσης!



Παράδειγμα 7

Ένας κινηματογράφος έχει 18 σειρές με 24 θέσεις και 6 σειρές με 30 θέσεις. Σε μια προβολή έμειναν άδειες 57 θέσεις. Πόσοι θεατές παρακολούθησαν την ταινία; Να γράψεις **μία** αριθμητική παράσταση.

ΛΥΣΗ

Συνολικές θέσεις μείον άδειες:

$$18 \cdot 24 + 6 \cdot 30 - 57 = 432 + 180 - 57 = 612 - 57 = 555 \text{ θεατές.}$$



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για τις ιδιότητες των πράξεων και την προτεραιότητα, καθώς και παιχνίδια γνώσεων για εξάσκηση στους νοερούς υπολογισμούς.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 1.2

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Να υπολογίσεις με τον πιο σύντομο τρόπο:

α) $136 + 58 + 64 + 42$

β) $999 + 457 + 1$

γ) $4 \cdot 17 \cdot 25$

δ) $2 \cdot 35 \cdot 50$

ε) $8 \cdot 9 \cdot 125$

ζ) $50 \cdot 13 \cdot 20 \cdot 0$

2 ●●● Να κάνεις τις αφαιρέσεις και να τις ελέγξεις με πρόσθεση: α) $5.000 - 2.736$, β) $80.403 - 19.587$.

3 ●●● Να υπολογίσεις: α) $83 \cdot 100$, β) $460 \cdot 1.000$, γ) $12 \cdot 10 \cdot 100$, δ) $70 \cdot 300$.

4 ●●● Με την επιμεριστική ιδιότητα να υπολογίσεις: α) $9 \cdot 51$, β) $12 \cdot 99$, γ) $25 \cdot 104$, δ) $64 \cdot 38 + 64 \cdot 62$, ε) $17 \cdot 205 - 17 \cdot 5$.

5 ●●● Να υπολογίσεις τις παραστάσεις:

α) $15 + 5 \cdot 4$

β) $(15 + 5) \cdot 4$

γ) $60 - 4 \cdot 9 - 12$

δ) $60 - 4 \cdot (9 - 6)$

ε) $7 \cdot 8 - 6 \cdot 5 + 3$

ζ) $100 - [3 \cdot (17 - 9) + 6]$

6 ●●● Να βάλεις παρενθέσεις ώστε να ισχύουν οι ισότητες: α) $3 + 4 \cdot 5 = 35$, β) $20 - 8 - 3 = 15$, γ) $2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 = 60$.

7 ●●● Μια οικογένεια πληρώνει 65 € τον μήνα για ρεύμα, 28 € για νερό και 42 € για τηλέφωνο. Πόσα πληρώνει για αυτούς τους λογαριασμούς σε έναν χρόνο; Να το υπολογίσεις με δύο τρόπους.

8 ●●● Ένας έμπορος αγόρασε 35 κιβώτια με 24 μπουκάλια το καθένα. Έσπασαν 17 μπουκάλια και τα υπόλοιπα τα πούλησε προς 2 € το ένα. Πόσα χρήματα εισέπραξε; Να γράψεις μία αριθμητική παράσταση.

9 ●●● Να βρεις τον αριθμό που λείπει: α) $___ + 378 = 1.000$, β) $2.500 - ___ = 1.725$, γ) $___ - 450 = 1.550$.

10 ●●● Να εξηγήσεις γιατί $37 \cdot 45 + 37 \cdot 55 = 63 \cdot 45 + 63 \cdot 55 - 2.600$ χωρίς να κάνεις όλους τους πολλαπλασιασμούς.

- 11** ●●● Ο Γιάννης έχει 3 φορές περισσότερα χρήματα από την Ελένη, η οποία έχει 45 € λιγότερα από την Άννα. Αν η Άννα έχει 120 €, πόσα χρήματα έχουν και οι τρεις μαζί;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 1.3

Δυνάμεις φυσικών αριθμών

1

ΦΥΣΙΚΟΙ

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τι είναι **δύναμη**, ποια είναι η **βάση** και ποιος ο **εκθέτης**
- ✓ τα **τετράγωνα** και τους **κύβους** και γιατί λέγονται έτσι
- ✓ τις **δυνάμεις του 10** και πώς γράφουμε έναν αριθμό με αυτές
- ✓ πώς μπαίνουν οι δυνάμεις στην **προτεραιότητα των πράξεων**

1 Η έννοια της δύναμης

Θυμήσου ότι ο πολλαπλασιασμός είναι συντομογραφία της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης. Με τον ίδιο τρόπο η **δύναμη** είναι συντομογραφία του **επαναλαμβανόμενου πολλαπλασιασμού**. Αντί να γράφουμε $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, γράφουμε απλά 3^4 .

ΟΡΙΣΜΟΣ

Το γινόμενο ν ίσων παραγόντων α λέγεται **δύναμη** του α και συμβολίζεται α^ν :

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

Ο αριθμός α λέγεται **βάση** και δείχνει **ποιον** αριθμό πολλαπλασιάζουμε. Ο ν λέγεται **εκθέτης** και δείχνει **πόσες φορές** τον γράφουμε ως παράγοντα. Το α^ν διαβάζεται «άλφα στη νι» ή «νιοστή δύναμη του άλφα».

Για παράδειγμα: $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ (βάση 2, εκθέτης 5) και $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

- Κάθε αριθμός «στην πρώτη» είναι ο ίδιος ο αριθμός: $\alpha^1 = \alpha$, π.χ. $7^1 = 7$.
- Το 1 σε οποιαδήποτε δύναμη δίνει 1: $1^\nu = 1$, π.χ. $1^{100} = 1$.
- Το 0 σε οποιαδήποτε δύναμη (με εκθέτη $\nu \geq 1$) δίνει 0: $0^\nu = 0$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

$$5^3 = 5 \cdot 3 = 15$$

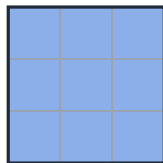
✓ ΣΩΣΤΟ

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

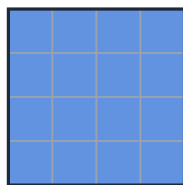
Ο εκθέτης **δεν** είναι παράγοντας! Δείχνει **πόσες φορές** γράφουμε τη βάση. Το $5 \cdot 3$ είναι $5 + 5 + 5$, ενώ το 5^3 είναι $5 \cdot 5 \cdot 5$. Είναι το πιο συνηθισμένο λάθος στις δυνάμεις — πρόσεξέ το!

2 Τετράγωνα και κύβοι

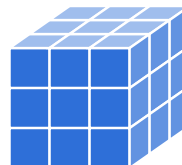
Δύο δυνάμεις έχουν ειδικά ονόματα που προέρχονται από τη **Γεωμετρία**.



$$3^2 = 9 \text{ τετραγωνάκια}$$



$$4^2 = 16 \text{ τετραγωνάκια}$$



$$3^3 = 27 \text{ κυβάκια}$$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΚΑΙ ΚΥΒΟΣ

- Η δεύτερη δύναμη α^2 λέγεται **τετράγωνο** του α («άλφα στο τετράγωνο»), γιατί δίνει το εμβαδόν ενός τετραγώνου με πλευρά α .
- Η τρίτη δύναμη α^3 λέγεται **κύβος** του α («άλφα στον κύβο»), γιατί δίνει τον όγκο ενός κύβου με ακμή α .

α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20
α^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	225	400
α^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1.000	1.331	1.728	3.375	8.000

Πίνακας τετραγώνων και κύβων. Αξίζει να μάθεις απ' έξω τουλάχιστον τα τετράγωνα έως το 12^2 και τους κύβους έως το 5^3 .



Παράδειγμα 1

Να υπολογίσεις: **α)** 2^6 , **β)** 3^4 , **γ)** 11^2 , **δ)** 4^3 , **ε)** 1^{2026} , **στ)** 2026^1 .

ΛΥΣΗ

α) $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$, **β)** $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$, **γ)** $11^2 = 121$, **δ)** $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$, **ε)** 1, **στ)** 2026.

Παρατήρησε ότι $2^6 = 4^3 = 64$: διαφορετικές δυνάμεις μπορεί να έχουν ίδιο αποτέλεσμα.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Μη μπερδεύεις το 2^3 με το 3^2 : $2^3 = 8$ ενώ $3^2 = 9$. Βάση και εκθέτης **δεν** αλλάζουν θέση. Παρόμοια $2^5 = 32$ αλλά $5^2 = 25$.

3 Δυνάμεις του 10

Οι δυνάμεις του 10 είναι οι πιο «φιλικές» δυνάμεις: ο εκθέτης δείχνει **πόσα μηδενικά** έχει ο αριθμός.

10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^9
10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000 (εκατομμύριο)	1.000.000.000 (δισεκατομμύριο)

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΜΕ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΟΥ 10

Το ανάπτυγμα ενός αριθμού μπορεί να γραφτεί πιο σύντομα με δυνάμεις του 10:

$$4.075 = 4 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5 = 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10 + 5$$

1

ΦΥΣΙΚΟΙ



Παράδειγμα 2

α) Να γράφεις τον αριθμό 60.308 ως ανάπτυγμα με δυνάμεις του 10. β) Ποιος αριθμός είναι ο $2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 1$;

ΛΥΣΗ

α) $60.308 = 6 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 8 = 6 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 + 8$

β) $2 \cdot 100.000 + 3 \cdot 1.000 + 9 \cdot 100 + 1 = 200.000 + 3.000 + 900 + 1 = 203.901$

4 Δυνάμεις και προτεραιότητα πράξεων

Τώρα μπορούμε να συμπληρώσουμε τη σειρά των πράξεων που είδαμε στο Μάθημα 1.2:

ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ (ΠΛΗΡΗΣ)

- 1 Παρενθέσεις
- 2 Δυνάμεις
- 3 Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις (από αριστερά προς τα δεξιά)
- 4 Προσθέσεις και αφαιρέσεις (από αριστερά προς τα δεξιά)



Παράδειγμα 3

Να υπολογίσεις: α) $3 \cdot 2^4$, β) $(3 \cdot 2)^4$, γ) $5^2 + 4 \cdot 3^2 - 10^2 : 4$, δ) $(7 - 2)^3 - (10 - 3^2)^5$.

ΛΥΣΗ

α) Πρώτα η δύναμη: $3 \cdot 16 = 48$.

β) Πρώτα η παρένθεση: $6^4 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1.296$.

γ) Δυνάμεις: $25 + 4 \cdot 9 - 100 : 4$. Πολλ./διαιρ.: $25 + 36 - 25$. Τέλος: 36.

δ) Παρενθέσεις (με τη δύναμη μέσα πρώτα): $(5)^3 - (10 - 9)^5 = 125 - 1^5 = 125 - 1 = 124$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

$$2 \cdot 3^2 = 6^2 = 36$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$

Η δύναμη αφορά **μόνο** τον αριθμό στον οποίο είναι «κολλημένος» ο εκθέτης, εδώ το 3. Αν θέλαμε το $2 \cdot 3$ να υψωθεί στο τετράγωνο θα γράφαμε $(2 \cdot 3)^2 = 36$.

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

$$(2 + 3)^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$$

Η δύναμη **δεν** «μοιράζεται» σε άθροισμα. Κάνουμε πρώτα την πράξη μέσα στην παρένθεση και μετά υψώνουμε σε δύναμη.



ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ένας θρύλος λέει ότι ο εφευρέτης του σκακιού ζήτησε ως αμοιβή 1 σπυρί σιτάρι για το πρώτο τετράγωνο της σκακιέρας, 2 για το δεύτερο, 4 για το τρίτο, 8 για το τέταρτο κ.ο.κ., διπλάσια κάθε φορά. Στο 64ο τετράγωνο αντιστοιχούν 2^{63} σπυριά — ένας αριθμός με 19 ψηφία, περισσότερο σιτάρι απ' όσο έχει παραχθεί σε όλη την ιστορία της ανθρωπότητας!



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com υπάρχει βίντεο-μάθημα για τις δυνάμεις με πολλά επιπλέον παραδείγματα, καθώς και κουίζ για να εξασκηθείς στην προτεραιότητα των πράξεων.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 1.3

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Να γράψεις ως δύναμη: **α)** $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$, **β)** $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, **γ)** $x \cdot x \cdot x$, **δ)** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$.

2 ●●● Να υπολογίσεις:

α) 2^4

β) 5^3

γ) 3^5

δ) 13^2

ε) 10^7

ζ) 0^9

η) 1^{50}

θ) 6^2 και 2^6

3 ●●● Σωστό ή Λάθος; **α)** $3^2 = 6$, **β)** $2^3 = 3^2$, **γ)** $10^4 = 10.000$, **δ)** $4^2 = 2^4$, **ε)** $1^5 = 5$.

4 ●●● Να γράψεις τους αριθμούς με ανάπτυγμα σε δυνάμεις του 10: **α)** 5.302, **β)** 70.040, **γ)** 1.008.000.

5 ●●● Να υπολογίσεις τις παραστάσεις:

α) $4 \cdot 5^2$

β) $(4 \cdot 5)^2$

γ) $2^3 + 3^2$

δ) $(2 + 3)^3$

ε) $10^2 - 9^2$

ζ) $6^2 : 4 + 2^5$

6 ●●● Να υπολογίσεις: **α)** $3 \cdot 5^2 - 2 \cdot 4^2 + 7$, **β)** $(15 - 3 \cdot 4)^4 + 2 \cdot 10^3$, **γ)** $[2^3 + (9 - 7)^2]^2 - 100$.

7 ●●● Να βρεις τον φυσικό x σε κάθε περίπτωση: **α)** $x^2 = 49$, **β)** $2^x = 32$, **γ)** $x^3 = 1.000$, **δ)** $5^x = 625$.

- 8 ●●● Ένα τετράγωνο οικόπεδο έχει πλευρά 25 m. Ένα κυβικό κουτί έχει ακμή 6 cm. Να βρεις το εμβαδόν του οικοπέδου και τον όγκο του κουτιού.
- 9 ●●● Να συγκρίνεις χωρίς να κάνεις πολλές πράξεις: **α)** 2^{10} και 10^3 , **β)** 3^4 και 4^3 , **γ)** 5^3 και 2^7 .
- 10 ●●● Να υπολογίσεις τα 1^2 , $1^2 + 3$, ... Πιο συγκεκριμένα: 1 , $1 + 3$, $1 + 3 + 5$, $1 + 3 + 5 + 7$, $1 + 3 + 5 + 7 + 9$. Τι παρατηρείς; Χωρίς να προσθέσεις, πόσο είναι το άθροισμα των 10 πρώτων περιττών;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 1.4

Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα

1

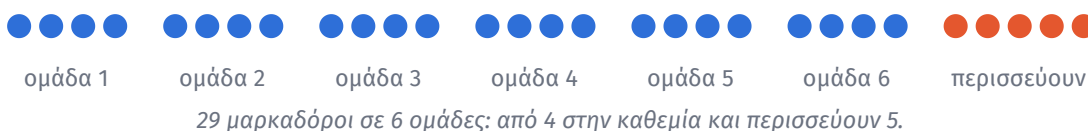
ΦΥΣΙΚΟΙ

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τους όρους της **διαίρεσης** και την **ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης**
- ✓ πότε μια διαίρεση είναι **τέλεια** και πότε **ατελής**
- ✓ τι είναι τα **πολλαπλάσια** και οι **διαιρέτες** ενός αριθμού
- ✓ να λύνεις προβλήματα «μοιρασιάς» και «ομαδοποίησης»

1 Η διαίρεση ως μοιρασιά

Ένας δάσκαλος έχει 29 μαρκαδόρους και θέλει να τους μοιράσει **ισομερώς** σε 6 ομάδες. Κάθε ομάδα θα πάρει 4 μαρκαδόρους (αφού $6 \cdot 4 = 24$) και θα **περισσέψουν** 5. Δεν μπορεί να δώσει 5 στην κάθε ομάδα, γιατί θα χρειαζόταν 30. Αυτή η «μοιρασιά» είναι η **Ευκλείδεια διαίρεση**.



ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Όταν διαιρούμε έναν φυσικό Δ (**διαιρετέος**) με έναν φυσικό $\delta \neq 0$ (**διαιρέτης**), βρίσκουμε δύο φυσικούς: το **πηλίκο** π και το **υπόλοιπο** v , ώστε:

$$\Delta = \delta \cdot \pi + v \quad \text{με} \quad v < \delta$$

Η ισότητα αυτή λέγεται **ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης**. Στο παράδειγμά μας: $29 = 6 \cdot 4 + 5$, με $5 < 6$.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Το υπόλοιπο είναι **πάντα μικρότερο από τον διαιρέτη**. Αν σου «βγει» υπόλοιπο ίσο ή μεγαλύτερο από τον διαιρέτη, σημαίνει ότι μπορείς να δώσεις ακόμη ένα σε κάθε ομάδα — άρα το πηλίκο είναι λάθος. Π.χ. το $29 = 6 \cdot 3 + 11$ είναι αληθής ισότητα, αλλά **δεν** είναι Ευκλείδεια διαίρεση, γιατί $11 > 6$.

ΤΕΛΕΙΑ ΚΑΙ ΑΤΕΛΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

- Αν $v = 0$, η διαίρεση λέγεται **τέλεια**: $\Delta = \delta \cdot \pi$. Τότε γράφουμε $\Delta : \delta = \pi$. Π.χ. $42 : 6 = 7$, γιατί $42 = 6 \cdot 7$.
- Αν $v \neq 0$, η διαίρεση λέγεται **ατελής**.

**Παράδειγμα 1**

Να κάνεις τη διαίρεση $1.000 : 23$ και να γράψεις την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

ΛΥΣΗ

Με την κάθετη διαίρεση βρίσκουμε πηλίκο $\pi = 43$ και υπόλοιπο $\nu = 11$.

Ταυτότητα: $1.000 = 23 \cdot 43 + 11$, και πράγματι $11 < 23$. Έλεγχος: $23 \cdot 43 = 989$ και $989 + 11 = 1.000 \checkmark$.

**Παράδειγμα 2**

Σε μια διαίρεση ο διαιρέτης είναι 8, το πηλίκο 15 και το υπόλοιπο 6. Ποιος είναι ο διαιρετέος;

ΛΥΣΗ

Από την ταυτότητα: $\Delta = \delta \cdot \pi + \nu = 8 \cdot 15 + 6 = 120 + 6 = 126$.

**Παράδειγμα 3**

Ποια είναι όλα τα δυνατά υπόλοιπα όταν διαιρούμε έναν φυσικό με το 5;

ΛΥΣΗ

Αφού το υπόλοιπο είναι μικρότερο από τον διαιρέτη: $\nu = 0, 1, 2, 3$ ή 4 . Δηλαδή 5 δυνατά υπόλοιπα.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

- $\alpha : 1 = \alpha$ και $\alpha : \alpha = 1$ (για $\alpha \neq 0$), π.χ. $37 : 1 = 37$, $37 : 37 = 1$.
- $0 : \alpha = 0$ (για $\alpha \neq 0$): αν δεν έχουμε τίποτα να μοιράσουμε, ο καθένας παίρνει 0.
- **Η διαίρεση με το 0 ΔΕΝ ορίζεται!** Το $7 : 0$ ή το $0 : 0$ δεν έχει νόημα.

**ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ****× ΛΑΘΟΣ**

$$9 : 0 = 0 \text{ ή } 9 : 0 = 9$$

✓ ΣΩΣΤΟ

Η διαίρεση $9 : 0$ **δεν ορίζεται**

Αν υπήρχε αριθμός π με $9 : 0 = \pi$, θα έπρεπε $0 \cdot \pi = 9$. Όμως κάθε αριθμός επί 0 δίνει 0, ποτέ 9. Άρα κανένας αριθμός δεν «ταιριάζει» και η διαίρεση με το μηδέν είναι αδύνατη.



Παράδειγμα 4

Σε ένα σχολείο 173 μαθητές πάνε εκδρομή με λεωφορεία των 40 θέσεων. Πόσα λεωφορεία χρειάζονται;

ΛΥΣΗ

$173 = 40 \cdot 4 + 13$. Τα 4 λεωφορεία παίρνουν 160 μαθητές, αλλά μένουν 13 μαθητές που **πρέπει** κι αυτοί να πάνε! Άρα χρειάζονται $4 + 1 = 5$ λεωφορεία.

Σχόλιο: σε τέτοια προβλήματα **σκεφτόμαστε** τι σημαίνει το υπόλοιπο· δεν «πετάμε» απλώς το υπόλοιπο.

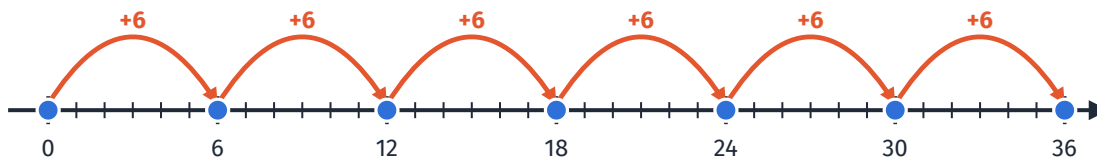
2 Πολλαπλάσια και διαιρέτες

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ

Πολλαπλάσια ενός φυσικού α είναι οι αριθμοί που βρίσκουμε όταν τον πολλαπλασιάζουμε με $0, 1, 2, 3, \dots$:

Πολλαπλάσια του 6 : $0, 6, 12, 18, 24, 30, \dots$

Τα πολλαπλάσια ενός αριθμού (εκτός του 0) είναι **άπειρα**. Το 0 είναι πολλαπλάσιο κάθε αριθμού και κάθε αριθμός είναι πολλαπλάσιο του εαυτού του.



Τα πολλαπλάσια του 6 «πηδάνε» πάνω στην ευθεία με βήμα 6.

ΔΙΑΙΡΕΤΕΣ

Αν η διαίρεση $\alpha : \beta$ είναι **τέλεια**, τότε λέμε ότι:

- ο β **διαιρεί** τον α ή ότι ο β είναι **διαιρέτης** του α ,
- ο α **διαιρείται** με τον β ή ότι ο α είναι **πολλαπλάσιο** του β .

Π.χ. αφού $36 = 4 \cdot 9$: ο 4 και ο 9 είναι διαιρέτες του 36 και ο 36 είναι πολλαπλάσιο του 4 και του 9.

ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΟΛΟΥΣ ΤΟΥΣ ΔΙΑΙΡΕΤΕΣ ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ

- 1 Γράφουμε τον αριθμό ως γινόμενο δύο παραγόντων με όλους τους δυνατούς τρόπους, ξεκινώντας από 1·(ο αριθμός).
- 2 Αυξάνουμε τον πρώτο παράγοντα κατά 1 κάθε φορά και ελέγχουμε αν η διαίρεση είναι τέλεια.
- 3 Σταματάμε όταν ο πρώτος παράγοντας «συναντήσει» ή ξεπεράσει τον δεύτερο.



Παράδειγμα 5

Να βρεις όλους τους διαιρέτες του 36.

ΛΥΣΗ

$36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$. Το 5 δεν διαιρεί το 36. Μετά το $6 \cdot 6$ σταματάμε (τα επόμενα ζευγάρια θα ήταν τα ίδια ανάποδα).

Διαιρέτες του 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 (εννέα διαιρέτες).



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Το 1 είναι διαιρέτης **κάθε** αριθμού, και κάθε αριθμός (εκτός του 0) είναι διαιρέτης του **εαυτού του**. Οι διαιρέτες ενός αριθμού $a \neq 0$ είναι **πεπερασμένοι** (λίγοι) και δεν ξεπερνούν τον a , ενώ τα πολλαπλάσιά του είναι **άπειρα**.



ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Η ταυτότητα της διαίρεσης φέρει το όνομα του **Ευκλείδη**, του μεγάλου Έλληνα μαθηματικού που έζησε στην Αλεξάνδρεια γύρω στο 300 π.Χ. Στο έργο του «Στοιχεία» — ένα από τα πιο πολυδιαβασμένα βιβλία όλων των εποχών — μελέτησε τη διααιρετότητα και περιέγραψε τη μέθοδο για την εύρεση του Μ.Κ.Δ. που χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για την Ευκλείδεια διαίρεση, πολλά λυμένα προβλήματα μοιρασιάς και κουίζ αυτοαξιολόγησης.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 1.4

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να κάνεις τις διαιρέσεις και να γράψεις την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης: **α)** $87 : 7$, **β)** $500 : 12$, **γ)** $2.026 : 25$, **δ)** $96 : 8$.

- 2 ●●● Να συμπληρώσεις τον πίνακα (Δ = διαιρετέος, δ = διαιρέτης, π = πηλίκο, υ = υπόλοιπο):

Δ	δ	π	υ
_____	9	14	5
100	_____	14	2
75	6	_____	_____

- 3 ●●● Ποιες από τις ισότητες εκφράζουν Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρέτη τον πρώτο παράγοντα;
α) $50 = 7 \cdot 7 + 1$, **β)** $50 = 6 \cdot 7 + 8$, **γ)** $50 = 4 \cdot 12 + 2$, **δ)** $50 = 9 \cdot 5 + 5$.

- 4 ●●● Να γράψεις τα πρώτα έξι πολλαπλάσια του 7 και τα πολλαπλάσια του 15 που είναι μικρότερα από 100.

- 5 ●●● Να βρεις όλους τους διαιρέτες των αριθμών: **α)** 24, **β)** 17, **γ)** 50, **δ)** 64.

- 6 ●●● Σωστό ή Λάθος; **α)** Το 0 είναι πολλαπλάσιο του 9. **β)** Το 1 είναι διαιρέτης του 253. **γ)** Το $0 : 7$ δεν ορίζεται. **δ)** Κάθε αριθμός έχει άπειρους διαιρέτες. **ε)** Το υπόλοιπο της διαίρεσης με το 10 είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού.

- 7 ●●● Ένα κουτί χωράει 12 αυγά. Πόσα κουτιά γεμίζουμε με 250 αυγά και πόσα αυγά περισσεύουν; Πόσα αυγά ακόμη χρειάζονται για να γεμίσει και ένα ακόμη κουτί;

- 8 ●●● Σήμερα είναι Τετάρτη. Τι μέρα θα είναι μετά από 100 μέρες;

- 9 ●●● Σε μια διαίρεση ο διαιρέτης είναι 9 και το πηλίκο 11. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο διαιρετέος; Ποια είναι η μεγαλύτερη;

- 10 ●●● Μια σοκολατοποιία έφτιαξε 1.250 σοκολατάκια και τα συσκευάζει σε κουτιά των 24. Κάθε **γεμάτο** κουτί πουλιέται 9 €. Πόσα χρήματα θα εισπράξει αν πουλήσει όλα τα γεμάτα κουτιά;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 1.5

Χαρακτήρες διαιρετότητας – ΜΚΔ – ΕΚΠ –
Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων
παραγόντων

1

ΦΥΣΙΚΟΙ

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τους **χαρακτήρες διαιρετότητας** με 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25
- ✓ τι είναι ο **Μ.Κ.Δ.** και το **Ε.Κ.Π.** δύο ή περισσότερων αριθμών
- ✓ ποιοι είναι οι **πρώτοι** και ποιοι οι **σύνθετοι** αριθμοί
- ✓ να **αναλύεις** έναν αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και να βρίσκεις έτσι Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π.

1 Χαρακτήρες διαιρετότητας

Μπορούμε να ξέρουμε αν ο 73.548 διαιρείται με το 3 **χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση**; Ναι! Υπάρχουν απλοί κανόνες, οι **χαρακτήρες διαιρετότητας**, που κοιτάζουν μόνο τα ψηφία του αριθμού.

Ένας αριθμός διαιρείται με το...	όταν...	Παράδειγμα
10, 100, 1.000	τελειώνει σε ένα, δύο, τρία μηδενικά αντίστοιχα	4.300 με 10 και 100
2	το τελευταίο ψηφίο είναι 0, 2, 4, 6, 8 (άρτιος)	5.738
5	το τελευταίο ψηφίο είναι 0 ή 5	1.235, 860
4	ο αριθμός από τα δύο τελευταία ψηφία διαιρείται με 4 (ή είναι 00)	3.716 (16 : 4 = 4)
25	τα δύο τελευταία ψηφία είναι 00, 25, 50 ή 75	4.175
3	το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με 3	741: $7 + 4 + 1 = 12$
9	το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με 9	5.832: $5 + 8 + 3 + 2 = 18$



Παράδειγμα 1

Να εξετάσεις αν ο αριθμός 73.548 διαιρείται με 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25.

ΛΥΣΗ

- Με 2: τελειώνει σε 8 → **ναι**.
- Με 3: $7 + 3 + 5 + 4 + 8 = 27$, που διαιρείται με 3 → **ναι**.
- Με 4: τα δύο τελευταία ψηφία σχηματίζουν 48 και $48 : 4 = 12$ → **ναι**.
- Με 5 και 10: δεν τελειώνει σε 0 ή 5 → **όχι**.
- Με 9: 27 διαιρείται με 9 → **ναι**.
- Με 25: τελειώνει σε 48 → **όχι**.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Κάθε αριθμός που διαιρείται με το 9 διαιρείται και με το 3 — όμως **όχι** το αντίστροφο: ο 12 διαιρείται με το 3 αλλά όχι με το 9. Ομοίως, όποιος διαιρείται με το 4 διαιρείται και με το 2, αλλά όχι το αντίστροφο (6).



ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

«Ο 134 διαιρείται με το 4 επειδή τελειώνει σε 4»

✓ ΣΩΣΤΟ

Κοιτάμε το 34: $34 : 4$ δεν είναι τέλεια, άρα ο 134 **δεν** διαιρείται με το 4

Ο χαρακτήρας του 4 κοιτάζει τον διψήφιο αριθμό που σχηματίζουν τα **δύο** τελευταία ψηφία, όχι μόνο το τελευταίο. Μη τον μπερδεύεις με τον χαρακτήρα του 2 ή του 5.



Παράδειγμα 2

Να βρεις το ψηφίο α ώστε ο αριθμός $5\alpha 4$ να διαιρείται με το 9. Υπάρχει ψηφίο ώστε να διαιρείται με το 3 αλλά όχι με το 9;

ΛΥΣΗ

Άθροισμα ψηφίων: $5 + \alpha + 4 = 9 + \alpha$. Για να διαιρείται με 9 πρέπει το $9 + \alpha$ να είναι 9 ή 18, δηλαδή $\alpha = 0$ ή $\alpha = 9$: οι αριθμοί 504 και 594.

Για το 3: πρέπει το $9 + \alpha$ να διαιρείται με 3, δηλαδή $\alpha = 0, 3, 6, 9$. Με $\alpha = 3$ ή $\alpha = 6$ (αριθμοί 534, 564) ο αριθμός διαιρείται με το 3 αλλά όχι με το 9.

2 Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Ένας φυσικός μεγαλύτερος του 1 λέγεται **πρώτος** αν έχει **μόνο δύο** διαιρέτες: το 1 και τον εαυτό του. Π.χ. 2, 3, 5, 7, 11, 13.
- Ένας φυσικός μεγαλύτερος του 1 που **δεν** είναι πρώτος (έχει δηλαδή και άλλους διαιρέτες) λέγεται **σύνθετος**. Π.χ. 4, 6, 8, 9, 10, 12.
- Οι αριθμοί 0 και 1 **δεν** είναι ούτε πρώτοι ούτε σύνθετοι.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Το «κόσκινο του Ερατοσθένη»: οι 25 πρώτοι αριθμοί μέχρι το 100 είναι χρωματισμένοι.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Το 2 είναι ο **μοναδικός άρτιος πρώτος**. Όλοι οι άλλοι άρτιοι διαιρούνται με το 2, άρα έχουν τουλάχιστον τρεις διαιρέτες και είναι σύνθετοι. Προσοχή όμως: **δεν** είναι όλοι οι περιττοί πρώτοι — π.χ. $9 = 3 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, 21, 25, 27... είναι σύνθετοι!



ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ο **Ερατοσθένης** από την Κυρήνη (3ος αι. π.Χ.), διευθυντής της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας, επινόησε έναν έξυπνο τρόπο να βρίσκει τους πρώτους: γράφεις τους αριθμούς και «κοσκινίζεις» διαγράφοντας τα πολλαπλάσια του 2, του 3, του 5, του 7... Όσοι μένουν είναι πρώτοι. Ο ίδιος υπολόγισε και την περιφέρεια της Γης με εκπληκτική ακρίβεια! Ήδη ο Ευκλείδης είχε αποδείξει ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι **άπειροι**.

3 Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

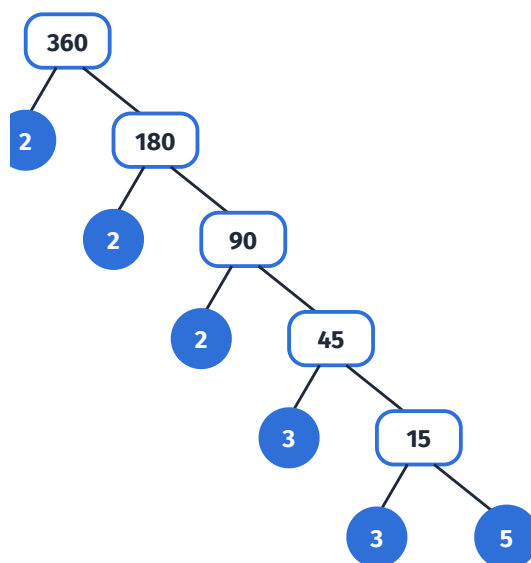
ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Κάθε σύνθετος αριθμός γράφεται ως **γινόμενο πρώτων αριθμών** και μάλιστα με **ένα μόνο τρόπο** (αν δεν λάβουμε υπόψη τη σειρά των παραγόντων). Π.χ. $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Οι πρώτοι είναι σαν τα «τουβλάκια» με τα οποία χτίζονται όλοι οι φυσικοί αριθμοί.

Μέθοδος των διαδοχικών διαιρέσεων. Διαιρούμε τον αριθμό με τον **μικρότερο πρώτο** που τον διαιρεί (2, αλλιώς 3, αλλιώς 5, ...). Συνεχίζουμε με το πηλίκο, μέχρι να βρούμε πηλίκο 1. Οι διαιρέτες που χρησιμοποιήσαμε είναι οι πρώτοι παράγοντες.

Γράφουμε συνήθως τις διαιρέσεις σε δύο στήλες, με μια κάθετη γραμμή:

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	



Το «δέντρο» των πρώτων παραγόντων του 360

Άρα $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.



Παράδειγμα 3

Να αναλύσεις σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς 84, 1.000 και 315.

ΛΥΣΗ

- $84 : 2 = 42, 42 : 2 = 21, 21 : 3 = 7, 7 : 7 = 1 \Rightarrow 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$.
- $1.000 = 10^3 = (2 \cdot 5)^3$, ή με διαιρέσεις: $1.000 \rightarrow 500 \rightarrow 250 \rightarrow 125 \rightarrow 25 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ με διαιρέτες 2, 2, 2, 5, 5, 5 $\Rightarrow 1.000 = 2^3 \cdot 5^3$.
- $315 : 3 = 105, 105 : 3 = 35, 35 : 5 = 7, 7 : 7 = 1 \Rightarrow 315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

4 Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης δύο ή περισσότερων φυσικών (όχι όλων μηδέν) λέγεται ο **μεγαλύτερος** από τους **κοινούς** διαιρέτες τους. Συμβολίζεται $\text{Μ.Κ.Δ.}(\alpha, \beta)$. Αν $\text{Μ.Κ.Δ.}(\alpha, \beta) = 1$, οι αριθμοί λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους**.

**Παράδειγμα 4**

Να βρεις τον Μ.Κ.Δ.(24, 36) γράφοντας τους διαιρέτες των αριθμών.

ΛΥΣΗ

Διαιρέτες του 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Διαιρέτες του 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Κοινοί διαιρέτες: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Ο μεγαλύτερος είναι ο 12, άρα $\text{Μ.Κ.Δ.}(24, 36) = 12$.

Μ.Κ.Δ. ΜΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΠΡΩΤΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

- 1 Αναλύουμε κάθε αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
- 2 Παίρνουμε **μόνο τους κοινούς** πρώτους παράγοντες.
- 3 Τον καθένα με τον **μικρότερο** εκθέτη του.
- 4 Το γινόμενό τους είναι ο Μ.Κ.Δ.

**Παράδειγμα 5**

Να βρεις τον Μ.Κ.Δ.(180, 168).

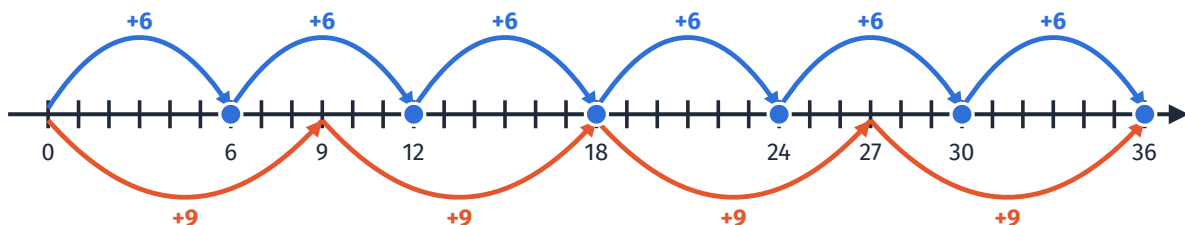
ΛΥΣΗ

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ και $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$. Κοινοί παράγοντες: το 2 (μικρότερος εκθέτης 2) και το 3 (μικρότερος εκθέτης 1).

$$\text{Μ.Κ.Δ.}(180, 168) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

5 Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.)**ΟΡΙΣΜΟΣ**

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων φυσικών (διάφορων του μηδενός) λέγεται το **μικρότερο** από τα **κοινά** πολλαπλάσιά τους, που είναι **διάφορο του μηδενός**. Συμβολίζεται $\text{Ε.Κ.Π.}(\alpha, \beta)$.



Τα πολλαπλάσια του 6 (πάνω) και του 9 (κάτω) «συναντιούνται» πρώτη φορά στο 18: $\text{Ε.Κ.Π.}(6, 9) = 18$.



Παράδειγμα 6

Να βρεις το Ε.Κ.Π.(6, 9) γράφοντας πολλαπλάσια.

ΛΥΣΗ

Πολλαπλάσια του 6: 6, 12, **18**, 24, 30, **36**, ... Πολλαπλάσια του 9: 9, **18**, 27, **36**, ... Τα κοινά πολλαπλάσια είναι 18, 36, 54, ... Το μικρότερο είναι το 18: Ε.Κ.Π.(6, 9) = 18.

Ε.Κ.Π. ΜΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΠΡΩΤΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

- 1 Αναλύουμε κάθε αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
- 2 Παίρνουμε **όλους** τους πρώτους παράγοντες (κοινούς και μη κοινούς).
- 3 Τον καθένα με τον **μεγαλύτερο** εκθέτη του.
- 4 Το γινόμενό τους είναι το Ε.Κ.Π.



Παράδειγμα 7

Να βρεις το Ε.Κ.Π.(180, 168) και το Ε.Κ.Π.(12, 18, 30).

ΛΥΣΗ

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$. Όλοι οι παράγοντες με τον μεγαλύτερο εκθέτη: 2^3 , 3^2 , 5, 7.

$$\text{Ε.Κ.Π.}(180, 168) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 8 \cdot 9 \cdot 35 = 2.520$$

$$12 = 2^2 \cdot 3, 18 = 2 \cdot 3^2, 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow \text{Ε.Κ.Π.} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180.$$



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Ένας γρήγορος έλεγχος: ο **Μ.Κ.Δ.** είναι **μικρότερος ή ίσος** από τον μικρότερο αριθμό, ενώ το **Ε.Κ.Π.** είναι **μεγαλύτερο ή ίσο** από τον μεγαλύτερο αριθμό. Επιπλέον, αν ο ένας αριθμός διαιρεί τον άλλο, π.χ. 8 και 24, τότε Μ.Κ.Δ. = 8 και Ε.Κ.Π. = 24.



ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

$$\text{Μ.Κ.Δ.}(2^3 \cdot 5, 2 \cdot 5^2 \cdot 7) = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$\text{Μ.Κ.Δ.} = 2 \cdot 5 = 10 \text{ και } \text{Ε.Κ.Π.} = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 1.400$$

Μπερδεύονται οι δύο κανόνες. Θυμήσου: **Μ.Κ.Δ.** → **κοινόι** με τον **μικρότερο** εκθέτη, **Ε.Κ.Π.** → **όλοι** με τον **μεγαλύτερο** εκθέτη.

6 Προβλήματα με Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π.

Πώς καταλαβαίνουμε σε ένα πρόβλημα αν χρειαζόμαστε Μ.Κ.Δ. ή Ε.Κ.Π.;

- **Μ.Κ.Δ.:** όταν **μοιράζουμε / κόβουμε** κάτι σε **ίσα κομμάτια** που να είναι **όσο το δυνατόν μεγαλύτερα** (ή σε όσο το δυνατόν λιγότερες ομάδες).
- **Ε.Κ.Π.:** όταν ψάχνουμε τότε **ξανασυμπίπτουν** επαναλαμβανόμενα γεγονότα, ή το **μικρότερο** πλήθος που μπορεί να χωριστεί ακριβώς με διάφορους τρόπους.

**Παράδειγμα 8**

Ένας ανθοπώλης έχει 48 τριαντάφυλλα και 72 γαρύφαλλα. Θέλει να φτιάξει **όσο το δυνατόν περισσότερες** ανθοδέσμες, όλες **ίδιες**, χωρίς να περισσέψει κανένα λουλούδι. Πόσες ανθοδέσμες θα φτιάξει και από τι θα αποτελείται η καθεμία;

ΛΥΣΗ

Το πλήθος των ανθοδεσμών πρέπει να διαιρεί και το 48 και το 72 και να είναι το μεγαλύτερο δυνατό: είναι ο Μ.Κ.Δ.(48, 72). $48 = 2^4 \cdot 3$, $72 = 2^3 \cdot 3^2 \Rightarrow \text{Μ.Κ.Δ.} = 2^3 \cdot 3 = 24$. Θα φτιάξει 24 ανθοδέσμες, καθεμία με $48 : 24 = 2$ τριαντάφυλλα και $72 : 24 = 3$ γαρύφαλλα.

**Παράδειγμα 9**

Από τον σταθμό των λεωφορείων το λεωφορείο Α αναχωρεί κάθε 12 λεπτά, το Β κάθε 18 λεπτά και το Γ κάθε 20 λεπτά. Στις 8:00 το πρωί αναχώρησαν και τα τρία μαζί. Ποια ώρα θα αναχωρήσουν ξανά για πρώτη φορά ταυτόχρονα;

ΛΥΣΗ

Ψάχνουμε το μικρότερο κοινό πολλαπλάσιο των 12, 18, 20: $12 = 2^2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3^2$, $20 = 2^2 \cdot 5 \Rightarrow \text{Ε.Κ.Π.} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$ λεπτά = 3 ώρες. Θα αναχωρήσουν ξανά μαζί στις 11:00.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις ολοκληρωμένο βίντεο για Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π., με επιπλέον προβλήματα και παιχνίδια γνώσεων για τους χαρακτήρες διαιρετότητας.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 1.5

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- Από τους αριθμούς 120, 225, 342, 1.036, 4.500, 7.317 να βρεις ποιοι διαιρούνται με: **α)** 2, **β)** 3, **γ)** 4, **δ)** 5, **ε)** 9, **στ)** 25.
- Να βρεις τα ψηφία που μπορούν να μπουν στη θέση του * ώστε ο αριθμός $2 * 5$ να διαιρείται: **α)** με το 3, **β)** με το 9, **γ)** με το 25.
- Ποιοι από τους αριθμούς 1, 2, 9, 19, 27, 31, 51, 57, 89, 91 είναι πρώτοι;
- Να αναλύσεις σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: **α)** 72, **β)** 150, **γ)** 264, **δ)** 1.125.

- 5 ●●● Να βρεις τον Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. των αριθμών: **α)** 8 και 12, **β)** 15 και 28, **γ)** 36 και 90, **δ)** 14 και 42.
- 6 ●●● Να βρεις τον Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. των: **α)** 60, 84, 108, **β)** $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ και $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$.
- 7 ●●● Ένα ορθογώνιο δάπεδο έχει διαστάσεις 360 cm και 252 cm. Θέλουμε να το στρώσουμε με **τετράγωνα** πλακάκια, όλα ίδια και **όσο το δυνατόν μεγαλύτερα**, χωρίς να κόψουμε κανένα. Τι πλευρά θα έχει κάθε πλακάκι και πόσα πλακάκια χρειάζονται;
- 8 ●●● Οι μαθητές ενός σχολείου μπορούν να χωριστούν σε ομάδες των 8, των 10 ή των 12 μαθητών χωρίς να περισσεύει κανείς. Αν οι μαθητές είναι λιγότεροι από 200, πόσοι είναι;
- 9 ●●● Δύο φάροι αναβοσβήνουν: ο πρώτος κάθε 15 δευτερόλεπτα και ο δεύτερος κάθε 25 δευτερόλεπτα. Μόλις άναψαν μαζί. Μετά από πόσο χρόνο θα ανάψουν ξανά μαζί; Πόσες φορές θα ανάψουν μαζί σε 10 λεπτά (μη μετρώντας την αρχική);
- 10 ●●● Να εξηγήσεις γιατί ο αριθμός $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ διαιρείται με το 12, με το 10 και με το 40, αλλά όχι με το 9.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ανακεφαλαίωση

Όλο το κεφάλαιο σε λίγες σελίδες & επαναληπτικές ασκήσεις

1

ΦΥΣΙΚΟΙ

1 Η θεωρία με μια ματιά

Φυσικοί αριθμοί

- 0, 1, 2, 3, ... — άπειροι, ο μικρότερος είναι το 0
- Άρτιοι: τελειώνουν σε 0, 2, 4, 6, 8 · Περιττοί: σε 1, 3, 5, 7, 9
- Η θέση ενός ψηφίου καθορίζει την αξία του

Στρογγυλοποίηση

- Κοιτάμε **μόνο** το επόμενο ψηφίο δεξιά
- 0–4: μένει ίδιο · 5–9: αυξάνεται κατά 1
- Τα ψηφία δεξιά γίνονται μηδενικά

Ιδιότητες πράξεων

- Αντιμεταθετική, προσεταιριστική (+ και ·)
- $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha \cdot 1 = \alpha$, $\alpha \cdot 0 = 0$
- Επιμεριστική: $\alpha(\beta \pm \gamma) = \alpha\beta \pm \alpha\gamma$

Σειρά πράξεων

- Παρενθέσεις → Δυνάμεις → · και : → + και –
- Ίδια προτεραιότητα: από αριστερά προς τα δεξιά

Δυνάμεις

- $\alpha^\nu = \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha$ (ν παράγοντες)
- $\alpha^1 = \alpha$, $1^\nu = 1$, $10^\nu = 1 \underbrace{0 \dots 0}_\nu$
- α^2 τετράγωνο, α^3 κύβος

Ευκλείδεια διαίρεση

- $\Delta = \delta \cdot \pi + \nu$, με $\nu < \delta$
- Τέλεια όταν $\nu = 0$
- Η διαίρεση με το 0 δεν ορίζεται

Χαρακτήρες διαιρετότητας

- 2: άρτιος · 5: σε 0 ή 5 · 10: σε 0
- 4, 25: τα δύο τελευταία ψηφία
- 3, 9: το άθροισμα των ψηφίων

Μ.Κ.Δ. – Ε.Κ.Π.

- Πρώτος: μόνο διαιρέτες το 1 και ο εαυτός του
- Μ.Κ.Δ.: κοινός παράγοντες, μικρότερος εκθέτης
- Ε.Κ.Π.: όλοι οι παράγοντες, μεγαλύτερος εκθέτης



Η ΓΛΑΥΚΑ ΘΥΜΙΖΕΙ

Τα **τρία πιο συχνά λάθη** του κεφαλαίου: (1) $5^3 = 15$ αντί για 125, (2) να κάνεις πρόσθεση πριν από πολλαπλασιασμό, (3) να μπερδεύεις τον κανόνα του Μ.Κ.Δ. με αυτόν του Ε.Κ.Π. Αν τα αποφύγεις αυτά, έχεις κάνει τη μισή δουλειά!



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Πριν από το διαγώνισμα του κεφαλαίου, κάνε το επαναληπτικό κουίζ στο mathgreece.com και δες τα βίντεο σύνοψης. Είναι δωρεάν!



1

ΦΥΣΙΚΟΙ

★ Επαναληπτικές ασκήσεις

Κεφάλαιο 1

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να στρογγυλοποιήσεις τον 5.996.450 στις: **α)** εκατοντάδες, **β)** χιλιάδες, **γ)** δεκάδες χιλιάδες, **δ)** εκατομμύρια.
- 2 ●●● Να υπολογίσεις: **α)** $2 \cdot 5^3 - 3 \cdot 4^2$, **β)** $(2 \cdot 5)^3 - (3 \cdot 4)^2$, **γ)** $48 : 2^3 + 3 \cdot (11 - 2^3)^2$.
- 3 ●●● Να υπολογίσεις με τον πιο σύντομο τρόπο: **α)** $73 \cdot 46 + 73 \cdot 54$, **β)** $25 \cdot 13 \cdot 8$, **γ)** $999 \cdot 17 + 17$.
- 4 ●●● Ένας αριθμός διαιρούμενος με το 13 δίνει πηλίκο 24 και υπόλοιπο το μεγαλύτερο δυνατό. Ποιος είναι ο αριθμός;
- 5 ●●● Να βρεις τον Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. των 126 και 150.
- 6 ●●● Ένας μανάβης έχει 84 μήλα, 126 πορτοκάλια και 210 μανταρίνια. Θέλει να τα συσκευάσει σε καλάθια, όλα με το ίδιο περιεχόμενο, χρησιμοποιώντας όλα τα φρούτα και όσο το δυνατόν περισσότερα καλάθια. Πόσα καλάθια θα γεμίσει και τι θα περιέχει το καθένα;
- 7 ●●● Τρεις φίλοι επισκέπτονται τη βιβλιοθήκη: ο ένας κάθε 4 μέρες, ο δεύτερος κάθε 6 και ο τρίτος κάθε 10 μέρες. Αν συναντήθηκαν εκεί την 1η Οκτωβρίου, ποια ημερομηνία θα ξανασυναντηθούν;
- 8 ●●● Να βρεις τον μεγαλύτερο τετραψήφιο αριθμό που διαιρείται ταυτόχρονα με 2, 3 και 5.
- 9 ●●● Σωστό ή Λάθος; **α)** Κάθε πρώτος αριθμός είναι περιττός. **β)** Ο Μ.Κ.Δ. δύο διαδοχικών αριθμών είναι 1. **γ)** Το 2^5 είναι μεγαλύτερο από το 5^2 . **δ)** Αν ένας αριθμός διαιρείται με το 3 και με το 4, τότε διαιρείται με το 12. **ε)** $(3 + 4)^2 = 3^2 + 4^2$.
- 10 ●●● Η Μαρία έχει $3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^2 + 7$ βαθμούς σε ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι και ο Πέτρος $3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3$. Ποιος έχει περισσότερους βαθμούς και πόσους περισσότερους;

2

Κεφάλαιο 2
Τα κλάσματα

Δεν είναι όλα τα πράγματα «ολόκληρα»: μισό κιλό τυρί, ένα τέταρτο της ώρας, τα τρία πέμπτα της τάξης. Τα **κλάσματα** μάς επιτρέπουν να μετράμε **μέρη** ενός όλου και να κάνουμε **διαιρέσεις** που δεν «βγαίνουν» ακριβώς στους φυσικούς. Θα μάθουμε να τα **συγκρίνουμε**, να τα **απλοποιούμε** και να κάνουμε με αυτά **όλες τις πράξεις**.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 2.1 Η έννοια του κλάσματος
- 2.2 Ισοδύναμα κλάσματα
- 2.3 Σύγκριση κλασμάτων
- 2.4 Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων
- 2.5 Πολλαπλασιασμός κλασμάτων
- 2.6 Διαίρεση κλασμάτων
- ★ Ανακεφαλαίωση & επαναληπτικές ασκήσεις



Βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις και κουίζ
για όλο το κεφάλαιο, δωρεάν στο
mathgreece.com

 $\frac{1}{2}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Μάθημα 2.1

Η έννοια του κλάσματος

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

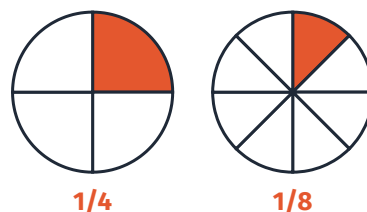
- ✓ τι είναι η **κλασματική μονάδα** και τι το **κλάσμα**
- ✓ τους όρους του κλάσματος: **αριθμητής** και **παρονομαστής**
- ✓ ότι το κλάσμα είναι και **πηλίκο διαίρεσης**: $\frac{\kappa}{\lambda} = \kappa : \lambda$
- ✓ να βρίσκεις το **μέρος μιας ποσότητας** και την **ποσότητα από το μέρος** της
- ✓ τα **γνήσια** και **καταχρηστικά** κλάσματα και τους **μεικτούς** αριθμούς

1 Κλασματική μονάδα

Μια πίτσα κόβεται σε 8 **ίσα** κομμάτια. Κάθε κομμάτι είναι «ένα όγδοο» της πίτσας και το γράφουμε $\frac{1}{8}$.

Γενικά, όταν χωρίζουμε μια μονάδα (ένα «όλο») σε ν **ίσα** μέρη, κάθε μέρος λέγεται **κλασματική μονάδα** και γράφεται $\frac{1}{\nu}$.

Όσο **περισσότερα** είναι τα κομμάτια, τόσο **μικρότερο** είναι το καθένα: $\frac{1}{8}$ της πίτσας είναι λιγότερο από $\frac{1}{4}$ της ίδιας πίτσας.



Ένα τέταρτο και ένα όγδοο της ίδιας πίτσας

**ΠΡΟΣΟΧΗ!**

Η λέξη-κλειδί είναι «**ίσα**». Αν κόψουμε μια σοκολάτα σε 4 κομμάτια διαφορετικού μεγέθους, κανένα κομμάτι δεν είναι $\frac{1}{4}$ της σοκολάτας!

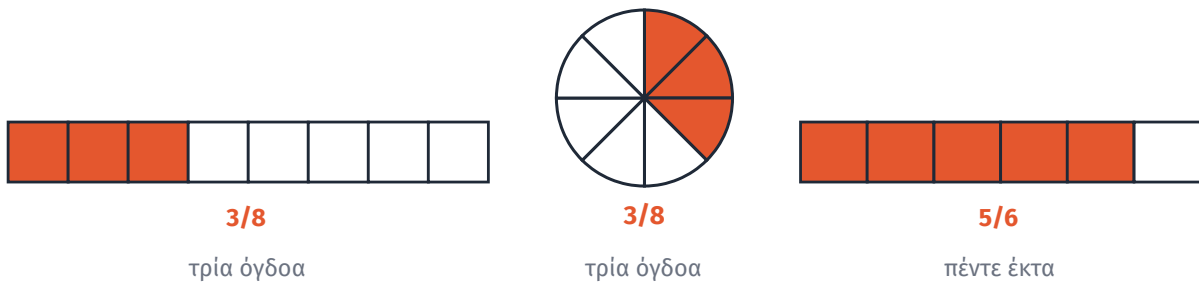
2 Το κλάσμα

Αν φάμε 3 από τα 8 κομμάτια της πίτσας, έχουμε φάει **τρία όγδοα**, δηλαδή $\frac{3}{8}$ της πίτσας.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Το κλάσμα $\frac{\kappa}{\nu}$ (με $\nu \neq 0$) δείχνει ότι χωρίσαμε τη μονάδα σε ν ίσα μέρη και πήραμε κ από αυτά.

- Ο αριθμός ν , **κάτω** από τη γραμμή, λέγεται **παρονομαστής**: «ονομάζει» σε πόσα ίσα μέρη χωρίστηκε η μονάδα.
- Ο αριθμός κ , **πάνω** από τη γραμμή, λέγεται **αριθμητής**: «αριθμεί» πόσα μέρη πήραμε.
- Ο αριθμητής και ο παρονομαστής λέγονται **όροι** του κλάσματος.



ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Αν ο αριθμητής είναι **ίσος** με τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι ίσο με 1: $\frac{8}{8} = 1$ (φάγαμε όλη την πίτσα).
- Αν ο αριθμητής είναι 0, το κλάσμα είναι 0: $\frac{0}{8} = 0$.
- Κάθε φυσικός αριθμός γράφεται ως κλάσμα με παρονομαστή 1: $5 = \frac{5}{1}$.
- Ο παρονομαστής **δεν μπορεί να είναι 0** (δεν μπορούμε να χωρίσουμε κάτι σε μηδέν μέρη).

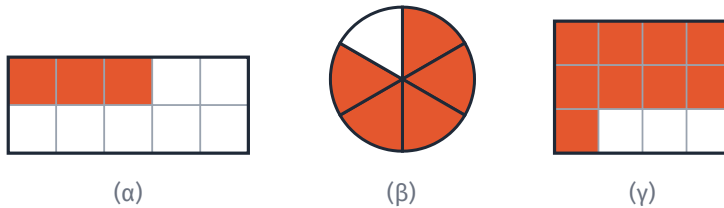
2

ΚΛΑΣΜΑΤΑ



Παράδειγμα 1

Τι μέρος του σχήματος είναι χρωματισμένο σε κάθε περίπτωση;



ΛΥΣΗ

- α)** Το ορθογώνιο χωρίστηκε σε 10 ίσα μέρη και χρωματίστηκαν 3: $\frac{3}{10}$.
- β)** Ο κύκλος χωρίστηκε σε 6 ίσα μέρη και χρωματίστηκαν 5: $\frac{5}{6}$.
- γ)** 12 ίσα μέρη, χρωματισμένα 9: $\frac{9}{12}$ (θα δούμε ότι είναι ίσο με $\frac{3}{4}$).

3 Το κλάσμα ως πηλίκο διαίρεσης

Πώς μοιράζουμε 3 πίτσες σε 4 παιδιά; Κόβουμε κάθε πίτσα σε 4 ίσα κομμάτια και δίνουμε σε κάθε παιδί ένα κομμάτι από κάθε πίτσα.

Κάθε παιδί παίρνει 3 κομμάτια των $\frac{1}{4}$, δηλαδή $\frac{3}{4}$ της πίτσας. Άρα $3 : 4 = \frac{3}{4}$.



Κάθε παιδί παίρνει το χρωματιστό κομμάτι από κάθε πίτσα

ΤΟ ΚΛΑΣΜΑ ΕΙΝΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

$$\frac{\kappa}{\nu} = \kappa : \nu \quad (\nu \neq 0)$$

Η γραμμή του κλάσματος λέγεται **κλασματική γραμμή** και σημαίνει **διαίρεση**. Γι' αυτό το κλάσμα είναι ένας **αριθμός** και όχι μόνο «κομμάτι από πίτσα».



Παράδειγμα 2

Να γράψεις ως κλάσμα τα πηλίκια: **α)** $7 : 9$, **β)** $12 : 5$, **γ)** $20 : 4$. Ποιο από τα κλάσματα είναι φυσικός αριθμός;

ΛΥΣΗ

α) $\frac{7}{9}$, **β)** $\frac{12}{5}$, **γ)** $\frac{20}{4} = 20 : 4 = 5$, φυσικός αριθμός.

4 Κλάσμα ενός αριθμού – Από το μέρος στο όλο

ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΑ Κ/Ν ΜΙΑΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ

- 1 Διαιρούμε την ποσότητα με τον **παρονομαστή** ν (βρίσκουμε το $\frac{1}{\nu}$).
- 2 Πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με τον **αριθμητή** κ .



Τα $\frac{3}{5}$ των 40 €: το $\frac{1}{5}$ είναι 8 €, άρα τα $\frac{3}{5}$ είναι $3 \cdot 8 = 24$ €.



Παράδειγμα 3

Να βρεις: **α)** τα $\frac{3}{5}$ των 40 €, **β)** τα $\frac{2}{3}$ μιας ώρας (σε λεπτά), **γ)** τα $\frac{7}{4}$ του 36.

ΛΥΣΗ

α) $40 : 5 = 8$ € (το ένα πέμπτο) και $3 \cdot 8 = 24$ €.

β) 1 ώρα = 60 λεπτά: $60 : 3 = 20$ και $2 \cdot 20 = 40$ λεπτά.

γ) $36 : 4 = 9$ και $7 \cdot 9 = 63$. (Τα $\frac{7}{4}$ είναι **περισσότερα** από το όλο, γιατί $\frac{7}{4} > 1$.)

ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΟ ΟΛΟ, ΑΝ ΞΕΡΟΥΜΕ ΤΑ Κ/Ν ΤΟΥ

- 1 Διαιρούμε τη γνωστή ποσότητα με τον **αριθμητή** κ (βρίσκουμε το $\frac{1}{\nu}$).
- 2 Πολλαπλασιάζουμε με τον **παρονομαστή** ν (βρίσκουμε τα $\frac{\nu}{\nu}$, δηλαδή το όλο).



Παράδειγμα 4

Η Ελένη διάβασε 120 σελίδες ενός βιβλίου, που είναι τα $\frac{3}{8}$ του βιβλίου. Πόσες σελίδες έχει το βιβλίο; Πόσες της μένουν;

ΛΥΣΗ

Τα $\frac{3}{8}$ είναι 120 σελίδες, άρα το $\frac{1}{8}$ είναι $120 : 3 = 40$ σελίδες. Ολόκληρο το βιβλίο ($\frac{8}{8}$) έχει $8 \cdot 40 = 320$ σελίδες. Της μένουν $320 - 120 = 200$ σελίδες (που είναι τα $\frac{5}{8}$ του βιβλίου: $5 \cdot 40 = 200$ ✓).



ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

«Τα $\frac{3}{8}$ του βιβλίου είναι 120 σελίδες, άρα το βιβλίο έχει $\frac{3}{8} \cdot 120 = 45$ »

✓ ΣΩΣΤΟ

Το όλο το βρίσκουμε με: $120 : 3 \cdot 8 = 320$ σελίδες

Μπερδεύονται τα δύο προβλήματα: όταν ξέρουμε το **όλο** και ψάχνουμε το **μέρος**, πολλαπλασιάζουμε με το κλάσμα· όταν ξέρουμε το **μέρος** και ψάχνουμε το **όλο**, κάνουμε το αντίστροφο. Ένας έλεγχος λογικής: το βιβλίο **πρέπει** να έχει περισσότερες σελίδες από όσες διάβασε!

5 Γνήσια και καταχρηστικά κλάσματα – Μεικτοί αριθμοί

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Ένα κλάσμα λέγεται **γνήσιο** όταν ο αριθμητής είναι **μικρότερος** από τον παρονομαστή, π.χ. $\frac{3}{7}$. Κάθε γνήσιο κλάσμα είναι **μικρότερο από 1**.
- Ένα κλάσμα λέγεται **καταχρηστικό** όταν ο αριθμητής είναι **μεγαλύτερος ή ίσος** από τον παρονομαστή, π.χ. $\frac{11}{4}$ ή $\frac{5}{5}$. Κάθε καταχρηστικό κλάσμα είναι **μεγαλύτερο ή ίσο του 1**.

Το καταχρηστικό $\frac{11}{4}$ σημαίνει 11 τέταρτα. Με 8 τέταρτα φτιάχνουμε 2 ολόκληρες μονάδες και περισσεύουν 3 τέταρτα. Λέμε ότι $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$ («δύο ακέραιες μονάδες και τρία τέταρτα»).

Ο αριθμός $2\frac{3}{4}$ λέγεται **μεικτός αριθμός**: αποτελείται από έναν **ακέραιο** και ένα **γνήσιο κλάσμα**. Σημαίνει $2 + \frac{3}{4}$.



$$11/4 = 2 \text{ ολόκληρα} + 3/4$$

ΜΕΤΑΤΡΟΠΕΣ

- 1 **Καταχρηστικό** → **μεικτός**: κάνουμε τη διαίρεση αριθμητή : παρονομαστή. Το **πηλίκο** είναι ο ακέραιος, το **υπόλοιπο** ο νέος αριθμητής, ενώ ο παρονομαστής μένει ίδιος. $\frac{11}{4} : 11 = 4 \cdot 2 + 3 \Rightarrow 2\frac{3}{4}$.
- 2 **Μεικτός** → **καταχρηστικό**: πολλαπλασιάζουμε τον ακέραιο με τον παρονομαστή και προσθέτουμε τον αριθμητή· ο παρονομαστής μένει ίδιος. $3\frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{17}{5}$.



Τα κλάσματα πάνω στην ευθεία: χωρίσαμε κάθε μονάδα σε 4 ίσα μέρη.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Ο μεικτός $2\frac{3}{4}$ **δεν** σημαίνει $2 \cdot \frac{3}{4}$! Σημαίνει $2 + \frac{3}{4}$. Γι' αυτό, πριν κάνουμε πράξεις με μεικτούς, τους μετατρέπουμε σε καταχρηστικά κλάσματα.



Παράδειγμα 5

α) Να μετατρέψεις σε μεικτούς τα $\frac{23}{6}$ και $\frac{40}{7}$. β) Να μετατρέψεις σε κλάσματα τους $4\frac{1}{3}$ και $10\frac{5}{8}$.

ΛΥΣΗ

α) $23 = 6 \cdot 3 + 5 \Rightarrow \frac{23}{6} = 3\frac{5}{6}$. $40 = 7 \cdot 5 + 5 \Rightarrow \frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}$.

β) $4\frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{13}{3}$. $10\frac{5}{8} = \frac{80 + 5}{8} = \frac{85}{8}$.



ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν σχεδόν μόνο κλασματικές μονάδες! Για να γράψουν τα $\frac{3}{4}$ έγραφαν $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Στον πάπυρο Rhind (περ. 1650 π.Χ.) υπάρχουν πίνακες με τέτοιες αναλύσεις — ένα από τα αρχαιότερα «βοηθήματα» μαθηματικών!



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις κινούμενα σχήματα που δείχνουν τα κλάσματα πάνω σε πίτσες, ράβδους και ευθείες, βίντεο-μάθημα και κουίζ για την έννοια του κλάσματος.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 2.1

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να γράψεις με κλάσμα: **α)** τρία πέμπτα, **β)** επτά δέκατα, **γ)** ένα εικοστό, **δ)** έντεκα τρίτα. Ποια είναι γνήσια;
- 2 ●●● Τι μέρος της ώρας είναι: **α)** 15 λεπτά, **β)** 20 λεπτά, **γ)** 45 λεπτά, **δ)** 1 λεπτό; Τι μέρος της ημέρας είναι 8 ώρες;
- 3 ●●● Να βρεις: **α)** τα $\frac{2}{7}$ του 35, **β)** τα $\frac{5}{6}$ των 72 €, **γ)** τα $\frac{3}{4}$ του κιλού (σε γραμμάρια), **δ)** τα $\frac{9}{5}$ του 45.
- 4 ●●● Να μετατρέψεις σε μεικτούς: **α)** $\frac{17}{5}$, **β)** $\frac{50}{9}$, **γ)** $\frac{100}{12}$ και σε κλάσματα: **δ)** $2\frac{4}{7}$, **ε)** $6\frac{1}{9}$, **στ)** $12\frac{3}{10}$.
- 5 ●●● Να τοποθετήσεις σε μια ευθεία τα κλάσματα $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{3}$. Ποιο από αυτά είναι φυσικός αριθμός;
- 6 ●●● Τα $\frac{4}{9}$ των μαθητών ενός τμήματος είναι αγόρια και είναι 12. Πόσοι είναι όλοι οι μαθητές; Πόσα είναι τα κορίτσια;
- 7 ●●● Ένας ποδηλάτης έχει διανύσει τα $\frac{5}{8}$ μιας διαδρομής και του μένουν 24 km. Πόσα km είναι όλη η διαδρομή;
- 8 ●●● Ποιος φυσικός αριθμός ν κάνει το κλάσμα $\frac{\nu}{6}$: **α)** ίσο με 1, **β)** ίσο με 3, **γ)** γνήσιο και μεγαλύτερο από $\frac{4}{6}$;
- 9 ●●● Ένα δοχείο γεμάτο έχει 18 λίτρα νερό. Βγάλαμε τα $\frac{2}{9}$ του νερού και μετά το $\frac{1}{7}$ του νερού που έμεινε. Πόσα λίτρα έμειναν στο δοχείο;
- 10 ●●● Σωστό ή Λάθος; **α)** Το $\frac{0}{5}$ δεν ορίζεται. **β)** Το $\frac{9}{9}$ είναι καταχρηστικό κλάσμα. **γ)** $\frac{1}{10} > \frac{1}{5}$. **δ)** Κάθε γνήσιο κλάσμα είναι μικρότερο του 1. **ε)** $3\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Μάθημα 2.2

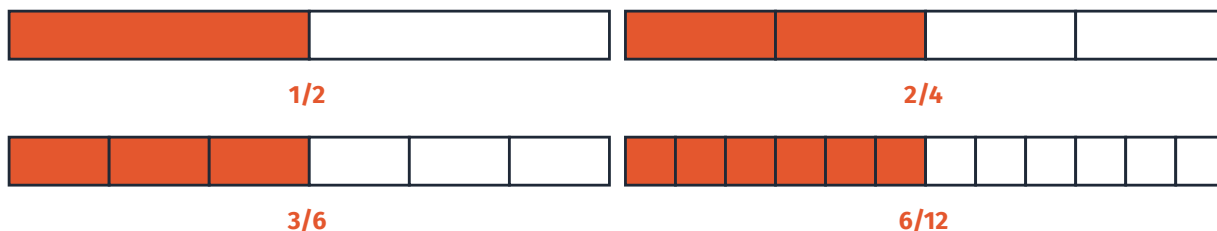
Ισοδύναμα κλάσματα

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ πότε δύο κλάσματα είναι **ισοδύναμα** (ίσα)
- ✓ το κριτήριο των «**χιαστί**» **γινομένων**
- ✓ να **απλοποιείς** ένα κλάσμα και να το κάνεις **ανάγωγο**
- ✓ να μετατρέπεις ετερόνυμα κλάσματα σε **ομώνυμα** με τη βοήθεια του Ε.Κ.Π.

1 Ισοδύναμα κλάσματα

Κοίταξε τις παρακάτω ράβδους. Είναι όλες ίδιου μήκους και σε όλες έχουμε χρωματίσει **το ίδιο κομμάτι**, αν και το περιγράφουμε με διαφορετικά κλάσματα:



ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο κλάσματα λέγονται **ισοδύναμα** (ή **ίσα**) όταν εκφράζουν **το ίδιο μέρος** του ίδιου μεγέθους, δηλαδή τον **ίδιο αριθμό**. Γράφουμε $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$.

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Αν **πολλαπλασιάσουμε** ή **διαιρέσουμε** και **τους δύο** όρους ενός κλάσματος με τον **ίδιο** αριθμό (διάφορο του 0), προκύπτει κλάσμα **ισοδύναμο** με το αρχικό:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \lambda}{\beta \cdot \lambda} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha : \lambda}{\beta : \lambda}$$



Παράδειγμα 1

Να γράψεις τέσσερα κλάσματα ισοδύναμα με το $\frac{3}{5}$ και να βρεις αυτό που έχει παρονομαστή 40.

ΛΥΣΗ

Πολλαπλασιάζουμε τους όρους με 2, 3, 4, 10: $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \frac{30}{50}$. Για παρονομαστή 40: αφού $40 = 5 \cdot 8$, πολλαπλασιάζουμε και τον αριθμητή με 8: $\frac{3}{5} = \frac{24}{40}$.



ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

$$\frac{2}{3} = \frac{2+4}{3+4} = \frac{6}{7}$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$$

Η ιδιότητα ισχύει **μόνο** για πολλαπλασιασμό και διαίρεση. Αν **προσθέσουμε** τον ίδιο αριθμό στους δύο όρους, το κλάσμα **αλλάζει**: $\frac{2}{3} \neq \frac{6}{7}$.

2 Το κριτήριο των χιαστί γινομένων

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$

Δύο κλάσματα είναι ίσα όταν τα «**χιαστί**» **γινόμενα** (αριθμητής του πρώτου επί παρονομαστή του δεύτερου και παρονομαστής του πρώτου επί αριθμητή του δεύτερου) είναι **ίσα**.



Παράδειγμα 2

Να εξετάσεις αν είναι ισοδύναμα τα κλάσματα: **α)** $\frac{4}{6}$ και $\frac{10}{15}$, **β)** $\frac{5}{8}$ και $\frac{7}{11}$.

ΛΥΣΗ

α) $4 \cdot 15 = 60$ και $6 \cdot 10 = 60$. Αφού είναι ίσα, $\frac{4}{6} = \frac{10}{15}$.

β) $5 \cdot 11 = 55$ και $8 \cdot 7 = 56$. Αφού $55 \neq 56$, τα κλάσματα **δεν** είναι ισοδύναμα.

 Παράδειγμα 3

Να βρεις τον φυσικό x ώστε $\frac{x}{12} = \frac{15}{20}$.

ΛΥΣΗ

Από τα χιαστί γινόμενα: $20 \cdot x = 12 \cdot 15 = 180$, άρα $x = 180 : 20 = 9$. Έλεγχος: $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ και $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ ✓.

3 Απλοποίηση κλασμάτων – Ανάγωγα κλάσματα

Όταν διαιρούμε και τους δύο όρους ενός κλάσματος με έναν κοινό διαιρέτη τους, λέμε ότι **απλοποιούμε** το κλάσμα. Το κλάσμα που προκύπτει είναι ισοδύναμο με το αρχικό, αλλά έχει **μικρότερους** όρους, άρα είναι πιο «βολικό».

ΑΝΑΓΩΓΟ ΚΛΑΣΜΑ

Ένα κλάσμα λέγεται **ανάγωγο** όταν **δεν** απλοποιείται άλλο, δηλαδή όταν ο Μ.Κ.Δ. αριθμητή και παρονομαστή είναι 1. Π.χ. $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{15}$.

Για να γίνει ένα κλάσμα ανάγωγο με μία κίνηση, διαιρούμε τους όρους του με τον Μ.Κ.Δ. τους.

 Παράδειγμα 4

Να απλοποιήσεις το κλάσμα $\frac{48}{72}$ ώστε να γίνει ανάγωγο.

ΛΥΣΗ

1ος τρόπος (βήμα-βήμα): $\frac{48}{72} = \frac{24}{36} = \frac{12}{18} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ (διαιρέσαμε κάθε φορά με 2, 2, 2, 3).

2ος τρόπος (με Μ.Κ.Δ.): Μ.Κ.Δ.(48, 72) = 24, οπότε $\frac{48}{72} = \frac{48 : 24}{72 : 24} = \frac{2}{3}$.

 Παράδειγμα 5

Να απλοποιήσεις: α) $\frac{150}{250}$, β) $\frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7}$, γ) $\frac{84}{126}$.

ΛΥΣΗ

α) Διαιρούμε με 50: $\frac{3}{5}$. (Ή πρώτα «κόβουμε» ένα μηδενικό: $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.)

β) Διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες 3 και 7: $\frac{2}{5}$.

γ) Μ.Κ.Δ.(84, 126) = 42: $\frac{84}{126} = \frac{2}{3}$.

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

$$\frac{16}{64} = \frac{\cancel{1}6}{6\cancel{4}} = \frac{1}{4} \text{ («έκοψα το 6»)}$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$\frac{16}{64} = \frac{16 : 16}{64 : 16} = \frac{1}{4}$$

Εδώ το αποτέλεσμα «έτυχε» σωστό, αλλά η μέθοδος είναι **εντελώς λάθος**: δοκίμασε με το $\frac{12}{24}$ — «κόβοντας» το 2 βγαίνει $\frac{1}{4}$, ενώ το σωστό είναι $\frac{1}{2}$. Απλοποιούμε **μόνο διαιρώντας** με κοινό διαιρέτη, ποτέ «σβήνοντας» ψηφία. Ομοίως, σε άθροισμα **δεν** απλοποιούμε: $\frac{3+5}{3} \neq 5$.

4 Ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Κλάσματα με τον **ίδιο** παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα**, π.χ. $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{11}{9}$.
- Κλάσματα με **διαφορετικούς** παρονομαστές λέγονται **ετερόνυμα**, π.χ. $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}$.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΕΤΕΡΩΝΥΜΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΣΕ ΟΜΩΝΥΜΑ

- 1 Βρίσκουμε το **Ε.Κ.Π.** των παρονομαστών. Αυτό θα είναι ο κοινός παρονομαστής.
- 2 Διαιρούμε το Ε.Κ.Π. με κάθε παρονομαστή· το πηλίκο λέγεται **«καπελάκι»** και το γράφουμε πάνω από το κλάσμα.
- 3 Πολλαπλασιάζουμε **και τους δύο** όρους κάθε κλάσματος με το «καπελάκι» του.



Παράδειγμα 6

Να μετατρέψεις σε ομώνυμα τα κλάσματα $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{9}$.

ΛΥΣΗ

Ε.Κ.Π.(4, 6, 9) = 36. «Καπελάκια»: $36 : 4 = 9$, $36 : 6 = 6$, $36 : 9 = 4$.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 9} = \frac{27}{36}, \quad \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{30}{36}, \quad \frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{28}{36}$$



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Μπορούμε να πάρουμε ως κοινό παρονομαστή και το **γινόμενο** των παρονομαστών ($4 \cdot 6 \cdot 9 = 216$), αλλά οι αριθμοί θα «φουσκώσουν» άσκοπα. Το **Ε.Κ.Π.** δίνει τον **μικρότερο** δυνατό κοινό παρονομαστή και άρα τις πιο απλές πράξεις.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για τα ισοδύναμα κλάσματα, την απλοποίηση και τη μετατροπή σε ομώνυμα, καθώς και διαδραστικά κουίζ.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 2.2

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

2
ΚΛΑΣΜΑΤΑ

- 1 ●●● Να συμπληρώσεις ώστε να προκύψουν ισοδύναμα κλάσματα:

$$\alpha) \frac{2}{3} = \frac{\square}{15}$$

$$\beta) \frac{5}{8} = \frac{20}{\square}$$

$$\gamma) \frac{12}{18} = \frac{\square}{3}$$

$$\delta) \frac{7}{\square} = \frac{35}{60}$$

- 2 ●●● Να απλοποιήσεις ώστε να γίνουν ανάγωγα: α) $\frac{18}{24}$, β) $\frac{35}{49}$, γ) $\frac{120}{360}$, δ) $\frac{45}{105}$, ε) $\frac{96}{144}$, στ) $\frac{2 \cdot 5 \cdot 11}{4 \cdot 11}$.

- 3 ●●● Ποια από τα κλάσματα $\frac{6}{14}$, $\frac{9}{21}$, $\frac{15}{35}$, $\frac{12}{30}$, $\frac{30}{70}$ είναι ισοδύναμα με το $\frac{3}{7}$;

- 4 ●●● Να βρεις τον x : α) $\frac{x}{9} = \frac{8}{24}$, β) $\frac{6}{x} = \frac{9}{15}$, γ) $\frac{14}{35} = \frac{4}{x}$.

- 5 ●●● Να μετατρέψεις σε ομώνυμα: α) $\frac{1}{6}$ και $\frac{3}{8}$, β) $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{15}$, γ) $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{9}$, 1.

- 6 ●●● Ένα κλάσμα είναι ισοδύναμο με το $\frac{4}{7}$ και το άθροισμα των όρων του είναι 66. Ποιο είναι το κλάσμα;

- 7 ●●● Σε μια τάξη 28 μαθητών, οι 21 πήγαν εκδρομή. Σε μια άλλη τάξη 32 μαθητών, πήγαν οι 24. Να δείξεις ότι **το ίδιο μέρος** κάθε τάξης πήγε εκδρομή.

- 8 ●●● Να εξηγήσεις γιατί το κλάσμα $\frac{15}{28}$ είναι ανάγωγο, ενώ το $\frac{15}{27}$ όχι.

- 9 ●●● Να γράψεις όλα τα κλάσματα με παρονομαστή 12 που είναι γνήσια και ανάγωγα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Μάθημα 2.3

Σύγκριση κλασμάτων

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ να συγκρίνεις **ομώνυμα** κλάσματα
- ✓ να συγκρίνεις κλάσματα με τον **ίδιο αριθμητή**
- ✓ να συγκρίνεις **ετερώνυμα** κλάσματα (με ομώνυμα ή χιαστί)
- ✓ να συγκρίνεις ένα κλάσμα με τη **μονάδα** και να **διατάσσεις** κλάσματα

1 Σύγκριση ομώνυμων κλασμάτων

Αν η μονάδα είναι χωρισμένη στα **ίδια** κομμάτια (ίδιος παρονομαστής), τότε περισσότερα έχει όποιος πήρε **περισσότερα κομμάτια**.

 $\frac{3}{7}$  $\frac{5}{7}$ $\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$

ΚΑΝΟΝΑΣ 1

Από δύο **ομώνυμα** κλάσματα, μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει τον **μεγαλύτερο αριθμητή**.

$$\frac{3}{7} < \frac{5}{7} \quad \frac{11}{9} > \frac{8}{9}$$

2 Κλάσματα με ίδιο αριθμητή

Αν πάρουμε τον **ίδιο αριθμό κομματιών**, κερδισμένος είναι όποιος έχει **μεγαλύτερα κομμάτια**, δηλαδή τη μονάδα χωρισμένη σε **λιγότερα** μέρη (μικρότερο παρονομαστή).

 $\frac{2}{3}$  $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$

ΚΑΝΟΝΑΣ 2

Από δύο κλάσματα με τον **ίδιο αριθμητή**, μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει τον **μικρότερο παρονομαστή**.

$$\frac{2}{3} > \frac{2}{5} \quad \frac{1}{100} < \frac{1}{10}$$

× ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ**× ΛΑΘΟΣ**

$$\llcorner \frac{1}{8} > \frac{1}{4}, \text{ γιατί } 8 > 4 \gg$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$$

Μεγαλύτερος παρονομαστής σημαίνει **περισσότερα** και άρα **μικρότερα** κομμάτια. Σκέψου: προτιμάς το ένα τέταρτο ή το ένα όγδοο της τούρτας γενεθλίων σου;

3 Σύγκριση ετερόνυμων κλασμάτων**ΤΡΟΠΟΣ 1: ΤΑ ΚΑΝΟΥΜΕ ΟΜΩΝΥΜΑ**

- 1 Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα (με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών).
- 2 Συγκρίνουμε τους αριθμητές.

✎ Παράδειγμα 1

Να συγκρίνεις τα κλάσματα $\frac{5}{6}$ και $\frac{7}{9}$.

ΛΥΣΗ

Ε.Κ.Π.(6, 9) = 18: $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$ και $\frac{7}{9} = \frac{14}{18}$. Αφού $15 > 14$, ισχύει $\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$.

ΤΡΟΠΟΣ 2: ΧΙΑΣΤΙ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

Για να συγκρίνουμε $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$, συγκρίνουμε τα $\alpha \cdot \delta$ και $\beta \cdot \gamma$:

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \iff \alpha \cdot \delta < \beta \cdot \gamma$$

✎ Παράδειγμα 2

Να συγκρίνεις τα $\frac{4}{7}$ και $\frac{5}{9}$.

ΛΥΣΗ

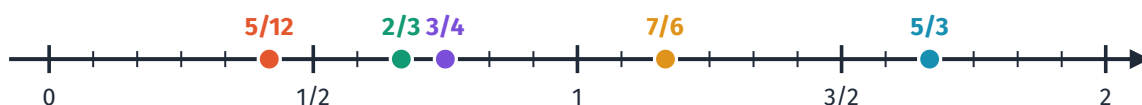
$4 \cdot 9 = 36$ και $7 \cdot 5 = 35$. Αφού $36 > 35$, είναι $\frac{4}{7} > \frac{5}{9}$.

4 Σύγκριση με τη μονάδα – Διάταξη

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΟ 1

- Αν αριθμητής < παρονομαστής (γνήσιο), τότε το κλάσμα είναι **μικρότερο** του 1: $\frac{7}{8} < 1$.
- Αν αριθμητής = παρονομαστής, τότε το κλάσμα είναι **ίσο** με 1: $\frac{8}{8} = 1$.
- Αν αριθμητής > παρονομαστής (καταχρηστικό), τότε το κλάσμα είναι **μεγαλύτερο** του 1: $\frac{9}{8} > 1$.

Η μονάδα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως «γέφυρα»: το $\frac{13}{14}$ και το $\frac{15}{13}$ συγκρίνονται αμέσως, γιατί $\frac{13}{14} < 1 < \frac{15}{13}$. Παρόμοια, το $\frac{1}{2}$ είναι συχνά βολική «γέφυρα»: $\frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{5}{9}$ (αφού $3 < 4$ και $5 > 4,5$).



Πάνω στην ευθεία, τα κλάσματα εμφανίζονται με τη σειρά μεγέθους τους: $5/12 < 2/3 < 3/4 < 7/6 < 5/3$



Παράδειγμα 3

Να γράψεις σε αύξουσα σειρά τα κλάσματα: $\frac{2}{3}, \frac{5}{12}, \frac{3}{4}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3}$.

ΛΥΣΗ

Τα $\frac{7}{6}$ και $\frac{5}{3}$ είναι μεγαλύτερα του 1, τα υπόλοιπα μικρότερα. Μετατρέπουμε όλα σε ομώνυμα με παρονομαστή Ε.Κ.Π. (3, 12, 4, 6) = 12:

$$\frac{8}{12}, \frac{5}{12}, \frac{9}{12}, \frac{14}{12}, \frac{20}{12} \Rightarrow \frac{5}{12} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{7}{6} < \frac{5}{3}$$



Παράδειγμα 4

Να βρεις ένα κλάσμα που βρίσκεται **ανάμεσα** στα $\frac{2}{5}$ και $\frac{3}{5}$ και ένα ανάμεσα στα $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{2}$.

ΛΥΣΗ

Πολλαπλασιάζουμε τους όρους με 2: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ και $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$. Ανάμεσα βρίσκεται το $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Επίσης $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ και $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$, άρα ανάμεσα βρίσκεται το $\frac{5}{12}$.

Σημείωση: ανάμεσα σε δύο κλάσματα υπάρχουν **άπειρα** κλάσματα· μπορούμε πάντα να «πυκνώσουμε» τον χωρισμό (π.χ. $\frac{8}{20}, \frac{9}{20}, \frac{10}{20}, \dots$).

**ΠΡΟΣΟΧΗ!**

Ανάμεσα σε δύο **διαδοχικούς φυσικούς** (π.χ. 3 και 4) δεν υπάρχει άλλος φυσικός. Ανάμεσα όμως σε **δύο οποιαδήποτε κλάσματα** υπάρχουν **άπειρα** άλλα κλάσματα! Αυτή είναι μια σημαντική διαφορά.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις ειδικό παιχνίδι γνώσεων όπου διατάσσεις κλάσματα πάνω στην ευθεία, καθώς και βίντεο με όλους τους τρόπους σύγκρισης.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 2.3

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Να συμπληρώσεις με $<$, $>$ ή $=$:

$$\alpha) \frac{4}{11} \text{ — } \frac{7}{11}$$

$$\beta) \frac{5}{8} \text{ — } \frac{5}{6}$$

$$\gamma) \frac{12}{13} \text{ — } 1$$

$$\delta) \frac{9}{4} \text{ — } 2$$

$$\epsilon) \frac{6}{10} \text{ — } \frac{3}{5}$$

$$\zeta) \frac{1}{20} \text{ — } \frac{1}{25}$$

2 ●●● Να συγκρίνεις τα κλάσματα: α) $\frac{3}{4}$ και $\frac{5}{7}$, β) $\frac{7}{12}$ και $\frac{5}{8}$, γ) $\frac{11}{15}$ και $\frac{7}{10}$.

3 ●●● Να γράψεις σε αύξουσα σειρά: α) $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{6}$, β) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{12}$.

4 ●●● Η Μαρία έφαγε τα $\frac{3}{8}$ μιας σοκολάτας και η Σοφία τα $\frac{2}{5}$ μιας **ίδιες** σοκολάτας. Ποια έφαγε περισσότερη;

5 ●●● Να βρεις όλους τους φυσικούς ν για τους οποίους: α) $\frac{\nu}{7} < \frac{4}{7}$, β) $1 < \frac{\nu}{5} < 2$, γ) $\frac{3}{\nu} > \frac{3}{5}$ (με $\nu \neq 0$).

6 ●●● Να βρεις τρία κλάσματα ανάμεσα στα $\frac{3}{4}$ και $\frac{4}{5}$.

7 ●●● Τρεις δρομείς έτρεξαν: ο Α τα $\frac{5}{6}$ της διαδρομής, ο Β τα $\frac{7}{9}$ και ο Γ τα $\frac{11}{12}$. Ποιος έχει προχωρήσει περισσότερο και ποιος λιγότερο;

8 ●●● Χωρίς να κάνεις πράξεις, να εξηγήσεις ποιο είναι μεγαλύτερο: $\frac{999}{1.000}$ ή $\frac{1.001}{1.000}$; και $\frac{19}{20}$ ή $\frac{20}{19}$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Μάθημα 2.4

Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ να προσθέτεις και να αφαιρείς **ομώνυμα** κλάσματα
- ✓ να προσθέτεις και να αφαιρείς **ετερόνυμα** κλάσματα
- ✓ να κάνεις πράξεις με **μεικτούς** αριθμούς
- ✓ να λύνεις **προβλήματα** με πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

1 Ομώνυμα κλάσματα

Αν έχουμε 2 όγδοα και προσθέσουμε 3 όγδοα, έχουμε 5 όγδοα. Τα «όγδοα» είναι σαν μια μονάδα μέτρησης: προσθέτουμε τα **πλήθη** τους, όπως $2 \text{ μήλα} + 3 \text{ μήλα} = 5 \text{ μήλα}$.



$$2/8 \text{ (πορτοκαλί)} + 3/8 \text{ (μωβ)} = 5/8$$

ΚΑΝΟΝΑΣ

Για να προσθέσουμε (ή να αφαιρέσουμε) **ομώνυμα** κλάσματα, προσθέτουμε (ή αφαιρούμε) τους **αριθμητές** και κρατάμε τον **ίδιο παρονομαστή**:

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma}$$



Παράδειγμα 1

Να υπολογίσεις: α) $\frac{2}{9} + \frac{5}{9}$, β) $\frac{11}{12} - \frac{5}{12}$, γ) $\frac{3}{10} + \frac{9}{10} - \frac{2}{10}$.

ΛΥΣΗ

α) $\frac{7}{9}$, β) $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ (απλοποιούμε πάντα στο τέλος!). γ) $\frac{3+9-2}{10} = \frac{10}{10} = 1$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{18}$$

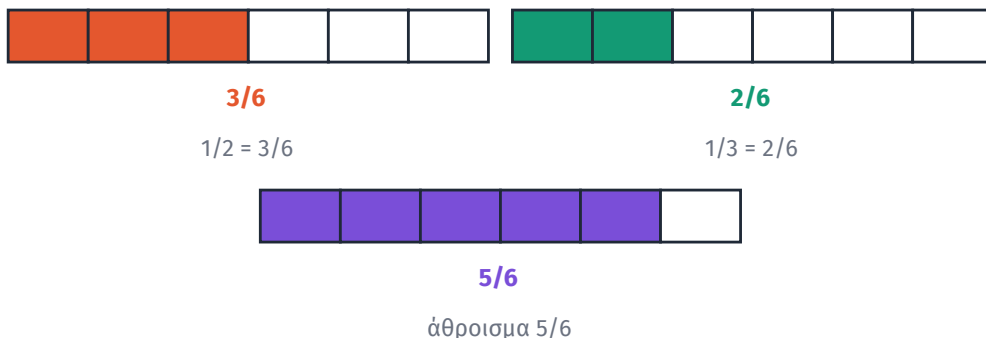
✓ ΣΩΣΤΟ

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$$

Οι παρονομαστές **δεν** προστίθενται! Ο παρονομαστής δείχνει το **είδος** των κομματιών (ένατα), που δεν αλλάζει όταν βάζουμε κομμάτια μαζί. Σκέψου: 2 ένατα και 5 ένατα κάνουν 7 **ένατα**, όχι δέκατα όγδοα.

2 Ετερόνυμα κλάσματα

Πώς προσθέτουμε $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$; Τα κομμάτια έχουν **διαφορετικό μέγεθος**, άρα πρέπει πρώτα να τα «μεταφράσουμε» σε κοινά κομμάτια: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ και $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, οπότε $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.



ΠΡΟΣΘΕΣΗ/ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΕΤΕΡΩΝΥΜΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

- 1 Βρίσκουμε το **Ε.Κ.Π.** των παρονομαστών.
- 2 Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε **ομώνυμα** (με τα «καπελάκια»).
- 3 Προσθέτουμε ή αφαιρούμε τους αριθμητές.
- 4 **Απλοποιούμε** το αποτέλεσμα, αν γίνεται.

✏ Παράδειγμα 2

Να υπολογίσεις: **α)** $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$, **β)** $\frac{7}{8} - \frac{5}{12}$, **γ)** $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4}$.

ΛΥΣΗ

α) Ε.Κ.Π.(4, 6) = 12: $\frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12} = 1\frac{7}{12}$.

β) Ε.Κ.Π.(8, 12) = 24: $\frac{21}{24} - \frac{10}{24} = \frac{11}{24}$.

γ) Ε.Κ.Π.(2, 3, 4) = 12: $\frac{6}{12} + \frac{8}{12} - \frac{9}{12} = \frac{5}{12}$.

✏ Παράδειγμα 3

Να υπολογίσεις: **α)** $3 + \frac{2}{5}$, **β)** $1 - \frac{3}{8}$, **γ)** $5 - \frac{7}{4}$.

ΛΥΣΗ

Γράφουμε τον φυσικό ως κλάσμα:

α) $\frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$. **β)** $\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$. **γ)** $\frac{20}{4} - \frac{7}{4} = \frac{13}{4}$.

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Είναι το πιο διαδεδομένο λάθος με τα κλάσματα. Έλεγχος λογικής: το $\frac{2}{5}$ είναι **μικρότερο** από το $\frac{1}{2}$ — πώς γίνεται, προσθέτοντας κάτι στο $\frac{1}{2}$, να πάρουμε λιγότερο;

3 Μεικτοί αριθμοί

Με τους μεικτούς δουλεύουμε συνήθως με έναν από τους δύο τρόπους:



Παράδειγμα 4

Να υπολογίσεις: α) $2\frac{1}{3} + 1\frac{3}{4}$, β) $5\frac{1}{6} - 2\frac{3}{4}$.

ΛΥΣΗ

Τρόπος 1 – μετατροπή σε κλάσματα:

$$\text{α)} \quad \frac{7}{3} + \frac{7}{4} = \frac{28}{12} + \frac{21}{12} = \frac{49}{12} = 4\frac{1}{12}.$$

$$\text{β)} \quad \frac{31}{6} - \frac{11}{4} = \frac{62}{12} - \frac{33}{12} = \frac{29}{12} = 2\frac{5}{12}.$$

Τρόπος 2 – ακέραια με ακέραια, κλάσματα με κλάσματα (για την πρόσθεση):

$$\text{α)} \quad (2 + 1) + \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) = 3 + \frac{13}{12} = 3 + 1\frac{1}{12} = 4\frac{1}{12}.$$

4 Ιδιότητες – Προβλήματα

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Η πρόσθεση κλασμάτων έχει τις ίδιες ιδιότητες με την πρόσθεση φυσικών: **αντιμεταθετική**, **προσεταιριστική** και ουδέτερο στοιχείο το 0. Έτσι μπορούμε να ομαδοποιούμε έξυπνα: $\frac{2}{7} + \frac{3}{5} + \frac{5}{7} = \left(\frac{2}{7} + \frac{5}{7}\right) + \frac{3}{5} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$.



Παράδειγμα 5

Ένας κηπουρός φύτεψε την Δευτέρα τα $\frac{2}{5}$ ενός κήπου και την Τρίτη τα $\frac{1}{3}$. Τι μέρος του κήπου του μένει να φυτέψει;

ΛΥΣΗ

Φύτεψε συνολικά $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$ του κήπου. Ολόκληρος ο κήπος είναι $1 = \frac{15}{15}$, άρα μένουν $\frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$ του κήπου.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Σε προβλήματα, **ολόκληρη** η ποσότητα (ο κήπος, το βιβλίο, η διαδρομή) αντιστοιχεί στον αριθμό 1, που μπορούμε να γράψουμε όπως μας βολεύει: $\frac{15}{15}$, $\frac{8}{8}$, κ.λπ.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Δες στο mathgreece.com το βίντεο «Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων βήμα-βήμα» και εξασκήσου με τα κουίζ αυτόματης διόρθωσης.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 2.4

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Να υπολογίσεις:

α) $\frac{4}{15} + \frac{7}{15}$

β) $\frac{13}{20} - \frac{3}{20}$

γ) $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} - \frac{2}{6}$

δ) $\frac{9}{8} - \frac{1}{8} + \frac{3}{8}$

2 ●●● Να υπολογίσεις:

α) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

β) $\frac{5}{6} - \frac{3}{8}$

γ) $\frac{3}{10} + \frac{4}{15}$

δ) $\frac{7}{9} - \frac{1}{6}$

ε) $2 - \frac{5}{7}$

ζ) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{12}$

3 ●●● Να υπολογίσεις: α) $3\frac{1}{2} + 2\frac{2}{5}$, β) $4\frac{1}{3} - 1\frac{5}{6}$, γ) $6 - 2\frac{3}{8}$.

4 ●●● Να υπολογίσεις με τον πιο σύντομο τρόπο: $\frac{5}{9} + \frac{3}{11} + \frac{4}{9} + \frac{8}{11}$.

5 ●●● Να υπολογίσεις: α) $\frac{5}{6} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$, β) $\left(2 - \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right)$.

6 ●●● Να βρεις τον αριθμό που λείπει: α) $\frac{3}{8} + \square = \frac{7}{8}$, β) $\square - \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$, γ) $\frac{5}{6} - \square = \frac{1}{4}$.

- 7 ●●● Ένα βαρέλι ήταν γεμάτο κρασί. Τον Σεπτέμβριο ξοδεύτηκε το $\frac{1}{4}$, τον Οκτώβριο το $\frac{1}{3}$ και τον Νοέμβριο το $\frac{1}{6}$ του βαρελιού. Τι μέρος του βαρελιού έμεινε; Αν έμειναν 45 λίτρα, πόσα λίτρα χωράει το βαρέλι;
- 8 ●●● Μια σκυταλοδρομία έχει 4 διαδρομές. Οι τρεις πρώτοι δρομείς έτρεξαν $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{10}$ και $\frac{1}{4}$ της συνολικής απόστασης. Τι μέρος έτρεξε ο τέταρτος; Ποιος έτρεξε την περισσότερη απόσταση;
- 9 ●●● Η Άννα λέει: « $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{5}{7}$ ». Να εξηγήσεις χωρίς να κάνεις την πρόσθεση γιατί σίγουρα κάνει λάθος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Μάθημα 2.5

Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τον κανόνα του **πολλαπλασιασμού** κλασμάτων και τι σημαίνει
- ✓ να **απλοποιείς πριν** πολλαπλασιάσεις
- ✓ τι είναι οι **αντίστροφοι** αριθμοί
- ✓ τις **ιδιότητες** του πολλαπλασιασμού κλασμάτων

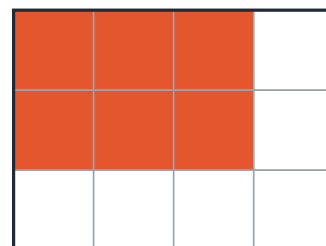
1 Πολλαπλασιασμός φυσικού με κλάσμα

Ο πολλαπλασιασμός $3 \cdot \frac{2}{7}$ σημαίνει, όπως και στους φυσικούς, επαναλαμβανόμενη πρόσθεση: $\frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$. Άρα $3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7}$: πολλαπλασιάζουμε μόνο τον **αριθμητή**.

2 Πολλαπλασιασμός κλάσματος με κλάσμα

Τι σημαίνει $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$; Σημαίνει «τα $\frac{2}{3}$ **του** $\frac{3}{4}$ ». Στο σχήμα, χρωμάτισαμε κάθετα τα $\frac{3}{4}$ ενός τετραγώνου και μετά οριζόντια τα $\frac{2}{3}$ από αυτό. Το διπλοχρωματισμένο κομμάτι αποτελείται από $2 \cdot 3 = 6$ κουτάκια από τα $3 \cdot 4 = 12$ συνολικά. Άρα:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$



Τα $2/3$ των $3/4$: 6 από τα 12 κουτάκια

ΚΑΝΟΝΑΣ

Για να πολλαπλασιάσουμε κλάσματα, πολλαπλασιάζουμε **αριθμητή με αριθμητή** και **παρονομαστή με παρονομαστή**:

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$$

Η λέξη «**του**» (π.χ. «τα $\frac{2}{3}$ του $\frac{3}{4}$ », «τα $\frac{3}{5}$ των 40 €») σημαίνει **πολλαπλασιασμό**.



Παράδειγμα 1

Να υπολογίσεις: α) $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$, β) $\frac{3}{8} \cdot 16$, γ) $\frac{7}{10} \cdot \frac{5}{14}$.

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}.$$

$$\beta) \frac{3}{8} \cdot \frac{16}{1} = \frac{48}{8} = 6.$$

$$\gamma) \frac{7 \cdot 5}{10 \cdot 14} = \frac{35}{140} = \frac{1}{4}.$$

3 Απλοποίηση πριν από τον πολλαπλασιασμό

Στο (γ) του προηγούμενου παραδείγματος φτιάξαμε μεγάλους αριθμούς (35 και 140) μόνο και μόνο για να τους απλοποιήσουμε μετά. Πιο έξυπνο είναι να **απλοποιήσουμε πριν** πολλαπλασιάσουμε: μπορούμε να απλοποιήσουμε **οποιοδήποτε αριθμητή με οποιοδήποτε παρονομαστή**.



Παράδειγμα 2

Να υπολογίσεις με απλοποίηση: α) $\frac{7}{10} \cdot \frac{5}{14}$, β) $\frac{9}{16} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{10}{3}$.

ΛΥΣΗ

α) Το 7 με το 14 (διαιρούμε με 7) και το 5 με το 10 (διαιρούμε με 5):

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{5}{14} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

β) $\frac{9 \cdot 8 \cdot 10}{16 \cdot 15 \cdot 3}$: το 9 με το 3 → 3 και 1, το 8 με το 16 → 1 και 2, το 10 με το 15 → 2 και 3. Μένει $\frac{3 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 1} = 1$.



ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5}: \text{«απλοποιώ το 4 με το 4»} = \frac{3}{1} + \frac{1}{5}$$

✓ ΣΩΣΤΟ

Στην **πρόσθεση** δεν απλοποιούμε

$$\text{«σταυρωτά»}: \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{15}{20} + \frac{16}{20} = \frac{31}{20}$$

Η απλοποίηση αριθμητή του ενός με παρονομαστή του άλλου επιτρέπεται **μόνο στον πολλαπλασιασμό**, γιατί εκεί όλα γίνονται ένα κλάσμα $\frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$. Στην πρόσθεση δεν ισχύει!

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

$$2\frac{1}{2} \cdot 2 = 4\frac{1}{2} \text{ ή } 4\frac{2}{2} \text{ (επί 2 μόνο ένα μέρος)}$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$2\frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{5}{2} \cdot 2 = 5$$

Πριν πολλαπλασιάσουμε έναν μεικτό, τον μετατρέπουμε σε **κλάσμα**. Αν θέλουμε να τον κρατήσουμε μεικτό, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε **και** το ακέραιο **και** το κλασματικό μέρος (επιμεριστική): $2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 4 + 1 = 5$.

4 Αντίστροφοι αριθμοί

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο αριθμοί λέγονται **αντίστροφοι** όταν το **γινόμενο** τους είναι ίσο με 1. Ο αντίστροφος του κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ (με $\alpha, \beta \neq 0$) είναι το $\frac{\beta}{\alpha}$: **αναποδογυρίζουμε** το κλάσμα.

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1 \quad 7 \cdot \frac{1}{7} = 1$$



Παράδειγμα 3

Να βρεις τους αντίστροφους των: $\frac{2}{9}$, 8, $\frac{1}{6}$, 1, $2\frac{1}{4}$.

ΛΥΣΗ

- Του $\frac{2}{9}$ είναι το $\frac{9}{2}$.
- Του $8 = \frac{8}{1}$ είναι το $\frac{1}{8}$.
- Του $\frac{1}{6}$ είναι το 6.
- Του 1 είναι το 1 (ο μόνος αριθμός που είναι αντίστροφος του εαυτού του).
- $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$, άρα ο αντίστροφος είναι το $\frac{4}{9}$ (**όχι** το $2\frac{4}{1}$!).



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Το 0 **δεν έχει αντίστροφο**, γιατί $0 \cdot (\text{οτιδήποτε}) = 0$ και ποτέ 1. Αυτό συνδέεται με το ότι δεν διαιρούμε με το μηδέν.

5 Ιδιότητες

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

Για κλάσματα ισχύουν όλες οι ιδιότητες που ξέρουμε: **αντιμεταθετική**, **προσεταιριστική**, $\alpha \cdot 1 = \alpha$, $\alpha \cdot 0 = 0$, καθώς και η **επιμεριστική**:

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} + \frac{\varepsilon}{\zeta} \right) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta}$$



Παράδειγμα 4

Να υπολογίσεις με δύο τρόπους: $12 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6} \right)$.

ΛΥΣΗ

1ος τρόπος: $12 \cdot \left(\frac{9}{12} - \frac{2}{12} \right) = 12 \cdot \frac{7}{12} = 7$.

2ος τρόπος (επιμεριστική): $12 \cdot \frac{3}{4} - 12 \cdot \frac{1}{6} = 9 - 2 = 7$.



ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΥΣΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με **γνήσιο** κλάσμα, το αποτέλεσμα **μικραίνει**:

$20 \cdot \frac{3}{4} = 15 < 20$. Ο πολλαπλασιασμός **δεν μεγαλώνει πάντα** — μεγαλώνει μόνο όταν πολλαπλασιάζουμε με αριθμό μεγαλύτερο του 1.



Παράδειγμα 5

Ένα οικοπέδο έχει εμβαδόν 1.200 m^2 . Τα $\frac{3}{8}$ του είναι κήπος και τα $\frac{2}{5}$ **του κήπου** είναι φυτεμένα με τριανταφυλλίες. Πόσα m^2 είναι οι τριανταφυλλίες; Τι μέρος του οικοπέδου είναι;

ΛΥΣΗ

Τριανταφυλλίες: $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} \cdot 1.200 = \frac{6}{40} \cdot 1.200 = \frac{3}{20} \cdot 1.200 = 180 \text{ m}^2$. Είναι τα $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{20}$ του οικοπέδου.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο που εξηγεί με εικόνες γιατί «αριθμητής επί αριθμητή», καθώς και κουίζ για την απλοποίηση πριν από τον πολλαπλασιασμό.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 2.5

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Να υπολογίσεις:

α) $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}$

β) $5 \cdot \frac{4}{15}$

γ) $\frac{6}{25} \cdot \frac{5}{12}$

δ) $\frac{9}{14} \cdot \frac{7}{18}$

ε) $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{2}$

ζ) $\frac{11}{6} \cdot 0$

2 ●●● Να βρεις: α) τα $\frac{3}{4}$ του $\frac{2}{9}$, β) το μισό του $\frac{5}{6}$, γ) τα $\frac{2}{3}$ των $\frac{3}{4}$ του 60.3 ●●● Να γράψεις τους αντίστροφους: α) $\frac{5}{11}$, β) 12, γ) $\frac{1}{9}$, δ) $3\frac{2}{3}$, ε) $\frac{10}{10}$.4 ●●● Να υπολογίσεις: α) $1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{3}$, β) $3\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{5}$, γ) $2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{3}$.5 ●●● Να υπολογίσεις: α) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{5}$, β) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{6}{5}$, γ) $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{8}$.6 ●●● Ένα αυτοκίνητο καταναλώνει $\frac{3}{40}$ του λίτρου βενζίνη ανά χιλιόμετρο. Πόση βενζίνη θα καταναλώσει σε 120 km; Αν η βενζίνη κοστίζει $\frac{9}{5}$ € το λίτρο, πόσο θα κοστίσει η διαδρομή;7 ●●● Σε ένα σχολείο με 480 μαθητές, τα $\frac{5}{8}$ είναι κορίτσια. Τα $\frac{2}{3}$ των κοριτσιών και τα $\frac{3}{4}$ των αγοριών αθλούνται. Πόσοι μαθητές αθλούνται συνολικά;8 ●●● Ποιος αριθμός, αν πολλαπλασιαστεί με το $\frac{4}{9}$, δίνει 1; Ποιος αριθμός, αν πολλαπλασιαστεί με το $\frac{4}{9}$, δίνει $\frac{2}{3}$;9 ●●● Σωστό ή Λάθος; α) Ο αντίστροφος του $\frac{1}{4}$ είναι το 4. β) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. γ) Αν πολλαπλασιάσουμε το 10 με το $\frac{7}{8}$, βρίσκουμε αριθμό μικρότερο του 10. δ) Το γινόμενο δύο γνήσιων κλασμάτων είναι γνήσιο κλάσμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Μάθημα 2.6

Διαίρεση κλασμάτων

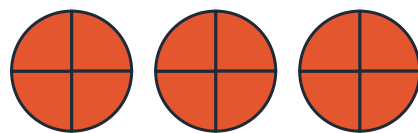
ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ ότι η διαίρεση γίνεται **πολλαπλασιασμός με τον αντίστροφο**
- ✓ να διαιρείς κλάσματα, φυσικούς και μεικτούς
- ✓ να υπολογίζεις **σύνθετα κλάσματα**
- ✓ να λύνεις **προβλήματα** και αριθμητικές παραστάσεις με όλες τις πράξεις

1 Τι σημαίνει διαίρεση με κλάσμα;

Η ερώτηση $3 : \frac{1}{4}$ σημαίνει: **πόσα τέταρτα χωράνε στα 3**; Σε κάθε μονάδα χωράνε 4 τέταρτα, άρα στις 3 μονάδες χωράνε $3 \cdot 4 = 12$ τέταρτα. Δηλαδή:

$$3 : \frac{1}{4} = 3 \cdot 4 = 12$$



Στις 3 πίτσες χωράνε 12 τέταρτα

Η διαίρεση με $\frac{1}{4}$ έγινε πολλαπλασιασμός με το 4, τον **αντίστροφο** του $\frac{1}{4}$!

ΚΑΝΟΝΑΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ

Για να διαιρέσουμε έναν αριθμό με ένα κλάσμα, τον **πολλαπλασιάζουμε με τον αντίστροφο** του κλάσματος:

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma} \quad (\beta, \gamma, \delta \neq 0)$$

Το πρώτο κλάσμα μένει ίδιο, η διαίρεση γίνεται πολλαπλασιασμός και το δεύτερο κλάσμα αναποδογυρίζει.



Παράδειγμα 1

Να υπολογίσεις: α) $\frac{3}{5} : \frac{2}{7}$, β) $\frac{8}{9} : \frac{4}{3}$, γ) $\frac{6}{7} : 3$, δ) $5 : \frac{10}{3}$.

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{10}.$$

$$\beta) \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \text{ (απλοποιήσαμε 8 με 4 και 3 με 9).}$$

$$\gamma) \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{7}.$$

$$\delta) 5 \cdot \frac{3}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$$



ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{7} \text{ (αντέστρεψα το πρώτο)}$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2}$$

Αντιστρέφουμε **μόνο τον διαιρέτη**, δηλαδή το κλάσμα που βρίσκεται **μετά** το σύμβολο της διαίρεσης. Ο διαιρετέος μένει ακριβώς όπως είναι.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Όταν διαιρούμε με **γνήσιο** κλάσμα, το αποτέλεσμα **μεγαλώνει**: $6 : \frac{2}{3} = 9 > 6$. Είναι λογικό: στα 6 χωράνε περισσότερα «δύο τρίτα» απ' όσες «μονάδες».

2 Διαίρεση με μεικτούς – Σύνθετα κλάσματα



Παράδειγμα 2

Να υπολογίσεις: $3\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2}$.

ΛΥΣΗ

$$\text{Μετατρέπουμε σε κλάσματα: } \frac{15}{4} : \frac{3}{2} = \frac{15}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}.$$

ΣΥΝΘΕΤΟ ΚΛΑΣΜΑ

Ένα κλάσμα του οποίου ο αριθμητής ή ο παρονομαστής (ή και οι δύο) είναι κλάσματα, λέγεται **σύνθετο κλάσμα**. Αφού η κλασματική γραμμή σημαίνει διαίρεση:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

Ένας χρήσιμος κανόνας μνήμης: «**άκρα επί άκρα, μέσα επί μέσα**» — το γινόμενο των «άκρων» όρων (α και δ) πάει στον αριθμητή και το γινόμενο των «μέσων» (β και γ) στον παρονομαστή.

2

ΚΛΑΣΜΑΤΑ



Παράδειγμα 3

Να υπολογίσεις: α) $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{10}{9}}$, β) $\frac{4}{\frac{2}{5}}$, γ) $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}}$.

ΛΥΣΗ

α) Άκρα: $5 \cdot 9 = 45$, μέσα: $6 \cdot 10 = 60$: $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$.

β) $4 : \frac{2}{5} = 4 \cdot \frac{5}{2} = 10$.

γ) Υπολογίζουμε χωριστά αριθμητή και παρονομαστή: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ και $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Άρα το κλάσμα είναι $\frac{5}{6} : \frac{5}{6} = 1$.



ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

$$\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Σε σύνθετο κλάσμα πρόσεχε **ποια είναι η κύρια κλασματική γραμμή** (η πιο μακριά). Εδώ το $\frac{1}{2}$ διαιρείται με το 3. Το μισό ενός πράγματος μοιρασμένο σε 3 δίνει **ένα έκτο**, όχι ενάμισι!

3

Αριθμητικές παραστάσεις και προβλήματα

Η σειρά των πράξεων με κλάσματα είναι ακριβώς ίδια με αυτήν των φυσικών: **παρενθέσεις** → **δυνάμεις** → **πολλαπλασιασμοί/διαίρεσεις** → **προσθέσεις/αφαιρέσεις**.



Παράδειγμα 4

Να υπολογίσεις: $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} : \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}$.

ΛΥΣΗ

Πρώτα διαίρεση και πολλαπλασιασμός: $\frac{5}{6} : \frac{5}{4} = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ και $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$. Τότε: $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.



Παράδειγμα 5

Μια κανάτα χωράει $1\frac{1}{2}$ λίτρα λεμονάδα. Πόσα ποτήρια των $\frac{1}{4}$ του λίτρου γεμίζει; Πόσα ποτήρια των $\frac{1}{5}$ του λίτρου;

ΛΥΣΗ

$1\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$ ποτήρια. $\frac{3}{2} : \frac{1}{5} = \frac{3}{2} \cdot 5 = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$, δηλαδή γεμίζει 7 ποτήρια και ένα ακόμη μισογεμάτο.



Παράδειγμα 6

Ένα ύφασμα μήκους $\frac{9}{2}$ m κόβεται σε κομμάτια μήκους $\frac{3}{8}$ m το καθένα. Πόσα κομμάτια θα προκύψουν;

ΛΥΣΗ

$\frac{9}{2} : \frac{3}{8} = \frac{9}{2} \cdot \frac{8}{3} = 12$ κομμάτια.



ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ο κανόνας «αναποδογύρισε και πολλαπλασίασε» είναι γνωστός εδώ και πολλούς αιώνες· τον περιγράφει ήδη ο Ινδός μαθηματικός **Μαχαβίρα** τον 9ο αιώνα. Οι μαθητές συχνά τον μαθαίνουν ως «κράτα – άλλαξε – γύρνα»: **κράτα** το πρώτο, **άλλαξε** το σύμβολο σε $\cdot$, **γύρνα** το δεύτερο.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για τη διαίρεση και τα σύνθετα κλάσματα, και ένα μεγάλο επαναληπτικό κουίζ για όλες τις πράξεις με κλάσματα.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 2.6

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Να υπολογίσεις:

α) $\frac{4}{7} : \frac{2}{3}$
δ) $6 : \frac{3}{5}$

β) $\frac{5}{12} : \frac{10}{9}$
ε) $\frac{7}{8} : \frac{7}{8}$

γ) $\frac{9}{10} : 3$
ζ) $0 : \frac{2}{9}$

2 ●●● Να υπολογίσεις: α) $2\frac{1}{4} : \frac{3}{2}$, β) $4 : 1\frac{1}{3}$, γ) $3\frac{1}{3} : 2\frac{2}{9}$.

3 ●●● Να υπολογίσεις τα σύνθετα κλάσματα:

α) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{8}}$

β) $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{4}}$

γ) $\frac{\frac{6}{3}}{\frac{7}{7}}$

δ) $\frac{1 - \frac{2}{5}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{10}}$

4 ●●● Να υπολογίσεις: α) $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, β) $\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) : \frac{3}{4}$, γ) $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9} : \frac{2}{3}$.5 ●●● Ένα μπουκάλι χωράει $\frac{3}{4}$ του λίτρου. Πόσα μπουκάλια χρειάζονται για να εμφιαλωθούν 60 λίτρα λαδιού;6 ●●● Τα $\frac{2}{3}$ ενός αριθμού είναι $\frac{8}{15}$. Ποιος είναι ο αριθμός;7 ●●● Ένας πεζοπόρος περπατάει $\frac{9}{2}$ km την ώρα. Σε πόσο χρόνο θα διανύσει $13\frac{1}{2}$ km; Πόσα km θα διανύσει σε $\frac{2}{3}$ της ώρας;8 ●●● Ένας πατέρας μοίρασε ένα ποσό στα τρία παιδιά του. Το πρώτο πήρε τα $\frac{2}{5}$ του ποσού, το δεύτερο τα $\frac{3}{4}$ του υπολοίπου και το τρίτο τα υπόλοιπα 90 €. Πόσο ήταν το ποσό;9 ●●● Να συμπληρώσεις τα κενά: α) $\frac{5}{6} : \square = \frac{5}{3}$, β) $\square : \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$, γ) $\frac{7}{10} \cdot \square = 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ανακεφαλαίωση

Όλο το κεφάλαιο σε λίγες σελίδες & επαναληπτικές ασκήσεις

1 Η θεωρία με μια ματιά

2

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Η έννοια του κλάσματος

- $\frac{\kappa}{\nu}$: ν ίσα μέρη, παίρνουμε κ
- $\frac{\kappa}{\nu} = \kappa : \nu$, με $\nu \neq 0$
- Γνήσιο < 1 · καταχρηστικό ≥ 1 · μεικτός = ακέραιος + γνήσιο

Μέρος και όλο

- Μέρος από όλο: $\frac{\kappa}{\nu} \cdot (\text{όλο})$
- Όλο από μέρος: (μέρος) : $\frac{\kappa}{\nu}$
- Ολόκληρη ποσότητα = 1

Ισοδύναμα κλάσματα

- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\lambda}{\beta\lambda}$ (επί ή διά τον ίδιο αριθμό)
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \alpha\delta = \beta\gamma$
- Ανάγωγο: διαίρεση με τον Μ.Κ.Δ.

Σύγκριση

- Ομώνυμα: μεγαλύτερος αριθμητής
- Ίδιος αριθμητής: μικρότερος παρονομαστής
- Ετερόνυμα: ομώνυμα ή χιαστί

Πρόσθεση – Αφαίρεση

- Μόνο με **ομώνυμα** (Ε.Κ.Π. παρονομαστών)
- Προσθέτουμε αριθμητές, ίδιος παρονομαστής
- Μεικτοί $\rightarrow$ κλάσματα

Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση

- $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ («του» = επί)
- Αντίστροφοι: γινόμενο 1
- $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$



Η ΓΛΑΥΚΑ ΘΥΜΙΖΕΙ

Τα **κλασικά λάθη** του κεφαλαίου: (1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$, (2) «σταυρωτή» απλοποίηση σε πρόσθεση, (3) αντιστροφή του λάθος κλάσματος στη διαίρεση, (4) πράξεις με μεικτούς χωρίς μετατροπή. Κάθε φορά που τελειώνεις μια άσκηση, κάνε έναν **έλεγχο λογικής**: «είναι λογικό το μέγεθος του αποτελέσματος;»



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Κάνε το μεγάλο επαναληπτικό κουίζ «Κλάσματα» στο mathgreece.com πριν από το διαγώνισμα — με αυτόματη διόρθωση και εξηγήσεις.



★ Επαναληπτικές ασκήσεις

Κεφάλαιο 2

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Να υπολογίσεις: $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$.

2 ●●● Να υπολογίσεις: $\left(1\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{6}{5} + \frac{1}{4} : \frac{5}{8}$.

3 ●●● Να υπολογίσεις: $\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{5}{6} + \frac{1}{4}}$.

4 ●●● Να γράψεις σε φθίνουσα σειρά: $\frac{7}{10}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{11}{15}, \frac{5}{6}$.

5 ●●● Ένα σχολείο έχει 540 μαθητές. Τα $\frac{4}{9}$ είναι στην Α' τάξη και το $\frac{1}{3}$ στη Β'. Πόσοι μαθητές είναι στη Γ' τάξη; Τι μέρος του σχολείου είναι;

6 ●●● Μια δεξαμενή γεμίζει από μια βρύση σε 6 ώρες. Τι μέρος της δεξαμενής γεμίζει σε 1 ώρα; Σε $2\frac{1}{2}$ ώρες;

7 ●●● Μια οικογένεια ξοδεύει το $\frac{1}{4}$ του μηνιαίου εισοδήματός της για ενοίκιο, το $\frac{1}{3}$ για τρόφιμα και τα $\frac{2}{5}$ του υπολοίπου για λογαριασμούς. Της μένουν 360 €. Ποιο είναι το εισόδημα;

8 ●●● Να βρεις τον αριθμό που λείπει: α) $\frac{3}{5} \cdot \square = \frac{9}{20}$, β) $\square - 1\frac{1}{4} = \frac{5}{6}$, γ) $\frac{x}{18} = \frac{10}{12}$.

9 ●●● Ποιο κλάσμα βρίσκεται ακριβώς στη μέση ανάμεσα στα $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{2}$ πάνω στην ευθεία;

10 ●●● Σωστό ή Λάθος; α) $\frac{2}{3} + \frac{3}{2} > 2$. β) $\frac{3}{4} : \frac{3}{4} = 0$. γ) Αν διαιρέσουμε το 5 με το $\frac{1}{2}$, βρίσκουμε 10. δ) Το $\frac{14}{21}$ είναι ανάγωγο.

3

Κεφάλαιο 3
Δεκαδικοί αριθμοί

Τιμές στο σούπερ μάρκετ, χρόνοι στον στίβο, θερμοκρασίες, αποστάσεις: οι **δεκαδικοί αριθμοί** είναι παντού γύρω μας. Σε αυτό το κεφάλαιο μαθαίνουμε να τους διαβάζουμε, να τους **συγκρίνουμε** και να κάνουμε με αυτούς **όλες τις πράξεις**, να χρησιμοποιούμε σωστά το **κομπιουτεράκι**, να γράφουμε **τεράστιους αριθμούς** με δυνάμεις του 10 και να μετατρέπουμε **μονάδες μέτρησης**.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 3.1 Δεκαδικά κλάσματα – Δεκαδικοί – Διάταξη – Στρογγυλοποίηση
- 3.2 Πράξεις με δεκαδικούς – Δυνάμεις
- 3.3 Υπολογισμοί με υπολογιστή τσέπης
- 3.4 Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών
- 3.5 Μονάδες μέτρησης
- ★ Ανακεφαλαίωση & επαναληπτικές ασκήσεις



Βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις και κουίζ
για όλο το κεφάλαιο, δωρεάν στο
mathgreece.com

0,5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 3.1

Δεκαδικά κλάσματα – Δεκαδικοί αριθμοί –
Διάταξη δεκαδικών – Στρογγυλοποίηση

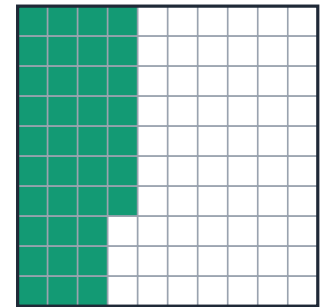
ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τι είναι τα **δεκαδικά κλάσματα** και πώς γράφονται ως **δεκαδικοί αριθμοί**
- ✓ τις θέσεις μετά την υποδιαστολή: **δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά**
- ✓ να **συγκρίνεις** και να **διατάσσεις** δεκαδικούς αριθμούς
- ✓ να **στρογγυλοποιείς** δεκαδικούς αριθμούς

1 Δεκαδικά κλάσματα

Χωρίζουμε ένα τετράγωνο σε 100 ίσα τετραγωνάκια. Κάθε στήλη είναι $\frac{1}{10}$ του τετραγώνου (ένα **δέκατο**) και κάθε τετραγωνάκι είναι $\frac{1}{100}$ (ένα **εκατοστό**).

Στο σχήμα χρωμάτισαμε 3 ολόκληρες στήλες και 7 ακόμη τετραγωνάκια, δηλαδή 37 εκατοστά: $\frac{37}{100}$ του τετραγώνου.



37 από τα 100 τετραγωνάκια:
 $37/100 = 0,37$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δεκαδικό κλάσμα λέγεται κάθε κλάσμα που έχει παρονομαστή 10, 100, 1.000, ... (δηλαδή μια δύναμη του 10). Π.χ. $\frac{3}{10}$, $\frac{37}{100}$, $\frac{2.025}{1.000}$.

2 Δεκαδικοί αριθμοί

Τα δεκαδικά κλάσματα γράφονται πολύ πιο σύντομα με τη βοήθεια της **υποδιαστολής** (το κόμμα):

$$\frac{3}{10} = 0,3 \quad \frac{37}{100} = 0,37 \quad \frac{2.025}{1.000} = 2,025 \quad \frac{405}{100} = 4,05$$

Αριθμοί όπως ο 2,025 λέγονται **δεκαδικοί αριθμοί**. Τα ψηφία **πριν** την υποδιαστολή αποτελούν το **ακέραιο μέρος** και τα ψηφία **μετά** την υποδιαστολή το **δεκαδικό μέρος**.

Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	,	Δέκατα	Εκατοστά	Χιλιοστά	Δεκάκις χιλιοστά
			2	,	0	2	5	
	3	1	4	,	1	5	9	2
			0	,	0	0	7	

Η ΑΞΙΑ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΘΕΣΕΩΝ

Όπως και στους φυσικούς, κάθε θέση αξίζει **10 φορές λιγότερο** από τη θέση αριστερά της:

- 1η θέση μετά την υποδιαστολή: **δέκατα** $\left(\frac{1}{10} = 0,1\right)$
- 2η θέση: **εκατοστά** $\left(\frac{1}{100} = 0,01\right)$
- 3η θέση: **χιλιοστά** $\left(\frac{1}{1.000} = 0,001\right)$
- 4η θέση: **δεκάκις χιλιοστά** $\left(\frac{1}{10.000} = 0,0001\right)$

Ο 314,1592 διαβάζεται «τριακόσια δεκατέσσερα **και** χίλια πεντακόσια ενενήντα δύο δεκάκις χιλιοστά» ή, πιο απλά, «τριακόσια δεκατέσσερα κόμμα χίλια πεντακόσια ενενήντα δύο».

ΜΕΤΑΤΡΟΠΕΣ

- 1 Δεκαδικό κλάσμα → δεκαδικός:** γράφουμε τον αριθμητή και χωρίζουμε από τα δεξιά με υποδιαστολή **τόσα ψηφία όσα μηδενικά** έχει ο παρονομαστής. Αν δεν φτάνουν τα ψηφία, συμπληρώνουμε **μηδενικά** αριστερά: $\frac{7}{1.000} = 0,007$.
- 2 Δεκαδικός → δεκαδικό κλάσμα:** γράφουμε τον αριθμό χωρίς υποδιαστολή ως αριθμητή και παρονομαστή το 1 με **τόσα μηδενικά όσα δεκαδικά ψηφία** έχει: $3,45 = \frac{345}{100}$.



Παράδειγμα 1

α) Να γράψεις ως δεκαδικούς: $\frac{9}{10}$, $\frac{56}{1.000}$, $\frac{1.203}{100}$, $\frac{8}{10.000}$. **β)** Να γράψεις ως δεκαδικά κλάσματα και να απλοποιήσεις: 0,6 και 2,75.

ΛΥΣΗ

α) 0,9, 0,056, 12,03, 0,0008.

β) $0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ και $2,75 = \frac{275}{100} = \frac{11}{4}$.

ΜΗΔΕΝΙΚΑ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ

Αν γράψουμε ή σβήσουμε **μηδενικά στο τέλος του δεκαδικού μέρους**, ο αριθμός **δεν αλλάζει**:

$$0,5 = 0,50 = 0,500 \quad \left(\frac{5}{10} = \frac{50}{100} = \frac{500}{1.000} \right)$$

Προσοχή όμως: τα μηδενικά **ανάμεσα** σε ψηφία ή **αμέσως μετά** την υποδιαστολή **δεν σβήνονται**:
 $0,05 \neq 0,5$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

$$\frac{7}{100} = 0,7$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$\frac{7}{100} = 0,07$$

Ο παρονομαστής 100 έχει **δύο** μηδενικά, άρα θέλουμε **δύο** δεκαδικά ψηφία. Αφού ο αριθμητής έχει ένα ψηφίο, συμπληρώνουμε με ένα μηδενικό: 0,07 (επτά εκατοστά).

3 Σύγκριση και διάταξη δεκαδικών

ΠΩΣ ΣΥΓΚΡΙΝΟΥΜΕ ΔΥΟ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥΣ

- 1 Συγκρίνουμε πρώτα τα **ακέραια μέρη**. Μεγαλύτερος είναι αυτός με το μεγαλύτερο ακέραιο μέρος.
- 2 Αν είναι ίσα, **φέρνουμε τους αριθμούς στο ίδιο πλήθος δεκαδικών ψηφίων** (γράφοντας μηδενικά στο τέλος) και συγκρίνουμε τα δεκαδικά ψηφία από αριστερά προς τα δεξιά: δέκατα με δέκατα, εκατοστά με εκατοστά κ.ο.κ.



Παράδειγμα 2

Να συγκρίνεις: **α)** 12,9 και 9,99, **β)** 3,7 και 3,65, **γ)** 0,08 και 0,075.

ΛΥΣΗ

α) Ακέραια μέρη: $12 > 9$, άρα $12,9 > 9,99$.

β) Ίσα ακέραια μέρη. Γράφουμε 3,70 και 3,65: δέκατα $7 > 6$, άρα $3,7 > 3,65$.

γ) Γράφουμε 0,080 και 0,075: δέκατα ίσα (0), εκατοστά $8 > 7$, άρα $0,08 > 0,075$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

« $3,65 > 3,7$, γιατί $65 > 7$ »

✓ ΣΩΣΤΟ

$3,70 > 3,65$, γιατί 70 εκατοστά $>$ 65 εκατοστά

Το δεκαδικό μέρος **δεν** συγκρίνεται σαν φυσικός αριθμός. Το 3,7 έχει 7 **δέκατα**, ενώ το 3,65 μόνο 6 **δέκατα**. Φέρνε πάντα τους αριθμούς στο ίδιο πλήθος δεκαδικών ψηφίων πριν τους συγκρίνεις.



Ανάμεσα στο 2 και στο 3: κάθε μεγάλο διάστημα είναι 0,1 και κάθε μικρό 0,02.



Παράδειγμα 3

Να γράψεις σε αύξουσα σειρά: 0,5, 0,45, 0,505, 0,055, 0,4.

ΛΥΣΗ

Τους γράφουμε όλους με τρία δεκαδικά ψηφία: 0,500, 0,450, 0,505, 0,055, 0,400. Συγκρίνουμε σαν 500, 450, 505, 55, 400 χιλιοστά:

$$0,055 < 0,4 < 0,45 < 0,5 < 0,505$$

4 Στρογγυλοποίηση δεκαδικών

Ο κανόνας είναι **ακριβώς ο ίδιος** με τους φυσικούς: κοιτάμε **το αμέσως επόμενο ψηφίο** από τη θέση στρογγυλοποίησης. Η μόνη διαφορά είναι ότι τα ψηφία δεξιά της θέσης στρογγυλοποίησης που βρίσκονται **μετά την υποδιαστολή παραλείπονται** (δεν γράφουμε μηδενικά).



Παράδειγμα 4

Να στρογγυλοποιήσεις τον 47,3862: **α)** στον πλησιέστερο ακέραιο (μονάδες), **β)** στα δέκατα, **γ)** στα εκατοστά, **δ)** στα χιλιοστά, **ε)** στις δεκάδες.

ΛΥΣΗ

α) Μονάδες: 7, επόμενο $3 < 5 \Rightarrow 47$.

β) Δέκατα: 3, επόμενο $8 \geq 5 \Rightarrow 47,4$.

γ) Εκατοστά: 8, επόμενο $6 \geq 5 \Rightarrow 47,39$.

δ) Χιλιοστά: 6, επόμενο $2 < 5 \Rightarrow 47,386$.

ε) Δεκάδες: 4, επόμενο $7 \geq 5 \Rightarrow 50$.



Παράδειγμα 5

Να στρογγυλοποιήσεις στα εκατοστά: **α)** 5,996, **β)** 0,0049, **γ)** 12,8.

ΛΥΣΗ

α) Το 9 των εκατοστών γίνεται «10», οπότε μεταφέρεται κρατούμενο: $5,996 \approx 6,00$. Γράφουμε 6,00 για να φαίνεται ότι στρογγυλοποιήσαμε στα εκατοστά.

β) Εκατοστά: 0, επόμενο $4 < 5 \Rightarrow 0,00$.

γ) Ο 12,8 έχει μόνο δέκατα· γράφουμε 12,80.

**ΠΡΟΣΟΧΗ!**

Στα **χρήματα** στρογγυλοποιούμε σχεδόν πάντα **στα εκατοστά**, γιατί το εκατοστό του ευρώ είναι το **λεπτό**: $12,347 \text{ €} \approx 12,35 \text{ €}$.

**ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...**

Η υποδιαστολή δεν είναι παντού κόμμα! Στις αγγλόφωνες χώρες χρησιμοποιούν **τελεία** (3.14) και κόμμα για τις χιλιάδες (1,000). Γι' αυτό και οι υπολογιστές τσέπης δείχνουν συχνά τελεία στη θέση της υποδιαστολής. Τους δεκαδικούς αριθμούς τους διέδωσε στην Ευρώπη ο Φλαμανδός **Σίμων Στέβιν** το 1585.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για τους δεκαδικούς αριθμούς, τη σύγκριση και τη στρογγυλοποίηση, καθώς και παιχνίδι γνώσεων με την ευθεία των αριθμών.



3

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ

★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 3.1

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Να γράψεις ως δεκαδικούς αριθμούς:

$$\alpha) \frac{7}{10} \\ \delta) \frac{3.019}{100}$$

$$\beta) \frac{43}{100} \\ \epsilon) \frac{60}{1.000}$$

$$\gamma) \frac{5}{1.000} \\ \zeta) 12 \frac{3}{100}$$

2 ●●● Να γράψεις ως δεκαδικά κλάσματα και, αν γίνεται, να απλοποιήσεις: **α)** 0,8, **β)** 1,25, **γ)** 0,045, **δ)** 3,5.

3 ●●● Στον αριθμό 608,4153 να γράψεις το ψηφίο: **α)** των δεκάτων, **β)** των χιλιοστών, **γ)** των δεκάδων, **δ)** των δεκάκις χιλιοστών. Ποια είναι η αξία του ψηφίου 5;

4 ●●● Να συμπληρώσεις με <, > ή =: **α)** 0,7 _____ 0,69, **β)** 5,05 _____ 5,5, **γ)** 2,300 _____ 2,3, **δ)** 0,099 _____ 0,1, **ε)** 10,01 _____ 10,001.

5 ●●● Να γράψεις σε φθίνουσα σειρά: 1,2, 1,02, 1,22, 1,202, 1,022.

6 ●●● Να στρογγυλοποιήσεις τον 8,4975: **α)** στον πλησιέστερο ακέραιο, **β)** στα δέκατα, **γ)** στα εκατοστά, **δ)** στα χιλιοστά.

7 ●●● Να βρεις τρεις δεκαδικούς αριθμούς ανάμεσα στο 0,3 και στο 0,31.

8 ●●● Ένας δεκαδικός αριθμός στρογγυλοποιημένος στα δέκατα δίνει 4,7. Ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός με **δύο** δεκαδικά ψηφία;

- 9 ●●● Τέσσερις αθλητές έτρεξαν τα 100 m σε χρόνους: Άρης 10,9 s, Βασίλης 11,05 s, Γιώργος 10,89 s, Δημήτρης 10,95 s. Ποια είναι η σειρά τερματισμού;
- 10 ●●● Να γράψεις τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο δεκαδικό με δύο δεκαδικά ψηφία που μπορείς να σχηματίσεις με τα ψηφία 0, 4, 7 (το καθένα μία φορά).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 3.2

Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς – Δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ να προσθέτεις και να αφαιρείς δεκαδικούς
- ✓ να πολλαπλασιάζεις δεκαδικούς και να πολλαπλασιάζεις/διαιρείς με 10, 100, 1.000 και 0,1, 0,01, ...
- ✓ να διαιρείς με φυσικό ή δεκαδικό αριθμό
- ✓ να μετατρέπεις κλάσμα σε δεκαδικό και να υπολογίζεις **δυνάμεις** δεκαδικών

1 Πρόσθεση και αφαίρεση

ΚΑΝΟΝΑΣ

Γράφουμε τους αριθμούς τον έναν κάτω από τον άλλο, ώστε **οι υποδιαστολές να βρίσκονται στην ίδια στήλη** (δέκατα κάτω από δέκατα, εκατοστά κάτω από εκατοστά). Συμπληρώνουμε, αν θέλουμε, μηδενικά στο τέλος. Κάνουμε την πράξη όπως στους φυσικούς και βάζουμε την υποδιαστολή στο αποτέλεσμα **στην ίδια στήλη**.

$$\begin{array}{r} 12,50 \\ + 3,75 \\ + 0,08 \\ \hline 16,33 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20,000 \\ - 7,385 \\ \hline 12,615 \end{array}$$



Παράδειγμα 1

Να υπολογίσεις: **α)** $12,5 + 3,75 + 0,08$, **β)** $20 - 7,385$, **γ)** $4,6 - 1,25 + 0,7$.

ΛΥΣΗ

α) Στοιχίζοντας τις υποδιαστολές: $12,50 + 3,75 + 0,08 = 16,33$.

β) Γράφουμε $20,000 - 7,385 = 12,615$.

γ) $4,60 - 1,25 = 3,35$ και $3,35 + 0,70 = 4,05$.

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

$$\begin{array}{r} 3,5 \\ + 1,25 \text{ (στοίχιση από δεξιά)} \\ \hline 1,60 \end{array}$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$\begin{array}{r} 3,50 \\ + 1,25 \\ \hline 4,75 \end{array}$$

Στους δεκαδικούς **δεν** στοιχίζουμε τα ψηφία από τα δεξιά όπως στους φυσικούς, αλλά **τις υποδιαστολές**. Συμπλήρωσε μηδενικά ώστε να έχουν όλοι οι αριθμοί το ίδιο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

2 Πολλαπλασιασμός

ΚΑΝΟΝΑΣ

Πολλαπλασιάζουμε τους αριθμούς **σαν να μην είχαν υποδιαστολή**. Στο γινόμενο χωρίζουμε με υποδιαστολή, από τα δεξιά, **τόσα δεκαδικά ψηφία όσα έχουν και οι δύο παράγοντες μαζί**.

Γιατί; Επειδή $2,3 \cdot 0,04 = \frac{23}{10} \cdot \frac{4}{100} = \frac{92}{1.000} = 0,092$: οι παρονομαστές πολλαπλασιάζονται, άρα τα μηδενικά τους (δηλαδή τα δεκαδικά ψηφία) **προστίθενται**.



Παράδειγμα 2

Να υπολογίσεις: **α)** $3,4 \cdot 2,15$, **β)** $0,25 \cdot 0,8$, **γ)** $1,05 \cdot 12$.

ΛΥΣΗ

α) $34 \cdot 215 = 7.310$. Δεκαδικά ψηφία: $1 + 2 = 3$. Άρα $3,4 \cdot 2,15 = 7,310 = 7,31$.

β) $25 \cdot 8 = 200$. Δεκαδικά ψηφία: $2 + 1 = 3$. Άρα $0,200 = 0,2$.

γ) $105 \cdot 12 = 1.260$. Δεκαδικά ψηφία: 2. Άρα $12,60 = 12,6$.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Μετράμε τα δεκαδικά ψηφία **πριν** σβήσουμε μηδενικά. Στο (β) το γινόμενο 200 χρειάζεται 3 δεκαδικά ψηφία: 0,200, και **μετά** σβήνουμε τα μηδενικά του τέλους: 0,2.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΜΕ 10, 100, 1.000, ...

- **Επί** 10, 100, 1.000, ...: μετακινούμε την υποδιαστολή **προς τα δεξιά** κατά 1, 2, 3, ... θέσεις.
 $3,457 \cdot 100 = 345,7$
- **Διά** 10, 100, 1.000, ...: μετακινούμε την υποδιαστολή **προς τα αριστερά** κατά 1, 2, 3, ... θέσεις. $45,2 : 1.000 = 0,0452$

Αν χρειαστεί, συμπληρώνουμε μηδενικά.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΜΕ 0,1 – 0,01 – 0,001

Αφού $0,1 = \frac{1}{10}$, ο πολλαπλασιασμός με 0,1 είναι το ίδιο με τη **διαίρεση** με 10:

$$58 \cdot 0,1 = 58 : 10 = 5,8 \quad 58 \cdot 0,01 = 58 : 100 = 0,58 \quad 58 \cdot 0,001 = 0,058$$

**Παράδειγμα 3**

Να υπολογίσεις νοερά: **α)** $0,072 \cdot 1.000$, **β)** $6,3 : 100$, **γ)** $250 \cdot 0,01$, **δ)** $1,5 \cdot 10^4$.

ΛΥΣΗ

α) Υποδιαστολή 3 θέσεις δεξιά: 72. **β)** 2 θέσεις αριστερά: 0,063. **γ)** $250 : 100 = 2,5$. **δ)** $10^4 = 10.000$: 4 θέσεις δεξιά: 15.000.

3 Διαίρεση**ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΜΕ ΦΥΣΙΚΟ**

- 1** Κάνουμε τη διαίρεση κανονικά.
- 2** Μόλις «κατεβάσουμε» το πρώτο δεκαδικό ψηφίο του διαιρετέου, βάζουμε **υποδιαστολή στο πηλίκο**.
- 3** Αν περισσεύει υπόλοιπο, συνεχίζουμε προσθέτοντας μηδενικά στον διαιρετέο, μέχρι να μηδενιστεί το υπόλοιπο ή να φτάσουμε στην ακρίβεια που θέλουμε.

**Παράδειγμα 4**

Να υπολογίσεις: **α)** $17,4 : 6$, **β)** $3 : 8$, **γ)** $10 : 3$ (με ακρίβεια εκατοστού).

ΛΥΣΗ

α) $17 : 6 = 2$, υπόλοιπο 5. Κατεβάζουμε το 4 (βάζουμε υποδιαστολή): $54 : 6 = 9$. Άρα $17,4 : 6 = 2,9$.

β) $3,000 : 8$: $30 : 8 = 3$ υπ. 6, $60 : 8 = 7$ υπ. 4, $40 : 8 = 5$. Άρα $3 : 8 = 0,375$.

γ) $10 : 3 = 3,333 \dots$ Η διαίρεση δεν τελειώνει ποτέ! Με ακρίβεια εκατοστού: $10 : 3 \approx 3,33$.

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΜΕ ΔΕΚΑΔΙΚΟ

Πολλαπλασιάζουμε **και τον διαιρετέο και τον διαιρέτη** με 10, 100, 1.000, ... ώστε ο **διαιρέτης** να γίνει **φυσικός αριθμός**. Το πηλίκο **δεν αλλάζει** (όπως και στα ισοδύναμα κλάσματα!).

$$4,56 : 0,3 = 45,6 : 3 = 15,2 \quad 7 : 0,25 = 700 : 25 = 28$$

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

$$4,56 : 0,3 \rightarrow «456 : 3 = 152»$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$4,56 : 0,3 = 45,6 : 3 = 15,2$$

Μετακινούμε την υποδιαστολή **κατά τις ίδιες θέσεις** και στους δύο αριθμούς, και τότες ώστε **μόνο ο διαιρέτης** να γίνει φυσικός. Εδώ ο διαιρέτης 0,3 έχει ένα δεκαδικό ψηφίο, άρα μετακινούμε **μία** θέση.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Η διαίρεση με αριθμό **μικρότερο του 1** δίνει αποτέλεσμα **μεγαλύτερο** από τον διαιρετέο: $7 : 0,25 = 28$. (Στα 7 € χωράνε 28 «εικοσιπεντάλεπτα».) Αντίθετα, ο πολλαπλασιασμός με αριθμό μικρότερο του 1 **μικραίνει** τον αριθμό: $7 \cdot 0,25 = 1,75$.

4 Μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό

Αφού το κλάσμα είναι πηλίκο διαίρεσης, για να βρούμε τη δεκαδική του μορφή **διαιρούμε τον αριθμητή με τον παρονομαστή**:

$$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75 \quad \frac{7}{8} = 0,875 \quad \frac{2}{5} = 0,4 \quad \frac{1}{3} = 0,333 \dots \approx 0,33$$

Μερικά κλάσματα δίνουν διαίρεση που «τελειώνει» (π.χ. $\frac{3}{4}$), ενώ άλλα δίνουν διαίρεση που συνεχίζει επ' άπειρον (π.χ. $\frac{1}{3}$). Θα τα μελετήσουμε πιο αναλυτικά στο Μάθημα 7.7.

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{3}$
0,5	0,25	0,75	0,2	0,125	0,1	0,05	0,04	0,333...

Χρήσιμες αντιστοιχίες που αξίζει να θυμάσαι.

5 Δυνάμεις με βάση δεκαδικό – Προτεραιότητα

Ο ορισμός της δύναμης είναι ίδιος: $(0,3)^2 = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$ και $(1,2)^3 = 1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 = 1,728$.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Μια χρήσιμη συντόμευση: το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων του a^n είναι **n φορές** το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων του a . Έτσι $(0,2)^3$ έχει $3 \cdot 1 = 3$ δεκαδικά ψηφία: $2^3 = 8 \Rightarrow (0,2)^3 = 0,008$. Και πρόσεξε: $(0,3)^2 = 0,09$ **όχι** 0,9!



Παράδειγμα 5

Να υπολογίσεις: **α)** $(0,5)^2$, **β)** $(0,1)^4$, **γ)** $(2,5)^2 - 1,5 \cdot 2$, **δ)** $10 \cdot (0,4)^2 + 0,6 : 0,2$.

ΛΥΣΗ

α) 0,25. **β)** 0,0001. **γ)** $6,25 - 3 = 3,25$. **δ)** $10 \cdot 0,16 + 3 = 1,6 + 3 = 4,6$.



Παράδειγμα 6

Σε ένα κατάστημα, ένα παντελόνι κοστίζει 34,90 € και ένα μπλουζάκι 12,45 €. Η Κατερίνα αγόρασε 2 παντελόνια και 3 μπλουζάκια και πλήρωσε με χαρτονόμισμα των 200 €. Πόσα ρέστα πήρε;

ΛΥΣΗ

Κόστος: $2 \cdot 34,90 + 3 \cdot 12,45 = 69,80 + 37,35 = 107,15$ €. Ρέστα: $200 - 107,15 = 92,85$ €.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για όλες τις πράξεις με δεκαδικούς και παιχνίδια γνώσεων «η υποδιαστολή που μετακινείται» για επί/διά 10, 100, 1.000.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 3.2

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1

●●● Να υπολογίσεις:

α) $7,25 + 12,8$

β) $15 - 6,47$

γ) $0,9 + 0,09 + 0,009$

δ) $100 - 0,01$

ε) $3,6 - 1,85 + 0,5$

ζ) $8,02 - (3,5 + 1,9)$

2

●●● Να υπολογίσεις:

α) $4,5 \cdot 3$

β) $0,6 \cdot 0,7$

γ) $2,05 \cdot 1,2$

δ) $0,03 \cdot 0,02$

ε) $12,5 \cdot 0,8$

ζ) $1,1 \cdot 1,1$

3

●●● Να υπολογίσεις νοερά:

α) $3,14 \cdot 100$

β) $0,5 \cdot 1.000$

γ) $72,4 : 10$

δ) $1,3 : 1.000$

ε) $460 \cdot 0,01$

ζ) $0,08 \cdot 10^3$

4

●●● Να κάνεις τις διαιρέσεις: α) $25,2 : 7$, β) $9 : 4$, γ) $1,44 : 1,2$, δ) $6 : 0,15$, ε) $0,5 : 0,002$.

5

●●● Να μετατρέψεις σε δεκαδικούς: α) $\frac{3}{5}$, β) $\frac{9}{20}$, γ) $\frac{5}{8}$, δ) $\frac{7}{4}$, ε) $\frac{2}{3}$ (με ακρίβεια χιλιοστού).

6

●●● Να υπολογίσεις: α) $(0,7)^2$, β) $(0,2)^5$, γ) $(1,5)^2 + (0,5)^3$, δ) $5 - 2 \cdot (1,2)^2$.

7

●●● Να υπολογίσεις: $(4,8 - 2,3) \cdot 0,4 + 3,6 : 1,2 - 0,5^2$.

8

●●● Ένα λίτρο αμόλυβδης κοστίζει 1,85 €. Ο κύριος Παύλος έβαλε 32,5 λίτρα. Πόσα πλήρωσε; (Στρογγυλοποίηση στο λεπτό.)

9

●●● Ένα πακέτο με 6 γιαούρτια κοστίζει 4,74 € ενώ το ένα γιαούρτι χωριστά κοστίζει 0,85 €. Πόσα χρήματα εξοικονομούμε ανά γιαούρτι αν αγοράσουμε το πακέτο;

- 10 ●●● Ποιον αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με 0,25 για να βρούμε 3,5; Με ποιον αριθμό πρέπει να διαιρέσουμε το 4,8 για να βρούμε 16;
- 11 ●●● Ένα ορθογώνιο έχει μήκος 7,5 m και πλάτος 4,2 m. Να βρεις την περίμετρο και το εμβαδόν του. Πόσο κοστίζει να στρωθεί με πλακάκια που κοστίζουν 18,40 € το m^2 ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 3.3

Υπολογισμοί με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης

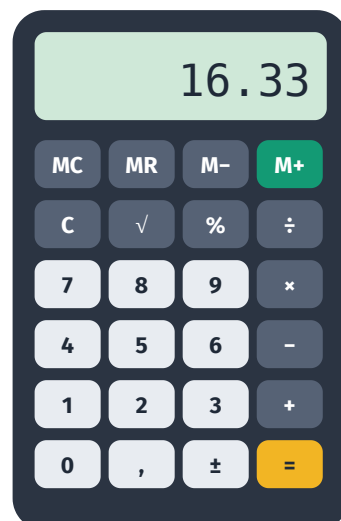
ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ πώς λειτουργούν τα βασικά **πλήκτρα** ενός υπολογιστή τσέπης
- ✓ πώς ο υπολογιστής χειρίζεται την **προτεραιότητα των πράξεων**
- ✓ να χρησιμοποιείς τη **μνήμη** και το πλήκτρο x^2 ή x^y
- ✓ να **εκτιμάς** το αποτέλεσμα για να ελέγχεις τον υπολογιστή

1 Γνωριμία με τον υπολογιστή τσέπης

Ο υπολογιστής τσέπης κάνει γρήγορα και με ακρίβεια τις πράξεις — αν του τις δώσουμε σωστά! Τα βασικά πλήκτρα είναι:

- τα **ψηφία** 0–9 και η **υποδιαστολή** (συνήθως εμφανίζεται ως τελεία « . »),
- οι **πράξεις** +, −, ×, ÷ και το =,
- το **C** (ή AC) που «καθαρίζει» την οθόνη,
- τα πλήκτρα **μνήμης**: **M+** (πρόσθεσε στη μνήμη), **M−** (αφαίρεσε από τη μνήμη), **MR** (ανάκληση μνήμης), **MC** (σβήσε τη μνήμη),
- σε επιστημονικούς υπολογιστές: x^2 , x^y (ή $\wedge$) για δυνάμεις και **παρενθέσεις**.



Ένας απλός υπολογιστής τσέπης

**ΠΡΟΣΟΧΗ!**

Ο υπολογιστής δείχνει **τελεία** αντί για υποδιαστολή: ο αριθμός 16,33 εμφανίζεται ως « 16.33». Και κάτι ακόμα: ένας **απλός** υπολογιστής κάνει τις πράξεις **με τη σειρά που τις πληκτρολογούμε**, χωρίς να ξέρει την προτεραιότητα!

2 Προτεραιότητα πράξεων στον υπολογιστή

Ας υπολογίσουμε την παράσταση $5 + 3 \cdot 4$. Το σωστό αποτέλεσμα είναι $5 + 12 = 17$.

Πληκτρολόγηση	Απλός υπολογιστής	Επιστημονικός υπολογιστής
$5 + 3 \times 4 =$	$32 \times$ (έκανε $8 \cdot 4$)	$17 \checkmark$
$3 \times 4 + 5 =$	$17 \checkmark$	$17 \checkmark$

ΠΩΣ ΔΟΥΛΕΥΟΥΜΕ ΜΕ ΑΠΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ

- 1 Κάνουμε **πρώτα** τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις και αποθηκεύουμε κάθε αποτέλεσμα στη **μνήμη** με **M+** (ή **M-** αν πρέπει να αφαιρεθεί).
- 2 Στο τέλος πατάμε **MR** για να δούμε το συνολικό αποτέλεσμα.
- 3 Πριν ξεκινήσουμε, καθαρίζουμε τη μνήμη με **MC**.



Παράδειγμα 1

Να υπολογίσεις με απλό υπολογιστή: $12,5 \cdot 3,2 + 48,6 : 2,7 - 4,4 \cdot 1,5$.

ΛΥΣΗ

MC (καθαρίζουμε τη μνήμη) $12,5 \times 3,2 = \rightarrow 40 \rightarrow \mathbf{M+}$ $48,6 \div 2,7 = \rightarrow 18 \rightarrow \mathbf{M+}$ $4,4 \times 1,5 = \rightarrow 6,6 \rightarrow \mathbf{M-}$

MR $\rightarrow 51,4$. Έλεγχος με το χέρι: $40 + 18 - 6,6 = 51,4 \checkmark$.

3 Δυνάμεις με τον υπολογιστή

Για το x^2 χρησιμοποιούμε το ειδικό πλήκτρο x^2 ή πληκτρολογούμε $x \times x$. Σε πολλούς απλούς υπολογιστές, αν πατήσουμε έναν αριθμό, μετά $\times$ και μετά **πολλές φορές** το $=$, ο αριθμός πολλαπλασιάζεται συνεχώς με τον εαυτό του: « $3 \times = = =$ » δίνει διαδοχικά 9, 27, 81, δηλαδή 3^2 , 3^3 , 3^4 . Στους επιστημονικούς υπάρχει το πλήκτρο x^y (ή $\wedge$): « $1,5 x^y 4 =$ » δίνει $(1,5)^4 = 5,0625$.

4 Εκτίμηση – Ο καλύτερος έλεγχος

Ο υπολογιστής δεν κάνει λάθη· **εμείς** όμως μπορεί να πατήσουμε λάθος πλήκτρο. Γι' αυτό, πριν ή μετά τον υπολογισμό, κάνουμε μια **εκτίμηση** με στρογγυλοποιημένους αριθμούς.



Παράδειγμα 2

Η Νεφέλη υπολόγισε με το κομπιουτεράκι $49,8 \cdot 21,3$ και βρήκε 106,074. Είναι λογικό το αποτέλεσμα;

ΛΥΣΗ

Εκτίμηση: $49,8 \approx 50$ και $21,3 \approx 20$, άρα το γινόμενο είναι περίπου $50 \cdot 20 = 1.000$. Το 106,074 είναι **δέκα φορές μικρότερο** — μάλλον πάτησε λάθος την υποδιαστολή (π.χ. 2.13 αντί για 21.3). Το σωστό είναι 1.060,74.

**ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...**

Ο πρώτος μηχανικός «υπολογιστής» του κόσμου είναι ελληνικός: ο **Μηχανισμός των Αντικυθήρων** (2ος αι. π.Χ.), με τα δεκάδες γρανάζια του, υπολόγιζε θέσεις του Ήλιου, της Σελήνης και ημερομηνίες εκλείψεων. Τα πρώτα ηλεκτρονικά κομπιουτεράκια τσέπης εμφανίστηκαν στις αρχές της δεκαετίας του 1970.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις οδηγό για τη σωστή χρήση του υπολογιστή τσέπης και ασκήσεις εκτίμησης αποτελεσμάτων.

★ **Άλυτες ασκήσεις**

Μάθημα 3.3

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να υπολογίσεις με τον υπολογιστή και να ελέγξεις με εκτίμηση: **α)** $38,7 \cdot 4,9$, **β)** $1.234,5 : 9,8$, **γ)** $(2,3)^4$.
- 2 ●●● Τι θα δείξει ένας **απλός** υπολογιστής αν πληκτρολογήσουμε « $10 - 2 \times 3 =$ »; Ποιο είναι το σωστό αποτέλεσμα; Πώς πρέπει να το πληκτρολογήσουμε;
- 3 ●●● Με τη βοήθεια της μνήμης να υπολογίσεις: $7,5 \cdot 8,4 - 36,9 : 4,5 + 2,5 \cdot 1,2$.
- 4 ●●● Ένας μαθητής υπολόγισε $0,48 \cdot 0,25$ και βρήκε 1,2. Χωρίς υπολογιστή, να εξηγήσεις γιατί είναι λάθος.
- 5 ●●● Ένα κατάστημα πούλησε: 18 τετράδια των 1,35 €, 12 στυλό των 0,95 € και 7 μπλοκ ζωγραφικής των 3,20 €. Να βρεις την είσπραξη χρησιμοποιώντας τη μνήμη του υπολογιστή.
- 6 ●●● Να βρεις με τον υπολογιστή τις δυνάμεις $1,1^2$, $1,1^3$, $1,1^4$. Ένα ποσό αυξάνεται κάθε χρόνο, γινόμενο 1,1 φορές μεγαλύτερο. Πόσο θα γίνουν τα 1.000 € σε 4 χρόνια;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 3.4

Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τι είναι η **τυποποιημένη μορφή** ενός αριθμού
- ✓ να γράφεις **μεγάλους αριθμούς** σε τυποποιημένη μορφή και αντίστροφα
- ✓ να **συγκρίνεις** αριθμούς γραμμένους σε τυποποιημένη μορφή

1 Η ανάγκη

Η απόσταση της Γης από τον Ήλιο είναι περίπου 150.000.000 km. Η μάζα της Γης είναι περίπου 5.970.000.000.000.000.000.000 kg. Τέτοιοι αριθμοί είναι δύσκολο να διαβαστούν, να γραφτούν και να συγκριθούν — εύκολα «χάνεις» ένα μηδενικό! Οι επιστήμονες τους γράφουν με τη βοήθεια των **δυνάμεων του 10**.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας θετικός αριθμός είναι γραμμένος σε **τυποποιημένη μορφή** (ή **επιστημονική μορφή**) όταν είναι γραμμένος ως

$$\alpha \cdot 10^{\nu} \quad \text{όπου} \quad 1 \leq \alpha < 10 \quad \text{και} \quad \nu \text{ φυσικός}$$

Δηλαδή το α έχει **ένα μόνο ψηφίο, διάφορο του μηδενός, πριν την υποδιαστολή**.

Έτσι: $150.000.000 = 1,5 \cdot 10^8$ και $5.970.000.000.000.000.000.000 = 5,97 \cdot 10^{24}$.

ΠΩΣ ΓΡΑΦΟΥΜΕ ΕΝΑΝ ΜΕΓΑΛΟ ΑΡΙΘΜΟ ΣΕ ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ

- 1 Βάζουμε την υποδιαστολή **αμέσως μετά το πρώτο ψηφίο** (από αριστερά). Αυτός είναι ο αριθμός α (σβήνουμε τα μηδενικά του τέλους).
- 2 Μετράμε **πόσες θέσεις** μετακινήθηκε η υποδιαστολή προς τα αριστερά. Αυτός είναι ο εκθέτης ν .

**Παράδειγμα 1**

Να γράψεις σε τυποποιημένη μορφή: **α)** 47.000, **β)** 3.080.000, **γ)** 602.300.000.000, **δ)** 523,7.

ΛΥΣΗ

α) $4,7000 \rightarrow 4,7 \cdot$ η υποδιαστολή μετακινήθηκε 4 θέσεις: $4,7 \cdot 10^4$.

β) $3,08 \cdot 10^6$.

γ) $6,023 \cdot 10^{11}$.

δ) $5,237 \cdot 10^2$ (η υποδιαστολή μετακινήθηκε 2 θέσεις).

**Παράδειγμα 2**

Να γράψεις χωρίς δυνάμεις: **α)** $2,5 \cdot 10^3$, **β)** $7,04 \cdot 10^6$, **γ)** $9 \cdot 10^5$.

ΛΥΣΗ

Μετακινούμε την υποδιαστολή προς τα **δεξιά** τόσες θέσεις όσες δείχνει ο εκθέτης: **α)** 2.500, **β)** 7.040.000, **γ)** 900.000.

**ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ****× ΛΑΘΟΣ**

$47.000 = 47 \cdot 10^3$ «σε τυποποιημένη μορφή»

✓ ΣΩΣΤΟ

$47.000 = 4,7 \cdot 10^4$

Η ισότητα $47.000 = 47 \cdot 10^3$ είναι **σωστή**, αλλά **δεν** είναι τυποποιημένη μορφή, γιατί $47 > 10$. Στην τυποποιημένη μορφή ο αριθμός μπροστά από τη δύναμη πρέπει να είναι από 1 έως κάτω από 10.

2 Σύγκριση αριθμών σε τυποποιημένη μορφή**ΚΑΝΟΝΑΣ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ**

- Μεγαλύτερος είναι ο αριθμός με τον **μεγαλύτερο εκθέτη**: $2,1 \cdot 10^9 > 9,8 \cdot 10^8$.
- Αν οι εκθέτες είναι **ίσοι**, συγκρίνουμε τους αριθμούς μπροστά: $3,5 \cdot 10^6 < 4,1 \cdot 10^6$.



Παράδειγμα 3

Ο πληθυσμός της Ελλάδας είναι περίπου $1,04 \cdot 10^7$, της Κύπρου περίπου $9,2 \cdot 10^5$ και της Γερμανίας περίπου $8,4 \cdot 10^7$. Να τους γράψεις σε αύξουσα σειρά. Περίπου πόσες φορές μεγαλύτερος είναι ο πληθυσμός της Γερμανίας από της Ελλάδας;

ΛΥΣΗ

Μικρότερος εκθέτης ο 5: Κύπρος. Μετά, με εκθέτη 7: $1,04 < 8,4$, άρα Ελλάδα < Γερμανία. Σειρά: Κύπρος, Ελλάδα, Γερμανία. Λόγος: $8,4 \cdot 10^7 : (1,04 \cdot 10^7) = 8,4 : 1,04 \approx 8$. Η Γερμανία έχει περίπου 8 φορές μεγαλύτερο πληθυσμό.



ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ο **Αρχιμήδης**, στο έργο του «Ψαμμίτης», υπολόγισε πόσοι κόκκοι άμμου θα χωρούσαν σε όλο το σύμπαν (όπως το φαντάζονταν τότε). Για να γράψει αυτόν τον τεράστιο αριθμό, επινόησε ένα σύστημα βασισμένο στη **μυριάδα** (10.000) — κάτι πολύ κοντινό στις σημερινές δυνάμεις του 10! Το αποτέλεσμα του σε σημερινή γραφή ήταν περίπου 10^{63} κόκκοι.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Στα κομπιουτεράκια η τυποποιημένη μορφή εμφανίζεται συχνά με το γράμμα **E**: η ένδειξη «3.2E11» ή «3.2¹¹» σημαίνει $3,2 \cdot 10^{11}$.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για την τυποποιημένη μορφή και μια συλλογή από «αστρονομικούς» αριθμούς για εξάσκηση.



Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 3.4

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1

●●● Να γράψεις σε τυποποιημένη μορφή:

α) 8.000

β) 65.000

γ) 1.200.000

δ) 407.000.000

ε) 30.050

ζ) 12,5

2

●●● Να γράψεις χωρίς δυνάμεις: α) $6 \cdot 10^4$, β) $3,7 \cdot 10^5$, γ) $1,002 \cdot 10^3$, δ) $9,99 \cdot 10^7$.

3

●●● Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι σε τυποποιημένη μορφή; $3,4 \cdot 10^5$, $0,8 \cdot 10^3$, $10 \cdot 10^4$, $9,99 \cdot 10^2$, $1 \cdot 10^6$. Να γράψεις σωστά όσους δεν είναι.

4

●●● Να διατάξεις σε φθίνουσα σειρά: $4,5 \cdot 10^6$, $9 \cdot 10^5$, $4,05 \cdot 10^6$, $1,2 \cdot 10^7$.

- 5 ●●● Η ταχύτητα του φωτός είναι περίπου 300.000 km το δευτερόλεπτο. Να τη γράψεις σε τυποποιημένη μορφή. Πόσα km διανύει το φως σε ένα λεπτό; (σε τυποποιημένη μορφή)
- 6 ●●● Η καρδιά ενός ανθρώπου χτυπάει κατά μέσο όρο 70 φορές το λεπτό. Πόσες φορές χτυπάει σε ένα έτος (365 μέρες); Να γράψεις το αποτέλεσμα σε τυποποιημένη μορφή, στρογγυλοποιώντας τον πρώτο παράγοντα στα δέκατα.
- 7 ●●● Να υπολογίσεις και να γράψεις το αποτέλεσμα σε τυποποιημένη μορφή: **α)** $(2 \cdot 10^3) \cdot (4 \cdot 10^5)$, **β)** $(5 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^2)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 3.5

Μονάδες μέτρησης

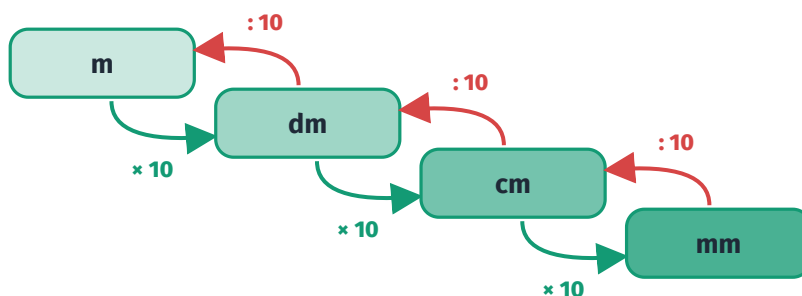
ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τις μονάδες μέτρησης **μήκους, επιφάνειας, όγκου, χρόνου και μάζας**
- ✓ να κάνεις **μετατροπές** από μια μονάδα σε άλλη με τη «σκάλα» των μονάδων
- ✓ να κάνεις **πράξεις με χρόνο** (ώρες, λεπτά, δευτερόλεπτα)

1 Μονάδες μήκους

Η βασική μονάδα μέτρησης μήκους είναι το **μέτρο** (m). Από αυτό προκύπτουν οι **υποδιαίρέσεις** (μικρότερες μονάδες) και τα **πολλαπλάσια** (μεγαλύτερες μονάδες).

Μονάδα	Σύμβολο	Σχέση με το μέτρο
χιλιόμετρο	km	1 km = 1.000 m
μέτρο	m	—
δεκατόμετρο (παλάμη)	dm	1 dm = 0,1 m
εκατοστόμετρο (πόντος)	cm	1 cm = 0,01 m
χιλιοστόμετρο (χιλιοστό)	mm	1 mm = 0,001 m



Η «σκάλα» του μήκους: κατεβαίνοντας ένα σκαλοπάτι πολλαπλασιάζουμε με 10, ανεβαίνοντας διαιρούμε με 10.

Η ΣΚΑΛΑ ΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ

- 1 Όταν πάμε από **μεγαλύτερη** σε **μικρότερη** μονάδα («κατεβαίνουμε»), ο αριθμός **μεγαλώνει: πολλαπλασιάζουμε**.
- 2 Όταν πάμε από **μικρότερη** σε **μεγαλύτερη** μονάδα («ανεβαίνουμε»), ο αριθμός **μικραίνει: διαιρούμε**.
- 3 Στο μήκος κάθε σκαλοπάτι αντιστοιχεί σε $\times 10$ ή $: 10$ (από km σε m: $\times 1.000$).

**Παράδειγμα 1**

Να μετατρέψεις: **α)** 3,75 m σε cm, **β)** 458 mm σε m, **γ)** 2,4 km σε m, **δ)** 86 cm σε dm.

ΛΥΣΗ

α) Κατεβαίνουμε 2 σκαλιά: $3,75 \cdot 100 = 375$ cm.

β) Ανεβαίνουμε 3 σκαλιά: $458 : 1.000 = 0,458$ m.

γ) $2,4 \cdot 1.000 = 2.400$ m.

δ) $86 : 10 = 8,6$ dm.

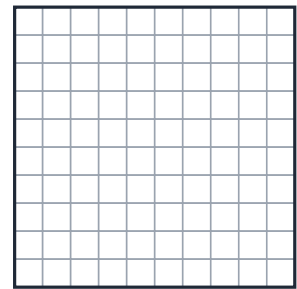
**ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...**

Στη ναυσιπλοΐα και την αεροπλοΐα χρησιμοποιείται το **ναυτικό μίλι**: 1 ναυτικό μίλι = 1.852 m. Γι' αυτό λέμε ότι ένα πλοίο έχει ταχύτητα 20 **κόμβους**, δηλαδή 20 ναυτικά μίλια την ώρα.

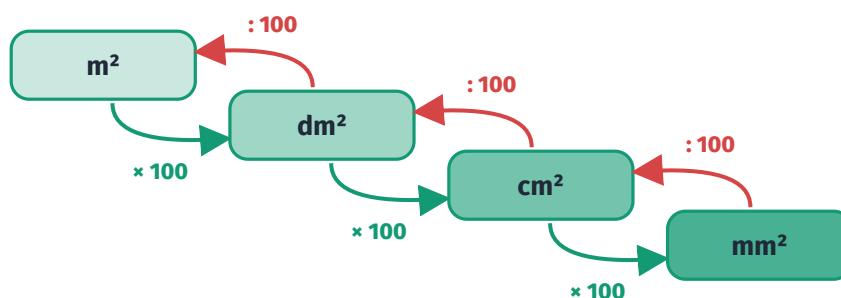
2 Μονάδες επιφάνειας (εμβαδού)

Η βασική μονάδα επιφάνειας είναι το **τετραγωνικό μέτρο** (m^2): η επιφάνεια ενός τετραγώνου με πλευρά 1 m.

Ένα τετράγωνο πλευράς 1 dm χωράει $10 \cdot 10 = 100$ τετραγωνάκια του 1 cm^2 . Άρα $1 dm^2 = 100 cm^2$. Στην επιφάνεια **κάθε σκαλοπάτι είναι $\times 100$!**



$$1 dm^2 = 10 \times 10 = 100 cm^2$$



Η σκάλα της επιφάνειας: κάθε σκαλοπάτι $\times 100$ ή $: 100$.

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

- $1 m^2 = 100 dm^2 = 10.000 cm^2 = 1.000.000 mm^2$
- $1 km^2 = 1.000.000 m^2 = 10^6 m^2$
- 1 **στρέμμα** = $1.000 m^2$ (χρησιμοποιείται στην Ελλάδα για χωράφια και οικόπεδα)



Παράδειγμα 2

Να μετατρέψεις: **α)** $2,5 \text{ m}^2$ σε cm^2 , **β)** 3.600 cm^2 σε m^2 , **γ)** $4,5$ στρέμματα σε m^2 , **δ)** $0,3 \text{ km}^2$ σε στρέμματα.

ΛΥΣΗ

α) 2 σκαλιά κάτω: $2,5 \cdot 10.000 = 25.000 \text{ cm}^2$.

β) 2 σκαλιά πάνω: $3.600 : 10.000 = 0,36 \text{ m}^2$.

γ) $4,5 \cdot 1.000 = 4.500 \text{ m}^2$.

δ) $0,3 \text{ km}^2 = 300.000 \text{ m}^2 = 300.000 : 1.000 = 300$ στρέμματα.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ cm}^2$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$1 \text{ m}^2 = 10.000 \text{ cm}^2$$

Εφαρμόστηκε η σκάλα του **μήκους** ($1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$) αντί της σκάλας της **επιφάνειας**. Ένα τετράγωνο $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ έχει 100 cm σε κάθε πλευρά, άρα χωράει $100 \cdot 100 = 10.000$ τετραγωνάκια του 1 cm^2 .

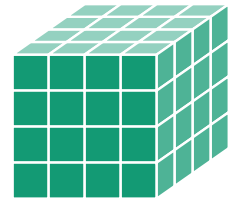
3 Μονάδες όγκου

Η βασική μονάδα όγκου είναι το **κυβικό μέτρο** (m^3): ο όγκος ενός κύβου με ακμή 1 m .

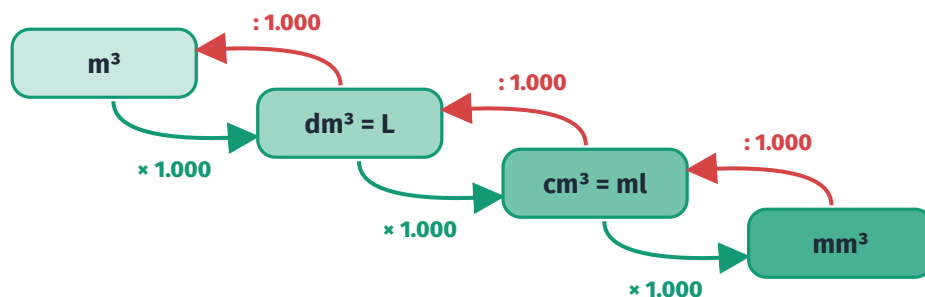
Ένας κύβος με ακμή 1 dm χωράει $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$ κυβάκια του 1 cm^3 .

Στον όγκο **κάθε σκαλοπάτι είναι** $\times 1.000$!

Το 1 dm^3 λέγεται και **λίτρο** (L ή lt) και χρησιμοποιείται για υγρά. Το 1 cm^3 λέγεται και **χιλιοστόλιτρο** (ml).



Κάθε σκαλοπάτι στον όγκο είναι $\times 1.000$



Η σκάλα του όγκου: κάθε σκαλοπάτι $\times 1.000$ ή $: 1.000$.

**Παράδειγμα 3**

Να μετατρέψεις: **α)** $1,2 \text{ m}^3$ σε λίτρα, **β)** 750 ml σε λίτρα, **γ)** $2,5 \text{ L}$ σε cm^3 , **δ)** 45.000 cm^3 σε m^3 .

ΛΥΣΗ

α) $1,2 \cdot 1.000 = 1.200 \text{ L (dm}^3\text{)}.$

β) $750 : 1.000 = 0,75 \text{ L}.$

γ) $2,5 \cdot 1.000 = 2.500 \text{ cm}^3 \text{ (ml)}.$

δ) $45.000 : 1.000.000 = 0,045 \text{ m}^3.$

4 Μονάδες μάζας

Μονάδα	Σύμβολο	Σχέση
τόνος	t	$1 \text{ t} = 1.000 \text{ kg}$
χιλιόγραμμα (κιλό)	kg	βασική μονάδα
γραμμάριο	g	$1 \text{ g} = 0,001 \text{ kg}$
χιλιοστόγραμμα	mg	$1 \text{ mg} = 0,001 \text{ g}$

Εδώ κάθε βήμα είναι $\times 1.000$ ή $: 1.000$: $2,35 \text{ kg} = 2.350 \text{ g}$, $650 \text{ kg} = 0,65 \text{ t}$, $500 \text{ mg} = 0,5 \text{ g}$.

5 Μονάδες χρόνου**ΣΧΕΣΕΙΣ**

- $1 \text{ λεπτό (min)} = 60 \text{ δευτερόλεπτα (s)}$
- $1 \text{ ώρα (h)} = 60 \text{ min} = 3.600 \text{ s}$
- $1 \text{ ημέρα} = 24 \text{ h} = 1.440 \text{ min} = 86.400 \text{ s}$

**ΠΡΟΣΟΧΗ!**

Ο χρόνος **δεν** ακολουθεί το δεκαδικό σύστημα! Γι' αυτό $1,5$ ώρες **δεν** είναι 1 ώρα και 50 λεπτά, αλλά 1 ώρα και $0,5 \cdot 60 = 30$ λεπτά. Και 2 ώρες 15 λεπτά $= 2,25$ ώρες (αφού $15 \text{ λεπτά} = \frac{15}{60} = 0,25 \text{ h}$).



Παράδειγμα 4

α) Πόσα λεπτά είναι 2,4 h; β) Να γράψεις τα 135 min σε ώρες και λεπτά. γ) Να γράψεις 3 h 45 min σε ώρες (δεκαδικός).

ΛΥΣΗ

α) $2,4 \cdot 60 = 144 \text{ min}$ (δηλαδή 2 h 24 min).

β) $135 = 60 \cdot 2 + 15$: 2 h 15 min.

γ) $45 \text{ min} = \frac{45}{60} \text{ h} = 0,75 \text{ h}$, άρα 3,75 h.



Παράδειγμα 5

Ένα τρένο αναχωρεί στις 8:47 και φτάνει στον προορισμό του στις 13:25. Πόσο κράτησε το ταξίδι;

ΛΥΣΗ

Από 8:47 έως 9:00: 13 min. Από 9:00 έως 13:00: 4 h. Από 13:00 έως 13:25: 25 min. Σύνολο: 4 h 38 min.

Άλλος τρόπος (αφαίρεση με «δανεικό»): 13 h 25 min = 12 h 85 min, και 12 h 85 min – 8 h 47 min = 4 h 38 min.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις συνοπτικό πίνακα όλων των μονάδων για εκτύπωση και κουίζ μετατροπών με αυτόματη διόρθωση.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 3.5

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1

●●● Να μετατρέψεις:

α) 4,2 m σε cm

β) 350 cm σε m

γ) 0,8 km σε m

δ) 2.750 m σε km

ε) 15 mm σε cm

ζ) 1,05 m σε mm

2

●●● Να μετατρέψεις:

α) 3 m² σε dm²

β) 0,45 m² σε cm²

γ) 250 dm² σε m²

δ) 12 στρέμματα σε m²

ε) 2,5 km² σε m²

ζ) 80.000 cm² σε m²

3

●●● Να μετατρέψεις: α) 3,5 L σε ml, β) 250 ml σε L, γ) 0,02 m³ σε L, δ) 1.500 cm³ σε dm³, ε) 2 m³ σε cm³.

4

●●● Να μετατρέψεις: α) 3,2 kg σε g, β) 450 g σε kg, γ) 2,5 t σε kg, δ) 75 kg σε t.

- 5 ●●● α) Πόσα δευτερόλεπτα είναι 2 h 15 min; β) Να γράψεις τα 500 s σε λεπτά και δευτερόλεπτα. γ) Πόσες ώρες είναι 1 εβδομάδα;
- 6 ●●● Να εκφράσεις σε ώρες με δεκαδικό αριθμό: α) 1 h 30 min, β) 2 h 12 min, γ) 45 min. Και αντίστροφα σε ώρες και λεπτά: δ) 3,2 h, ε) 0,75 h.
- 7 ●●● Ένας μαθητής ξεκίνησε το διάβασμα στις 16:35 και τελείωσε στις 19:10. Έκανε ένα διάλειμμα 20 λεπτών. Πόσο χρόνο διάβασε πραγματικά;
- 8 ●●● Ένα χωράφι σχήματος ορθογωνίου έχει διαστάσεις 80 m και 45 m. Πόσα στρέμματα είναι; Αν πουλιέται 12.000 € το στρέμμα, πόσο κοστίζει;
- 9 ●●● Μια πισίνα έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 10 m, 5 m και βάθος 1,6 m. Πόσα λίτρα νερό χωράει; Αν μια αντλία γεμίζει 200 L το λεπτό, σε πόσες ώρες θα γεμίσει;
- 10 ●●● Η επιφάνεια ενός κύβου έχει εμβαδόν 150 cm^2 . Να βρεις τον όγκο του σε cm^3 και σε ml.
- 11 ●●● Να γράψεις σε αύξουσα σειρά: 1,2 m, 125 cm, 1.150 mm, 11,9 dm.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ανακεφαλαίωση

Όλο το κεφάλαιο σε λίγες σελίδες & επαναληπτικές ασκήσεις

1 Η θεωρία με μια ματιά

Δεκαδικοί αριθμοί

- $\frac{37}{100} = 0,37$: τόσα δεκαδικά ψηφία όσα μηδενικά
- Θέσεις: δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά...
- Μηδενικά στο τέλος δεν αλλάζουν τον αριθμό

Σύγκριση – Στρογγυλοποίηση

- Ίδιο πλήθος δεκαδικών, μετά σύγκριση
- Στρογγυλοποίηση: κοιτάμε το επόμενο ψηφίο
- Στα χρήματα: στα εκατοστά (λεπτά)

Πρόσθεση – Πολλαπλασιασμός

- $+$, $-$: στοίχιση υποδιαστολών
- $\cdot$: δεκαδικά ψηφία προστίθενται
- $\cdot 10^n$: υποδιαστολή n θέσεις δεξιά

Διαίρεση

- $: 10^n$: υποδιαστολή n θέσεις αριστερά
- Με δεκαδικό: διαιρέτης $\rightarrow$ φυσικός
- Κλάσμα $\rightarrow$ δεκαδικός: αριθμητής : παρονομαστής

Τυποποιημένη μορφή

- $\alpha \cdot 10^n$ με $1 \leq \alpha < 10$
- Σύγκριση: πρώτα ο εκθέτης

Μονάδες

- Μήκος $\times 10$ · Επιφάνεια $\times 100$ · Όγκος $\times 1.000$
- $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$, $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$, στρέμμα $= 1.000 \text{ m}^2$
- Χρόνος: $\times 60$ (όχι δεκαδικό!)



Η ΓΛΑΥΚΑ ΘΥΜΙΖΕΙ

Τα λάθη που «κοστίζουν» τους περισσότερους βαθμούς: (1) στοίχιση από δεξιά αντί για στοίχιση υποδιαστολών, (2) $(0,3)^2 = 0,9$ αντί για $0,09$, (3) $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ cm}^2$, (4) $1,5 \text{ h} = 1 \text{ h } 50 \text{ min}$. Πρόσεξε τα!



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com υπάρχει επαναληπτικό τεστ για το κεφάλαιο των δεκαδικών με αναλυτικές λύσεις — ιδανικό πριν από το διαγώνισμα!



★ Επαναληπτικές ασκήσεις

Κεφάλαιο 3

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να υπολογίσεις: $3,2 \cdot 0,5 + 4,8 : 1,6 - (0,4)^2$.
- 2 ●●● Να υπολογίσεις: $(12,6 - 4,35) : 0,15 + 2,5 \cdot 10^2$.
- 3 ●●● Να γράψεις σε αύξουσα σειρά: $\frac{3}{8}$, 0,4, 0,35, $\frac{2}{5}$, 0,375. Ποιοι αριθμοί είναι ίσοι;
- 4 ●●● Να στρογγυλοποιήσεις το πηλίκο $22 : 7$ στα δέκατα, στα εκατοστά και στα χιλιοστά.
- 5 ●●● Η απόσταση Γης – Σελήνης είναι περίπου 384.400 km. Να τη γράψεις σε τυποποιημένη μορφή. Ένα αεροπλάνο που πετάει με 900 km/h, σε πόσες μέρες (περίπου) θα την κάλυπτε;
- 6 ●●● Ένα δοχείο χωράει 2,4 L. Πόσα ποτήρια των 150 ml γεμίζει; Πόσα δοχεία χρειάζονται για 36 L;
- 7 ●●● Ο κύριος Νίκος αγόρασε 2,5 kg μήλα προς 1,80 €/kg, 750 g τυρί προς 9,60 €/kg και 3 ψωμιά των 1,15 €. Πόσα ρέστα πήρε από 20 €;
- 8 ●●● Ένας ποδηλάτης κάλυψε 37,8 km σε 1 h 45 min. Ποια ήταν η μέση ταχύτητά του σε km/h;
- 9 ●●● Ένα οικόπεδο 1,2 στρεμμάτων είναι ορθογώνιο με μήκος 40 m. Ποιο είναι το πλάτος του; Πόσα μέτρα συρματοπλέγμα χρειάζονται για την περιφράξή του;
- 10 ●●● Σωστό ή Λάθος; **α)** $0,1 \cdot 0,1 = 0,1$. **β)** $5 : 0,5 = 10$. **γ)** $2,5 \text{ h} = 150 \text{ min}$. **δ)** $3,4 \cdot 10^5$ είναι σε τυποποιημένη μορφή. **ε)** $0,500 > 0,5$.

4

Κεφάλαιο 4
Εξισώσεις και
προβλήματα

Πόσο κοστίζει το ένα τετράδιο, αν τα πέντε κοστίζουν 7 €; Σε πόσα χρόνια ο πατέρας θα είναι διπλάσιος από τον γιο του; Τέτοια ερωτήματα απαντούνται με **εξισώσεις**: γράφουμε τον άγνωστο αριθμό με ένα γράμμα, το x , και τον «ανακαλύπτουμε» με λογική και αντίστροφες πράξεις. Είναι το πρώτο μας βήμα στην **Άλγεβρα**!

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 4.1 Η έννοια της εξίσωσης – Οι βασικές εξισώσεις
- 4.2 Επίλυση προβλημάτων
- 4.3 Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων
- ★ Ανακεφαλαίωση & επαναληπτικές ασκήσεις



Βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις και κουίζ
για όλο το κεφάλαιο, δωρεάν στο
mathgreece.com



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Μάθημα 4.1

Η έννοια της εξίσωσης – Οι εξισώσεις $\alpha + x = \beta$,
 $x - \alpha = \beta$, $\alpha - x = \beta$, $\alpha x = \beta$, $\alpha : x = \beta$, $x : \alpha = \beta$

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

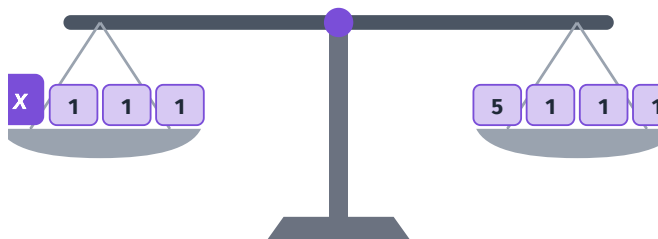
- ✓ Τι είναι **εξίσωση**, **άγνωστος** και **λύση** (ρίζα) μιας εξίσωσης
- ✓ να ελέγχεις αν ένας αριθμός είναι λύση (**επαλήθευση**)
- ✓ να λύνεις τις **έξι βασικές μορφές** εξισώσεων
- ✓ πότε μια εξίσωση είναι **αδύνατη** ή **ταυτότητα**

1 Τι είναι εξίσωση;

Στη ζυγαριά του σχήματος, στο αριστερό τάσι υπάρχει ένα κουτί με **άγνωστο** βάρος x κιλών μαζί με 3 κιλά, ενώ στο δεξί τάσι υπάρχουν 8 κιλά. Η ζυγαριά **ισορροπεί**. Αυτό γράφεται με μια ισότητα που περιέχει ένα γράμμα:

$$x + 3 = 8$$

Πόσο ζυγίζει το κουτί; Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι $x = 5$, αφού $5 + 3 = 8$.



Η ζυγαριά ισορροπεί: $x + 3 = 8$

ΟΡΙΣΜΟΙ

- **Εξίσωση** λέγεται μια ισότητα που περιέχει έναν **άγνωστο** αριθμό, ο οποίος συμβολίζεται με ένα γράμμα, συνήθως x .
- Η παράσταση αριστερά του $=$ λέγεται **πρώτο μέλος** και η παράσταση δεξιά **δεύτερο μέλος**.
- **Λύση** ή **ρίζα** της εξίσωσης λέγεται ο αριθμός που, αν τον βάλουμε στη θέση του x , κάνει την ισότητα **αληθή**.
- **Λύνω** μια εξίσωση σημαίνει βρίσκω τη λύση της.

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ

Για να ελέγξουμε αν ένας αριθμός είναι λύση, τον **αντικαθιστούμε** στη θέση του x και κάνουμε τις πράξεις. Αν τα δύο μέλη βγουν **ίσα**, ο αριθμός είναι λύση. Η διαδικασία λέγεται **επαλήθευση** και πρέπει να γίνεται **πάντα** στο τέλος της λύσης!



Παράδειγμα 1

Ποιος από τους αριθμούς 4, 6, 9 είναι λύση της εξίσωσης $3x - 5 = 13$;

ΛΥΣΗ

- Για $x = 4$: $3 \cdot 4 - 5 = 12 - 5 = 7 \neq 13$. Όχι.
- Για $x = 6$: $3 \cdot 6 - 5 = 18 - 5 = 13$ ✓. **Ναι.**
- Για $x = 9$: $3 \cdot 9 - 5 = 27 - 5 = 22 \neq 13$. Όχι.

Άρα λύση της εξίσωσης είναι ο $x = 6$.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Όταν ένας αριθμός γράφεται **κολλητά** μπροστά από το γράμμα, εννοείται **πολλαπλασιασμός**: $3x$ σημαίνει $3 \cdot x$. Γι' αυτό, αν $x = 6$, το $3x$ είναι 18 – **όχι** 36!

2 Οι εξισώσεις με πρόσθεση και αφαίρεση

Η βασική ιδέα για να λύσουμε μια εξίσωση είναι ότι **η πρόσθεση και η αφαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις**, όπως και **ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση**. Αυτό που «κάνει» μια πράξη, το «ξεκάνει» η αντίστροφή της.

ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $A + X = B$

Ο άγνωστος είναι **προσθετέος**. Ένας άγνωστος προσθετέος βρίσκεται αν **από το άθροισμα αφαιρέσουμε τον γνωστό προσθετέο**:

$$\alpha + x = \beta \implies x = \beta - \alpha \quad \text{π.χ.} \quad 7 + x = 19 \implies x = 19 - 7 = 12$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $X - A = B$

Ο άγνωστος είναι **μειωτέος**. Ο μειωτέος βρίσκεται αν **προσθέσουμε τη διαφορά και τον αφαιρετέο**:

$$x - \alpha = \beta \implies x = \beta + \alpha \quad \text{π.χ.} \quad x - 15 = 23 \implies x = 23 + 15 = 38$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $A - X = B$

Ο άγνωστος είναι **αφαιρετέος**. Ο αφαιρετέος βρίσκεται αν **από τον μειωτέο αφαιρέσουμε τη διαφορά**:

$$\alpha - x = \beta \implies x = \alpha - \beta \quad \text{π.χ.} \quad 50 - x = 32 \implies x = 50 - 32 = 18$$



Παράδειγμα 2

Να λύσεις τις εξισώσεις και να κάνεις επαλήθευση: α) $x + 4,5 = 10$, β) $x - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$, γ) $12 - x = 7,4$.

ΛΥΣΗ

α) $x = 10 - 4,5 = 5,5$. Επαλήθευση: $5,5 + 4,5 = 10 \checkmark$.

β) $x = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$. Επαλήθευση: $\frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{6} \checkmark$.

γ) $x = 12 - 7,4 = 4,6$. Επαλήθευση: $12 - 4,6 = 7,4 \checkmark$.



ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

$$50 - x = 32 \Rightarrow x = 50 + 32 = 82$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$50 - x = 32 \Rightarrow x = 50 - 32 = 18$$

Μπερδεύεται η μορφή $\alpha - x = \beta$ με τη μορφή $x - \alpha = \beta$. Η επαλήθευση δείχνει αμέσως το λάθος: $50 - 82$ δεν δίνει 32! Σκέψου: «από το 50 αφαιρώ κάτι και μένουν 32· άρα αφάιρεσα $50 - 32 = 18$ ».

3 Οι εξισώσεις με πολλαπλασιασμό και διαίρεση

ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $AX = B$

Ο άγνωστος είναι **παράγοντας** γινομένου. Ένας άγνωστος παράγοντας βρίσκεται αν **διαιρέσουμε το γινόμενο με τον γνωστό παράγοντα** ($\alpha \neq 0$):

$$\alpha \cdot x = \beta \implies x = \beta : \alpha \quad \text{π.χ.} \quad 6x = 42 \Rightarrow x = 42 : 6 = 7$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $X : A = B$

Ο άγνωστος είναι **διαιρετέος** (τέλειας διαίρεσης). Ο διαιρετέος βρίσκεται αν **πολλαπλασιάσουμε το πηλίκο με τον διαιρέτη**:

$$x : \alpha = \beta \implies x = \beta \cdot \alpha \quad \text{π.χ.} \quad x : 4 = 9 \Rightarrow x = 9 \cdot 4 = 36$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $A : X = B$

Ο άγνωστος είναι **διαιρέτης**. Ο διαιρέτης βρίσκεται αν **διαιρέσουμε τον διαιρετέο με το πηλίκο** ($\beta \neq 0$):

$$\alpha : x = \beta \implies x = \alpha : \beta \quad \text{π.χ.} \quad 56 : x = 8 \Rightarrow x = 56 : 8 = 7$$

Εξίσωση	Ο x είναι...	Λύση	Παράδειγμα
$\alpha + x = \beta$	προσθετέος	$x = \beta - \alpha$	$5 + x = 12 \Rightarrow x = 7$
$x - \alpha = \beta$	μειωτέος	$x = \beta + \alpha$	$x - 5 = 12 \Rightarrow x = 17$
$\alpha - x = \beta$	αφαιρετέος	$x = \alpha - \beta$	$20 - x = 12 \Rightarrow x = 8$
$\alpha x = \beta$	παράγοντας	$x = \beta : \alpha$	$4x = 12 \Rightarrow x = 3$
$x : \alpha = \beta$	διαιρετέος	$x = \beta \cdot \alpha$	$x : 4 = 12 \Rightarrow x = 48$
$\alpha : x = \beta$	διαιρέτης	$x = \alpha : \beta$	$48 : x = 12 \Rightarrow x = 4$

Ο συνοπτικός πίνακας των έξι βασικών εξισώσεων. Δεν χρειάζεται να τον αποστηθίσεις: αρκεί να θυμάσαι **ποιος όρος της πράξης είναι ο x** και πώς βρίσκεται.



Παράδειγμα 3

Να λύσεις: **α)** $0,4x = 2,8$, **β)** $\frac{3}{5}x = \frac{9}{10}$, **γ)** $x : 2,5 = 4$, **δ)** $\frac{3}{4} : x = \frac{1}{2}$.

ΛΥΣΗ

α) $x = 2,8 : 0,4 = 28 : 4 = 7$. Επαλήθευση: $0,4 \cdot 7 = 2,8 \checkmark$.

β) $x = \frac{9}{10} : \frac{3}{5} = \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{3} = \frac{3}{2}$. Επαλήθευση: $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{10} \checkmark$.

γ) $x = 4 \cdot 2,5 = 10$. Επαλήθευση: $10 : 2,5 = 4 \checkmark$.

δ) $x = \frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$. Επαλήθευση: $\frac{3}{4} : \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \checkmark$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

$$6x = 42 \Rightarrow x = 42 - 6 = 36$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$6x = 42 \Rightarrow x = 42 : 6 = 7$$

Το $6x$ σημαίνει $6 \cdot x$, άρα η πράξη που «ξεκάνουμε» είναι **πολλαπλασιασμός** και η αντίστροφή του είναι η **διαίρεση**, όχι η αφαίρεση.

4 Εξισώσεις σε δύο βήματα

Μερικές φορές ο άγνωστος είναι «κρυμμένος» πίσω από **δύο** πράξεις, όπως στην $3x + 5 = 26$.

Σκεφτόμαστε σαν να «ξετυλίγουμε» ένα δέμα: αφαιρούμε πρώτα το **εξωτερικό** περιτύλιγμα (εδώ το $+5$) και μετά το εσωτερικό (το $3 \cdot$).



Παράδειγμα 4

Να λύσεις: **α)** $3x + 5 = 26$, **β)** $\frac{x}{4} - 3 = 7$, **γ)** $2 \cdot (x - 1,5) = 9$.

ΛΥΣΗ

α) Το $3x$ είναι προσθετός: $3x = 26 - 5 = 21$. Μετά $x = 21 : 3 = 7$. Επαλήθευση: $3 \cdot 7 + 5 = 26$ ✓.

β) Το $\frac{x}{4}$ είναι μειωτέος: $\frac{x}{4} = 7 + 3 = 10$, άρα $x = 10 \cdot 4 = 40$. Επαλήθευση: $40 : 4 - 3 = 10 - 3 = 7$ ✓.

γ) Η παρένθεση είναι παράγοντας: $x - 1,5 = 9 : 2 = 4,5$, άρα $x = 4,5 + 1,5 = 6$. Επαλήθευση: $2 \cdot (6 - 1,5) = 2 \cdot 4,5 = 9$ ✓.

5 Αδύνατες εξισώσεις και ταυτότητες

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

- Η εξίσωση $0 \cdot x = 5$ **δεν έχει καμία λύση**, αφού κάθε αριθμός επί 0 δίνει 0, ποτέ 5. Λέγεται **αδύνατη**.
- Η εξίσωση $0 \cdot x = 0$ **επαληθεύεται από κάθε αριθμό**. Λέγεται **ταυτότητα** (ή **αόριστη**).
- Επίσης, στους φυσικούς αριθμούς η εξίσωση $x + 9 = 4$ είναι αδύνατη (θα αποκτήσει λύση όταν μάθουμε τους αρνητικούς στο Κεφάλαιο 7).



ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Η λέξη «**άλγεβρα**» προέρχεται από τον τίτλο του βιβλίου «al-jabr» του Πέρση μαθηματικού **αλ-Χουαρίζμι** (9ος αι.), που σημαίνει «αποκατάσταση» — τη μεταφορά όρων από το ένα μέλος της εξίσωσης στο άλλο. Όμως ήδη τον 3ο αιώνα μ.Χ. ο Αλεξανδρινός **Διόφαντος**, ο «πατέρας της Άλγεβρας», χρησιμοποιούσε σύμβολο για τον άγνωστο και έλυνε εξισώσεις στο έργο του «Αριθμητικά».



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο με τη «ζυγαριά των εξισώσεων», όλες τις μορφές εξισώσεων λυμένες βήμα-βήμα και κουίζ με αυτόματη διόρθωση.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 4.1

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** ●●● Να εξετάσεις αν ο αριθμός που δίνεται είναι λύση της εξίσωσης: **α)** $5x - 2 = 18$, $x = 4$, **β)** $x + x = x \cdot x$, $x = 2$, **γ)** $20 - 3x = 8$, $x = 3$.

2 ●●● Να λύσεις τις εξισώσεις:

α) $x + 17 = 43$

β) $x - 28 = 35$

γ) $100 - x = 64$

δ) $9x = 117$

ε) $x : 7 = 13$

ζ) $96 : x = 8$

3 ●●● Να λύσεις τις εξισώσεις:

α) $x + 2,7 = 5$

β) $x - 0,35 = 1,2$

γ) $4,8 - x = 1,95$

δ) $1,5x = 6$

ε) $x : 0,2 = 15$

ζ) $3 : x = 0,6$

4 ●●● Να λύσεις τις εξισώσεις:

α) $x + \frac{1}{4} = \frac{5}{6}$

β) $x - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$

γ) $\frac{7}{8} - x = \frac{1}{2}$

δ) $\frac{2}{3}x = \frac{8}{9}$

ε) $x : \frac{3}{4} = \frac{2}{9}$

ζ) $\frac{5}{6} : x = \frac{10}{3}$

5 ●●● Να λύσεις τις εξισώσεις σε δύο βήματα: **α)** $4x + 7 = 31$, **β)** $5x - 12 = 23$, **γ)** $50 - 2x = 36$, **δ)** $\frac{x}{3} + 8 = 15$, **ε)** $3 \cdot (x + 2) = 27$.

6 ●●● Ποιες από τις εξισώσεις είναι αδύνατες και ποιες ταυτότητες; **α)** $0 \cdot x = 7$, **β)** $x + 0 = x$, **γ)** $0 \cdot x = 0$, **δ)** $x \cdot 1 = 5$.

7 ●●● Να γράψεις μια εξίσωση για κάθε πρόταση και να τη λύσεις: **α)** Ένας αριθμός αυξημένος κατά 15 δίνει 40. **β)** Το τετραπλάσιο ενός αριθμού είναι 52. **γ)** Αν διαιρέσουμε το 72 με έναν αριθμό, βρίσκουμε 9.

8 ●●● Να λύσεις: **α)** $2,5x + 1,5 = 9$, **β)** $\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = 1$, **γ)** $(x - 3) : 4 = 2,5$.

9 ●●● Να συμπληρώσεις τα κουτάκια ώστε η εξίσωση να έχει λύση $x = 5$: **α)** $x + \square = 12$, **β)** $\square - x = 1$, **γ)** $\square \cdot x = 35$, **δ)** $\square : x = 0,4$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Μάθημα 4.2

Επίλυση προβλημάτων

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ να «μεταφράζεις» φράσεις της καθημερινής γλώσσας σε μαθηματικές παραστάσεις
- ✓ τα βήματα επίλυσης ενός προβλήματος με εξίσωση
- ✓ να επιλέγεις σωστά τον άγνωστο και να γράφεις την εξίσωση

1 Από τη γλώσσα στα μαθηματικά

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με εξίσωση, πρέπει πρώτα να μάθουμε να μεταφράζουμε τις λέξεις σε σύμβολα. Αν συμβολίσουμε με x έναν άγνωστο αριθμό:

Φράση	Μαθηματική γραφή
το διπλάσιο (τριπλάσιο, ...) του αριθμού	$2x$ ($3x, \dots$)
το μισό (τρίτο, ...) του αριθμού	$\frac{x}{2}$ ($\frac{x}{3}, \dots$)
ο αριθμός αυξημένος κατά 5	$x + 5$
ο αριθμός ελαττωμένος κατά 5	$x - 5$
ο επόμενος του αριθμού (φυσικός)	$x + 1$
το τετράγωνο του αριθμού	x^2
τα $\frac{3}{4}$ του αριθμού	$\frac{3}{4}x$
το 20% του αριθμού	$\frac{20}{100}x = 0,2x$
κατά 5 μεγαλύτερος από το διπλάσιό του	$2x + 5$
το διπλάσιο του αριθμού αυξημένου κατά 5	$2(x + 5)$

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

«το διπλάσιο του αριθμού αυξημένου κατά 5» $= 2x + 5$

✓ ΣΩΣΤΟ

«το διπλάσιο του (αριθμού αυξημένου κατά 5)» $= 2 \cdot (x + 5)$

Πρόσεχε **τι** διπλασιάζεται. Στη φράση «το διπλάσιο του αριθμού αυξημένου κατά 5» πρώτα αυξάνουμε τον αριθμό κατά 5 και **μετά** διπλασιάζουμε το αποτέλεσμα — άρα χρειάζεται **παρένθεση**.

**Παράδειγμα 1**

Αν x είναι η ηλικία της Μαρίας σήμερα, να γράψεις με τη βοήθεια του x : **α)** την ηλικία της σε 7 χρόνια, **β)** την ηλικία της πριν από 3 χρόνια, **γ)** την ηλικία του πατέρα της, που είναι τριπλάσια από τη δική της, **δ)** το άθροισμα των ηλικιών τους.

ΛΥΣΗ

α) $x + 7$, **β)** $x - 3$, **γ)** $3x$, **δ)** $x + 3x = 4x$.

2 Τα βήματα της επίλυσης**Η «ΣΥΝΤΑΓΗ» ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑ**

- 1 Διαβάζω προσεκτικά** το πρόβλημα (μία και δύο φορές!). Ξεχωρίζω τι **δίνεται** και τι **ζητείται**.
- 2 Επιλέγω τον άγνωστο**: συνήθως είναι αυτό που ζητείται. Γράφω καθαρά: «Έστω x ...».
- 3 Εκφράζω** τα υπόλοιπα ποσά του προβλήματος με τη βοήθεια του x .
- 4 Γράφω την εξίσωση**, βρίσκοντας δύο εκφράσεις για το ίδιο ποσό.
- 5 Λύνω** την εξίσωση.
- 6 Επαληθεύω** τη λύση **με βάση το κείμενο του προβλήματος** (όχι μόνο με την εξίσωση).
- 7 Γράφω την απάντηση** με μια πλήρη πρόταση.

**Παράδειγμα 2**

Αν σε έναν αριθμό προσθέσουμε το 18, βρίσκουμε το 50. Ποιος είναι ο αριθμός;

ΛΥΣΗ

Έστω x ο αριθμός. Η εξίσωση είναι: $x + 18 = 50$.

Λύση: $x = 50 - 18 = 32$.

Επαλήθευση: $32 + 18 = 50$ ✓.

Απάντηση: Ο αριθμός είναι ο 32.



Παράδειγμα 3

Ο Πέτρος αγόρασε 4 τετράδια ίδιας τιμής και ένα βιβλίο των 8,50 €. Πλήρωσε συνολικά 14,10 €. Πόσο κόστιζε κάθε τετράδιο;

ΛΥΣΗ

Έστω x € η τιμή κάθε τετραδίου. Τα 4 τετράδια κοστίζουν $4x$ €. Το συνολικό ποσό είναι $4x + 8,50$.

Εξίσωση: $4x + 8,50 = 14,10$.

Λύση: $4x = 14,10 - 8,50 = 5,60$, άρα $x = 5,60 : 4 = 1,40$.

Επαλήθευση: $4 \cdot 1,40 + 8,50 = 5,60 + 8,50 = 14,10$ ✓.

Απάντηση: Κάθε τετράδιο κόστιζε 1,40 €.



σύνολο: 14,10 €

Το «μοντέλο ράβδων» του προβλήματος: $4x + 8,50 = 14,10$



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Μην παραλείπεις την **επαλήθευση με βάση το κείμενο**. Αν βρεις, π.χ., ότι ένα τετράδιο κοστίζει -2 € ή ότι μια τάξη έχει 27,5 μαθητές, κάτι πήγε στραβά! Η λύση πρέπει να έχει **νόημα** για το πρόβλημα.



Παράδειγμα 4

Το άθροισμα τριών **διαδοχικών** φυσικών αριθμών είναι 78. Ποιοι είναι οι αριθμοί;

ΛΥΣΗ

Έστω x ο μικρότερος. Οι επόμενοι είναι $x + 1$ και $x + 2$.

Εξίσωση: $x + (x + 1) + (x + 2) = 78$, δηλαδή $3x + 3 = 78$.

Λύση: $3x = 75$, $x = 25$.

Επαλήθευση: $25 + 26 + 27 = 78$ ✓.

Απάντηση: Οι αριθμοί είναι οι 25, 26, 27.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο «Πώς λύνω ένα πρόβλημα με εξίσωση» και πολλά λυμένα προβλήματα κάθε δυσκολίας.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 4.2

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Αν x είναι ένας αριθμός, να γράψεις: **α)** το πενταπλάσιό του, **β)** τον αριθμό ελαττωμένο κατά 8, **γ)** το τριπλάσιό του αυξημένο κατά 4, **δ)** το μισό του αριθμού αυξημένου κατά 10, **ε)** τα $\frac{2}{3}$ του αριθμού.
- 2 ●●● Να «μεταφράσεις» σε εξίσωση (χωρίς να λύσεις): **α)** Το τριπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 7 είναι 20. **β)** Αν διπλασιάσουμε έναν αριθμό και προσθέσουμε 3 βρίσκουμε 45. **γ)** Ένας αριθμός και το μισό του έχουν άθροισμα 27.
- 3 ●●● Αν από το 100 αφαιρέσουμε έναν αριθμό, βρίσκουμε 37. Ποιος είναι ο αριθμός;
- 4 ●●● Το εξαπλάσιο ενός αριθμού είναι 84. Ποιος είναι ο αριθμός;
- 5 ●●● Η Ελένη έχει x €. Η Σοφία έχει 12 € περισσότερα από την Ελένη και ο Κώστας τα διπλάσια από την Ελένη. Να γράψεις με τη βοήθεια του x πόσα έχουν και οι τρεις μαζί. Αν όλα μαζί είναι 92 €, πόσα έχει ο καθένας;
- 6 ●●● Ένα ταξί χρεώνει 3,50 € για την επιβίβαση και 0,80 € για κάθε χιλιόμετρο. Μια διαδρομή κόστισε 15,90 €. Πόσα χιλιόμετρα ήταν;
- 7 ●●● Το άθροισμα δύο διαδοχικών **άρτιων** αριθμών είναι 114. Ποιοι είναι;
- 8 ●●● Σκέφτηκα έναν αριθμό. Τον πολλαπλασίασα με 5, αφαίρεσα 9 και διείρεσα το αποτέλεσμα με 4. Βρήκα 14. Ποιον αριθμό σκέφτηκα;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Μάθημα 4.3

Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ να λύνεις **προβλήματα ηλικιών, χρημάτων, γεωμετρίας και μοιρασιάς**
- ✓ να χρησιμοποιείς **σχήματα και πίνακες** για να οργανώνεις τα δεδομένα
- ✓ να ελέγχεις αν η λύση έχει **νόημα**

1 Προβλήματα μοιρασιάς



Παράδειγμα 1

Τρία αδέρφια μοιράστηκαν 260 €. Ο δεύτερος πήρε τα διπλάσια από τον πρώτο και ο τρίτος 20 € περισσότερα από τον δεύτερο. Πόσα πήρε ο καθένας;

ΛΥΣΗ

Έστω x € τα χρήματα του πρώτου. Ο δεύτερος πήρε $2x$ και ο τρίτος $2x + 20$.

Εξίσωση: $x + 2x + (2x + 20) = 260$, δηλαδή $5x + 20 = 260$.

Λύση: $5x = 240$, $x = 48$. Πρώτος: 48 €, δεύτερος: 96 €, τρίτος: 116 €.

Επαλήθευση: $48 + 96 + 116 = 260$ ✓, $96 = 2 \cdot 48$ ✓, $116 = 96 + 20$ ✓.



σύνολο 260 €: $5x + 20$

Τα μερίδια: πρώτος x , δεύτερος $2x$, τρίτος $2x + 20$

2 Προβλήματα ηλικιών

Στα προβλήματα ηλικιών βοηθάει πολύ ένας **πίνακας**: γράφουμε τις ηλικίες «σήμερα» και «στο μέλλον» (ή «στο παρελθόν»). Θυμήσου ότι **σε n χρόνια όλοι μεγαλώνουν κατά n χρόνια**.



Παράδειγμα 2

Η μητέρα είναι σήμερα 38 ετών και η κόρη της 10 ετών. Σε πόσα χρόνια η ηλικία της μητέρας θα είναι διπλάσια από την ηλικία της κόρης;

ΛΥΣΗ

Έστω ότι αυτό θα συμβεί σε x χρόνια.

	Σήμερα	Σε x χρόνια
Μητέρα	38	$38 + x$
Κόρη	10	$10 + x$

Εξίσωση: $38 + x = 2 \cdot (10 + x)$, δηλαδή $38 + x = 20 + 2x$. Αφού το x υπάρχει και στα δύο μέλη, σκεφτόμαστε: αν «αφαιρέσουμε» από τα δύο μέλη το x και το 20, μένει $18 = x$. Άρα $x = 18$.

Επαλήθευση: σε 18 χρόνια η μητέρα θα είναι 56 και η κόρη 28, και $56 = 2 \cdot 28 \checkmark$.

Απάντηση: σε 18 χρόνια.



ΚΟΛΠΟ ΤΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΗ

Η **διαφορά ηλικίας** δύο ανθρώπων **δεν αλλάζει ποτέ**. Εδώ είναι $38 - 10 = 28$ χρόνια. Όταν η μητέρα θα είναι διπλάσια, η κόρη θα έχει ηλικία ίση με τη διαφορά, δηλαδή 28, που συμβαίνει σε $28 - 10 = 18$ χρόνια. Ένας έξυπνος δεύτερος τρόπος!

3 Γεωμετρικά προβλήματα

4

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ



Παράδειγμα 3

Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 54 cm. Το μήκος του είναι κατά 5 cm μεγαλύτερο από το πλάτος του. Να βρεις τις διαστάσεις και το εμβαδόν του.

ΛΥΣΗ

Έστω x cm το πλάτος. Το μήκος είναι $x + 5$.

Εξίσωση: η περίμετρος είναι $x + (x + 5) + x + (x + 5) = 54$, δηλαδή $4x + 10 = 54$.

Λύση: $4x = 44$, $x = 11$. Πλάτος 11 cm, μήκος 16 cm.

Επαλήθευση: $2 \cdot (11 + 16) = 54 \checkmark$. Εμβαδόν: $11 \cdot 16 = 176 \text{ cm}^2$.



Παράδειγμα 4

Σε ένα τρίγωνο η μία γωνία είναι 40° και η δεύτερη είναι τριπλάσια από την τρίτη. Να βρεις τις γωνίες. (Θυμήσου: το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι 180° .)

ΛΥΣΗ

Έστω x μοίρες η τρίτη γωνία. Η δεύτερη είναι $3x$.

Εξίσωση: $40 + 3x + x = 180$, δηλαδή $4x + 40 = 180$.

Λύση: $4x = 140$, $x = 35$. Οι γωνίες είναι 40° , 105° , 35° .

Επαλήθευση: $40 + 105 + 35 = 180 \checkmark$.

4 Προβλήματα με κλάσματα



Παράδειγμα 5

Ένας μαθητής διάβασε την πρώτη μέρα τα $\frac{2}{5}$ ενός βιβλίου και τη δεύτερη μέρα το $\frac{1}{3}$ του βιβλίου. Του έμειναν 48 σελίδες. Πόσες σελίδες έχει το βιβλίο;

ΛΥΣΗ

Έστω x οι σελίδες του βιβλίου. Διάβασε $\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}x$ και του έμειναν 48.

Εξίσωση: $\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}x + 48 = x$. Αφού $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$, διάβασε τα $\frac{11}{15}$ του βιβλίου και του έμειναν τα $\frac{4}{15}$. Άρα: $\frac{4}{15}x = 48$.

Λύση: $x = 48 : \frac{4}{15} = 48 \cdot \frac{15}{4} = 180$ σελίδες.

Επαλήθευση: $\frac{2}{5} \cdot 180 = 72, \frac{1}{3} \cdot 180 = 60, 72 + 60 + 48 = 180 \checkmark$.

5 Προβλήματα κίνησης και εργασίας



Παράδειγμα 6

Δύο πόλεις απέχουν 315 km. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από τη μία και ένα δεύτερο ταυτόχρονα από την άλλη, κινούμενα το ένα προς το άλλο. Το πρώτο κινείται με 80 km/h και το δεύτερο με 70 km/h. Σε πόσες ώρες θα συναντηθούν;

ΛΥΣΗ

Έστω ότι συναντιούνται σε x ώρες. Το πρώτο θα έχει διανύσει $80x$ km και το δεύτερο $70x$ km. Μαζί θα έχουν καλύψει όλη την απόσταση.

Εξίσωση: $80x + 70x = 315$, δηλαδή $150x = 315$.

Λύση: $x = 315 : 150 = 2,1$ ώρες = 2 h 6 min.

Επαλήθευση: $80 \cdot 2,1 + 70 \cdot 2,1 = 168 + 147 = 315 \checkmark$.



ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

«Βρήκα $x = 2,1$, άρα συναντιούνται σε 2 ώρες και 10 λεπτά»

✓ ΣΩΣΤΟ

$2,1 \text{ h} = 2 \text{ h} + 0,1 \cdot 60 \text{ min} = 2 \text{ h } 6 \text{ min}$

Το δεκαδικό μέρος των ωρών **δεν** είναι λεπτά! Πολλαπλασιάζουμε με 60 για να βρούμε τα λεπτά (θυμήσου το Μάθημα 3.5).

**ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...**

Στην Παλατινή Ανθολογία σώζεται το «επίγραμμα του Διοφάντου», ένα πρόβλημα-γρίφος για την ηλικία του: «Ο Διόφαντος πέρασε το $\frac{1}{6}$ της ζωής του ως παιδί, το $\frac{1}{12}$ ως έφηβος, μετά από ακόμη $\frac{1}{7}$ παντρεύτηκε· 5 χρόνια αργότερα απέκτησε γιο, που έζησε τα μισά χρόνια από τον πατέρα του, ο οποίος πέθανε 4 χρόνια μετά τον γιο του». Με εξίσωση βρίσκουμε ότι έζησε 84 χρόνια! Δοκίμασε να το επαληθεύσεις.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις κατηγοριοποιημένα προβλήματα (ηλικίες, χρήματα, γεωμετρία, κίνηση) με βίντεο-λύσεις, ιδανικά για εξάσκηση πριν από το διαγώνισμα.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 4.3

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Δύο φίλοι έχουν μαζί 75 €. Ο ένας έχει τα τετραπλάσια από τον άλλον. Πόσα έχει ο καθένας;
- 2 ●●● Ο πατέρας είναι 28 χρόνια μεγαλύτερος από τον γιο του. Σε 5 χρόνια το άθροισμα των ηλικιών τους θα είναι 60. Πόσων ετών είναι σήμερα ο καθένας;
- 3 ●●● Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει περίμετρο 32 cm. Καθεμία από τις ίσες πλευρές είναι κατά 4 cm μεγαλύτερη από τη βάση. Να βρεις τις πλευρές του.
- 4 ●●● Σε μια τάξη 27 μαθητών τα κορίτσια είναι κατά 3 περισσότερα από τα αγόρια. Πόσα είναι τα αγόρια και πόσα τα κορίτσια;
- 5 ●●● Ένα κινηματογραφικό εισιτήριο κοστίζει 8 € για ενήλικες και 5 € για παιδιά. Μια ομάδα 12 ατόμων πλήρωσε 78 €. Πόσοι ήταν οι ενήλικες;
- 6 ●●● Μια βρύση γεμίζει μια δεξαμενή 1.200 λίτρων. Μετά από 3 ώρες η δεξαμενή έχει 450 λίτρα, ενώ είχε ήδη 90 λίτρα πριν ανοίξει η βρύση. Πόσα λίτρα την ώρα ρίχνει η βρύση; Σε πόσες ώρες ακόμη θα γεμίσει;
- 7 ●●● Ο Γιώργος ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων του για ένα βιβλίο και τα $\frac{2}{5}$ για ρούχα. Του έμειναν 21 €. Πόσα χρήματα είχε;
- 8 ●●● Ένα τρένο φεύγει από την Αθήνα στις 7:00 με ταχύτητα 90 km/h. Στις 8:00 φεύγει από το ίδιο σημείο, προς την ίδια κατεύθυνση, ένα δεύτερο τρένο με 120 km/h. Τι ώρα θα το φτάσει;

- 9 ●●● Να επαληθεύσεις ότι ο Διόφαντος έζησε 84 χρόνια, σύμφωνα με το επίγραμμα του «Ήξερες ότι...».
-

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ανακεφαλαίωση

Όλο το κεφάλαιο σε λίγες σελίδες & επαναληπτικές ασκήσεις

1 Η θεωρία με μια ματιά

Η εξίσωση

- Ισότητα με έναν άγνωστο x
- Λύση (ρίζα): ο αριθμός που την επαληθεύει
- Επαλήθευση: αντικατάσταση και έλεγχος

Οι έξι μορφές

- $\alpha + x = \beta \Rightarrow x = \beta - \alpha \cdot x - \alpha = \beta \Rightarrow x = \beta + \alpha$
- $\alpha - x = \beta \Rightarrow x = \alpha - \beta \cdot \alpha x = \beta \Rightarrow x = \beta : \alpha$
- $x : \alpha = \beta \Rightarrow x = \alpha \beta \cdot \alpha : x = \beta \Rightarrow x = \alpha : \beta$

Ειδικές περιπτώσεις

- $0x = \beta, \beta \neq 0$: αδύνατη
- $0x = 0$: ταυτότητα
- Σε δύο βήματα: «ξετυλίγουμε» από έξω προς τα μέσα

Πρόβλημα με εξίσωση

- Άγνωστος $\rightarrow$ εκφράσεις $\rightarrow$ εξίσωση
- Λύση $\rightarrow$ επαλήθευση με το κείμενο
- Απάντηση με πλήρη πρόταση



Η ΓΛΑΥΚΑ ΘΥΜΙΖΕΙ

Μην ξεχνάς ότι $3x$ σημαίνει $3 \cdot x$, ότι στη μορφή $\alpha - x = \beta$ **αφαιρούμε** ($x = \alpha - \beta$) και ότι η επαλήθευση είναι το «δίκτυ ασφαλείας» σου σε κάθε άσκηση.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις επαναληπτικό τεστ για τις εξισώσεις και τα προβλήματα, με βίντεο-λύσεις.



★ Επαναληπτικές ασκήσεις

Κεφάλαιο 4

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1

●●● Να λύσεις: α) $x + 3,75 = 10$, β) $\frac{5}{6} - x = \frac{1}{4}$, γ) $0,6x = 4,2$, δ) $\frac{9}{10} : x = \frac{3}{5}$.

2

●●● Να λύσεις: α) $7x - 15 = 48$, β) $\frac{x}{5} + 2,5 = 4$, γ) $4 \cdot (x - 2) = 30$.

3

●●● Αν το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξηθεί κατά 14, βρίσκουμε το 50. Ποιος είναι ο αριθμός;

- 4 ●●● Μια οικογένεια με 2 γονείς και 3 παιδιά πλήρωσε για είσοδο σε ένα μουσείο 31 €. Το εισιτήριο του ενήλικα κοστίζει 8 €. Πόσο κοστίζει το παιδικό;
- 5 ●●● Το μήκος ενός ορθογωνίου είναι διπλάσιο από το πλάτος του και η περίμετρός του είναι 72 m. Να βρεις το εμβαδόν του.
- 6 ●●● Μια γιαγιά είναι 66 ετών και ο εγγονός της 8. Πριν από πόσα χρόνια η γιαγιά ήταν 30 φορές μεγαλύτερη από τον εγγονό;
- 7 ●●● Τρεις αριθμοί έχουν άθροισμα 100. Ο δεύτερος είναι κατά 10 μεγαλύτερος από τον πρώτο και ο τρίτος διπλάσιος από τον δεύτερο. Ποιοι είναι οι αριθμοί;
- 8 ●●● Ένας έμπορος αγόρασε 40 kg μέλι. Πούλησε τα $\frac{3}{8}$ προς 12 €/kg και το υπόλοιπο προς 10 €/kg. Πόσα εισέπραξε;

5

Κεφάλαιο 5
Ποσοστά

«Εκπτώσεις έως 50%!», «ΦΠΑ 24%», «ο πληθυσμός αυξήθηκε κατά 3%», «επιτόκιο 2%». Τα **ποσοστά** είναι η γλώσσα των ειδήσεων, των αγορών και της οικονομίας. Σε αυτό το κεφάλαιο μαθαίνουμε να τα καταλαβαίνουμε και να τα χρησιμοποιούμε σωστά, ώστε να μη μας «ξεγελάνε» και να παίρνουμε **έξυπνες αποφάσεις**.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 5.1 Ποσοστά
- 5.2 Προβλήματα με ποσοστά
- ★ Ανακεφαλαίωση & επαναληπτικές ασκήσεις



Βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις και κουίζ
για όλο το κεφάλαιο, δωρεάν στο
mathgreece.com



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΠΟΣΟΣΤΑ

Μάθημα 5.1

Ποσοστά

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τι σημαίνει **ποσοστό** $\alpha\%$ και πώς γράφεται ως **κλάσμα** και ως **δεκαδικός**
- ✓ να βρίσκεις το **$\alpha\%$ ενός ποσού**
- ✓ να βρίσκεις **τι ποσοστό** είναι ένα ποσό ενός άλλου
- ✓ να βρίσκεις το **αρχικό ποσό**, όταν ξέρεις ένα ποσοστό του

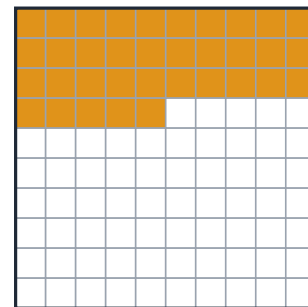
1 Η έννοια του ποσοστού

Σε ένα σχολείο, 35 στους 100 μαθητές πηγαίνουν με τα πόδια. Λέμε ότι **το 35%** («τριάντα πέντε τοις εκατό») των μαθητών πηγαίνει με τα πόδια.

Το σύμβολο % σημαίνει **«στα εκατό»** ή **«εκατοστά»**. Δηλαδή:

$$35\% = \frac{35}{100} = 0,35$$

Στο σχήμα, κάθε τετραγωνάκι είναι το 1% του μεγάλου τετραγώνου και τα χρωματισμένα είναι το 35%.



35 από τα 100 τετραγωνάκια:
35%

ΟΡΙΣΜΟΣ

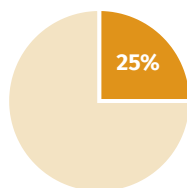
Το **ποσοστό** $\alpha\%$ είναι ένας άλλος τρόπος γραφής του κλάσματος με παρονομαστή 100:

$$\alpha\% = \frac{\alpha}{100}$$

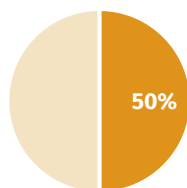
Ποσοστά συναντάμε στις εκπτώσεις, στους τόκους, στον ΦΠΑ, στις στατιστικές, στις εκλογές, στις ετικέτες των τροφίμων...

Ποσοστό	1%	10%	20%	25%	50%	75%	100%	150%
Κλάσμα	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$
Δεκαδικός	0,01	0,1	0,2	0,25	0,5	0,75	1	1,5

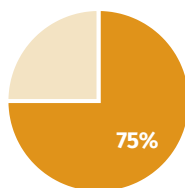
Τα πιο συνηθισμένα ποσοστά σε τρεις μορφές. Αξίζει να τα θυμάσαι!



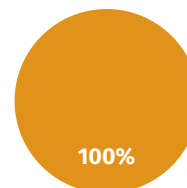
το ένα τέταρτο



το μισό



τα τρία τέταρτα



ολόκληρο

2 Μετατροπές

ΑΠΟ ΠΟΣΟΣΤΟ ΣΕ ΔΕΚΑΔΙΚΟ/ΚΛΑΣΜΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ

- 1 **Ποσοστό** → **δεκαδικός**: διαιρούμε με 100 (υποδιαστολή 2 θέσεις αριστερά): $7\% = 0,07$, $12,5\% = 0,125$.
- 2 **Δεκαδικός** → **ποσοστό**: πολλαπλασιάζουμε με 100: $0,4 = 40\%$, $1,2 = 120\%$.
- 3 **Κλάσμα** → **ποσοστό**: κάνουμε το κλάσμα με παρονομαστή 100 (αν γίνεται) ή το μετατρέπουμε σε δεκαδικό: $\frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 15\%$, $\frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\%$.



Παράδειγμα 1

Να γράψεις: **α)** τα 8%, 45%, 125% ως δεκαδικούς και ως ανάγωγα κλάσματα, **β)** τα $\frac{7}{25}$, $\frac{1}{8}$, 0,06 ως ποσοστά.

ΛΥΣΗ

$$\text{α)} \quad 8\% = 0,08 = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}, \quad 45\% = 0,45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}, \quad 125\% = 1,25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}.$$

$$\text{β)} \quad \frac{7}{25} = \frac{28}{100} = 28\%, \quad \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%, \quad 0,06 = 6\%.$$



ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

$$5\% = 0,5$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$5\% = \frac{5}{100} = 0,05$$

Το % σημαίνει διαίρεση με το 100, άρα η υποδιαστολή μετακινείται **δύο** θέσεις αριστερά. Το 0,5 είναι το 50%, δέκα φορές περισσότερο!

3 Το α% ενός ποσού

ΚΑΝΟΝΑΣ

Για να βρούμε το α% ενός ποσού, **πολλαπλασιάζουμε** το ποσό με $\frac{\alpha}{100}$:

$$\alpha\% \text{ του } \Pi = \frac{\alpha}{100} \cdot \Pi$$

Η λέξη «του» σημαίνει, όπως και στα κλάσματα, **πολλαπλασιασμό**.



Παράδειγμα 2

Να βρεις: **α)** το 20% των 350 €, **β)** το 7% των 1.200 μαθητών, **γ)** το 2,5% των 80 kg.

ΛΥΣΗ

$$\text{α)} \frac{20}{100} \cdot 350 = 0,2 \cdot 350 = 70 \text{ €}.$$

$$\text{β)} 0,07 \cdot 1.200 = 84 \text{ μαθητές}.$$

$$\text{γ)} 0,025 \cdot 80 = 2 \text{ kg}.$$



ΚΟΛΠΟ ΤΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΗ

Νοεροί υπολογισμοί: το 10% ενός ποσού βρίσκεται μετακινώντας την υποδιαστολή μία θέση αριστερά (10% του 350 είναι 35). Από εκεί: $20\% = 2 \cdot 10\% = 70$, $5\% = \frac{1}{2} \cdot 10\% = 17,5$, $15\% = 10\% + 5\% = 52,5$. Και το 50% είναι απλώς το μισό, το 25% το ένα τέταρτο!

4 Τι ποσοστό είναι ένα ποσό ενός άλλου;

ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΟ ΠΟΣΟΣΤΟ

- 1 Σχηματίζουμε το **κλάσμα** $\frac{\text{μέρος}}{\text{όλο}}$.
- 2 Το μετατρέπουμε σε ποσοστό (σε δεκαδικό και μετά επί 100, ή κάνοντάς το με παρονομαστή 100).



Παράδειγμα 3

Σε ένα διαγώνισμα με 40 ερωτήσεις, η Άννα απάντησε σωστά στις 34. Τι ποσοστό των ερωτήσεων απάντησε σωστά;

ΛΥΣΗ

$$\frac{34}{40} = 0,85 = 85\%. \text{ (Ή: } \frac{34}{40} = \frac{85}{100}, \text{ πολλαπλασιάζοντας με 2,5.)}$$



Παράδειγμα 4

Από τους 28 μαθητές ενός τμήματος, οι 21 έχουν κατοικίδιο. Τι ποσοστό δεν έχει;

ΛΥΣΗ

Δεν έχουν $28 - 21 = 7$ μαθητές: $\frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$.

5 Από το ποσοστό στο όλο

ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΟ ΑΡΧΙΚΟ ΠΟΣΟ

Αν ξέρουμε ότι το $\alpha\%$ ενός ποσού x είναι β , γράφουμε την **εξίσωση**:

$$\frac{\alpha}{100} \cdot x = \beta \quad \Rightarrow \quad x = \beta : \frac{\alpha}{100}$$

Ή με «αναγωγή στη μονάδα»: βρίσκουμε πρώτα το 1% (διαιρώντας με α) και μετά το 100% (πολλαπλασιάζοντας με 100).



Παράδειγμα 5

Το 15% των μαθητών ενός σχολείου είναι 54 μαθητές. Πόσους μαθητές έχει το σχολείο;

ΛΥΣΗ

Με εξίσωση: $0,15 \cdot x = 54 \Rightarrow x = 54 : 0,15 = 5.400 : 15 = 360$.

Με αναγωγή στη μονάδα: το 1% είναι $54 : 15 = 3,6$ μαθητές, άρα το 100% είναι $3,6 \cdot 100 = 360$ μαθητές.

Επαλήθευση: 15% του 360 $= 0,15 \cdot 360 = 54 \checkmark$.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Πριν λύσεις ένα πρόβλημα ποσοστών, ρώτα τον εαυτό σου: **«ποιο είναι το 100%;»**
Δηλαδή, **σε σχέση με ποιο ποσό** υπολογίζεται το ποσοστό. Αυτό είναι το «όλο».



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για τα ποσοστά, ένα κουίζ γρήγορων νοερών υπολογισμών («πόσο είναι το 15%;») και παιχνίδια γνώσεων.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 5.1

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Να συμπληρώσεις τον πίνακα:

Ποσοστό	Δεκαδικός	Ανάγωγο κλάσμα
30%	_____	_____
_____	0,04	_____
_____	_____	$\frac{3}{5}$
62,5%	_____	_____

2 ●●● Να βρεις: **α)** το 10% του 470, **β)** το 25% του 64, **γ)** το 3% του 900, **δ)** το 120% του 50, **ε)** το 0,5% του 2.000.

3 ●●● Να υπολογίσεις νοερά το 15% των 80 € και το 35% των 60 €.

4 ●●● Τι ποσοστό είναι: **α)** το 9 του 36, **β)** το 12 του 80, **γ)** τα 45 λεπτά της ώρας, **δ)** το 30 του 24;

5 ●●● Σε ένα δείγμα 250 ατόμων, οι 110 προτιμούν το μπάσκετ, οι 95 το ποδόσφαιρο και οι υπόλοιποι το βόλεϊ. Να βρεις τα ποσοστά για κάθε άθλημα.

6 ●●● Το 40% ενός αριθμού είναι 26. Ποιος είναι ο αριθμός;

7 ●●● Ένα γάλα έχει 3,5% λιπαρά. Πόσα γραμμάρια λιπαρά υπάρχουν σε 1 λίτρο γάλα, αν το λίτρο ζυγίζει 1.030 g; (στρογγυλοποίηση στα δέκατα)

8 ●●● Ένας μαθητής απάντησε σωστά στο 80% των ερωτήσεων ενός τεστ και λάθος σε 6 ερωτήσεις. Πόσες ήταν όλες οι ερωτήσεις;

9 ●●● Ποιο είναι μεγαλύτερο: το 30% του 50 ή το 50% του 30; Να εξηγήσεις γιατί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΠΟΣΟΣΤΑ

Μάθημα 5.2

Προβλήματα με ποσοστά

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ να λύνεις προβλήματα **έκπτωσης** και **αύξησης** τιμής
- ✓ να υπολογίζεις τον **ΦΠΑ**
- ✓ να υπολογίζεις τον **τόκο** ενός κεφαλαίου
- ✓ να βρίσκεις την **αρχική τιμή** όταν ξέρεις την τελική
- ✓ να υπολογίζεις την **ποσοστιαία μεταβολή** ενός μεγέθους

1 Έκπτωση

Ένα μπουφάν κοστίζει 80 € και πωλείται με **έκπτωση 25%**.

Η έκπτωση είναι $0,25 \cdot 80 = 20$ € και η νέα τιμή $80 - 20 = 60$ €.

Πιο γρήγορα: αφού αφαιρούμε το 25%, πληρώνουμε το $100\% - 25\% = 75\%$ της αρχικής τιμής: $0,75 \cdot 80 = 60$ €.



ΚΑΝΟΝΑΣ

- **Έκπτωση $\alpha\%$:** Τελική τιμή = $\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) \cdot \text{Αρχική τιμή}$
- **Αύξηση $\alpha\%$:** Τελική τιμή = $\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) \cdot \text{Αρχική τιμή}$

Το ποσοστό υπολογίζεται **πάντα** πάνω στην **αρχική** τιμή (αυτή είναι το 100%).



Παράδειγμα 1

Ένα κινητό κόστιζε 420 € και η τιμή του αυξήθηκε κατά 15%. Ποια είναι η νέα τιμή;

ΛΥΣΗ

Αύξηση: $0,15 \cdot 420 = 63$ €. Νέα τιμή: $420 + 63 = 483$ €.

Ή: $1,15 \cdot 420 = 483$ €.

2 Φόρος Προστιθέμενης Αξίας (ΦΠΑ)

Ο **ΦΠΑ** είναι ένας φόρος που **προστίθεται** στην τιμή των προϊόντων και των υπηρεσιών. Στην Ελλάδα ο κανονικός συντελεστής είναι 24%, ενώ για ορισμένα είδη (π.χ. βασικά τρόφιμα, βιβλία) υπάρχουν μειωμένοι συντελεστές. Ο ΦΠΑ υπολογίζεται πάνω στην **τιμή χωρίς ΦΠΑ** (καθαρή αξία).



Παράδειγμα 2

Ένας υπολογιστής έχει καθαρή αξία 650 €. Πόσο θα πληρώσουμε με ΦΠΑ 24%;

ΛΥΣΗ

ΦΠΑ: $0,24 \cdot 650 = 156$ €. Τελική τιμή: $650 + 156 = 806$ € (ή $1,24 \cdot 650 = 806$ €).

3 Από την τελική τιμή στην αρχική



Παράδειγμα 3

Μετά από έκπτωση 30% ένα ζευγάρι παπούτσια κοστίζει 56 €. Ποια ήταν η αρχική τιμή;

ΛΥΣΗ

Έστω x € η αρχική τιμή. Μετά την έκπτωση πληρώνουμε το 70% της αρχικής:

$$0,7 \cdot x = 56 \Rightarrow x = 56 : 0,7 = 560 : 7 = 80 \text{ €}$$

Επαλήθευση: 30% του 80 είναι 24 και $80 - 24 = 56$ ✓.



ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

«Η αρχική τιμή είναι $56 + 30\%$ του 56 = $56 + 16,80 = 72,80$ €»

✓ ΣΩΣΤΟ

$$0,7 \cdot x = 56 \Rightarrow x = 80 \text{ €}$$

Το 30% της έκπτωσης υπολογίστηκε πάνω στην **αρχική** τιμή, όχι στην τελική. Γι' αυτό δεν μπορούμε απλώς να «προσθέσουμε πίσω» το 30% της τελικής τιμής. Η σωστή σκέψη είναι: «τα 56 € είναι το 70% της αρχικής».



Παράδειγμα 4

Ένα προϊόν κοστίζει 37,20 € **μαζί** με ΦΠΑ 24%. Πόση είναι η καθαρή του αξία και πόσος ο ΦΠΑ;

ΛΥΣΗ

Η τελική τιμή είναι το 124% της καθαρής: $1,24 \cdot x = 37,20 \Rightarrow x = 37,20 : 1,24 = 30$ €. Ο ΦΠΑ είναι $37,20 - 30 = 7,20$ €.

4 Ποσοστιαία μεταβολή

ΠΟΣΟΣΤΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Όταν ένα μέγεθος αλλάζει από μια **αρχική** τιμή σε μια **νέα** τιμή, το ποσοστό μεταβολής είναι:

$$\text{ποσοστό μεταβολής} = \frac{\text{νέα τιμή} - \text{αρχική τιμή}}{\text{αρχική τιμή}} \cdot 100\%$$

(Αν η νέα τιμή είναι μικρότερη, έχουμε **μείωση**: παίρνουμε τη διαφορά αρχική - νέα.)



Παράδειγμα 5

Ο πληθυσμός ενός χωριού αυξήθηκε από 1.250 σε 1.400 κατοίκους. Ποιο είναι το ποσοστό αύξησης; Μια άλλη χρονιά μειώθηκε από 1.400 σε 1.330. Ποιο το ποσοστό μείωσης;

ΛΥΣΗ

$$\text{Αύξηση: } \frac{1.400 - 1.250}{1.250} = \frac{150}{1.250} = 0,12 = 12\%. \text{ Μείωση: } \frac{1.400 - 1.330}{1.400} = \frac{70}{1.400} = 0,05 = 5\%.$$

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

Αύξηση 20% και μετά μείωση 20%: «η τιμή επέστρεψε στην αρχική»

✓ ΣΩΣΤΟ

100 → 120 → 96: η τελική τιμή είναι **μικρότερη** κατά 4%

Η μείωση 20% υπολογίζεται πάνω στη **νέα** (μεγαλύτερη) τιμή 120, άρα αφαιρούμε 24 και όχι 20. Τα διαδοχικά ποσοστά **δεν** προστίθενται και **δεν** «αλληλοαναιρούνται»!

5 Τόκος

Όταν καταθέτουμε χρήματα σε μια τράπεζα (ή δανειζόμαστε), το ποσό λέγεται **κεφάλαιο**. Η τράπεζα μας δίνει (ή ζητά) ένα επιπλέον ποσό, τον **τόκο**, που είναι ένα ποσοστό του κεφαλαίου για κάθε χρόνο. Το ποσοστό αυτό λέγεται **επιτόκιο**.

ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ

Αν ένα κεφάλαιο K τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο $\varepsilon\%$ για ν χρόνια, ο τόκος είναι:

$$T = K \cdot \frac{\varepsilon}{100} \cdot \nu$$

Για χρόνο σε **μήνες** πολλαπλασιάζουμε με $\frac{\mu}{12}$ και για **ημέρες** με $\frac{\eta}{360}$ (το «εμπορικό» έτος).



Παράδειγμα 6

Καταθέτουμε 2.500 € με ετήσιο επιτόκιο 2%. Πόσο τόκο θα πάρουμε σε 3 χρόνια; Σε 8 μήνες;

ΛΥΣΗ

Σε 3 χρόνια: $T = 2.500 \cdot 0,02 \cdot 3 = 150$ €. Σε 8 μήνες: $T = 2.500 \cdot 0,02 \cdot \frac{8}{12} = 50 \cdot \frac{2}{3} \approx 33,33$ €.



Παράδειγμα 7

Με ποιο ετήσιο επιτόκιο ένα κεφάλαιο 4.000 € δίνει τόκο 210 € σε 1 χρόνο και 6 μήνες;

ΛΥΣΗ

Χρόνος 1,5 έτη. $4.000 \cdot \frac{\varepsilon}{100} \cdot 1,5 = 210 \Rightarrow 60\varepsilon = 210 \Rightarrow \varepsilon = 3,5$. Επιτόκιο 3,5%.



ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Η λέξη «τόκος» προέρχεται από το αρχαίο ρήμα «τίκτω», που σημαίνει «γεννών»: ο τόκος είναι τα χρήματα που «γεννάει» το κεφάλαιο! Στην αρχαία Αθήνα οι τραπεζίτες λέγονταν «τραπεζίται», επειδή έκαναν τις συναλλαγές τους πάνω σε ένα τραπέζι στην αγορά.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις λυμένα προβλήματα με εκπτώσεις, ΦΠΑ και τόκους από την καθημερινή ζωή, καθώς και κουίζ για να εξασκηθείς.



5

ΠΟΣΟΣΤΑ

★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 5.2

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Ένα παντελόνι κοστίζει 45 €. Στις εκπτώσεις πωλείται με 40% έκπτωση. Πόσο θα το πληρώσουμε;
- 2 ●●● Ο μισθός ενός υπαλλήλου ήταν 1.150 € και αυξήθηκε κατά 4%. Ποιος είναι ο νέος μισθός;
- 3 ●●● Ένα ψυγείο έχει καθαρή αξία 540 €. Πόσο κοστίζει με ΦΠΑ 24%;
- 4 ●●● Μετά από αύξηση 12%, ένα εισιτήριο κοστίζει 14 €. Πόσο κόστιζε πριν;
- 5 ●●● Ένα βιβλίο είχε τιμή 25 € και πουλήθηκε 21 €. Τι ποσοστό έκπτωσης έγινε;
- 6 ●●● Ένα ποδήλατο κοστίζει με ΦΠΑ 24% 310 €. Ποια είναι η τιμή χωρίς ΦΠΑ και πόσος είναι ο ΦΠΑ;

- 7 ●●● Ποιο κεφάλαιο, κατατεθειμένο με επιτόκιο 2,5%, δίνει σε 2 χρόνια τόκο 300 €;
- 8 ●●● Πόσο τόκο δίνουν 7.200 € με επιτόκιο 1,5% σε 5 μήνες;
- 9 ●●● Η τιμή ενός προϊόντος αυξήθηκε κατά 10% και μετά η νέα τιμή μειώθηκε κατά 10%. Αν η αρχική τιμή ήταν 200 €, ποια είναι η τελική; Τι ποσοστό της αρχικής είναι;
- 10 ●●● Ένα κατάστημα κάνει έκπτωση 20% και στη συνέχεια ακόμη 10% στη νέα τιμή. Ένα άλλο κάνει απευθείας έκπτωση 30%. Ποιο συμφέρει για ένα προϊόν των 150 €;
- 11 ●●● Σε μια τάξη το 60% των μαθητών είναι κορίτσια. Το 25% των κοριτσιών και το 50% των αγοριών παίζουν σκάκι. Τι ποσοστό της τάξης παίζει σκάκι;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΠΟΣΟΣΤΑ

Ανακεφαλαίωση

Όλο το κεφάλαιο σε λίγες σελίδες & επαναληπτικές ασκήσεις

1 Η θεωρία με μια ματιά

Ποσοστό

- $\alpha\% = \frac{\alpha}{100}$: $25\% = 0,25 = \frac{1}{4}$
- Δεκαδικός $\rightarrow$ ποσοστό: $\times 100$

Τρία βασικά προβλήματα

- $\alpha\%$ του Π : $\frac{\alpha}{100} \cdot \Pi$
- Ποσοστό: $\frac{\text{μέρος}}{\text{όλο}} \cdot 100\%$
- Όλο: $\frac{\alpha}{100}x = \beta$

Αύξηση – Έκπτωση – ΦΠΑ

- Αύξηση $\alpha\%$: $\times \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)$
- Έκπτωση $\alpha\%$: $\times \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)$
- ΦΠΑ: στην καθαρή αξία

Τόκος – Μεταβολή

- $T = K \cdot \frac{\epsilon}{100} \cdot \nu$
- Μεταβολή: $\frac{\text{νέα} - \text{αρχική}}{\text{αρχική}} \cdot 100\%$
- Διαδοχικά ποσοστά δεν προστίθενται



Η ΓΛΑΥΚΑ ΘΥΜΙΖΕΙ

Η «χρυσή ερώτηση» στα ποσοστά: **ποιο είναι το 100%**; Το ποσοστό υπολογίζεται πάντα πάνω σε ένα συγκεκριμένο ποσό — συνήθως την **αρχική** τιμή.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις επαναληπτικό κουίζ «Ποσοστά στην καθημερινή ζωή» με αναλυτικές εξηγήσεις.



★ Επαναληπτικές ασκήσεις

Κεφάλαιο 5

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- Να βρεις: **α)** το 35% του 240, **β)** τι ποσοστό είναι το 18 του 72, **γ)** τον αριθμό του οποίου το 8% είναι 14.
- Ένα τηλέφωνο κόστιζε 360 €. Πρώτα αυξήθηκε κατά 5% και μετά έγινε έκπτωση 20% στη νέα τιμή. Ποια είναι η τελική τιμή;

- 3 ●●● Η Μαρία πήρε στις εκπτώσεις ένα φόρεμα με 35% έκπτωση και πλήρωσε 52 €. Πόσα χρήματα «κέρδισε» από την έκπτωση;
- 4 ●●● Ένα χωριό είχε 2.400 κατοίκους. Μετά από 10 χρόνια έχει 2.040. Ποιο είναι το ποσοστό μείωσης του πληθυσμού;
- 5 ●●● Σε ένα κουτί υπάρχουν 40 μπάλες: 30% κόκκινες, 45% μπλε και οι υπόλοιπες πράσινες. Πόσες είναι οι πράσινες; Αν προσθέσουμε 10 πράσινες, τι ποσοστό θα είναι οι πράσινες;
- 6 ●●● Ένα δάνειο 5.000 € επιστρέφεται μετά από 18 μήνες μαζί με τόκο 6% ετησίως. Πόσα χρήματα θα επιστραφούν συνολικά;
- 7 ●●● Ένας λογαριασμός εστιατορίου ήταν 68 € χωρίς φιλοδώρημα. Η παρέα άφησε φιλοδώρημα 15% και μοιράστηκε το συνολικό ποσό ισομερώς σε 4 άτομα. Πόσα πλήρωσε ο καθένας;
- 8 ●●● Σωστό ή Λάθος; **α)** $0,3 = 3\%$. **β)** Το 200% ενός αριθμού είναι το διπλάσιό του. **γ)** Αύξηση 50% και μετά μείωση 50% μας φέρνουν στην αρχική τιμή. **δ)** Το 10% του 10% είναι 1%.

6

Κεφάλαιο 6

Ανάλογα ποσά – Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Πόσο θα πληρώσω για 3 κιλά, αν ξέρω την τιμή του κιλού; Πόσο απέχουν δύο πόλεις, αν μετρήσω την απόστασή τους στον χάρτη; Σε πόσες μέρες θα τελειώσει ένα έργο, αν προσλάβουμε περισσότερους εργάτες; Σε αυτό το κεφάλαιο μαθαίνουμε να **συγκρίνουμε ποσά**, να **σχεδιάζουμε** τις σχέσεις τους σε **σύστημα αξόνων** και να λύνουμε μερικά από τα πιο χρήσιμα προβλήματα της καθημερινής ζωής.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 6.1 Παράσταση σημείων στο επίπεδο
- 6.2 Λόγος δύο αριθμών – Αναλογία
- 6.3 Ανάλογα ποσά – Ιδιότητες
- 6.4 Γραφική παράσταση σχέσης αναλογίας
- 6.5 Προβλήματα αναλογιών
- 6.6 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά
- ★ Ανακεφαλαίωση & επαναληπτικές ασκήσεις



Βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις και κουίζ
για όλο το κεφάλαιο, δωρεάν στο
mathgreece.com

$$y = ax$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Μάθημα 6.1

Παράσταση σημείων στο επίπεδο

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τι είναι **σύστημα ημιάξονων** (ορθοκανονικό σύστημα)
- ✓ τι είναι οι **συντεταγμένες** ενός σημείου: **τετμημένη** και **τεταγμένη**
- ✓ να **τοποθετείς** σημεία με γνωστές συντεταγμένες και να **«διαβάζεις»** τις συντεταγμένες ενός σημείου

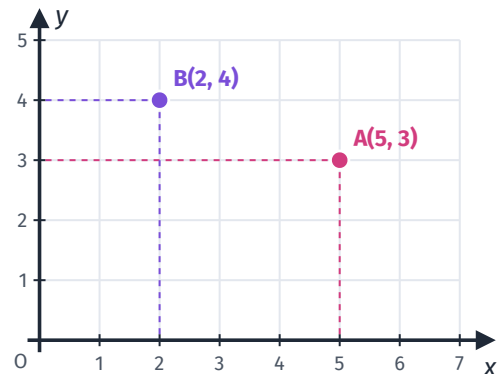
1 Πώς περιγράφουμε μια θέση;

Στη ναυμαχία, στο σκάκι ή σε έναν χάρτη πόλης, για να περιγράψουμε μια θέση χρειαζόμαστε **δύο** πληροφορίες: π.χ. «στήλη Ε, γραμμή 4». Με τον ίδιο τρόπο, στα μαθηματικά, κάθε σημείο του επιπέδου προσδιορίζεται με **δύο αριθμούς**.

Σχεδιάζουμε δύο **κάθετες** ημιευθείες με κοινή αρχή ένα σημείο O :

- την οριζόντια Ox , που λέγεται **ημιάξονας των τετμημένων**,
- την κατακόρυφη Oy , που λέγεται **ημιάξονας των τεταγμένων**.

Πάνω τους σημειώνουμε αριθμούς με **ίσα** βήματα (ίδια μονάδα και στους δύο). Το σημείο O λέγεται **αρχή** και αντιστοιχεί στο 0. Όλο αυτό λέγεται **ορθοκανονικό σύστημα ημιάξονων**.



Τα σημεία $A(5, 3)$ και $B(2, 4)$

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΗΜΕΙΟΥ

Από ένα σημείο A φέρνουμε κάθετες προς τους δύο ημιάξονες.

- Ο αριθμός στον οριζόντιο ημιάξονα λέγεται **τετμημένη** του A .
- Ο αριθμός στον κατακόρυφο ημιάξονα λέγεται **τεταγμένη** του A .

Οι δύο αριθμοί μαζί λέγονται **συντεταγμένες** του A και γράφονται σε παρένθεση, **πρώτα η τετμημένη**: $A(5, 3)$.



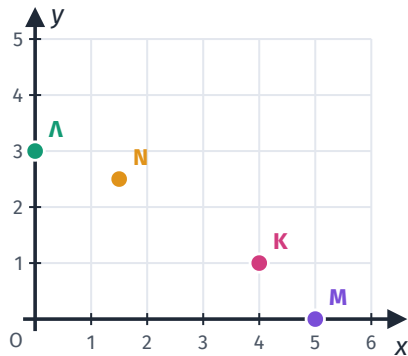
ΠΡΟΣΟΧΗ!

Η **σειρά** μετράει! Το σημείο $(5, 3)$ και το σημείο $(3, 5)$ είναι **διαφορετικά**. Για να θυμάσαι: «πρώτα **οριζόντια** (πας στον διάδρομο), μετά **κατακόρυφα** (ανεβαίνεις τη σκάλα)».



Παράδειγμα 1

Να βρεις τις συντεταγμένες των σημείων του σχήματος.



ΛΥΣΗ

- $K(4, 1)$: 4 βήματα δεξιά, 1 πάνω.
- $\Lambda(0, 3)$: βρίσκεται **πάνω στον** κατακόρυφο ημιάξονα, άρα έχει τετμημένη 0.
- $M(5, 0)$: βρίσκεται **πάνω στον** οριζόντιο ημιάξονα, άρα έχει τεταγμένη 0.
- $N(1,5, 2,5)$: οι συντεταγμένες μπορεί να είναι και δεκαδικοί (ή κλάσματα).

Η αρχή των αξόνων είναι το $O(0, 0)$.



ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

$K(1, 4)$ (για το σημείο 4 δεξιά, 1 πάνω)

✓ ΣΩΣΤΟ

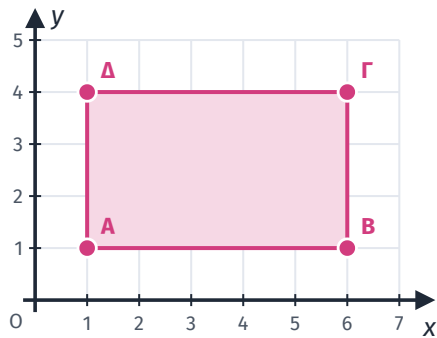
$K(4, 1)$

Γράψαμε τις συντεταγμένες ανάποδα. **Πρώτα** γράφεται η τετμημένη (οριζόντια απόσταση) και **μετά** η τεταγμένη (κατακόρυφη).



Παράδειγμα 2

Να σχεδιάσεις τα σημεία $A(1, 1)$, $B(6, 1)$, $\Gamma(6, 4)$, $\Delta(1, 4)$ και να τα ενώσεις με τη σειρά. Τι σχήμα σχηματίζεται; Ποιο είναι το εμβαδόν του, αν η μονάδα είναι 1 cm;



ΛΥΣΗ

Σχηματίζεται **ορθογώνιο**. Η πλευρά AB έχει μήκος $6 - 1 = 5$ cm και η $B\Gamma$ έχει μήκος $4 - 1 = 3$ cm. Εμβαδόν: $5 \cdot 3 = 15$ cm².



ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Το σύστημα συντεταγμένων το επινόησε ο Γάλλος φιλόσοφος και μαθηματικός **Ρενέ Ντεκάρτ** (Καρτέσιος), τον 17ο αιώνα. Γι' αυτό λέγεται και **καρτεσιανό σύστημα**. Λέγεται ότι η ιδέα του ήρθε παρατηρώντας μια μύγα στο ταβάνι και σκεπτόμενος πώς να περιγράψει τη θέση της!



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις διαδραστικό παιχνίδι «ναυμαχία των συντεταγμένων» για να εξασκηθείς στην παράσταση σημείων.



6

ΑΝΑΛΟΓΑ

★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 6.1

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να σχεδιάσεις σε σύστημα ημιαξόνων τα σημεία $A(2, 5)$, $B(5, 2)$, $\Gamma(0, 4)$, $\Delta(3, 0)$, $E(4, 5, 1)$.
- 2 ●●● Ποια σημεία έχουν: **α)** τεταγμένη 0; **β)** τετμημένη 0; **γ)** ίσες συντεταγμένες;
- 3 ●●● Τα σημεία $A(1, 2)$, $B(5, 2)$ και $\Gamma(5, 5)$ είναι τρεις κορυφές ενός ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$. Να βρεις τις συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής Δ και την περίμετρο του ορθογωνίου.
- 4 ●●● Να σχεδιάσεις τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$. Τι παρατηρείς; Ποια θα είναι η τεταγμένη του σημείου της ίδιας «σειράς» που έχει τετμημένη 5;

- 5 ●●● Ένα τετράγωνο έχει κορυφές $A(2, 1)$ και $B(5, 1)$ και βρίσκεται «πάνω» από την AB . Να βρεις τις άλλες δύο κορυφές και το εμβαδόν του.
-

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Μάθημα 6.2

Λόγος δύο αριθμών – Αναλογία

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τι είναι ο **λόγος** δύο αριθμών ή δύο ομοειδών μεγεθών
- ✓ τι είναι η **κλίμακα** ενός χάρτη ή σχεδίου
- ✓ τι είναι **αναλογία** και ποια είναι η **βασική ιδιότητα** των αναλογιών
- ✓ να βρίσκεις τον **άγνωστο όρο** μιας αναλογίας

1 Ο λόγος δύο αριθμών

Σε μια τάξη υπάρχουν 12 αγόρια και 18 κορίτσια. Μπορούμε να συγκρίνουμε τα δύο πλήθη με **διαφορά** («τα κορίτσια είναι 6 περισσότερα») ή με **διαίρεση**: $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$, δηλαδή «για κάθε 2 αγόρια υπάρχουν 3 κορίτσια». Η δεύτερη σύγκριση λέγεται **λόγος**.



2 αγόρια

3 κορίτσια

Ο λόγος αγοριών προς κορίτσια είναι 2 προς 3.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Λόγος του αριθμού α προς τον αριθμό β (με $\beta \neq 0$) λέγεται το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$.

Λόγος δύο ομοειδών μεγεθών (μετρημένων με την **ίδια μονάδα**) λέγεται ο λόγος των μέτρων τους. Ο λόγος δείχνει **πόσες φορές** το ένα μέγεθος χωράει στο άλλο και **δεν έχει μονάδα μέτρησης**.



Παράδειγμα 1

Να βρεις τον λόγο: **α)** 15 cm προς 40 cm, **β)** 2 m προς 50 cm, **γ)** 45 λεπτά προς 2 ώρες.

ΛΥΣΗ

$$\text{α)} \quad \frac{15}{40} = \frac{3}{8}.$$

$$\text{β)} \quad \text{Πρώτα ίδια μονάδα: } 2 \text{ m} = 200 \text{ cm.} \quad \frac{200}{50} = 4. \text{ (Το πρώτο είναι 4 φορές το δεύτερο.)}$$

$$\text{γ)} \quad 2 \text{ ώρες} = 120 \text{ λεπτά:} \quad \frac{45}{120} = \frac{3}{8}.$$

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

$$\text{Λόγος } 2 \text{ m προς } 50 \text{ cm} = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$\frac{200 \text{ cm}}{50 \text{ cm}} = 4$$

Δεν μπορούμε να συγκρίνουμε μεγέθη μετρημένα με **διαφορετικές** μονάδες. Πάντα τα μετατρέπουμε πρώτα **στην ίδια μονάδα**.

2 Κλίμακα

ΚΛΙΜΑΚΑ

Κλίμακα ενός χάρτη ή σχεδίου λέγεται ο λόγος μιας απόστασης **στο σχέδιο** προς την αντίστοιχη **πραγματική** απόσταση:

$$\text{κλίμακα} = \frac{\text{απόσταση στο σχέδιο}}{\text{πραγματική απόσταση}}$$

Η κλίμακα $1 : 50.000$ (ή $\frac{1}{50.000}$) σημαίνει ότι 1 cm στον χάρτη αντιστοιχεί σε $50.000 \text{ cm} = 500 \text{ m}$ στην πραγματικότητα.



Παράδειγμα 2

Σε έναν χάρτη με κλίμακα $1 : 200.000$, δύο χωριά απέχουν $6,5 \text{ cm}$. Πόσο απέχουν στην πραγματικότητα;

ΛΥΣΗ

$$\text{Πραγματική απόσταση} = 6,5 \cdot 200.000 = 1.300.000 \text{ cm} = 13.000 \text{ m} = 13 \text{ km}.$$



Παράδειγμα 3

Ένα δωμάτιο με μήκος 5 m σχεδιάζεται σε ένα σχέδιο με μήκος 10 cm . Ποια είναι η κλίμακα του σχεδίου;

ΛΥΣΗ

$$5 \text{ m} = 500 \text{ cm}. \text{ Κλίμακα} = \frac{10}{500} = \frac{1}{50}, \text{ δηλαδή } 1 : 50.$$

3 Αναλογία

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ισότητα δύο λόγων λέγεται **αναλογία**:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

Οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ λέγονται **όροι** της αναλογίας. Οι α και δ λέγονται **άκροι** όροι και οι β και γ **μέσοι** όροι.

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$

Σε κάθε αναλογία, **το γινόμενο των άκρων ισούται με το γινόμενο των μέσων** (τα «χιαστί» γινόμενα, που γνωρίσαμε στο Μάθημα 2.2).



Παράδειγμα 4

Να εξετάσεις αν σχηματίζουν αναλογία οι λόγοι: **α)** $\frac{6}{9}$ και $\frac{14}{21}$, **β)** $\frac{4}{7}$ και $\frac{12}{20}$.

ΛΥΣΗ

α) $6 \cdot 21 = 126$ και $9 \cdot 14 = 126$: **ναι**, $\frac{6}{9} = \frac{14}{21}$.

β) $4 \cdot 20 = 80$ και $7 \cdot 12 = 84$: **όχι**.



Παράδειγμα 5

Να βρεις τον x στις αναλογίες: **α)** $\frac{x}{12} = \frac{5}{8}$, **β)** $\frac{3}{x} = \frac{9}{15}$, **γ)** $\frac{2,5}{4} = \frac{x}{6}$.

ΛΥΣΗ

Με τη βασική ιδιότητα:

α) $8x = 12 \cdot 5 = 60 \Rightarrow x = 7,5$.

β) $9x = 3 \cdot 15 = 45 \Rightarrow x = 5$.

γ) $4x = 2,5 \cdot 6 = 15 \Rightarrow x = 3,75$.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ

Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε ισχύει και $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$. Π.χ. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2+4}{3+6} = \frac{6}{9}$. Η ιδιότητα αυτή βοηθάει πολύ στα προβλήματα **μοιρασιάς** (Μάθημα 6.5).



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για λόγους, κλίμακες και αναλογίες, με πραγματικούς χάρτες και σχέδια για εξάσκηση.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 6.2

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να βρεις τους λόγους και να τους απλοποιήσεις: **α)** 24 προς 36, **β)** 0,6 προς 1,5, **γ)** 750 g προς 2 kg, **δ)** 1,2 km προς 800 m.
- 2 ●●● Σε μια σχολική χορωδία ο λόγος αγοριών προς κορίτσια είναι 3 : 5. Αν τα κορίτσια είναι 25, πόσα είναι τα αγόρια;
- 3 ●●● Να βρεις τον x : **α)** $\frac{x}{9} = \frac{8}{12}$, **β)** $\frac{7}{x} = \frac{21}{30}$, **γ)** $\frac{0,4}{x} = \frac{2}{15}$, **δ)** $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{4}$.
- 4 ●●● Σε έναν χάρτη κλίμακας 1 : 25.000 δύο σημεία απέχουν 8 cm. Ποια είναι η πραγματική απόσταση σε km; Πόσο θα απείχαν στον χάρτη δύο σημεία που απέχουν στην πραγματικότητα 3,5 km;
- 5 ●●● Ένα μοντέλο αυτοκινήτου είναι κατασκευασμένο σε κλίμακα 1 : 18. Το μοντέλο έχει μήκος 25 cm. Πόσο είναι το μήκος του πραγματικού αυτοκινήτου;
- 6 ●●● Να εξετάσεις αν οι αριθμοί 3, 5, 12, 20 (με αυτή τη σειρά) σχηματίζουν αναλογία. Να γράψεις και άλλες δύο αναλογίες με τους ίδιους αριθμούς.
- 7 ●●● Δύο αριθμοί έχουν λόγο $\frac{4}{7}$ και άθροισμα 66. Ποιοι είναι οι αριθμοί;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Μάθημα 6.3

Ανάλογα ποσά – Ιδιότητες αναλόγων ποσών

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ πότε δύο ποσά λέγονται **ανάλογα**
- ✓ τι είναι ο **συντελεστής αναλογίας**
- ✓ τη σχέση $y = \alpha \cdot x$ που συνδέει δύο ανάλογα ποσά
- ✓ να αναγνωρίζεις αν δύο ποσά είναι ανάλογα ή όχι

1 Η έννοια των αναλόγων ποσών

Ένα κιλό μήλα κοστίζει 2 €. Ας δούμε πόσο κοστίζουν διάφορες ποσότητες:

Βάρος x (kg)	1	2	3	4	5	10
Κόστος y (€)	2	4	6	8	10	20

Όταν **διπλασιάζεται** το βάρος, **διπλασιάζεται** και το κόστος· όταν **τριπλασιάζεται** το βάρος, **τριπλασιάζεται** και το κόστος κ.ο.κ. Επιπλέον, σε κάθε στήλη το **πηλίκιο** $\frac{y}{x}$ είναι **σταθερό**: $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \dots = 2$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο ποσά λέγονται **ανάλογα** όταν, πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός με έναν αριθμό, πολλαπλασιάζονται και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου **με τον ίδιο αριθμό**. Ισοδύναμα: δύο ποσά x και y είναι ανάλογα όταν ο **λόγος** των αντίστοιχων τιμών τους είναι **σταθερός**:

$$\frac{y}{x} = \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad y = \alpha \cdot x$$

Ο σταθερός αριθμός α λέγεται **συντελεστής αναλογίας**.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Δεν αρκεί να «μεγαλώνουν μαζί» δύο ποσά για να είναι ανάλογα! Το ύψος ενός παιδιού μεγαλώνει με την ηλικία του, αλλά ένα παιδί 10 ετών **δεν** έχει διπλάσιο ύψος από ένα παιδί 5 ετών. Για να είναι ανάλογα, πρέπει ο λόγος τους να μένει **σταθερός**.

**Παράδειγμα 1**

Να εξετάσεις αν τα ποσά x και y είναι ανάλογα σε κάθε πίνακα:

x	2	5	8	12
y	3	7,5	12	18

x	1	2	3	4
y	5	8	11	14

ΛΥΣΗ

1ος πίνακας: $\frac{3}{2} = 1,5$, $\frac{7,5}{5} = 1,5$, $\frac{12}{8} = 1,5$, $\frac{18}{12} = 1,5$. Ο λόγος είναι σταθερός, άρα τα ποσά είναι **ανάλογα** με συντελεστή 1,5, δηλαδή $y = 1,5x$.

2ος πίνακας: $\frac{5}{1} = 5$, $\frac{8}{2} = 4$: ο λόγος **δεν** είναι σταθερός, άρα τα ποσά **δεν** είναι ανάλογα (παρόλο που μεγαλώνουν και τα δύο). Εδώ ισχύει $y = 3x + 2$.

2 Ιδιότητες των αναλόγων ποσών**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**

Αν τα ποσά x και y είναι ανάλογα:

- Όταν το x γίνεται 2,3, ... φορές μεγαλύτερο (ή μικρότερο), και το y γίνεται 2,3, ... φορές μεγαλύτερο (ή μικρότερο).
- Όταν $x = 0$, τότε και $y = 0$.
- Για δύο ζεύγη αντίστοιχων τιμών (x_1, y_1) και (x_2, y_2) ισχύει η **αναλογία** $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$.

**Παράδειγμα 2**

Ένα αυτοκίνητο καταναλώνει 6,5 λίτρα βενζίνη στα 100 km. Αν η κατανάλωση είναι ανάλογη της απόστασης: **α)** να βρεις τον συντελεστή αναλογίας και τη σχέση, **β)** πόσα λίτρα χρειάζονται για 340 km; **γ)** πόσα km διανύει με 52 λίτρα;

ΛΥΣΗ

α) $\alpha = \frac{6,5}{100} = 0,065$ λίτρα ανά km. Σχέση: $y = 0,065x$ (x τα km, y τα λίτρα).

β) $y = 0,065 \cdot 340 = 22,1$ λίτρα.

γ) $52 = 0,065x \Rightarrow x = 52 : 0,065 = 800$ km.

Ανάλογα ποσά συναντάμε παντού: η **τιμή** και η **ποσότητα** ενός προϊόντος, η **απόσταση** και ο **χρόνος** όταν η ταχύτητα είναι σταθερή, η **περίμετρος** ενός τετραγώνου και η **πλευρά** του ($P = 4 \cdot \alpha$), ο **μισθός** και οι **ώρες** εργασίας με σταθερό ωρομίσθιο.

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

«Η πλευρά και το εμβαδόν ενός τετραγώνου είναι ανάλογα»

✓ ΣΩΣΤΟ

Πλευρά 1, 2, 3 → εμβαδόν 1, 4, 9: **όχι** ανάλογα

Όταν η πλευρά διπλασιάζεται, το εμβαδόν γίνεται **τετραπλάσιο**, όχι διπλάσιο. Ο λόγος $\frac{E}{\alpha} = \alpha$ αλλάζει. Αντίθετα, η **περίμετρος** είναι ανάλογη της πλευράς.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για τα ανάλογα ποσά με παραδείγματα από την καθημερινή ζωή και κουίζ «ανάλογα ή όχι».



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 6.3

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να εξετάσεις αν τα ποσά είναι ανάλογα και, αν είναι, να βρεις τον συντελεστή αναλογίας:

x	3	6	9	15
y	4	8	12	20

- 2 ●●● Τα ποσά x και y είναι ανάλογα. Να συμπληρώσεις τον πίνακα:

x	2	5	_____	12
y	7	_____	28	_____

- 3 ●●● Ποια από τα παρακάτω ζεύγη ποσών είναι ανάλογα; **α)** Το πλήθος των τετραδίων ίδιας τιμής και το συνολικό κόστος. **β)** Η ηλικία και το βάρος ενός ανθρώπου. **γ)** Η πλευρά ισόπλευρου τριγώνου και η περίμετρός του. **δ)** Ο χρόνος και η απόσταση που διανύει ένα αυτοκίνητο με σταθερή ταχύτητα. **ε)** Η πλευρά κύβου και ο όγκος του.

- 4 ●●● Ένας εργάτης πληρώνεται 9,50 € την ώρα. **α)** Να γράψεις τη σχέση που συνδέει τις ώρες εργασίας x με την αμοιβή y . **β)** Πόσα θα πάρει για 36 ώρες; **γ)** Πόσες ώρες εργάστηκε αν πήρε 285 €;

- 5 ●●● Τα 3 kg πορτοκάλια κοστίζουν 3,60 €. Πόσο κοστίζουν τα 7,5 kg; Πόσα kg παίρνουμε με 15 €;

- 6 ●●● Να εξηγήσεις γιατί, αν δύο ποσά είναι ανάλογα, ο πίνακας τιμών τους δεν μπορεί να περιέχει το ζεύγος $x = 0, y = 5$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Μάθημα 6.4

Γραφική παράσταση σχέσης αναλογίας

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

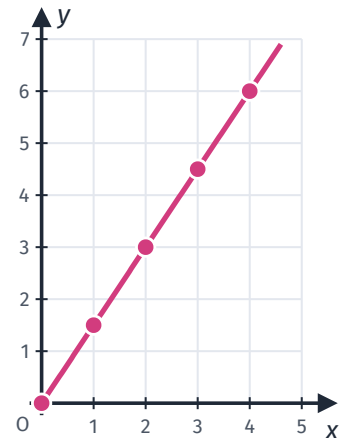
- ✓ ότι η γραφική παράσταση της σχέσης $y = ax$ είναι ημιευθεία με αρχή το O
- ✓ να σχεδιάζεις τη γραφική παράσταση από έναν πίνακα τιμών
- ✓ να διαβάζεις τιμές από μια γραφική παράσταση
- ✓ να αναγνωρίζεις από το σχήμα αν δύο ποσά είναι ανάλογα

1 Από τον πίνακα στο σχήμα

Ένα στυλό κοστίζει 1,5 €. Το κόστος y για x στυλό είναι $y = 1,5x$:

x	0	1	2	3	4
y	0	1,5	3	4,5	6

Κάθε στήλη του πίνακα δίνει ένα σημείο (x, y) : $(0,0)$, $(1; 1,5)$, $(2,3)$, $(3; 4,5)$, $(4,6)$. Αν τα σχεδιάσουμε, παρατηρούμε ότι βρίσκονται όλα πάνω σε μια ευθεία που περνάει από την αρχή O .



Η γραφική παράσταση της $y = 1,5x$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Τα σημεία (x, y) που ικανοποιούν τη σχέση **αναλογίας** $y = ax$ (με $x \geq 0$) βρίσκονται σε μια **ημιευθεία με αρχή το $O(0,0)$** . Αντίστροφα: αν τα σημεία που αντιστοιχούν σε δύο ποσά βρίσκονται σε ημιευθεία με αρχή το O , τα ποσά είναι **ανάλογα**.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Για να σχεδιάσουμε μια ημιευθεία αρκούν **δύο σημεία** — και το ένα το ξέρουμε ήδη: την αρχή $O(0,0)$! Αρκεί λοιπόν να βρούμε **ένα** ακόμη σημείο. Π.χ. για $y = 2x$: για $x = 3$ είναι $y = 6$, άρα ενώνουμε το O με το $(3,6)$.

2 Ο συντελεστής και η «κλίση»

Στο διπλανό σχήμα βλέπεις τις ημιευθείες $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$ και $y = 2x$. Όσο **μεγαλύτερος** είναι ο συντελεστής αναλογίας α , τόσο πιο **«απότομη»** (πιο κοντά στον κατακόρυφο ημιάξονα) είναι η ημιευθεία.

Ο συντελεστής α «διαβάζεται» εύκολα από το σχήμα: είναι η τιμή του y όταν $x = 1$.



Παράδειγμα 1

Από τη γραφική παράσταση, ένα κινητό διανύει 120 km σε 1,5 ώρα με σταθερή ταχύτητα. **α)** Να βρεις τη σχέση απόστασης s και χρόνου t . **β)** Πόσα km διανύει σε 2,5 ώρες; **γ)** Σε πόσο χρόνο διανύει 200 km;

ΛΥΣΗ

α) $\alpha = \frac{120}{1,5} = 80$. Άρα $s = 80t$ (η ταχύτητα είναι 80 km/h).

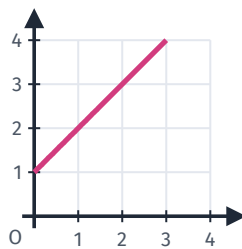
β) $s = 80 \cdot 2,5 = 200$ km.

γ) $200 = 80t \Rightarrow t = 2,5$ ώρες.

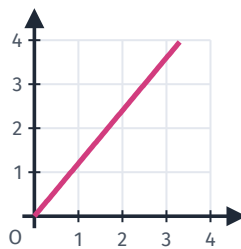


Παράδειγμα 2

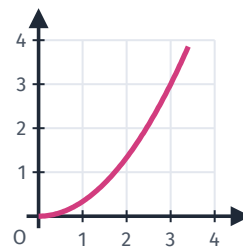
Ποια από τα παρακάτω σχήματα παριστάνουν ανάλογα ποσά;



(α)



(β)



(γ)

ΛΥΣΗ

(α) Όχι: είναι ευθεία, αλλά **δεν** περνάει από την αρχή O .

(β) **Ναι**: ημιευθεία με αρχή το O .

(γ) Όχι: περνάει από το O , αλλά είναι **καμπύλη**, όχι ευθεία.

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

«Η γραμμή είναι ευθεία, άρα τα ποσά είναι ανάλογα»

✓ ΣΩΣΤΟ

Πρέπει να είναι ευθεία **και** να περνάει από το $O(0,0)$

Μια ευθεία που ξεκινάει από άλλο σημείο του κατακόρυφου άξονα (π.χ. ταξί με σταθερή χρέωση επιβίβασης) **δεν** παριστάνει ανάλογα ποσά.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις διαδραστικό εργαλείο όπου αλλάζεις τον συντελεστή α και βλέπεις πώς «γυρίζει» η ημιευθεία $y = \alpha x$.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 6.4

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να σχεδιάσεις στο ίδιο σύστημα ημιαξόνων τις γραφικές παραστάσεις των $y = 3x$ και $y = \frac{1}{3}x$. Ποια είναι πιο «απότομη»;
- 2 ●●● Η ημιευθεία μιας σχέσης αναλογίας περνάει από το σημείο $(4, 10)$. **α)** Ποιος είναι ο συντελεστής αναλογίας; **β)** Ποια είναι η τεταγμένη του σημείου της με τετμημένη 6; **γ)** Ανήκει το σημείο $(10, 24)$ σε αυτήν;
- 3 ●●● Ένα υφασματοπωλείο πουλάει ύφασμα προς 6 € το μέτρο. Να φτιάξεις πίνακα τιμών για 0, 1, 2, 3, 4 μέτρα και να σχεδιάσεις τη γραφική παράσταση. Από το σχήμα, πόσο κοστίζουν 2,5 m;
- 4 ●●● Τα σημεία $A(2, 3)$, $B(4, 6)$ και $\Gamma(6, 8)$ βρίσκονται πάνω σε ημιευθεία με αρχή το O ; Να εξηγήσεις.
- 5 ●●● Ένα ταξί χρεώνει 4 € σταθερό ποσό και 1 € για κάθε km. Είναι η χρέωση ανάλογη της απόστασης; Πώς θα φαινόταν η γραφική παράσταση;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Μάθημα 6.5

Προβλήματα αναλογιών

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ να λύνεις προβλήματα με **ανάλογα ποσά** με τη **μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα** και με **αναλογία**
- ✓ να **μοιράζεις** ένα ποσό σε μέρη **ανάλογα** προς δοσμένους αριθμούς
- ✓ να χρησιμοποιείς την **κλίμακα** σε προβλήματα

1 Αναγωγή στη μονάδα

✏ Παράδειγμα 1

Τα 5 τετράδια κοστίζουν 8,50 €. Πόσο κοστίζουν τα 12 τετράδια;

ΛΥΣΗ

Με αναγωγή στη μονάδα: το 1 τετράδιο κοστίζει $8,50 : 5 = 1,70$ €. Τα 12 κοστίζουν $12 \cdot 1,70 = 20,40$ €.

Με αναλογία: τα ποσά «τετράδια» και «κόστος» είναι ανάλογα. Αν x το ζητούμενο κόστος:

$$\frac{x}{12} = \frac{8,50}{5} \Rightarrow 5x = 12 \cdot 8,50 = 102 \Rightarrow x = 20,40 \text{ €}$$

ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

- 1 Εξακριβώνουμε ότι τα ποσά είναι **ανάλογα** («όσο αυξάνεται το ένα, αυξάνεται **με τον ίδιο λόγο** και το άλλο»).
- 2 Γράφουμε τα δεδομένα σε **πίνακα** δύο γραμμών.
- 3 Σχηματίζουμε **αναλογία** (λόγος του ενός ποσού = λόγος του άλλου) ή κάνουμε **αναγωγή στη μονάδα**.
- 4 Λύνουμε και ελέγχουμε αν το αποτέλεσμα είναι λογικό.

**Παράδειγμα 2**

Για να φτιάξει 3 ίδια κέικ, μια ζαχαροπλάστισσα χρειάζεται 750 g αλεύρι. Πόσο αλεύρι χρειάζεται για 7 τέτοια κέικ;

ΛΥΣΗ

Κέικ	3	7
Αλεύρι (g)	750	x

$$\frac{x}{750} = \frac{7}{3} \Rightarrow 3x = 5.250 \Rightarrow x = 1.750 \text{ g}$$

2 Μερισμός σε μέρη ανάλογα

Τρεις φίλοι αγόρασαν μαζί ένα λαχείο: ο πρώτος έδωσε 2 €, ο δεύτερος 3 € και ο τρίτος 5 €. Το λαχείο κέρδισε 1.200 €. Δίκαιο είναι να μοιράσουν τα κέρδη **ανάλογα** με τη συμμετοχή του καθενός.

ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΕ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΡΟΣ Α, Β, Γ

- 1 Ονομάζουμε τα μέρη x, y, z . Αφού είναι ανάλογα προς α, β, γ : $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$.
- 2 Από την ιδιότητα των λόγων: $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{x+y+z}{\alpha+\beta+\gamma}$.
- 3 Υπολογίζουμε τον κοινό λόγο (το «μερίδιο ανά μονάδα») και πολλαπλασιάζουμε.

**Παράδειγμα 3**

Να μοιράσεις τα 1.200 € του λαχείου σε μέρη ανάλογα προς 2, 3, 5.

ΛΥΣΗ

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{1.200}{10} = 120. \text{ Άρα } x = 2 \cdot 120 = 240 \text{ €, } y = 3 \cdot 120 = 360 \text{ €, } z = 5 \cdot 120 = 600 \text{ €}.$$

Έλεγχος: $240 + 360 + 600 = 1.200 \checkmark$.



1.200 € σε 10 ίσα «μερίδια» των 120 €

Ο μερισμός σε μέρη ανάλογα προς 2, 3, 5

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

Μοιράζω τα 1.200 € σε 3 ίσα μέρη: 400 € ο καθένας

✓ ΣΩΣΤΟ

Σε μέρη ανάλογα προς 2, 3, 5: 240, 360, 600 €

Το «ανάλογα» σημαίνει ότι ο καθένας παίρνει ανάλογα με τη συμμετοχή του. Μετράμε **συνολικά** $2 + 3 + 5 = 10$ **μερίδια**, όχι 3 άτομα.



Παράδειγμα 4

Για ένα χρυσό κόσμημα αναμειγνύεται χρυσός και χαλκός σε λόγο 3 : 1. Πόσος χρυσός χρειάζεται για κόσμημα 20 g;

ΛΥΣΗ

Συνολικά $3 + 1 = 4$ μερίδια, $20 : 4 = 5$ g το μερίδιο. Χρυσός: $3 \cdot 5 = 15$ g, χαλκός: 5 g.

3 Προβλήματα με κλίμακα



Παράδειγμα 5

Η κάτοψη ενός διαμερίσματος είναι σχεδιασμένη με κλίμακα 1 : 100. Το σαλόνι στο σχέδιο είναι ορθογώνιο $6 \text{ cm} \times 4,5 \text{ cm}$. Ποιο είναι το πραγματικό εμβαδόν του;

ΛΥΣΗ

Πραγματικές διαστάσεις: $6 \cdot 100 = 600 \text{ cm} = 6 \text{ m}$ και $4,5 \cdot 100 = 450 \text{ cm} = 4,5 \text{ m}$. Εμβαδόν: $6 \cdot 4,5 = 27 \text{ m}^2$.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Η κλίμακα αφορά **μήκη**, όχι εμβαδά! Με κλίμακα 1 : 100, το εμβαδόν στην πραγματικότητα είναι $100 \cdot 100 = 10.000$ φορές μεγαλύτερο από το εμβαδόν στο σχέδιο. Γι' αυτό πάντα μετατρέπουμε **πρώτα τις διαστάσεις** και **μετά** υπολογίζουμε εμβαδόν.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις πολλά προβλήματα αναλογιών με βίντεο-λύσεις: συνταγές, χάρτες, μερισμούς και αναμείξεις.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 6.5

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Ένα αυτοκίνητο διανύει 150 km σε 2 ώρες με σταθερή ταχύτητα. Πόσα km θα διανύσει σε 5 ώρες; Σε πόση ώρα θα διανύσει 300 km;
- 2 ●●● Με 12 kg αλεύρι ένας φούρνος φτιάχνει 20 ψωμιά. Πόσα ψωμιά φτιάχνει με 45 kg; Πόσο αλεύρι χρειάζεται για 65 ψωμιά;
- 3 ●●● Να μοιράσεις τον αριθμό 360 σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 1, 3, 5.
- 4 ●●● Δύο συνεταίροι έβαλαν σε μια επιχείρηση 15.000 € και 25.000 €. Το κέρδος ήταν 8.400 €. Πόσα θα πάρει ο καθένας, αν το κέρδος μοιραστεί ανάλογα με τα κεφάλαια;
- 5 ●●● Οι γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 2, 3, 4. Να τις βρεις.
- 6 ●●● Για μια μπογιά αναμειγνύουμε μπλε και κίτρινο χρώμα σε λόγο 2 : 3. Πόσο κίτρινο χρειάζεται αν χρησιμοποιήσουμε 5 λίτρα μπλε; Πόση μπογιά θα φτιαχτεί συνολικά;
- 7 ●●● Σε σχέδιο κλίμακας 1 : 50 ένα τραπέζι έχει μήκος 3,2 cm. Ποιο είναι το πραγματικό μήκος; Ένα δωμάτιο 4 m × 3 m, τι διαστάσεις θα έχει στο σχέδιο; Τι εμβαδόν θα έχει στο σχέδιο;
- 8 ●●● Τρεις εργάτες δούλεψαν 4, 6 και 8 μέρες αντίστοιχα σε μια δουλειά και πληρώθηκαν συνολικά 1.620 €. Πόσα πήρε ο καθένας, αν πληρώθηκαν ανάλογα με τις μέρες εργασίας;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Μάθημα 6.6

Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ πότε δύο ποσά λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα**
- ✓ ότι το **γινόμενο** των αντίστοιχων τιμών τους είναι **σταθερό**: $x \cdot y = \alpha$
- ✓ πώς είναι η γραφική τους παράσταση (**υπερβολή**)
- ✓ να λύνεις **προβλήματα** με αντιστρόφως ανάλογα ποσά

1 Η έννοια

Για να βάψουμε έναν τοίχο, 1 μπογιατζής χρειάζεται 12 ώρες. Αν δουλέψουν 2 μπογιατζήδες (με τον ίδιο ρυθμό), χρειάζονται τον **μισό** χρόνο, δηλαδή 6 ώρες· αν δουλέψουν 3, χρειάζονται το **ένα τρίτο** του χρόνου, 4 ώρες, κ.ο.κ.

Μπογιατζήδες x	1	2	3	4	6	12
Ώρες y	12	6	4	3	2	1
Γινόμενο $x \cdot y$	12	12	12	12	12	12

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο ποσά λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα** όταν, πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός με έναν αριθμό, οι αντίστοιχες τιμές του άλλου **διαιρούνται με τον ίδιο αριθμό**. Ισοδύναμα: το **γινόμενο** των αντίστοιχων τιμών τους είναι **σταθερό**:

$$x \cdot y = \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{\alpha}{x}$$

**ΠΡΟΣΟΧΗ!**

Δεν αρκεί «όταν το ένα μεγαλώνει, το άλλο να μικραίνει»! Π.χ. η ηλικία ενός αυτοκινήτου και η τιμή μεταπώλησής του: όσο μεγαλώνει η ηλικία μικραίνει η τιμή, αλλά ένα αυτοκίνητο 10 ετών **δεν** αξίζει ακριβώς το μισό από ένα 5 ετών. Ελέγχουμε πάντα αν το **γινόμενο** είναι σταθερό.

**Παράδειγμα 1**

Να εξετάσεις αν τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα:

x	2	4	5	10
y	15	7,5	6	3

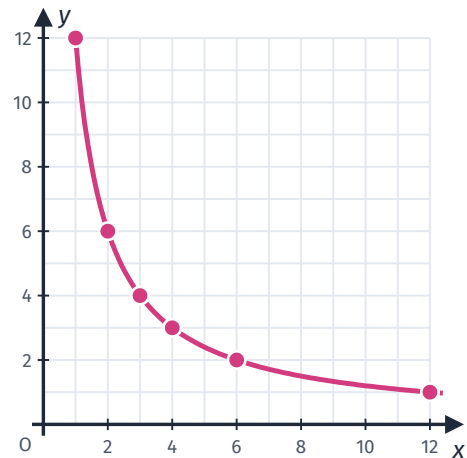
ΛΥΣΗ

Γινόμενα: $2 \cdot 15 = 30$, $4 \cdot 7,5 = 30$, $5 \cdot 6 = 30$, $10 \cdot 3 = 30$. Σταθερό γινόμενο, άρα **αντιστρόφως ανάλογα** με $x \cdot y = 30$, δηλαδή $y = \frac{30}{x}$.

2 Η γραφική παράσταση

Αν σχεδιάσουμε τα σημεία (x, y) με $x \cdot y = 12$, δηλαδή τα $(1,12)$, $(2,6)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(6,2)$, $(12,1)$, παρατηρούμε ότι **δεν** βρίσκονται σε ευθεία, αλλά σε μια **καμπύλη γραμμή** που λέγεται **υπερβολή**.

Η καμπύλη πλησιάζει όλο και περισσότερο τους άξονες, αλλά **δεν τους συναντά ποτέ** (γιατί ούτε το x ούτε το y μπορεί να είναι 0).



Η υπερβολή $x \cdot y = 12$

3 Προβλήματα**Παράδειγμα 2**

8 εργάτες τελειώνουν ένα έργο σε 15 μέρες. Σε πόσες μέρες θα το τελειώσουν 12 εργάτες (με τον ίδιο ρυθμό);

ΛΥΣΗ

Περισσότεροι εργάτες → λιγότερες μέρες, και μάλιστα αν διπλασιαστούν οι εργάτες, οι μέρες γίνονται μισές: τα ποσά είναι **αντιστρόφως ανάλογα**. Άρα το γινόμενο είναι σταθερό:

$$12 \cdot x = 8 \cdot 15 = 120 \Rightarrow x = 10 \text{ μέρες}$$

Με αναγωγή στη μονάδα: 1 εργάτης θα χρειαζόταν $8 \cdot 15 = 120$ μέρες, άρα οι 12 χρειάζονται $120 : 12 = 10$ μέρες.



Παράδειγμα 3

Ένα αυτοκίνητο με ταχύτητα 90 km/h κάνει μια διαδρομή σε 4 ώρες. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί με ταχύτητα 120 km/h;

ΛΥΣΗ

Για σταθερή απόσταση, ταχύτητα και χρόνος είναι αντιστρόφως ανάλογα: $120 \cdot t = 90 \cdot 4 = 360 \Rightarrow t = 3$ ώρες. (Η απόσταση είναι 360 km.)



ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

«8 εργάτες σε 15 μέρες, άρα 12 εργάτες σε $\frac{15 \cdot 12}{8} = 22,5$ μέρες»

✓ ΣΩΣΤΟ

$$x = \frac{8 \cdot 15}{12} = 10 \text{ μέρες}$$

Χρησιμοποιήθηκε η αναλογία των **αναλόγων** ποσών σε ποσά **αντιστρόφως** ανάλογα. Ο έλεγχος λογικής το δείχνει: με **περισσότερους** εργάτες **δεν** μπορεί να χρειάζονται **περισσότερες** μέρες!

	Ανάλογα ποσά	Αντιστρόφως ανάλογα ποσά
Όταν το x γίνεται λ φορές μεγαλύτερο, το y ...	γίνεται λ φορές μεγαλύτερο	γίνεται λ φορές μικρότερο
Σταθερό είναι το...	πηλίκο $\frac{y}{x} = \alpha$	γινόμενο $x \cdot y = \alpha$
Σχέση	$y = \alpha x$	$y = \frac{\alpha}{x}$
Γραφική παράσταση	ημιευθεία από το O	υπερβολή



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο που συγκρίνει τα ανάλογα με τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά και κουίζ «ποιο είδος είναι;».



6

ΑΝΑΛΟΓΑ



Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 6.6

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1

●●● Να εξετάσεις αν τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα:

x	1	3	6	9
y	18	6	3	2

- 2 ●●● Τα ποσά x, y είναι αντιστρόφως ανάλογα. Να συμπληρώσεις:

x	2	4	_____	16
y	20	_____	5	_____

- 3 ●●● Ποια ζεύγη είναι ανάλογα, ποια αντιστρόφως ανάλογα και ποια τίποτα από τα δύο; **α)** Πλήθος ατόμων που μοιράζονται μια πίτσα και μερίδα καθενός. **β)** Πλευρά τετραγώνου και περίμετρος. **γ)** Ηλικία και ύψος. **δ)** Ταχύτητα και χρόνος για σταθερή απόσταση. **ε)** Ποσότητα και κόστος.
- 4 ●●● Τα τρόφιμα μιας κατασκήνωσης φτάνουν για 30 παιδιά για 12 μέρες. Για πόσες μέρες θα φτάσουν αν έρθουν 40 παιδιά;
- 5 ●●● Μια δεξαμενή γεμίζει με 3 ίδιες βρύσες σε 8 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει με 4 βρύσες; Πόσες βρύσες χρειάζονται για να γεμίσει σε 2 ώρες;
- 6 ●●● Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 36 cm^2 . Να γράψεις τη σχέση μήκους x και πλάτους y και 4 ζεύγη πιθανών διαστάσεων. Τι είδους ποσά είναι;
- 7 ●●● Για να τυπώσουν ένα βιβλίο, 5 εκτυπωτικά μηχανήματα χρειάζονται 9 ώρες. Μετά από 3 ώρες χαλάει ένα μηχάνημα. Πόσες ώρες συνολικά θα χρειαστεί η εκτύπωση;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Ανακεφαλαίωση

Όλο το κεφάλαιο σε λίγες σελίδες & επαναληπτικές ασκήσεις

1 Η θεωρία με μια ματιά

Συντεταγμένες

- $A(x, y)$: πρώτα τετμημένη, μετά τεταγμένη
- Αρχή $O(0,0)$

Λόγος – Αναλογία

- Λόγος: $\frac{\alpha}{\beta}$ (ίδια μονάδα!)
- Κλίμακα: σχέδιο/πραγματικό
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \alpha\delta = \beta\gamma$

Ανάλογα ποσά

- $\frac{y}{x} = \alpha$ σταθερό, $y = \alpha x$
- Γραφική: ημιευθεία από το O
- Μερισμός: $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{x+y}{\alpha+\beta}$

Αντιστρόφως ανάλογα

- $x \cdot y = \alpha$ σταθερό, $y = \frac{\alpha}{x}$
- Γραφική: υπερβολή
- Έλεγχος λογικής στο αποτέλεσμα



Η ΓΛΑΥΚΑ ΘΥΜΙΖΕΙ

Πριν λύσεις οποιοδήποτε πρόβλημα, ρώτα: «αν διπλασιαστεί το ένα ποσό, τι γίνεται το άλλο;» Αν διπλασιάζεται → ανάλογα. Αν υποδιπλασιάζεται → αντιστρόφως ανάλογα. Αλλιώς → τίποτα από τα δύο!



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις επαναληπτικό τεστ για ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά με βίντεο-λύσεις.



★ Επαναληπτικές ασκήσεις

Κεφάλαιο 6

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Να βρεις τον x : $\frac{x}{3,5} = \frac{12}{7}$.

2 ●●● Σε χάρτη κλίμακας 1 : 300.000 μια λίμνη έχει μήκος 2,4 cm. Πόσο είναι το πραγματικό μήκος της;

- 3 ●●● Η ημιευθεία μιας σχέσης αναλογίας περνάει από το $(5, 2)$. Να βρεις τη σχέση και την τετμημένη του σημείου της με τεταγμένη 7.
- 4 ●●● 6 αντλίες αδειάζουν μια πισίνα σε 10 ώρες. Πόσες αντλίες χρειάζονται για να αδειάσει σε 4 ώρες;
- 5 ●●● Να μοιράσεις 2.700 € σε τρία παιδιά ανάλογα με τις ηλικίες τους, που είναι 8, 12 και 16 ετών.
- 6 ●●● Ένα τρένο με 80 km/h καλύπτει μια απόσταση σε 3 h 45 min. Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινηθεί για να την καλύψει σε 3 h;
- 7 ●●● Τα ποσά x και y είναι ανάλογα και όταν $x = 6$ είναι $y = 15$. Τα ποσά y και z είναι αντιστρόφως ανάλογα και όταν $y = 15$ είναι $z = 4$. Να βρεις τα y και z όταν $x = 10$.
- 8 ●●● Σε μια συνταγή για 4 άτομα χρειάζονται 300 g ζυμαρικά και 0,6 L σάλτσα. Πόσα χρειάζονται για 10 άτομα;

7

Κεφάλαιο 7

Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί

Θερμοκρασίες κάτω από το μηδέν, υπόγεια, χρέη, χρονολογίες π.Χ.: οι **αρνητικοί αριθμοί** συμπληρώνουν το «αριθμητικό μας σύμπαν». Μαθαίνουμε να κάνουμε **όλες τις πράξεις** με θετικούς και αρνητικούς, γνωρίζουμε τους **περιοδικούς δεκαδικούς**, τις **δυνάμεις με αρνητικό εκθέτη** και γράφουμε **απειροελάχιστους** αριθμούς. Είναι το πιο σημαντικό κεφάλαιο για τη συνέχεια της Άλγεβρας!

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 7.1 Ρητοί αριθμοί – Η ευθεία των ρητών
- 7.2 Απόλυτη τιμή – Αντίθετοι – Σύγκριση
- 7.3 Πρόσθεση ρητών
- 7.4 Αφαίρεση ρητών
- 7.5 Πολλαπλασιασμός ρητών
- 7.6 Διαίρεση ρητών
- 7.7 Δεκαδική μορφή ρητών
- 7.8 Δυνάμεις με εκθέτη φυσικό
- 7.9 Δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο
- 7.10 Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών
- ★ Ανακεφαλαίωση & επαναληπτικές ασκήσεις



Βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις και κουίζ
για όλο το κεφάλαιο, δωρεάν στο
mathgreece.com



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 7.1

Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) –
Η ευθεία των ρητών – Τετμημένη σημείου

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

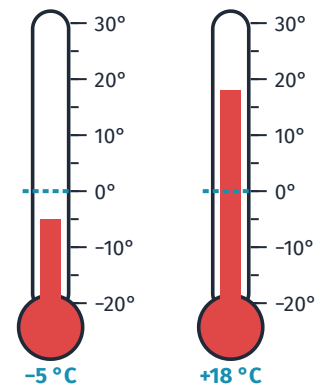
- ✓ γιατί χρειαζόμαστε **αρνητικούς** αριθμούς
- ✓ τι είναι οι **ρητοί**, οι **ακέραιοι**, οι **ομόσημοι** και οι **ετερόσημοι** αριθμοί
- ✓ να τοποθετείς ρητούς στην **ευθεία των ρητών** και να βρίσκεις την **τετμημένη** ενός σημείου
- ✓ να βρίσκεις σημεία σε **σύστημα αξόνων** με θετικές και αρνητικές συντεταγμένες

1 Γιατί χρειαζόμαστε αρνητικούς αριθμούς;

Ένα χειμωνιάτικο πρωί στη Φλώρινα το θερμόμετρο δείχνει 5 βαθμούς **κάτω από το μηδέν**. Πώς να το γράψουμε; Με τους φυσικούς, τα κλάσματα και τους δεκαδικούς δεν μπορούμε να εκφράσουμε ποσότητες «κάτω από το μηδέν».

Γι' αυτό χρησιμοποιούμε το πρόσημο «-» (**πλην**): γράφουμε -5°C . Αντίθετα, 5 βαθμοί **πάνω** από το μηδέν γράφονται $+5^{\circ}\text{C}$ ή απλώς 5°C .

Αρνητικούς αριθμούς συναντάμε παντού: **υπόγεια** ενός κτιρίου (-2 ος όροφος), **βάθος** κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας (-200 m), **χρέη** σε έναν λογαριασμό (-50 €), χρονολογίες **π.Χ.**, ζημιές μιας επιχείρησης...



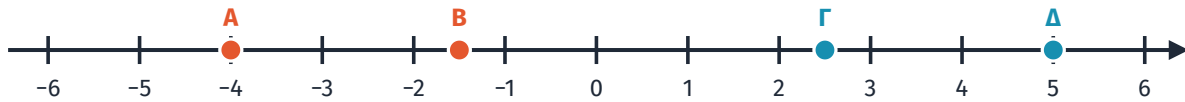
Θερμοκρασίες κάτω και πάνω από το μηδέν

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Οι αριθμοί με πρόσημο $+$ λέγονται **θετικοί** και με πρόσημο $-$ **αρνητικοί**. Το 0 **δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός**.
- Οι αριθμοί $\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots$ λέγονται **ακέραιοι**.
- Όλοι οι αριθμοί που γράφονται ως κλάσμα (θετικό ή αρνητικό), μαζί με το 0, λέγονται **ρητοί** αριθμοί. Π.χ. $-\frac{3}{4}, 2, 5, -7, 0, \frac{11}{3}$.
- Δύο αριθμοί με το **ίδιο** πρόσημο λέγονται **ομόσημοι** ($+3$ και $+8$, ή -2 και $-0,5$), ενώ με **διαφορετικό** πρόσημο **ετερόσημοι** (-4 και $+9$).

2 Η ευθεία των ρητών

Σε μια ευθεία $x'x$ σημειώνουμε ένα σημείο O , την **αρχή**, που αντιστοιχεί στο 0. Δεξιά του O , με ίσα βήματα, τοποθετούμε τους **θετικούς** αριθμούς και αριστερά, συμμετρικά, τους **αρνητικούς**.



Η ευθεία των ρητών: $A(-4)$, $B(-1,5)$, $\Gamma(2,5)$, $\Delta(5)$

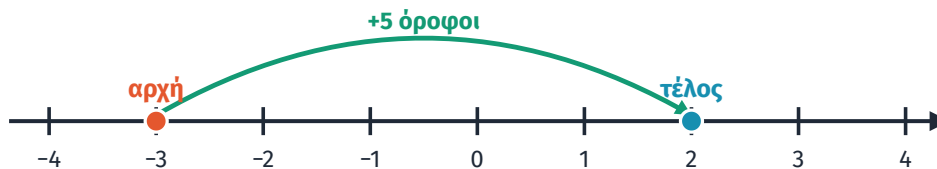
ΤΕΤΜΗΜΕΝΗ ΣΗΜΕΙΟΥ

Ο αριθμός που αντιστοιχεί σε ένα σημείο της ευθείας λέγεται **τετμημένη** του σημείου. Γράφουμε $A(-4)$ και διαβάζουμε «το σημείο A με τετμημένη -4 ». Το τμήμα Ox (δεξιά) λέγεται **θετικός ημιάξονας** και το Ox' (αριστερά) **αρνητικός ημιάξονας**.



Παράδειγμα 1

Σε ένα κτίριο το ισόγειο αντιστοιχεί στο 0. Ο Άρης ξεκινά από το 3ο υπόγειο και ανεβαίνει 5 ορόφους. Σε ποιον όροφο φτάνει;



ΛΥΣΗ

Το 3ο υπόγειο είναι ο όροφος -3 . Ανεβαίνοντας 5 ορόφους (βήματα προς τα δεξιά στην ευθεία): $-2, -1, 0, 1, 2$. Φτάνει στον 2ο όροφο.



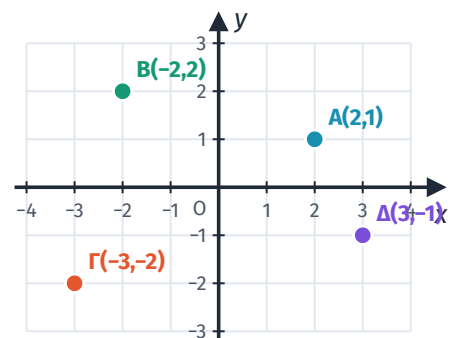
ΠΡΟΣΟΧΗ!

Συνήθως **δεν** γράφουμε το πρόσημο $+$ στους θετικούς: $+7 = 7$. Το πρόσημο $-$ όμως **δεν παραλείπεται ποτέ!** Και πρόσεξε: το -0 είναι το ίδιο με το 0.

3 Σημεία στο επίπεδο με αρνητικές συντεταγμένες

Αν προεκτείνουμε τους ημιάξονες του Μαθήματος 6.1 και προς τις αρνητικές τιμές, παίρνουμε ένα **ορθοκανονικό σύστημα αξόνων** $x'x$ και $y'y$, που χωρίζει το επίπεδο σε **τέσσερα τεταρτημόρια**.

Οι συντεταγμένες ενός σημείου μπορεί τώρα να είναι και αρνητικές: το $\Gamma(-3, -2)$ βρίσκεται 3 μονάδες **αριστερά** και 2 μονάδες **κάτω** από την αρχή O .



Τα τέσσερα τεταρτημόρια



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο-εισαγωγή στους αρνητικούς αριθμούς με παραδείγματα από τη ζωή και κουίζ τοποθέτησης στην ευθεία.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 7.1

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να εκφράσεις με θετικό ή αρνητικό αριθμό: **α)** κέρδος 120 €, **β)** 3 υπόγειο, **γ)** 15 βαθμοί κάτω από το μηδέν, **δ)** 480 π.Χ., **ε)** 2.917 m πάνω από τη θάλασσα (Όλυμπος).
- 2 ●●● Να τοποθετήσεις σε μια ευθεία τα σημεία $A(-3)$, $B(+2)$, $\Gamma(-0,5)$, $\Delta\left(\frac{3}{2}\right)$, $E\left(-\frac{5}{2}\right)$.
- 3 ●●● Από τους αριθμούς -7 , $\frac{2}{3}$, 0 , $-1,25$, 15 , $-\frac{8}{4}$ ποιοι είναι: **α)** ακέραιοι, **β)** αρνητικοί, **γ)** ούτε θετικοί ούτε αρνητικοί;
- 4 ●●● Η θερμοκρασία το πρωί ήταν -4°C . Μέχρι το μεσημέρι ανέβηκε 9 βαθμούς και το βράδυ έπεσε 7 βαθμούς. Ποια θερμοκρασία είχαμε το μεσημέρι και ποια το βράδυ;
- 5 ●●● Να γράψεις σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκονται τα σημεία $A(4, -2)$, $B(-1, -6)$, $\Gamma(-3, 5)$, $\Delta(2, 7)$. Πού βρίσκεται το $E(0, -3)$;
- 6 ●●● Ο Πυθαγόρας γεννήθηκε περίπου το 570 π.Χ. και ο Αριστοτέλης το 384 π.Χ. Πόσα χρόνια μεσολάβησαν; Πόσα χρόνια πέρασαν από τη γέννηση του Αριστοτέλη μέχρι το 2026 μ.Χ.;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

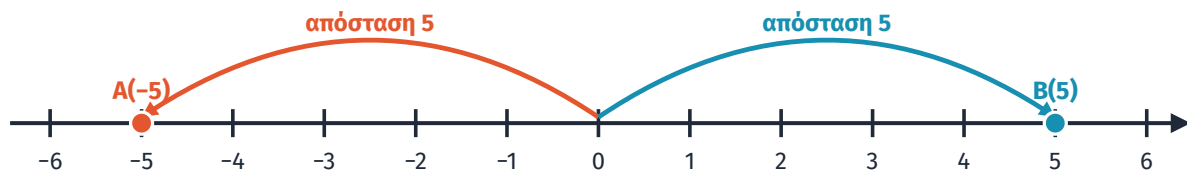
Μάθημα 7.2

Απόλυτη τιμή ρητού – Αντίθετοι ρητοί – Σύγκριση ρητών

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τι είναι η **απόλυτη τιμή** ενός ρητού και πώς συμβολίζεται
- ✓ ποιοι αριθμοί λέγονται **αντίθετοι**
- ✓ να **συγκρίνεις** και να **διατάσσεις** ρητούς αριθμούς

1 Απόλυτη τιμή



Τα σημεία $A(-5)$ και $B(5)$ απέχουν το ίδιο από την αρχή O .

ΟΡΙΣΜΟΣ

Απόλυτη τιμή ενός ρητού α λέγεται η **απόσταση** του σημείου που τον παριστάνει από την αρχή O . Συμβολίζεται $|\alpha|$.

$$|+5| = 5 \quad |-5| = 5 \quad |0| = 0 \quad \left| -\frac{3}{4} \right| = \frac{3}{4}$$

Στην πράξη: η απόλυτη τιμή είναι ο αριθμός **χωρίς το πρόσημό του**. Η απόλυτη τιμή είναι **πάντα θετικός αριθμός ή μηδέν** (μια απόσταση δεν μπορεί να είναι αρνητική).

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

$$|-7| = -7$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$|-7| = 7$$

Η απόλυτη τιμή εκφράζει **απόσταση**, που δεν είναι ποτέ αρνητική. Όμως πρόσεχε: το $-|7|$ **είναι** -7 , γιατί εδώ το «πλην» βρίσκεται **έξω** από την απόλυτη τιμή.

2 Αντίθετοι αριθμοί

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο ρητοί που έχουν **την ίδια απόλυτη τιμή** αλλά **διαφορετικό πρόσημο** λέγονται **αντίθετοι**. Π.χ. $+5$ και -5 , $-\frac{2}{3}$ και $\frac{2}{3}$. Ο αντίθετος του 0 είναι το 0 . Ο αντίθετος του α συμβολίζεται $-\alpha$. Άρα $-(-5) = +5$: **ο αντίθετος του αντιθέτου είναι ο ίδιος ο αριθμός**.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Το $-\alpha$ **δεν είναι πάντα αρνητικός**! Αν $\alpha = -3$, τότε $-\alpha = -(-3) = 3$, θετικός. Το $-\alpha$ σημαίνει «ο αντίθετος του α ».

3 Σύγκριση ρητών

Στην ευθεία των ρητών, όπως και στους φυσικούς, **όσο πιο δεξιά** βρίσκεται ένας αριθμός, τόσο **μεγαλύτερος** είναι. Έτσι, $-1 > -4$, γιατί το -1 είναι δεξιότερα· με άλλα λόγια, -1°C είναι «ζεστότερα» από -4°C .

ΚΑΝΟΝΕΣ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ

- Κάθε **θετικός** είναι **μεγαλύτερος** από το 0 και κάθε **αρνητικός** είναι **μικρότερος** από το 0 .
- Κάθε θετικός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό.
- Από δύο **θετικούς**, μεγαλύτερος είναι αυτός με τη **μεγαλύτερη** απόλυτη τιμή.
- Από δύο **αρνητικούς**, μεγαλύτερος είναι αυτός με τη **μικρότερη** απόλυτη τιμή: $-2 > -9$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

$$-9 > -2, \text{ «γιατί } 9 > 2\text{»}$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$-9 < -2$$

Στους αρνητικούς η σειρά **«αντιστρέφεται»**: όσο μεγαλύτερη είναι η απόλυτη τιμή, τόσο πιο αριστερά βρίσκεται ο αριθμός, άρα τόσο **μικρότερος** είναι. Σκέψου: χρωστάω 9 € ή χρωστάω 2 € ; Ποιο είναι «καλύτερο»;



Παράδειγμα 1

Να γράψεις σε αύξουσα σειρά: $3, -\frac{1}{2}, -4, 0, -1,8, \frac{5}{2}, -5$.

ΛΥΣΗ

Πρώτα οι αρνητικοί (από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή στη μικρότερη), μετά το 0 , μετά οι θετικοί:

$$-5 < -4 < -1,8 < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{5}{2} < 3$$



Παράδειγμα 2

Να βρεις όλους τους ακέραιους x για τους οποίους ισχύει: **α)** $-3 < x \leq 2$, **β)** $|x| < 3$, **γ)** $|x| = 4$.

ΛΥΣΗ

α) $x = -2, -1, 0, 1, 2$.

β) Οι ακέραιοι που απέχουν από το O λιγότερο από 3: $x = -2, -1, 0, 1, 2$.

γ) Οι αριθμοί που απέχουν 4 από το O : $x = 4$ ή $x = -4$.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για την απόλυτη τιμή και τη σύγκριση ρητών και παιχνίδι διάταξης θερμοκρασιών.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 7.2

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Να υπολογίσεις: **α)** $|-12|$, **β)** $|+3,5|$, **γ)** $|-7/9|$, **δ)** $|-4| + |6|$, **ε)** $|-8| - |-3|$, **στ)** $|-10|$.

2 ●●● Να γράψεις τους αντίθετους των: -8 , $2,4$, $-\frac{1}{3}$, 0 , $-(-6)$.

3 ●●● Να συμπληρώσεις με $<$ ή $>$: **α)** -7 _____ 2 , **β)** -3 _____ -8 , **γ)** $-0,5$ _____ $-0,05$, **δ)** $-\frac{2}{3}$ _____ $-\frac{3}{4}$, **ε)** 0 _____ -100 .

4 ●●● Να γράψεις σε φθίνουσα σειρά: -2 , $1,5$, $-2,5$, $-\frac{1}{4}$, 0 , -3 .

5 ●●● Οι θερμοκρασίες μιας εβδομάδας του Ιανουαρίου ήταν: $-3, 2, -5, 0, -1, 4, -6$ ($^{\circ}\text{C}$). Ποια ήταν η μικρότερη και ποια η μεγαλύτερη; Πόσες μέρες είχαμε θερμοκρασία κάτω από -2°C ;

6 ●●● Να βρεις τους ακέραιους x με: **α)** $|x| \leq 2$, **β)** $-5 < x < -1$, **γ)** $|x| = 0$.

7 ●●● Σωστό ή Λάθος; **α)** Ο αντίθετος ενός αρνητικού είναι θετικός. **β)** $|a| = |-a|$ για κάθε a . **γ)** Αν $|a| = |\beta|$, τότε $a = \beta$. **δ)** Υπάρχει μεγαλύτερος αρνητικός ακέραιος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 7.3

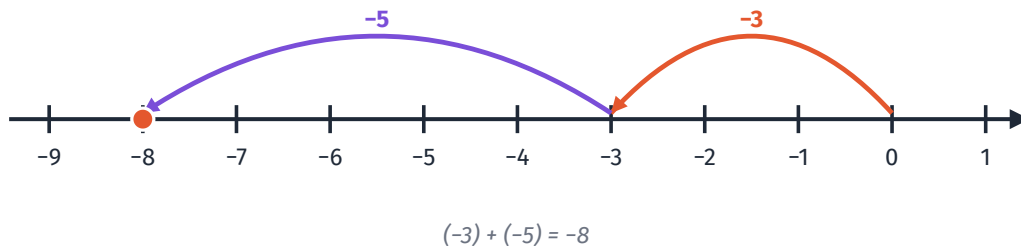
Πρόσθεση ρητών αριθμών

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ να προσθέτεις **ομόσημους** ρητούς
- ✓ να προσθέτεις **ετερόσημους** ρητούς
- ✓ τις **ιδιότητες** της πρόσθεσης και πώς προσθέτουμε **πολλούς** ρητούς

1 Πρόσθεση ομόσημων

Σκέψου τους θετικούς ως **κέρδη** και τους αρνητικούς ως **ζημιές** (ή χρέη). Αν τη Δευτέρα χάσω 3 € και την Τρίτη χάσω 5 €, συνολικά έχασα 8 €: $(-3) + (-5) = -8$.



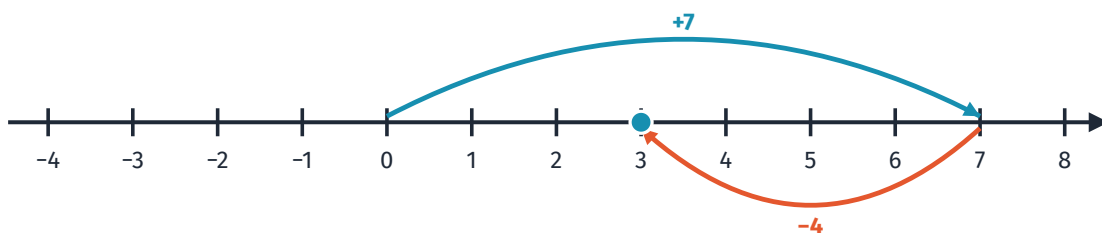
ΚΑΝΟΝΑΣ

Για να προσθέσουμε δύο **ομόσημους** ρητούς, **προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές** τους και στο άθροισμα βάζουμε **το κοινό τους πρόσημο**.

$$(+4) + (+7) = +11 \quad (-4) + (-7) = -11$$

2 Πρόσθεση ετερόσημων

Αν κερδίσω 7 € και χάσω 4 €, μένω με κέρδος 3 €: $(+7) + (-4) = +3$. Αν κερδίσω 4 € και χάσω 7 €, μένω με ζημιά 3 €: $(+4) + (-7) = -3$.



$$(+7) + (-4) = +3: \text{πάμε 7 βήματα δεξιά και 4 αριστερά}$$

ΚΑΝΟΝΑΣ

Για να προσθέσουμε δύο **ετερόσημους** ρητούς, **αφαιρούμε** από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή τη μικρότερη και στη διαφορά βάζουμε **το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή**.

$$(+7) + (-4) = +3 \quad (-7) + (+4) = -3 \quad (-5) + (+5) = 0$$

Το άθροισμα **δύο αντίθετων** είναι πάντα **μηδέν**.

**Παράδειγμα 1**

Να υπολογίσεις: **α)** $(-12) + (-9)$, **β)** $(-15) + (+6)$, **γ)** $(+2,5) + (-4)$, **δ)** $\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right)$.

ΛΥΣΗ

α) Ομόσημοι: $-(12 + 9) = -21$.

β) Ετερόσημοι: $15 - 6 = 9$, πρόσημο του -15 : -9 .

γ) $4 - 2,5 = 1,5$, πρόσημο του -4 : $-1,5$.

δ) $-\frac{8}{12} + \frac{3}{12}$: $\frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$, πρόσημο $-$: $-\frac{5}{12}$.

**ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ****× ΛΑΘΟΣ**

$(-3) + (-5) = +8$ («δύο πλην κάνουν συν»)

✓ ΣΩΣΤΟ

$(-3) + (-5) = -8$

Ο κανόνας «πλην επί πλην κάνει συν» ισχύει στον **πολλαπλασιασμό**, όχι στην πρόσθεση! Δύο ζημιές μαζί δίνουν **μεγαλύτερη ζημιά**, όχι κέρδος.

3 Ιδιότητες – Άθροισμα πολλών ρητών**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ**

- **Αντιμεταθετική:** $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- **Προσεταιριστική:** $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
- $\alpha + 0 = \alpha$ και $\alpha + (-\alpha) = 0$

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΠΟΛΛΩΝ ΡΗΤΩΝ

- 1 Προσθέτουμε χωριστά **όλους τους θετικούς**.
- 2 Προσθέτουμε χωριστά **όλους τους αρνητικούς**.
- 3 Προσθέτουμε τα δύο αποτελέσματα (ετερόσημοι). Αν βλέπουμε **αντίθετους**, τους «διαγράφουμε» από την αρχή (δίνουν 0).



Παράδειγμα 2

Να υπολογίσεις: $(+8) + (-3) + (-11) + (+5) + (-8) + (+2)$.

ΛΥΣΗ

Οι $+8$ και -8 είναι αντίθετοι: δίνουν 0. Θετικοί: $5 + 2 = 7$. Αρνητικοί: $(-3) + (-11) = -14$.
Άθροισμα: $(+7) + (-14) = -7$.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Συνήθως γράφουμε πιο απλά, **χωρίς παρενθέσεις**: το $(+8) + (-3) + (-11)$ γράφεται $8 - 3 - 11$. Το πρόσημο «κολλάει» στον αριθμό που ακολουθεί. Έτσι το $-3 + 7 - 5 + 1$ σημαίνει άθροισμα των ρητών -3 , $+7$, -5 , $+1$: θετικοί 8, αρνητικοί -8 , άθροισμα 0.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για την πρόσθεση ρητών με την ευθεία, καθώς και παιχνίδι γρήγορων πράξεων με θετικούς και αρνητικούς.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 7.3

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1

●●● Να υπολογίσεις:

α) $(+6) + (+9)$

β) $(-6) + (-9)$

γ) $(+6) + (-9)$

δ) $(-6) + (+9)$

ε) $(-13) + (+13)$

ζ) $(-25) + 0$

2

●●● Να υπολογίσεις: α) $(-3,7) + (-1,3)$, β) $(+4,2) + (-6,5)$, γ) $\left(-\frac{3}{5}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right)$, δ) $\left(-1\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right)$.

3

●●● Να υπολογίσεις: α) $-7 + 12 - 5 + 3 - 9$, β) $15 - 20 + 8 - 15 + 20$, γ) $-2,5 + 1,5 - 4 + 0,5$.

4

●●● Ένας δύτης βρίσκεται σε βάθος -18 m. Ανεβαίνει 7 m, κατεβαίνει 12 m και ανεβαίνει 20 m. Σε ποιο βάθος βρίσκεται;

5

●●● Ένας παίκτης σε ένα παιχνίδι κέρδισε 45 πόντους, έχασε 60, κέρδισε 20 και έχασε 15. Ποιο είναι το τελικό του σκορ;

- 6 ●●● Να συμπληρώσεις το «μαγικό τετράγωνο» ώστε κάθε γραμμή, στήλη και διαγώνιος να έχει άθροισμα 0:

-1	_____	_____
_____	0	_____
3	-4	_____

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 7.4

Αφαίρεση ρητών αριθμών

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ ότι η αφαίρεση γίνεται **πρόσθεση του αντιθέτου**
- ✓ να **απαλείφεις παρενθέσεις** σωστά
- ✓ να υπολογίζεις παραστάσεις με προσθέσεις και αφαιρέσεις ρητών

1 Ο κανόνας της αφαίρεσης

Στους φυσικούς η αφαίρεση $3 - 8$ «δεν γινόταν». Τώρα, με τους αρνητικούς, γίνεται! Η θερμοκρασία ήταν 3°C και έπεσε 8 βαθμούς: έγινε $3 - 8 = -5^{\circ}\text{C}$.

ΚΑΝΟΝΑΣ

Για να αφαιρέσουμε τον ρητό β από τον ρητό α , **προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β** :

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

$$7 - (+3) = 7 + (-3) = 4 \quad 7 - (-3) = 7 + (+3) = 10 \quad -2 - (-6) = -2 + 6 = 4$$



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Αφαιρώντας έναν **αρνητικό** αριθμό, το αποτέλεσμα **μεγαλώνει**! Αν «μου σβήσουν ένα χρέος» 3 €, είναι σαν να μου δίνουν 3 €: $7 - (-3) = 10$.



Παράδειγμα 1

Να υπολογίσεις: **α)** $(-5) - (+8)$, **β)** $(-5) - (-8)$, **γ)** $0 - (-4,5)$, **δ)** $\frac{1}{3} - \left(+\frac{5}{6}\right)$.

ΛΥΣΗ

$$\text{α)} -5 + (-8) = -13. \text{ β)} -5 + 8 = 3. \text{ γ)} 0 + 4,5 = 4,5. \text{ δ)} \frac{2}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}.$$



Παράδειγμα 2

Η υψηλότερη θερμοκρασία που καταγράφηκε σε μια πόλη ήταν 41°C και η χαμηλότερη -14°C . Πόση είναι η διαφορά τους;

ΛΥΣΗ

$$41 - (-14) = 41 + 14 = 55^{\circ}\text{C}.$$

2 Απαλοιφή παρενθέσεων

ΚΑΝΟΝΕΣ

- Όταν μπροστά από μια παρένθεση υπάρχει $+$, τη διαγράφουμε μαζί με το $+$ και γράφουμε τους όρους της **όπως είναι**:

$$+(3 - 5 + 2) = 3 - 5 + 2$$

- Όταν μπροστά από μια παρένθεση υπάρχει $-$, τη διαγράφουμε μαζί με το $-$ και γράφουμε τους όρους της **με αντίθετα πρόσημα**:

$$-(3 - 5 + 2) = -3 + 5 - 2$$



Παράδειγμα 3

Να υπολογίσεις: $12 - (5 - 8) + (-3 + 4) - (7 + 2 - 6)$.

ΛΥΣΗ

1ος τρόπος (απαλοιφή): $12 - 5 + 8 - 3 + 4 - 7 - 2 + 6$. Θετικοί: $12 + 8 + 4 + 6 = 30$, αρνητικοί: $-5 - 3 - 7 - 2 = -17$. Αποτέλεσμα: 13.

2ος τρόπος (πρώτα οι παρενθέσεις): $12 - (-3) + (1) - (3) = 12 + 3 + 1 - 3 = 13$.



ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

$$10 - (4 - 7) = 10 - 4 - 7 = -1$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$10 - (4 - 7) = 10 - 4 + 7 = 13$$

Το « $-$ » μπροστά από την παρένθεση αλλάζει το πρόσημο **όλων** των όρων της, όχι μόνο του πρώτου. Έλεγχος: $4 - 7 = -3$ και $10 - (-3) = 13$ ✓.



Παράδειγμα 4

Να υπολογίσεις: $-[5 - (2 - 9)] + (-3 - (-1))$.

ΛΥΣΗ

Από μέσα προς τα έξω: $2 - 9 = -7$, άρα $5 - (-7) = 12$ και $-3 - (-1) = -3 + 1 = -2$. Τότε: $-12 + (-2) = -14$.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για την αφαίρεση ρητών και την απαλοιφή παρενθέσεων με πολλά παραδείγματα και κουίζ.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 7.4

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Να υπολογίσεις:

α) $4 - 9$

β) $-4 - 9$

γ) $4 - (-9)$

δ) $-4 - (-9)$

ε) $0 - 7$

ζ) $-12 - (-12)$

2 ●●● Να υπολογίσεις: α) $-2,5 - 3,7$, β) $1,2 - (-0,8)$, γ) $-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}$, δ) $\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{8}\right)$.3 ●●● Να απαλείψεις τις παρενθέσεις και να υπολογίσεις: α) $8 - (3 - 6)$, β) $-(4 - 10) + (-2 + 5)$, γ) $15 - (7 + 3 - 12) - (-4 - 1)$.4 ●●● Να υπολογίσεις: $3 - [-2 - (4 - 11)] - (-6)$.5 ●●● Ένα υποβρύχιο βρίσκεται σε βάθος -120 m και ένα ελικόπτερο πετάει πάνω του σε ύψος 250 m. Πόσο απέχουν;6 ●●● Ο λογαριασμός της Ελένης έδειχνε -35 €. Κατέθεσε 80 €, πλήρωσε έναν λογαριασμό 62 € και πήρε επιστροφή 15 €. Τι δείχνει τώρα ο λογαριασμός;7 ●●● Να βρεις τον x : α) $x + 7 = 3$, β) $x - 5 = -8$, γ) $-4 - x = 6$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 7.5

Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τον **κανόνα των προσήμων** στον πολλαπλασιασμό
- ✓ να βρίσκεις το πρόσημο ενός γινομένου **πολλών** παραγόντων
- ✓ τις **ιδιότητες** του πολλαπλασιασμού και την **επιμεριστική** ιδιότητα με ρητούς

1 Ο κανόνας των προσήμων

Ξέρουμε ότι $3 \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$. Τι γίνεται όμως με το $(-3) \cdot (-4)$; Παρατήρησε το μοτίβο:

$$(-3) \cdot 3 = -9, \quad (-3) \cdot 2 = -6, \quad (-3) \cdot 1 = -3, \quad (-3) \cdot 0 = 0, \quad (-3) \cdot (-1) = ?$$

Κάθε φορά που ο δεύτερος παράγοντας μειώνεται κατά 1, το γινόμενο **αυξάνεται κατά 3**. Άρα $(-3) \cdot (-1) = +3$, $(-3) \cdot (-2) = +6$ κ.ο.κ.

ΚΑΝΟΝΑΣ

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ρητούς, **πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές** τους και βάζουμε πρόσημο:

- + αν οι αριθμοί είναι **ομόσημοι**,
- - αν οι αριθμοί είναι **ετερόσημοι**.

·	+	-
+	+	-
-	-	+



ΒΟΗΘΗΜΑ ΜΝΗΜΗΣ

Ένας τρόπος να θυμάσαι τον κανόνα: «ο **φίλος** του **φίλου** μου είναι **φίλος** μου ($+\cdot+=+$), ο **εχθρός** του **φίλου** μου είναι **εχθρός** μου ($-\cdot+=-$), ο **εχθρός** του **εχθρού** μου είναι **φίλος** μου ($-\cdot-=+$)».

**Παράδειγμα 1**

Να υπολογίσεις: **α)** $(-7) \cdot (+6)$, **β)** $(-7) \cdot (-6)$, **γ)** $(-0,5) \cdot (-8)$, **δ)** $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{8}{9}$.

ΛΥΣΗ

α) Ετερόσημοι: -42 . **β)** Ομόσημοι: $+42$. **γ)** $+4$. **δ)** $-\frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 9} = -\frac{2}{3}$.

2 Γινόμενο πολλών παραγόντων**ΤΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ**

Ένα γινόμενο πολλών παραγόντων (όλων διάφορων του μηδενός) είναι:

- **θετικό**, αν το πλήθος των **αρνητικών** παραγόντων είναι **άρτιο**,
- **αρνητικό**, αν το πλήθος των **αρνητικών** παραγόντων είναι **περιττό**.

Αν **ένας** παράγοντας είναι 0, το γινόμενο είναι 0.

**Παράδειγμα 2**

Να υπολογίσεις: **α)** $(-2) \cdot (-3) \cdot (-5)$, **β)** $(-1) \cdot 4 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot (-5)$, **γ)** $(-7) \cdot 125 \cdot 0 \cdot (-3)$.

ΛΥΣΗ

α) Τρεις αρνητικοί (περιττό πλήθος): -30 .

β) Τέσσερις αρνητικοί (άρτιο πλήθος): $+40$.

γ) Υπάρχει παράγοντας 0: το γινόμενο είναι 0.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- Αντιμεταθετική και προσεταιριστική ιδιότητα, $\alpha \cdot 1 = \alpha$, $\alpha \cdot 0 = 0$.
- $\alpha \cdot (-1) = -\alpha$: πολλαπλασιάζοντας με -1 βρίσκουμε τον **αντίθετο**.
- **Επιμεριστική**: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ και $\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$.
- Οι **αντίστροφοι** έχουν γινόμενο 1 και είναι **ομόσημοι**: ο αντίστροφος του $-\frac{2}{5}$ είναι το $-\frac{5}{2}$.

**Παράδειγμα 3**

Να υπολογίσεις με την επιμεριστική: **α)** $-3 \cdot (4 - 7)$, **β)** $(-5) \cdot (-2 + 6)$, **γ)** $-12 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right)$.

ΛΥΣΗ

α) $-12 + 21 = 9$. **β)** $10 - 30 = -20$. **γ)** $-12 \cdot \frac{1}{3} - 12 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -4 + 9 = 5$.

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

$$-2 \cdot (3 - 5) = -6 - 10 = -16$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$-2 \cdot (3 - 5) = -6 + 10 = 4$$

Πολλαπλασιάζουμε το -2 με **κάθε όρο μαζί με το πρόσημό του**: $(-2) \cdot (-5) = +10$. Έλεγχος: $3 - 5 = -2$ και $(-2) \cdot (-2) = 4$ ✓.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για τον πολλαπλασιασμό ρητών και τον κανόνα των προσήμων, καθώς και παιχνίδι «βρες το πρόσημο».



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 7.5

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Να υπολογίσεις:

$$\alpha) (-8) \cdot 5$$

$$\delta) (-1,5) \cdot (-4)$$

$$\beta) (-8) \cdot (-5)$$

$$\epsilon) \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{9}{4}\right)$$

$$\gamma) 9 \cdot (-0,1)$$

$$\zeta) (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$$

2 ●●● Χωρίς να κάνεις τις πράξεις, να βρεις το πρόσημο: $\alpha) (-3) \cdot (-7) \cdot (-2) \cdot 5$, $\beta) (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$, $\gamma) (-4) \cdot 0 \cdot (-9)$.3 ●●● Να υπολογίσεις: $\alpha) -2 \cdot 3 + (-4) \cdot (-5)$, $\beta) (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) - 6$, $\gamma) 5 - 3 \cdot (-2)$.4 ●●● Να υπολογίσεις με τον πιο σύντομο τρόπο: $\alpha) (-25) \cdot (-7) \cdot 4$, $\beta) (-13) \cdot 17 + (-13) \cdot (-7)$.5 ●●● Η θερμοκρασία πέφτει κατά $2,5^\circ\text{C}$ κάθε ώρα. Πόσο θα έχει μεταβληθεί σε 6 ώρες; Αν τώρα είναι 4°C , πόση θα είναι σε 6 ώρες;6 ●●● Αν $\alpha = -2$, $\beta = 3$, $\gamma = -5$, να υπολογίσεις: $\alpha) \alpha\beta\gamma$, $\beta) \alpha\beta + \beta\gamma$, $\gamma) \alpha(\beta - \gamma)$, $\delta) -\alpha \cdot \gamma$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 7.6

Διαίρεση ρητών αριθμών

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τον **κανόνα των προσήμων** στη διαίρεση
- ✓ ότι η διαίρεση είναι **πολλαπλασιασμός με τον αντίστροφο**
- ✓ να γράφεις και να απλοποιείς **κλάσματα με αρνητικούς όρους**

1 Ο κανόνας

Αφού η διαίρεση είναι η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού, το $(-12) : 3$ είναι ο αριθμός που πολλαπλασιαζόμενος με το 3 δίνει -12 : δηλαδή -4 . Έτσι προκύπτει ο ίδιος κανόνας προσήμων με τον πολλαπλασιασμό.

ΚΑΝΟΝΑΣ

Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς (με διαιρέτη $\neq 0$), **διαιρούμε τις απόλυτες τιμές** τους και βάζουμε πρόσημο $+$ αν είναι **ομόσημοι** και $-$ αν είναι **ετερόσημοι**.

$$(-12) : (+3) = -4 \quad (-12) : (-3) = +4 \quad (+12) : (-3) = -4$$

Ισχύει επίσης: $\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ (πολλαπλασιασμός με τον αντίστροφο).



Παράδειγμα 1

Να υπολογίσεις: **α)** $(-56) : (-8)$, **β)** $4,5 : (-0,9)$, **γ)** $\left(-\frac{4}{9}\right) : \frac{2}{3}$, **δ)** $0 : (-7)$.

ΛΥΣΗ

$$\text{α)} +7. \text{β)} -5. \text{γ)} -\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{2}{3}. \text{δ)} 0.$$



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Η διαίρεση **με το 0 δεν ορίζεται** ούτε στους ρητούς: το $(-5) : 0$ δεν έχει νόημα.

2 Κλάσματα με αρνητικούς όρους

ΤΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΕΝΟΣ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

$$\frac{-\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{-\beta} = -\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{-\alpha}{-\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Π.χ. $\frac{-6}{8} = \frac{6}{-8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$ και $\frac{-10}{-15} = \frac{2}{3}$. Συνήθως γράφουμε το πρόσημο **μπροστά** από το κλάσμα.



Παράδειγμα 2

Να υπολογίσεις την παράσταση $\frac{(-4) \cdot (-6) + (-3)}{-7}$.

ΛΥΣΗ

Αριθμητής: $24 - 3 = 21$. Άρα $\frac{21}{-7} = -3$.

3 Αριθμητικές παραστάσεις

Η σειρά των πράξεων με ρητούς είναι η γνωστή: **παρενθέσεις** → **δυνάμεις** → **πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις** → **προσθέσεις και αφαιρέσεις**.



Παράδειγμα 3

Να υπολογίσεις: $-20 : (-4) - 3 \cdot (-2) + (-18) : 6$.

ΛΥΣΗ

$+5 + 6 - 3 = 8$.



ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

$$-20 : 4 \cdot (-5) = -20 : (-20) = 1$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$-20 : 4 \cdot (-5) = (-5) \cdot (-5) = 25$$

Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις γίνονται **από αριστερά προς τα δεξιά**, με τη σειρά που εμφανίζονται — ο πολλαπλασιασμός **δεν** προηγείται της διαίρεσης.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο και κουίζ για τη διαίρεση ρητών και τις παραστάσεις με όλες τις πράξεις.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 7.6

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Να υπολογίσεις:

α) $(-36) : 9$

β) $(-36) : (-9)$

γ) $45 : (-15)$

δ) $(-2,4) : 0,6$

ε) $\left(-\frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{10}{3}\right)$

ζ) $\frac{3}{4} : (-6)$

2 ●●● Να απλοποιήσεις: α) $\frac{-15}{25}$, β) $\frac{12}{-18}$, γ) $\frac{-21}{-28}$, δ) $-\frac{-8}{20}$.3 ●●● Να υπολογίσεις: α) $\frac{-8+2}{-3}$, β) $\frac{(-5) \cdot 4}{-2-8}$, γ) $12 : (-3) - (-15) : 5$.4 ●●● Να υπολογίσεις: $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : \left(-\frac{1}{6}\right) - 2 \cdot (-1,5)$.5 ●●● Η θερμοκρασία έπεσε από 6°C σε -9°C μέσα σε 5 ώρες, με σταθερό ρυθμό. Πόσο άλλαξε κάθε ώρα;6 ●●● Να βρεις τον x : α) $-4x = 28$, β) $x : (-3) = 5$, γ) $-36 : x = -9$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 7.7

Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ ότι κάθε ρητός γράφεται ως **δεκαδικός** ή ως **περιοδικός δεκαδικός**
- ✓ τι είναι η **περίοδος** και πώς γράφεται
- ✓ να μετατρέπεις απλούς **περιοδικούς** δεκαδικούς σε **κλάσματα**

1 Από το κλάσμα στη δεκαδική μορφή

Για να βρούμε τη δεκαδική μορφή ενός κλάσματος, διαιρούμε τον αριθμητή με τον παρονομαστή. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

ΔΥΟ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

- Η διαίρεση **τελειώνει** (κάποια στιγμή βρίσκουμε υπόλοιπο 0): π.χ. $\frac{7}{8} = 0,875$, $-\frac{3}{20} = -0,15$.
Λέμε ότι ο ρητός έχει **δεκαδική μορφή με πεπερασμένα ψηφία**.
- Η διαίρεση **δεν τελειώνει ποτέ**, αλλά κάποια ψηφία **επαναλαμβάνονται συνεχώς**: π.χ. $\frac{1}{3} = 0,333\dots$, $\frac{5}{11} = 0,4545\dots$, $\frac{1}{6} = 0,1666\dots$. Ο αριθμός λέγεται **περιοδικός δεκαδικός** και τα ψηφία που επαναλαμβάνονται λέγονται **περίοδος**.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

Την περίοδο τη γράφουμε μία φορά με μια **γραμμή από πάνω**:

$$0,333\dots = 0,\overline{3} \quad 0,4545\dots = 0,\overline{45} \quad 0,1666\dots = 0,1\overline{6} \quad 2,142857142857\dots = 2,\overline{142857}$$



Παράδειγμα 1

Να γράψεις σε δεκαδική μορφή: α) $\frac{2}{9}$, β) $\frac{7}{12}$, γ) $-\frac{4}{33}$.

ΛΥΣΗ

α) $2 : 9 = 0,222\dots = 0,\overline{2}$.

β) $7 : 12 = 0,58333\dots = 0,58\overline{3}$.

γ) $4 : 33 = 0,1212\dots$, άρα $-\frac{4}{33} = -0,\overline{12}$.

**ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...**

Πότε η διαίρεση «τελειώνει»; Όταν το **ανάγωγο** κλάσμα έχει παρονομαστή του οποίου οι πρώτοι παράγοντες είναι **μόνο 2 και 5**: π.χ. $\frac{7}{8}$ ($8 = 2^3$), $\frac{3}{20}$ ($20 = 2^2 \cdot 5$). Αν ο παρονομαστής έχει άλλο πρώτο παράγοντα (3, 7, 11, ...), η δεκαδική μορφή είναι περιοδική. Γιατί; Γιατί μόνο τα 2 και 5 «χωράνε» σε μια δύναμη του 10!

2 Από τον περιοδικό δεκαδικό στο κλάσμα

ΑΠΛΟΙ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΙ

Αν η περίοδος ξεκινά **αμέσως μετά την υποδιαστολή**:

$$0,\overline{\alpha} = \frac{\alpha}{9} \quad 0,\overline{\alpha\beta} = \frac{\alpha\beta}{99} \quad 0,\overline{\alpha\beta\gamma} = \frac{\alpha\beta\gamma}{999}$$

Δηλαδή: αριθμητής η **περίοδος**, παρονομαστής **τόσα 9 όσα ψηφία έχει η περίοδος**.



Παράδειγμα 2

Να γράψεις ως κλάσματα: **α)** $0,\overline{7}$, **β)** $0,\overline{36}$, **γ)** $2,\overline{4}$.

ΛΥΣΗ

$$\text{α)} \frac{7}{9}, \text{ β)} \frac{36}{99} = \frac{4}{11}, \text{ γ)} } 2 + 0,\overline{4} = 2 + \frac{4}{9} = \frac{22}{9}.$$



Παράδειγμα 3

Να γράψεις ως κλάσμα τον $0,1\overline{6}$.

ΛΥΣΗ

$$\text{Γράφουμε } 0,1\overline{6} = \frac{1}{10} \cdot 1,\overline{6} = \frac{1}{10} \cdot \left(1 + \frac{6}{9}\right) = \frac{1}{10} \cdot \frac{15}{9} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}.$$



ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

$$0,\overline{3} \approx 0,3 \text{ άρα } 0,\overline{3} = \frac{3}{10}$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Ο $0,333\dots$ είναι **λίγο μεγαλύτερος** από τον 0,3. Μπορούμε να γράψουμε $0,\overline{3} \approx 0,33$ ως **προσέγγιση**, αλλά η **ακριβής** τιμή του είναι $\frac{1}{3}$.


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΕΡΓΕΙΑ

Ένα παράξενο αλλά αληθινό αποτέλεσμα: $0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$. Ο αριθμός $0,999\dots$ είναι ίσος με το 1! (Επαλήθευση: $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$, άρα $3 \cdot \frac{1}{3} = 0,\overline{9}$, δηλαδή $1 = 0,\overline{9}$.)



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για τους περιοδικούς δεκαδικούς και ασκήσεις μετατροπής με αυτόματη διόρθωση.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 7.7

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να γράψεις σε δεκαδική μορφή: α) $\frac{3}{8}$, β) $\frac{5}{9}$, γ) $-\frac{7}{11}$, δ) $\frac{5}{6}$, ε) $-\frac{13}{25}$.
- 2 ●●● Χωρίς να κάνεις τη διαίρεση, να εξηγήσεις ποια από τα κλάσματα $\frac{3}{40}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{1}{7}$ έχουν δεκαδική μορφή με πεπερασμένα ψηφία.
- 3 ●●● Να γράψεις ως ανάγωγα κλάσματα: α) $0,\overline{8}$, β) $0,\overline{27}$, γ) $1,\overline{3}$, δ) $0,\overline{123}$.
- 4 ●●● Να συγκρίνεις: α) $0,\overline{3}$ και $0,33$, β) $0,\overline{45}$ και $0,4\overline{5}$.
- 5 ●●● Να υπολογίσεις: $0,\overline{3} + 0,\overline{6}$ και $0,\overline{1} \cdot 9$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 7.8

Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ να υπολογίζεις **δυνάμεις αρνητικών** αριθμών και να βρίσκεις το **πρόσημό** τους
- ✓ τη διαφορά ανάμεσα στο $(-\alpha)^n$ και στο $-\alpha^n$
- ✓ τις **ιδιότητες των δυνάμεων**
- ✓ ότι $\alpha^0 = 1$

1 Δυνάμεις με αρνητική βάση

Ο ορισμός είναι ο γνωστός: $\alpha^n = \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha$ (n παράγοντες). Π.χ.

$$(-2)^2 = (-2)(-2) = 4, \quad (-2)^3 = -8, \quad (-2)^4 = 16, \quad (-2)^5 = -32$$

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο **εναλλάσσεται**: εξαρτάται από το αν ο εκθέτης είναι άρτιος ή περιττός.

ΠΡΟΣΗΜΟ ΔΥΝΑΜΗΣ

- Δύναμη **θετικού** αριθμού είναι πάντα **θετική**.
- Δύναμη **αρνητικού** αριθμού με **άρτιο** εκθέτη είναι **θετική**: $(-3)^4 = 81$.
- Δύναμη **αρνητικού** αριθμού με **περιττό** εκθέτη είναι **αρνητική**: $(-3)^3 = -27$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

$$-3^2 = 9$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9, \text{ ενώ } (-3)^2 = 9$$

Στο -3^2 ο εκθέτης αφορά **μόνο το 3**· το «-» μένει απ' έξω. Για να υψωθεί και το πρόσημο, ο αριθμός πρέπει να είναι μέσα σε **παρένθεση**: $(-3)^2$. Είναι ένα από τα πιο συχνά λάθη σε όλο το Γυμνάσιο!



Παράδειγμα 1

Να υπολογίσεις: **α)** $(-5)^2$, **β)** -5^2 , **γ)** $(-1)^{101}$, **δ)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$, **ε)** $(-0,1)^4$.

ΛΥΣΗ

α) 25, **β)** -25, **γ)** -1 (περιττός εκθέτης), **δ)** $-\frac{8}{27}$, **ε)** 0,0001.

2 Ιδιότητες των δυνάμεων

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Για ρητούς α, β και φυσικούς εκθέτες μ, ν :

1. $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$ — **ίδια βάση, γινόμενο: προσθέτουμε τους εκθέτες**
2. $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$ ($\alpha \neq 0$) — **ίδια βάση, πηλίκο: αφαιρούμε τους εκθέτες**
3. $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$ — **δύναμη δύναμης: πολλαπλασιάζουμε τους εκθέτες**
4. $(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$ — **δύναμη γινομένου**
5. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$ ($\beta \neq 0$) — **δύναμη πηλίκου**

ΜΗΔΕΝΙΚΟΣ ΕΚΘΕΤΗΣ

Ορίζουμε $\alpha^0 = 1$ για κάθε $\alpha \neq 0$. Ο ορισμός αυτός «συμφωνεί» με την ιδιότητα 2: $\frac{\alpha^3}{\alpha^3} = 1$ και $\alpha^{3-3} = \alpha^0$. Π.χ. $5^0 = 1$, $(-7)^0 = 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$. (Το 0^0 δεν ορίζεται.)



Παράδειγμα 2

Να γράψεις ως μία δύναμη: **α)** $2^5 \cdot 2^3$, **β)** $(-3)^7 : (-3)^4$, **γ)** $(5^2)^3$, **δ)** $x^4 \cdot x \cdot x^2$, **ε)** $2^3 \cdot 5^3$.

ΛΥΣΗ

α) 2^8 . **β)** $(-3)^3$. **γ)** 5^6 . **δ)** x^7 (θυμήσου $x = x^1$). **ε)** $(2 \cdot 5)^3 = 10^3$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

$$2^3 \cdot 2^4 = 4^7 \text{ ή } 2^{12}$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

Όταν πολλαπλασιάζουμε δυνάμεις **με ίδια βάση**, η βάση **μένει ίδια** και οι εκθέτες **προστίθενται** (όχι πολλαπλασιάζονται). Επίσης, $2^3 + 2^4 \neq 2^7$: για **άθροισμα** δυνάμεων δεν υπάρχει τέτοια ιδιότητα!



Παράδειγμα 3

Να υπολογίσεις: **α)** $\frac{3^5 \cdot 3^2}{3^6}$, **β)** $(-2)^3 \cdot (-2)^2 : (-2)^4$, **γ)** $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 2^5$.

ΛΥΣΗ

α) $3^{5+2-6} = 3^1 = 3$. **β)** $(-2)^{3+2-4} = (-2)^1 = -2$. **γ)** $\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)^5 = 1^5 = 1$.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις συνοπτικό πίνακα με όλες τις ιδιότητες των δυνάμεων και κουίζ για να τις εξασκήσεις.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 7.8

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Να υπολογίσεις:

α) $(-4)^2$

β) -4^2

γ) $(-4)^3$

δ) $(-1)^{50}$

ε) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$

ζ) $(-0,2)^3$

η) $-(-2)^4$

θ) $(-9)^0$

2 ●●● Να γράψεις ως μία δύναμη: α) $7^4 \cdot 7^5$, β) $(-6)^9 : (-6)^3$, γ) $(3^4)^2$, δ) $\alpha^2 \cdot \alpha^3 \cdot \alpha^5$, ε) $4^5 \cdot 25^5$.

3 ●●● Να υπολογίσεις: α) $(-2)^3 + (-3)^2$, β) $-2^4 + (-2)^4$, γ) $(-1)^3 - (-1)^2 + (-1)^0$.

4 ●●● Να υπολογίσεις με τις ιδιότητες: α) $\frac{2^{10}}{2^7}$, β) $\frac{5^4 \cdot 5^3}{5^5}$, γ) $0,5^8 \cdot 2^8$.

5 ●●● Να υπολογίσεις: $3 \cdot (-2)^3 - (-4)^2 : (-2)^3 + 5^0$.

6 ●●● Σωστό ή Λάθος; α) $(-5)^2 = -5^2$. β) $2^3 \cdot 3^3 = 6^3$. γ) $2^2 + 2^3 = 2^5$. δ) $(-1)^n = 1$ για κάθε φυσικό n . ε) $(2^3)^2 = 2^9$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 7.9

Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τι σημαίνει δύναμη με **αρνητικό εκθέτη**
- ✓ να υπολογίζεις δυνάμεις όπως 2^{-3} ή $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$
- ✓ ότι οι **ιδιότητες** των δυνάμεων ισχύουν και για **ακέραιους** εκθέτες

1 Αρνητικός εκθέτης

Παρατήρησε τις δυνάμεις του 2: κάθε φορά που ο εκθέτης **μειώνεται κατά 1**, η τιμή **διαιρείται με 2**:

2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Για κάθε ρητό $\alpha \neq 0$ και κάθε φυσικό ν :

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$$

Δηλαδή η δύναμη με **αρνητικό** εκθέτη είναι ο **αντίστροφος** της δύναμης με τον αντίστοιχο θετικό εκθέτη. Ειδικότερα: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$.

✎ Παράδειγμα 1

Να υπολογίσεις: **α)** 3^{-2} , **β)** 10^{-3} , **γ)** $(-2)^{-3}$, **δ)** $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$, **ε)** $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}$.

ΛΥΣΗ

$$\text{α)} \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}, \text{ β)} \frac{1}{1.000} = 0,001, \text{ γ)} \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}, \text{ δ)} \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}, \text{ ε)} -4.$$

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

$$3^{-2} = -9 \text{ ή } 3^{-2} = -6$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$3^{-2} = \frac{1}{9}$$

Ο αρνητικός εκθέτης **δεν** κάνει τον αριθμό αρνητικό! Σημαίνει «αντίστροφο». Το 3^{-2} είναι θετικός αριθμός, μάλιστα μικρότερος του 1.

2 Οι ιδιότητες με ακέραιους εκθέτες

Όλες οι ιδιότητες του Μαθήματος 7.8 ισχύουν και όταν οι εκθέτες είναι **ακέραιοι** (θετικοί, αρνητικοί ή μηδέν):

$$2^5 \cdot 2^{-3} = 2^2 = 4 \quad \frac{5^{-2}}{5^3} = 5^{-5} \quad (10^{-2})^3 = 10^{-6} \quad (2 \cdot 3)^{-1} = 2^{-1} \cdot 3^{-1} = \frac{1}{6}$$



Παράδειγμα 2

Να γράψεις ως μία δύναμη και να υπολογίσεις: **α)** $4^{-3} \cdot 4^5$, **β)** $2^{-2} : 2^{-5}$, **γ)** $(3^{-1})^{-2}$, **δ)** $\frac{10^4 \cdot 10^{-6}}{10^{-3}}$.

ΛΥΣΗ

α) $4^2 = 16$. **β)** $2^{-2-(-5)} = 2^3 = 8$. **γ)** $3^2 = 9$. **δ)** $10^{4-6+3} = 10^1 = 10$.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Στην αφαίρεση εκθετών πρόσεχε τα **πρόσημα**: $-2 - (-5) = -2 + 5 = 3$. Ένα λάθος πρόσημο εδώ αλλάζει εντελώς το αποτέλεσμα.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για τις δυνάμεις με αρνητικό εκθέτη με πολλά λυμένα παραδείγματα.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 7.9

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Να υπολογίσεις:

α) 5^{-1}

β) 2^{-4}

γ) 10^{-2}

δ) $(-3)^{-2}$

ε) $(-5)^{-3}$

ζ) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

η) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

θ) $(-0,5)^{-1}$

2 ●●● Να γράψεις ως μία δύναμη: **α)** $3^{-4} \cdot 3^6$, **β)** $7^{-2} \cdot 7^{-3}$, **γ)** $5^2 : 5^{-4}$, **δ)** $(2^{-3})^2$, **ε)** $x^{-5} \cdot x^5$.

3 ●●● Να υπολογίσεις: **α)** $2^{-1} + 3^{-1}$, **β)** $(2^{-1} + 3^{-1})^{-1}$, **γ)** $4^{-1} \cdot 2^3$.

4 ●●● Να υπολογίσεις: $\frac{2^{-3} \cdot 2^7}{2^2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + (-1)^{-5}$.

5 ●●● Να γράψεις τους αριθμούς ως δυνάμεις του 10: **α)** 0,1, **β)** 0,0001, **γ)** $\frac{1}{100.000}$, **δ)** 1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 7.10

Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ να γράφεις **πολύ μικρούς** αριθμούς σε **τυποποιημένη μορφή**
- ✓ να συγκρίνεις και να κάνεις πράξεις με αριθμούς σε τυποποιημένη μορφή

1 Πολύ μικροί αριθμοί

Στο Μάθημα 3.4 γράψαμε μεγάλους αριθμούς στη μορφή $\alpha \cdot 10^{\nu}$. Τώρα που ξέρουμε τους αρνητικούς εκθέτες, μπορούμε να γράψουμε με τον ίδιο τρόπο και **πολύ μικρούς** αριθμούς. Π.χ. το πάχος μιας τρίχας είναι περίπου 0,00008 m και η μάζα ενός ατόμου υδρογόνου περίπου 0,000 000 000 000 000 000 000 001 67 g!

ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ

Κάθε θετικός αριθμός γράφεται στη μορφή

$$\alpha \cdot 10^{\nu} \quad \text{με} \quad 1 \leq \alpha < 10 \quad \text{και} \quad \nu \text{ ακέραιος}$$

Για αριθμούς **μικρότερους του 1**, ο εκθέτης ν είναι **αρνητικός**.

ΠΩΣ ΓΡΑΦΟΥΜΕ ΕΝΑΝ ΜΙΚΡΟ ΑΡΙΘΜΟ

- 1 Μετακινούμε την υποδιαστολή **προς τα δεξιά**, μέχρι να βρεθεί **αμέσως μετά το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο**.
- 2 Μετράμε πόσες θέσεις τη μετακινήσαμε, έστω ν . Ο εκθέτης είναι $-\nu$.



Παράδειγμα 1

Να γράφεις σε τυποποιημένη μορφή: **α)** 0,00008, **β)** 0,000352, **γ)** 0,07, **δ)** 0,0000000105.

ΛΥΣΗ

α) $8 \cdot 10^{-5}$ (5 θέσεις). **β)** $3,52 \cdot 10^{-4}$. **γ)** $7 \cdot 10^{-2}$. **δ)** $1,05 \cdot 10^{-8}$.

**Παράδειγμα 2**

Να γράφεις χωρίς δυνάμεις: **α)** $4,1 \cdot 10^{-3}$, **β)** $6 \cdot 10^{-6}$.

ΛΥΣΗ

Μετακινούμε την υποδιαστολή προς τα **αριστερά**: **α)** 0,0041, **β)** 0,000006.

**ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ****× ΛΑΘΟΣ**

$$0,0045 = 4,5 \cdot 10^3$$

✓ ΣΩΣΤΟ

$$0,0045 = 4,5 \cdot 10^{-3}$$

Ένας αριθμός **μικρότερος του 1** έχει πάντα **αρνητικό** εκθέτη. Έλεγχος: το $4,5 \cdot 10^3$ είναι 4.500 — τεράστια διαφορά!

2 Σύγκριση και πράξεις**Παράδειγμα 3**

Να συγκρίνεις: **α)** $3 \cdot 10^{-4}$ και $5 \cdot 10^{-5}$, **β)** $2,1 \cdot 10^{-3}$ και $1,9 \cdot 10^{-3}$.

ΛΥΣΗ

α) Μεγαλύτερος εκθέτης: $-4 > -5$, άρα $3 \cdot 10^{-4} > 5 \cdot 10^{-5}$. **β)** Ίδιος εκθέτης, $2,1 > 1,9$: ο πρώτος είναι μεγαλύτερος.

**Παράδειγμα 4**

Να υπολογίσεις και να γράφεις σε τυποποιημένη μορφή: **α)** $(3 \cdot 10^{-4}) \cdot (2 \cdot 10^6)$, **β)** $(8 \cdot 10^{-3}) : (4 \cdot 10^2)$, **γ)** $(5 \cdot 10^{-3}) \cdot (4 \cdot 10^{-2})$.

ΛΥΣΗ

α) $6 \cdot 10^2$. **β)** $2 \cdot 10^{-5}$. **γ)** $20 \cdot 10^{-5} = 2 \cdot 10^{-4}$.

**ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...**

Ένα **νανόμετρο** (nm) είναι 10^{-9} m, δηλαδή ένα δισεκατομμυριοστό του μέτρου. Τα τρανζίστορ στους σύγχρονους επεξεργαστές κινητών έχουν μέγεθος λίγων νανομέτρων — εκατοντάδες φορές μικρότερα από έναν ιό!



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο και κουίζ για την τυποποιημένη μορφή, με παραδείγματα από τη Φυσική, τη Χημεία και τη Βιολογία.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 7.10

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Να γράψεις σε τυποποιημένη μορφή:**α)** 0,006**β)** 0,00041**γ)** 0,5**δ)** 0,0000072**ε)** 350.000**ζ)** 0,0102**2** ●●● Να γράψεις χωρίς δυνάμεις: **α)** $2 \cdot 10^{-4}$, **β)** $9,3 \cdot 10^{-2}$, **γ)** $1,7 \cdot 10^{-7}$.**3** ●●● Να διατάξεις σε αύξουσα σειρά: $5 \cdot 10^{-3}$, $8 \cdot 10^{-4}$, $1,2 \cdot 10^{-3}$, $3 \cdot 10^{-2}$.**4** ●●● Να υπολογίσεις σε τυποποιημένη μορφή: **α)** $(4 \cdot 10^{-2}) \cdot (3 \cdot 10^{-5})$, **β)** $(9 \cdot 10^{-4}) : (3 \cdot 10^{-7})$, **γ)** $(6 \cdot 10^5) \cdot (5 \cdot 10^{-8})$.**5** ●●● Ένα βακτήριο έχει μήκος $2 \cdot 10^{-6}$ m. Πόσα τέτοια βακτήρια, το ένα δίπλα στο άλλο, χρειάζονται για να καλύψουν μήκος 1 cm;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ανακεφαλαίωση

Όλο το κεφάλαιο σε λίγες σελίδες & επαναληπτικές ασκήσεις

1 Η θεωρία με μια ματιά

Ρητοί – Απόλυτη τιμή

- $|α|$: απόσταση από το 0, ποτέ αρνητική
- Αντίθετοι: $α$ και $-α$, άθροισμα 0
- Αρνητικοί: μεγαλύτερος ο πιο κοντά στο 0

Πρόσθεση – Αφαίρεση

- Ομόσημοι: πρόσθεση απολύτων, κοινό πρόσημο
- Ετερόσημοι: αφαίρεση απολύτων, πρόσημο του «μεγαλύτερου»
- $α - β = α + (-β) \cdot -(\dots)$: αλλάζουν τα πρόσημα

Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση

- Ομόσημοι $\rightarrow +$, ετερόσημοι $\rightarrow -$
- Άρτιο πλήθος αρνητικών $\rightarrow +$, περιττό $\rightarrow -$
- $\frac{-α}{β} = -\frac{α}{β}$

Δεκαδική μορφή

- Πεπερασμένη ή περιοδική
- $0, \overline{α} = \frac{α}{9}, 0, \overline{αβ} = \frac{αβ}{99}$

Δυνάμεις

- $(-α)^{\text{άρτιος}} > 0, (-α)^{\text{περιττός}} < 0, -3^2 = -9$
- $α^μ α^ν = α^{μ+ν}, α^μ : α^ν = α^{μ-ν}, (α^μ)^ν = α^{μν}$
- $α^0 = 1, α^{-ν} = \frac{1}{α^ν}$

Τυποποιημένη μορφή

- $α \cdot 10^ν, 1 \leq α < 10, ν$ ακέραιος
- Μικροί αριθμοί: αρνητικός εκθέτης



Η ΓΛΑΥΚΑ ΘΥΜΙΖΕΙ

Τα «μεγάλα» λάθη του κεφαλαίου: (1) $(-3) + (-5) = +8$, (2) $-9 > -2$, (3) η αλλαγή προσήμου μόνο στον πρώτο όρο της παρένθεσης, (4) $-3^2 = 9$, (5) $3^{-2} = -9$. Ξαναδιάβασε τα πλαίσια «Συχνό λάθος» πριν από το διαγώνισμα!



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Οι ρητοί αριθμοί είναι η βάση για όλη την Άλγεβρα της Β' και της Γ' Γυμνασίου. Στο mathgreece.com θα βρεις μεγάλο επαναληπτικό τεστ για το κεφάλαιο και τη συνέχεια της ύλης!



★ Επαναληπτικές ασκήσεις

Κεφάλαιο 7

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Να υπολογίσεις: $-8 + 3 \cdot (-2) - (-12) : 4$.

2 ●●● Να υπολογίσεις: $(-2)^3 - 3 \cdot (-1)^4 + (-5)^2 : (-5)$.

3 ●●● Να υπολογίσεις: $-[2 - 3 \cdot (4 - 6)]^2 + |-7|$.

4 ●●● Να υπολογίσεις: $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^0 + 2^{-1} \cdot (-4)$.

5 ●●● Αν $\alpha = -3$ και $\beta = 2$, να υπολογίσεις: **α)** $\alpha^2 - \beta^2$, **β)** $(\alpha + \beta)^3$, **γ)** $-\alpha\beta^2$, **δ)** $\alpha^{-1} + \beta^{-1}$.

6 ●●● Να γράψεις σε αύξουσα σειρά: $-0, \overline{3}, -\frac{1}{4}, -0,3, (-2)^{-1}, 0$.

7 ●●● Η Αθήνα έχει θερμοκρασία 8°C , η Μόσχα -12°C και το Όσλο -5°C . Πόσο ψυχρότερη είναι η Μόσχα από την Αθήνα; Ποια είναι η μέση θερμοκρασία των τριών πόλεων;

8 ●●● Να γράψεις ως μία δύναμη του 2: $\frac{4^3 \cdot 2^{-5}}{8^{-1}}$.

9 ●●● Η διάμετρος ενός κυττάρου είναι $0,000025\text{ m}$. Να τη γράψεις σε τυποποιημένη μορφή. Πόσα κύτταρα στη σειρά καλύπτουν 1 m ;

10 ●●● Σωστό ή Λάθος; **α)** $|-3| > |2|$. **β)** Το γινόμενο 5 αρνητικών αριθμών είναι θετικό. **γ)** $(-1)^{-1} = 1$. **δ)** $0, \overline{9} = 1$. **ε)** $-2^{-2} = \frac{1}{4}$.

ΤΕΛΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Λύσεις των ασκήσεων

Οργανωμένες ανά κεφάλαιο και μάθημα. Ο αριθμός κάθε λύσης είναι ίδιος με τον αριθμό της άσκησης. Θυμήσου: πρώτα προσπαθείς, μετά ελέγχεις!

ΛΥΣΕΙΣ · ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Οι φυσικοί αριθμοί

Μάθημα 1.1 · Φυσικοί αριθμοί – Διάταξη φυσικών – Στρογγυλοποίηση

1 α) 7.030 β) 50.008 γ) 2.100.000 δ) 3.000.000.005

2 α) σαράντα χιλιάδες επτακόσια έξι, β) ένα εκατομμύριο διακόσιες χιλιάδες δεκαπέντε, γ) εννιακόσιες πέντε χιλιάδες ενενήντα.

3 α) 9.000 και 8.998, β) 70.001 και 69.999, γ) 2 και 0.

4 Το 6 αξίζει 6.000.000, το 9 αξίζει 90.000, το 5 αξίζει 500. $6.093.548 = 6 \cdot 1.000.000 + 0 \cdot 100.000 + 9 \cdot 10.000 + 3 \cdot 1.000 + 5 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 8$.

5 α) < β) < γ) > δ) = (και τα δύο είναι 3.000)

6 $121.002 > 12.201 > 12.021 > 12.012 > 1.221$

7 α) 4.385.930, β) 4.385.900, γ) 4.386.000, δ) 4.400.000.

8 α) επόμενο ψηφίο 1 < 5: 9.950. β) ψηφίο εκατοντάδων 9, επόμενο 5: γίνεται 10.000. γ) ψηφίο χιλιάδων 9, επόμενο 5: 200.000.

9 $x = 997, 998, 999, 1.000, 1.001, 1.002, 1.003$ (το 996 δεν περιλαμβάνεται, το 1.003 περιλαμβάνεται). Άρτιοι: 998, 1.000, 1.002, δηλαδή 3.

10 α) 8.530. β) 3.058 (το 0 δεν μπορεί να μπει πρώτο). γ) Πρέπει να τελειώνει σε 3 ή 5· ο μεγαλύτερος είναι ο 8.503 (τα 8.530 και 8.350 είναι άρτιοι, ενώ ο $8.503 > 8.305$).

11 Οι αριθμοί που στρογγυλοποιούνται σε 7.300 είναι από 7.250 (γιατί $7.250 \rightarrow 7.300$) έως 7.349 (γιατί $7.350 \rightarrow 7.400$). Μικρότερος ο 7.250, μεγαλύτερος ο 7.349.

12 Ο δήμαρχος στρογγυλοποίησε στις δεκάδες χιλιάδες ($138.647 \rightarrow 140.000$) και η εφημερίδα στις χιλιάδες ($138.647 \rightarrow 139.000$). Η εφημερίδα είναι πιο κοντά: απέχει $139.000 - 138.647 = 353$, ενώ ο δήμαρχος απέχει 1.353.

Μάθημα 1.2 · Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

1 α) $(136 + 64) + (58 + 42) = 200 + 100 = 300$ β) $(999 + 1) + 457 = 1.457$ γ) $(4 \cdot 25) \cdot 17 = 1.700$ δ) $(2 \cdot 50) \cdot 35 = 3.500$ ε) $(8 \cdot 125) \cdot 9 = 9.000$ ζ) 0 (ένας παράγοντας είναι 0)

2 α) 2.264, έλεγχος $2.264 + 2.736 = 5.000$. β) 60.816, έλεγχος $60.816 + 19.587 = 80.403$.

3 α) 8.300, β) 460.000, γ) 12.000, δ) $7 \cdot 3 \cdot 1.000 = 21.000$.

4 α) $9 \cdot (50 + 1) = 450 + 9 = 459$, β) $12 \cdot (100 - 1) = 1.200 - 12 = 1.188$, γ) $25 \cdot (100 + 4) = 2.500 + 100 = 2.600$, δ) $64 \cdot 100 = 6.400$, ε) $17 \cdot 200 = 3.400$.

5 α) $15 + 20 = 35$ β) $20 \cdot 4 = 80$ γ) $60 - 36 - 12 = 12$ δ) $60 - 12 = 48$ ε) $56 - 30 + 3 = 29$ ζ) $100 - [24 + 6] = 100 - 30 = 70$

6 α) $(3 + 4) \cdot 5 = 35$, β) $20 - (8 - 3) = 15$, γ) $2 \cdot (6 + 4) \cdot 3 = 60$.

7 1ος τρόπος: $12 \cdot 65 + 12 \cdot 28 + 12 \cdot 42 = 780 + 336 + 504 = 1.620$ €. 2ος τρόπος: $12 \cdot (65 + 28 + 42) = 12 \cdot 135 = 1.620$ €.

8 $(35 \cdot 24 - 17) \cdot 2 = (840 - 17) \cdot 2 = 823 \cdot 2 = 1.646$ €.

9 α) $1.000 - 378 = 622$, β) $2.500 - 1.725 = 775$, γ) $1.550 + 450 = 2.000$.

10 Αριστερά: $37 \cdot (45 + 55) = 37 \cdot 100 = 3.700$. Δεξιά: $63 \cdot (45 + 55) - 2.600 = 6.300 - 2.600 = 3.700$. Άρα τα δύο μέλη είναι ίσα.

11 Ελένη: $120 - 45 = 75$ €. Γιάννης: $3 \cdot 75 = 225$ €. Σύνολο: $120 + 75 + 225 = 420$ €.

Μάθημα 1.3 · Δυνάμεις φυσικών αριθμών

1 α) 7^4 , β) 10^5 , γ) x^3 , δ) $2^3 \cdot 5^2$.

2 α) 16 β) 125 γ) 243 δ) 169 ε) 10.000.000 ζ) 0
η) 1 θ) 36 και 64

3 α) $\wedge (9)$, β) $\wedge (8 \neq 9)$, γ) Σ , δ) Σ (και τα δύο 16), ε) $\wedge (1)$.

4 α) $5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2$, β) $7 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10$, γ) $1 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^3$.

5 α) $4 \cdot 25 = 100$ β) $20^2 = 400$ γ) $8 + 9 = 17$ δ) $5^3 = 125$ ε) $100 - 81 = 19$ ζ) $36 : 4 + 32 = 9 + 32 = 41$

6 α) $3 \cdot 25 - 2 \cdot 16 + 7 = 75 - 32 + 7 = 50$. β) $(15 - 12)^4 + 2.000 = 3^4 + 2.000 = 81 + 2.000 = 2.081$. γ) $[8 + 2]^2 - 100 = [8 + 4]^2 - 100 = 144 - 100 = 44$.

7 α) $x = 7$, β) $x = 5$, γ) $x = 10$, δ) $x = 4$ ($5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$).

8 Εμβαδόν: $25^2 = 625$ m². Όγκος: $6^3 = 216$ cm³.

9 α) $2^{10} = 1.024 > 1.000 = 10^3$. β) $3^4 = 81 > 64 = 4^3$. γ) $5^3 = 125 < 128 = 2^7$.

10 Τα αθροίσματα είναι 1, 4, 9, 16, 25, δηλαδή $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$. Το άθροισμα των n πρώτων περιττών είναι n^2 . Για τους 10 πρώτους: $10^2 = 100$.

Μάθημα 1.4 · Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα

1 α) $87 = 7 \cdot 12 + 3$, β) $500 = 12 \cdot 41 + 8$, γ) $2.026 = 25 \cdot 81 + 1$, δ) $96 = 8 \cdot 12 + 0$ (τέλεια).

2 1η γραμμή: $\Delta = 9 \cdot 14 + 5 = 131$. 2η: $100 - 2 = 98 = \delta \cdot 14$, άρα $\delta = 7$ (και $2 < 7 \checkmark$). 3η: $75 = 6 \cdot 12 + 3$, άρα $\pi = 12$, $\nu = 3$.

3 α) Ναι ($1 < 7$). β) Όχι ($8 > 6$). γ) Ναι ($2 < 4$). δ) Ναι ($5 < 9$).

4 Του 7: 0, 7, 14, 21, 28, 35. Του 15 κάτω από 100: 0, 15, 30, 45, 60, 75, 90.

5 α) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. β) 1, 17. γ) 1, 2, 5, 10, 25, 50. δ) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

6 α) Σ, β) Σ, γ) Λ ($0 : 7 = 0$ · δεν ορίζεται το $7 : 0$), δ) Λ (έχει πεπερασμένους διαιρέτες, άπειρα πολλαπλάσια), ε) Σ.

7 $250 = 12 \cdot 20 + 10$: γεμίζουμε 20 κουτιά και περισσεύουν 10 αυγά. Για ένα ακόμη κουτί χρειάζονται $12 - 10 = 2$ αυγά.

8 Κάθε 7 μέρες η μέρα επαναλαμβάνεται. $100 = 7 \cdot 14 + 2$. Μετά από 14 εβδομάδες είναι πάλι Τετάρτη και μετά από 2 ακόμη μέρες είναι Παρασκευή.

9 $\Delta = 9 \cdot 11 + \nu = 99 + \nu$ με $\nu = 0, 1, \dots, 8$. Άρα $\Delta = 99, 100, \dots, 107$. Μεγαλύτερη τιμή: 107.

10 $1.250 = 24 \cdot 52 + 2$: 52 γεμάτα κουτιά (περισσεύουν 2 σοκολατάκια). Είσπραξη: $52 \cdot 9 = 468$ €.

Μάθημα 1.5 · Χαρακτήρες διαιρετότητας – ΜΚΔ – ΕΚΠ – Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

1 α) 120, 342, 1.036, 4.500. β) 120 (3), 225 (9), 342 (9), 4.500 (9), 7.317 (18) — όχι ο 1.036 (10). γ) 120 (20), 1.036 (36), 4.500 (00). δ) 120, 225, 4.500. ε) 225, 342, 4.500, 7.317. στ) 225, 4.500.

2 Άθροισμα $7 + *$. α) $*$ = 2, 5, 8 (225, 255, 285). β) $*$ = 2 (225). γ) Τα δύο τελευταία ψηφία $*5$ πρέπει να είναι 25 ή 75: $*$ = 2 ή 7.

3 Πρώτοι: 2, 19, 31, 89. (Το 1 δεν είναι πρώτος: $9 = 3^2$, $27 = 3^3$, $51 = 3 \cdot 17$, $57 = 3 \cdot 19$, $91 = 7 \cdot 13$.)

4 α) $2^3 \cdot 3^2$, β) $2 \cdot 3 \cdot 5^2$, γ) $2^3 \cdot 3 \cdot 11$, δ) $3^2 \cdot 5^3$.

5 α) 4 και 24. β) 1 και 420 (πρώτοι μεταξύ τους). γ) $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$: Μ.Κ.Δ. = 18, Ε.Κ.Π. = 180. δ) 14 και 42 (ο 14 διαιρεί τον 42).

6 α) $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, $108 = 2^2 \cdot 3^3$: Μ.Κ.Δ. = $2^2 \cdot 3 = 12$, Ε.Κ.Π. = $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 3.780$. β) Μ.Κ.Δ. = $2^2 \cdot 3^2 = 36$, Ε.Κ.Π. = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 7.560$.

7 Η πλευρά είναι Μ.Κ.Δ.(360, 252): $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, Μ.Κ.Δ. = $2^2 \cdot 3^2 = 36$ cm. Πλακάκια: $(360 : 36) \cdot (252 : 36) = 10 \cdot 7 = 70$.

8 Το πλήθος είναι κοινό πολλαπλάσιο των 8, 10, 12.
 $E.K.P. = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$. Τα κοινά πολλαπλάσια είναι
 120, 240, ... Αφού είναι λιγότεροι από 200, οι μαθητές
 είναι 120.

9 $E.K.P.(15, 25) = 3 \cdot 5^2 = 75$ s. Σε 10 λεπτά = 600 s:
 $600 : 75 = 8$ φορές.

10 Ο αριθμός περιέχει τους παράγοντες $2^2 \cdot 3 = 12$,
 $2 \cdot 5 = 10$, $2^3 \cdot 5 = 40$. Για να διαιρείται με $9 = 3^2$ θα
 έπρεπε να περιέχει δύο φορές το 3, ενώ περιέχει μόνο
 μία. (Ο αριθμός είναι 120.)

Επανάληψη Κεφαλαίου 1

1 α) 5.996.500 (επόμενο 5), β) 5.996.000 (επόμενο 4),
 γ) 6.000.000 (το 9 γίνεται 10), δ) 6.000.000.

2 α) $250 - 48 = 202$, β) $1.000 - 144 = 856$, γ) $48 :$
 $8 + 3 \cdot 3^2 = 6 + 27 = 33$.

3 α) $73 \cdot 100 = 7.300$, β) $(25 \cdot 8) \cdot 13 = 200 \cdot 13 =$
 2.600 , γ) $17 \cdot (999 + 1) = 17.000$.

4 Το μεγαλύτερο υπόλοιπο είναι 12. $\Delta = 13 \cdot 24 +$
 $12 = 312 + 12 = 324$.

5 $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Μ.Κ.Δ. = $2 \cdot 3 = 6$,
 $E.K.P. = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 3.150$.

6 Μ.Κ.Δ.(84, 126, 210): $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$,
 $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ καλάθια. Το καθένα: 2
 μήλα, 3 πορτοκάλια, 5 μανταρίνια.

7 $E.K.P.(4, 6, 10) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ μέρες. Οκτώβριος
 έχει 31 μέρες: μετά από 30 μέρες είναι 31 Οκτωβρίου,
 μετά από 60 είναι 30 Νοεμβρίου.

8 Διαιρείται με 2, 3, 5 άρα με το 30 και τελειώνει σε
 0. Ο μεγαλύτερος τετραψήφιος είναι $9.999 = 30 \cdot$
 $333 + 9$, άρα ο ζητούμενος είναι $9.999 - 9 = 9.990$
 (άθροισμα ψηφίων 27 ✓).

9 α) Λ (το 2), β) Σ, γ) Σ ($32 > 25$), δ) Σ (αφού 3 και 4
 είναι πρώτοι μεταξύ τους), ε) Λ ($49 \neq 25$).

10 Μαρία: 30.507, Πέτρος: 34.000. Ο Πέτρος έχει
 $34.000 - 30.507 = 3.493$ βαθμούς περισσότερους.

ΛΥΣΕΙΣ · ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Τα κλάσματα

Μάθημα 2.1 · Η έννοια του κλάσματος

1 α) $\frac{3}{5}$, β) $\frac{7}{10}$, γ) $\frac{1}{20}$, δ) $\frac{11}{3}$. Γνήσια τα α, β, γ.

2 α) $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$, β) $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$, γ) $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$, δ) $\frac{1}{60}$. Οι 8 ώρες είναι $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ της ημέρας.

3 α) $35 : 7 \cdot 2 = 10$, β) $72 : 6 \cdot 5 = 60$ €, γ) $1.000 : 4 \cdot 3 = 750$ g, δ) $45 : 5 \cdot 9 = 81$.

4 α) $3\frac{2}{5}$, β) $5\frac{5}{9}$, γ) $8\frac{4}{12} = 8\frac{1}{3}$, δ) $\frac{18}{7}$, ε) $\frac{55}{9}$, στ) $\frac{123}{10}$.

5 Χωρίζουμε κάθε μονάδα σε 3 ίσα μέρη: το $\frac{1}{3}$ είναι στο πρώτο σημάδι, το $\frac{2}{3}$ στο δεύτερο, το $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ ένα σημάδι μετά το 1, το $\frac{6}{3} = 2$ ακριβώς στο 2 και το $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ δύο σημάδια μετά το 2. Φυσικός αριθμός είναι το $\frac{6}{3} = 2$.

6 $\frac{1}{9} : 12 : 4 = 3$ μαθητές. Όλοι: $9 \cdot 3 = 27$. Κορίτσια: $27 - 12 = 15$.

7 Του μένουν τα $\frac{3}{8}$ της διαδρομής, που είναι 24 km. Το $\frac{1}{8}$ είναι 8 km και όλη η διαδρομή $8 \cdot 8 = 64$ km.

8 α) $\nu = 6$, β) $\nu = 18$, γ) $\nu = 5$ (πρέπει $4 < \nu < 6$).

9 Τα $\frac{2}{9}$ του 18: $18 : 9 \cdot 2 = 4$ L. Έμειναν 14 L. Το $\frac{1}{7}$ του 14 είναι 2 L. Έμειναν $14 - 2 = 12$ L.

10 α) Λ (= 0), β) Σ (αριθμητής ίσος με παρονομαστή), γ) Λ (όσο περισσότερα τα κομμάτια, τόσο μικρότερο το καθένα), δ) Σ, ε) Λ ($3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$).

Μάθημα 2.2 · Ισοδύναμα κλάσματα

1 α) 10 β) 32 γ) 2 δ) 12

2 α) $\frac{3}{4}$, β) $\frac{5}{7}$, γ) $\frac{1}{3}$, δ) $\frac{3}{7}$, ε) $\frac{2}{3}$ (Μ.Κ.Δ. 48), στ) $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

3 Όλα εκτός από το $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$. (Π.χ. $3 \cdot 30 = 90 \neq 7 \cdot 12 = 84$.)

4 α) $24x = 72 \Rightarrow x = 3$, β) $9x = 90 \Rightarrow x = 10$, γ) $14x = 140 \Rightarrow x = 10$.

5 α) Ε.Κ.Π. 24: $\frac{4}{24}, \frac{9}{24}$. β) Ε.Κ.Π. 30: $\frac{12}{30}, \frac{9}{30}, \frac{14}{30}$. γ) Ε.Κ.Π. 36: $\frac{15}{36}, \frac{16}{36}, \frac{36}{36}$.

6 Τα κλάσματα $\frac{4\lambda}{7\lambda}$ έχουν άθροισμα όρων $11\lambda = 66$, άρα $\lambda = 6$ και το κλάσμα είναι $\frac{24}{42}$.

7 $\frac{21}{28} = \frac{3}{4}$ και $\frac{24}{32} = \frac{3}{4}$. Και στις δύο τάξεις πήγαν τα $\frac{3}{4}$ των μαθητών.

8 $15 = 3 \cdot 5$ και $28 = 2^2 \cdot 7$: δεν έχουν κοινό πρώτο παράγοντα, Μ.Κ.Δ. = 1, άρα ανάγωγο. Αντίθετα, 15 και 27 έχουν κοινό διαιρέτη το 3: $\frac{15}{27} = \frac{5}{9}$.

9 Ο αριθμητής πρέπει να είναι μικρότερος του 12 και πρώτος προς το 12: $\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}$.

Μάθημα 2.3 · Σύγκριση κλασμάτων

1 α) < β) < γ) < δ) > ε) = ζ) >

2 α) $21 > 20 \Rightarrow \frac{3}{4} > \frac{5}{7}$. β) Παρονομαστής 24: $\frac{14}{24} < \frac{15}{24}$. γ) Παρονομαστής 30: $\frac{22}{30} > \frac{21}{30}$.

3 α) Ίδιος αριθμητής: $\frac{5}{12} < \frac{5}{20} < \frac{5}{16} < \frac{5}{14} < \frac{5}{9} < \frac{5}{6}$. β) Με παρονομαστή 24: $\frac{12}{24}, \frac{9}{24}, \frac{16}{24}, \frac{14}{24}, \frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{7}{12} < \frac{2}{3} < \frac{5}{6}$.

4 $3 \cdot 5 = 15 < 8 \cdot 2 = 16$, άρα $\frac{3}{8} < \frac{2}{5}$. Περισσότερη έφαγε η Σοφία.

5 α) $\nu = 0, 1, 2, 3$. β) $5 < \nu < 10$: $\nu = 6, 7, 8, 9$. γ) Ίδιος αριθμητής, άρα $\nu < 5$: $\nu = 1, 2, 3, 4$.

6 $\frac{3}{4} = \frac{30}{40}$ και $\frac{4}{5} = \frac{32}{40}$. Πυκνώνουμε κι άλλο: $\frac{60}{80}$ και $\frac{64}{80}$. Ανάμεσα: $\frac{61}{80}, \frac{62}{80}, \frac{63}{80}$.

7 Ε.Κ.Π. 36: $A = \frac{30}{36}$, $B = \frac{28}{36}$, $\Gamma = \frac{33}{36}$. Περισσότερο ο Γ, λιγότερο ο Β.

8 $\frac{999}{1.000} < 1 < \frac{1.001}{1.000}$ και $\frac{19}{20} < 1 < \frac{20}{19}$. Μεγαλύτερα: $\frac{1.001}{1.000}$ και $\frac{20}{19}$.

Μάθημα 2.4 · Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

1 α) $\frac{11}{15}$ β) $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ γ) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ δ) $\frac{11}{8}$

2 α) $\frac{8}{8} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$ β) $\frac{20}{24} - \frac{9}{24} = \frac{11}{24}$ γ) $\frac{9}{30} + \frac{10}{30} = \frac{19}{30}$ δ) $\frac{18}{26} - \frac{13}{26} = \frac{5}{13}$ ε) $\frac{11}{18} - \frac{4}{18} = \frac{7}{18}$ ζ) $\frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12}$

3 α) $\frac{7}{2} + \frac{12}{5} = \frac{35}{10} + \frac{24}{10} = \frac{59}{10} = 5\frac{9}{10}$. β) $\frac{13}{3} - \frac{11}{6} = \frac{26}{6} - \frac{11}{6} = \frac{15}{6} = 2\frac{1}{2}$. γ) $\frac{48}{8} - \frac{19}{8} = \frac{29}{8} = 3\frac{5}{8}$.

4 $\left(\frac{5}{9} + \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{3}{11} + \frac{8}{11}\right) = 1 + 1 = 2$.

5 α) $\frac{5}{14} - \frac{7}{12} = \frac{10}{28} - \frac{7}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. β) $\frac{7}{5} - \frac{6}{10} = \frac{14}{10} - \frac{6}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

6 α) $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, β) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$, γ) $\frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.

7 Ξοδεύτηκαν $\frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Έμεινε το $\frac{1}{4}$ του βαρελιού. Αφού $\frac{1}{4}$ είναι 45 L, το βαρέλι χωράει $4 \cdot 45 = 180$ L.

8 Ε.Κ.Π. 20: $\frac{4}{20} + \frac{6}{20} + \frac{5}{20} = \frac{15}{20}$. Ο τέταρτος έτρεξε $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. Την περισσότερη απόσταση έτρεξε ο δεύτερος ($\frac{6}{20}$).

9 Και τα δύο κλάσματα είναι μεγαλύτερα από το $\frac{1}{2}$, άρα το άθροισμά τους είναι μεγαλύτερο από 1. Όμως $\frac{5}{7} < 1$. (Το σωστό είναι $\frac{17}{12}$.)

Μάθημα 2.5 · Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

1 α) $\frac{6}{35}$ β) $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ γ) $\frac{1}{10}$ δ) $\frac{1}{4}$ ε) 1 ζ) 0

2 α) $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{6}$, β) $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$, γ) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 60 = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30$.

3 α) $\frac{11}{5}$, β) $\frac{1}{12}$, γ) 9, δ) $3\frac{2}{3} = \frac{11}{3} \rightarrow \frac{3}{11}$, ε) 1.

4 α) $\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = 4$, β) $\frac{15}{4} \cdot \frac{8}{5} = 6$, γ) $\frac{7}{3} \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{3} = 1$.

5 α) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$, β) $\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} = 1$, γ) $\frac{4}{7} \cdot \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\right) = \frac{4}{7} \cdot 1 = \frac{4}{7}$.

6 $120 \cdot \frac{3}{40} = 9$ L. Κόστος: $9 \cdot \frac{9}{5} = \frac{81}{5} = 16\frac{1}{5}$ €
(δηλαδή 16,20 €).

7 Κορίτσια: $\frac{5}{8} \cdot 480 = 300$, αγόρια: 180. Αθλούνται
 $\frac{2}{3} \cdot 300 + \frac{3}{4} \cdot 180 = 200 + 135 = 335$ μαθητές.

8 Ο αντίστροφος: $\frac{9}{4}$. Για το δεύτερο: $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$
(έλεγχος: $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ ✓).

9 α) Σ, β) Λ ($\frac{4}{9}$), γ) Σ (γνήσιο κλάσμα), δ) Σ
(αριθμητής γινομένου μικρότερος του παρονομαστή).

Μάθημα 2.6 · Διαίρεση κλασμάτων

1 α) $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{7}$ β) $\frac{5}{12} \cdot \frac{9}{10} = \frac{3}{8}$ γ) $\frac{3}{10}$ δ) 10 ε) 1
ζ) 0

2 α) $\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$, β) $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$, γ) $\frac{10}{3} \cdot \frac{9}{20} = \frac{3}{2}$.

3 α) $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ β) $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$ γ) 14 δ) $\frac{3}{5} : \frac{3}{5} = 1$

4 α) $\frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$, β) $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$, γ) $\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9} = \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} : \frac{2}{3} = 1$, άρα $\frac{7}{5} + 1 = \frac{12}{5}$.

5 $60 : \frac{3}{4} = 60 \cdot \frac{4}{3} = 80$ μπουκάλια.

6 Αριθμός = $\frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{5}$. (Έλεγχος: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ ✓.)

7 Χρόνος: $\frac{27}{2} : \frac{9}{2} = 3$ ώρες. Σε $\frac{2}{3}$ ώρας: $\frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} = 3$ km.

8 Μετά το πρώτο έμειναν τα $\frac{3}{5}$. Το δεύτερο πήρε $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$. Το τρίτο πήρε $1 - \frac{2}{5} - \frac{9}{25} = \frac{20 - 8 - 9}{25} = \frac{3}{25}$, που είναι 90 €. Ποσό: $90 : \frac{3}{25} = 90 \cdot \frac{25}{3} = 600$ €.

9 α) $\frac{5}{6} : \frac{5}{3} = \frac{1}{2}$, β) $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$, γ) $\frac{10}{7}$.

Επανάληψη Κεφαλαίου 2

1 Ε.Κ.Π. 12: $\frac{9}{12} - \frac{8}{12} + \frac{10}{12} = \frac{11}{12}$.

2 $\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$, $\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} = 1$, $\frac{1}{4} : \frac{5}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{2}{5}$. Σύνολο:
 $1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$.

3 Αριθμητής: $\frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$. Παρονομαστής: $\frac{10}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12}$. Κλάσμα: $\frac{5}{12} : \frac{13}{12} = \frac{5}{13}$.

4 Παρονομαστής 30: $\frac{21}{30}, \frac{20}{30}, \frac{18}{30}, \frac{22}{30}, \frac{25}{30}$. Φθίνουσα:
 $\frac{5}{6} > \frac{11}{15} > \frac{7}{10} > \frac{2}{3} > \frac{3}{5}$.

5 Α': 240, Β': 180, Γ': $540 - 420 = 120$, δηλαδή $\frac{120}{540} = \frac{2}{9}$ του σχολείου (ή $1 - \frac{4}{9} - \frac{3}{9} = \frac{2}{9}$).

6 Σε 1 ώρα το $\frac{1}{6}$. Σε $\frac{5}{2}$ ώρες: $\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ της δεξαμενής.

7 Ενοίκιο και τρόφιμα: $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$, υπόλοιπο $\frac{5}{12}$.
 Λογαριασμοί: $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{2}{12}$. Μένουν $\frac{5}{12} - \frac{2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$,
 που είναι 360 €. Εισόδημα: $4 \cdot 360 = 1.440$ €.

8 α) $\frac{9}{20} : \frac{3}{5} = \frac{3}{4}$, β) $\frac{5}{6} + \frac{5}{4} = \frac{25}{12}$, γ) $12x = 180 \Rightarrow x = 15$.

9 Η απόστασή τους είναι $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. το μισό της είναι $\frac{1}{12}$. Το μέσο είναι $\frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$.

10 α) $\Sigma (\frac{13}{6} > 2)$, β) $\wedge (= 1)$, γ) Σ , δ) $\wedge (= \frac{2}{3})$.

ΛΥΣΕΙΣ · ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Δεκαδικοί αριθμοί

Μάθημα 3.1 · Δεκαδικά κλάσματα – Δεκαδικοί αριθμοί – Διάταξη δεκαδικών – Στρογγυλοποίηση

1 α) 0,7 β) 0,43 γ) 0,005 δ) 30,19 ε) 0,06 ζ) 12,03

2 α) $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, β) $\frac{125}{100} = \frac{5}{4}$, γ) $\frac{45}{1.000} = \frac{9}{200}$, δ) $\frac{35}{10} = \frac{7}{2}$

3 α) 4, β) 5, γ) 0, δ) 3. Το 5 είναι στα χιλιοστά, άρα αξίζει 0,005.

4 α) >, β) <, γ) =, δ) <, ε) >.

5 $1,22 > 1,202 > 1,2 > 1,022 > 1,02$.

6 α) 8, β) 8,5, γ) 8,50, δ) 8,498.

7 Γράφουμε 0,300 και 0,310: π.χ. 0,301, 0,305, 0,309 (υπάρχουν άπειροι).

8 Μικρότερος: 4,65, μεγαλύτερος: 4,74.

9 Πρώτος τερματίζει ο **μικρότερος** χρόνος: Γιώργος (10,89), Άρης (10,90), Δημήτρης (10,95), Βασίλης (11,05).

10 Μεγαλύτερος: 7,40 (δηλαδή 7,4). Μικρότερος: 0,47.

Μάθημα 3.2 · Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς – Δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό

1 α) 20,05 β) 8,53 γ) 0,999 δ) 99,99 ε) 2,25 ζ) $8,02 - 5,4 = 2,62$

2 α) 13,5 β) 0,42 γ) 2,46 δ) 0,0006 ε) 10 ζ) 1,21

3 α) 314 β) 500 γ) 7,24 δ) 0,0013 ε) 4,6 ζ) 80

4 α) 3,6, β) 2,25, γ) $14,4 : 12 = 1,2$, δ) $600 : 15 = 40$, ε) $500 : 2 = 250$.

5 α) 0,6, β) 0,45, γ) 0,625, δ) 1,75, ε) $0,666 \dots \approx 0,667$

6 α) 0,49, β) 0,00032, γ) $2,25 + 0,125 = 2,375$, δ) $5 - 2 \cdot 1,44 = 5 - 2,88 = 2,12$.

7 $2,5 \cdot 0,4 + 3 - 0,25 = 1 + 3 - 0,25 = 3,75$.

8 $32,5 \cdot 1,85 = 60,125 \approx 60,13$ €.

9 Στο πακέτο: $4,74 : 6 = 0,79$ €. Εξοικονόμηση: $0,85 - 0,79 = 0,06$ € ανά γιαιούρτι.

10 $3,5 : 0,25 = 350 : 25 = 14$. $4,8 : 16 = 0,3$ (έλεγχος: $4,8 : 0,3 = 48 : 3 = 16$ ✓).

11 Περίμετρος: $2 \cdot (7,5 + 4,2) = 23,4$ m. Εμβαδόν: $7,5 \cdot 4,2 = 31,5$ m². Κόστος: $31,5 \cdot 18,40 = 579,6$ €, δηλαδή 579,60 €.

Μάθημα 3.3 · Υπολογισμοί με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης

1 α) 189,63 (εκτίμηση $40 \cdot 5 = 200$). β) $\approx 125,97$ (εκτίμηση $1.200 : 10 = 120$). γ) 27,9841 (εκτίμηση: $2,3^2 \approx 5$, $5^2 = 25$).

2 Ο απλός υπολογιστής κάνει $10 - 2 = 8$ και $8 \cdot 3 = 24$. Το σωστό είναι $10 - 6 = 4$. Πληκτρολογούμε π.χ. « $2 \times 3 =$ » M- και «10» M+ και MR, ή απλά υπολογίζουμε πρώτα το $2 \cdot 3$.

3 63 M+, $8,2$ M-, 3 M+, MR: $63 - 8,2 + 3 = 57,8$.

4 Πολλαπλασιάζουμε το 0,48 με αριθμό μικρότερο του 1, άρα το αποτέλεσμα πρέπει να είναι μικρότερο από 0,48. Το σωστό είναι 0,12.

5 $18 \cdot 1,35 = 24,3$ M+, $12 \cdot 0,95 = 11,4$ M+, $7 \cdot 3,2 = 22,4$ M+, MR = 58,1 €.

6 1,21, 1,331, 1,4641. Σε 4 χρόνια: $1.000 \cdot 1,4641 = 1.464,10$ €.

Μάθημα 3.4 · Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών

1 α) $8 \cdot 10^3$ β) $6,5 \cdot 10^4$ γ) $1,2 \cdot 10^6$ δ) $4,07 \cdot 10^8$ ε)
 $3,005 \cdot 10^4$ ζ) $1,25 \cdot 10^1$

2 α) 60.000, β) 370.000, γ) 1.002, δ) 99.900.000.

3 Τυποποιημένοι: $3,4 \cdot 10^5$, $9,99 \cdot 10^2$, $1 \cdot 10^6$. Οι
 άλλοι: $0,8 \cdot 10^3 = 8 \cdot 10^2$ και $10 \cdot 10^4 = 1 \cdot 10^5$.

4 $1,2 \cdot 10^7 > 4,5 \cdot 10^6 > 4,05 \cdot 10^6 > 9 \cdot 10^5$.

5 $3 \cdot 10^5$ km/s. Σε 60 s: $60 \cdot 300.000 = 18.000.000 =$
 $1,8 \cdot 10^7$ km.

6 $70 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 36.792.000 \approx 3,7 \cdot 10^7$ φορές.

7 α) $8 \cdot 10^8$, β) $30 \cdot 10^6 = 3 \cdot 10^7$.

Μάθημα 3.5 · Μονάδες μέτρησης

1 α) 420 cm β) 3,5 m γ) 800 m δ) 2,75 km ε) 1,5
 cm ζ) 1.050 mm

2 α) 300 dm² β) 4.500 cm² γ) 2,5 m² δ) 12.000 m²
 ε) 2.500.000 m² ζ) 8 m²

3 α) 3.500 ml, β) 0,25 L, γ) 20 L, δ) 1,5 dm³, ε)
 2.000.000 cm³.

4 α) 3.200 g, β) 0,45 kg, γ) 2.500 kg, δ) 0,075 t.

5 α) $2 \cdot 3.600 + 15 \cdot 60 = 7.200 + 900 = 8.100$ s. β)
 $500 = 60 \cdot 8 + 20$: 8 min 20 s. γ) $7 \cdot 24 = 168$ h.

6 α) 1,5 h, β) 2,2 h, γ) 0,75 h, δ) 3 h 12 min, ε) 45
 min.

7 Από 16:35 έως 19:10: 2 h 35 min. Μείον 20 min: 2 h
 15 min.

8 Εμβαδόν: $80 \cdot 45 = 3.600$ m² = 3,6 στρέμματα.
 Κόστος: $3,6 \cdot 12.000 = 43.200$ €.

9 Όγκος: $10 \cdot 5 \cdot 1,6 = 80$ m³ = 80.000 L. Χρόνος:
 $80.000 : 200 = 400$ min = 6 h 40 min.

10 Κάθε έδρα: $150 : 6 = 25$ cm² = $5 \cdot 5$, άρα ακμή 5
 cm. Όγκος: $5^3 = 125$ cm³ = 125 ml.

11 Σε cm: 120, 125, 115, 119. Αύξουσα: 1.150 mm <
 $11,9$ dm < $1,2$ m < 125 cm.

Επανάληψη Κεφαλαίου 3

1 $1,6 + 3 - 0,16 = 4,44$.

2 $8,25 : 0,15 = 825 : 15 = 55 \cdot 55 + 250 = 305$.

3 $\frac{3}{8} = 0,375$ και $\frac{2}{5} = 0,4$. Σειρά: $0,35 < \frac{3}{8} = 0,375 < \frac{2}{5} = 0,4$. Ίσοι: $\frac{3}{8} = 0,375$ και $\frac{2}{5} = 0,4$.

4 $22 : 7 = 3,142857 \dots$ Δέκατα: 3,1, εκατοστά: 3,14, χιλιοστά: 3,143.

5 $3,844 \cdot 10^5$ km. Ώρες: $384.400 : 900 \approx 427$ h. Μέρες: $427 : 24 \approx 17,8$, δηλαδή περίπου 18 μέρες.

6 $2.400 : 150 = 16$ ποτήρια. $36 : 2,4 = 15$ δοχεία.

7 $2,5 \cdot 1,8 = 4,5$, $0,75 \cdot 9,6 = 7,2$, $3 \cdot 1,15 = 3,45$.
Σύνολο 15,15 €. Ρέστα 4,85 €.

8 $1 \text{ h } 45 \text{ min} = 1,75 \text{ h}$. Ταχύτητα: $37,8 : 1,75 = 3.780 : 175 = 21,6 \text{ km/h}$.

9 $1.200 \text{ m}^2 : 40 = 30 \text{ m}$ πλάτος. Περίμετρος: $2 \cdot (40 + 30) = 140 \text{ m}$.

10 α) $\wedge (0,01)$, β) Σ , γ) Σ , δ) Σ , ε) $\wedge$ (Ίσοι).

ΛΥΣΕΙΣ · ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εξισώσεις και προβλήματα

Μάθημα 4.1 · Η έννοια της εξίσωσης – Οι εξισώσεις $\alpha + x = \beta$, $x - \alpha = \beta$, $\alpha - x = \beta$, $\alpha x = \beta$, $\alpha : x = \beta$, $x : \alpha = \beta$

1 α) $5 \cdot 4 - 2 = 18 \checkmark$ λύση. β) $2 + 2 = 4$ και $2 \cdot 2 = 4 \checkmark$ λύση. γ) $20 - 9 = 11 \neq 8$, όχι λύση (λύση είναι το 4).

2 α) $x = 26$ β) $x = 63$ γ) $x = 36$ δ) $x = 13$ ε) $x = 91$ ζ) $x = 12$

3 α) $x = 2,3$ β) $x = 1,55$ γ) $x = 2,85$ δ) $x = 4$ ε) $x = 3$ ζ) $x = 5$

4 α) $\frac{7}{12}$ β) $\frac{7}{10}$ γ) $\frac{3}{8}$ δ) $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$ ε) $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$ ζ) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{4}$

5 α) $4x = 24$, $x = 6$. β) $5x = 35$, $x = 7$. γ) $2x = 14$, $x = 7$. δ) $\frac{x}{3} = 7$, $x = 21$. ε) $x + 2 = 9$, $x = 7$.

6 α) Αδύνατη. β) Ταυτότητα (ισχύει για κάθε x). γ) Ταυτότητα. δ) Έχει λύση $x = 5$ (ούτε αδύνατη ούτε ταυτότητα).

7 α) $x + 15 = 40$, $x = 25$. β) $4x = 52$, $x = 13$. γ) $72 : x = 9$, $x = 8$.

8 α) $2,5x = 7,5$, $x = 3$. β) $\frac{3}{4}x = \frac{3}{2}$, $x = 2$. γ) $x - 3 = 10$, $x = 13$.

9 α) 7, β) 6, γ) 7, δ) 2 (αφού $2 : 5 = 0,4$).

Μάθημα 4.2 · Επίλυση προβλημάτων

1 α) $5x$, β) $x - 8$, γ) $3x + 4$, δ) $\frac{x + 10}{2}$, ε) $\frac{2}{3}x$.

2 α) $3x - 7 = 20$. β) $2x + 3 = 45$. γ) $x + \frac{x}{2} = 27$.

3 $100 - x = 37$, $x = 63$.

4 $6x = 84$, $x = 14$.

5 Σύνολο: $x + (x + 12) + 2x = 4x + 12$. Εξίσωση: $4x + 12 = 92$, $4x = 80$, $x = 20$. Ελένη 20 €, Σοφία 32 €, Κώστας 40 €.

6 $3,50 + 0,80x = 15,90$, $0,80x = 12,40$, $x = 15,5$ km.

7 Έστω x και $x + 2$: $2x + 2 = 114$, $x = 56$. Οι αριθμοί είναι 56 και 58.

8 $(5x - 9) : 4 = 14 \Rightarrow 5x - 9 = 56 \Rightarrow 5x = 65 \Rightarrow x = 13$.

Μάθημα 4.3 · Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων

1 $x + 4x = 75$, $x = 15$. Έχουν 15 € και 60 €.

2 Γιος x , πατέρας $x + 28$. Σε 5 χρόνια: $(x + 5) + (x + 33) = 60 \Rightarrow 2x + 38 = 60 \Rightarrow x = 11$. Γιος 11, πατέρας 39 ετών.

3 Βάση x , ίσες πλευρές $x + 4$: $x + 2(x + 4) = 32 \Rightarrow 3x + 8 = 32 \Rightarrow x = 8$. Βάση 8 cm, ίσες πλευρές 12 cm.

4 Αγόρια x , κορίτσια $x + 3$: $2x + 3 = 27$, $x = 12$. Αγόρια 12, κορίτσια 15.

5 Ενήλικες x , παιδιά $12 - x$: $8x + 5(12 - x) = 78 \Rightarrow 8x + 60 - 5x = 78 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$. Ήταν 6 ενήλικες και 6 παιδιά.

6 $90 + 3x = 450 \Rightarrow x = 120$ L/h. Μένουν $1.200 - 450 = 750$ L, άρα $750 : 120 = 6,25$ h = 6 h 15 min.

7 Ξόδεψε $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{13}{20}$, έμειναν $\frac{7}{20}x = 21 \Rightarrow x = 60$ €.

8 Έστω x ώρες κινείται το δεύτερο. Το πρώτο έχει κινηθεί $x + 1$ ώρες: $120x = 90(x + 1) \Rightarrow 120x = 90x + 90 \Rightarrow 30x = 90 \Rightarrow x = 3$. Θα το φτάσει στις 11:00 (σε απόσταση 360 km).

9 $\frac{84}{6} = 14$, $\frac{84}{12} = 7$, $\frac{84}{7} = 12$, 5, ο γιος έζησε $\frac{84}{2} = 42$, και 4. Άθροισμα: $14 + 7 + 12 + 5 + 42 + 4 = 84 \checkmark$.

Επανάληψη Κεφαλαίου 4

1 α) 6,25, β) $\frac{7}{12}$, γ) 7, δ) $\frac{9}{10} \cdot \frac{5}{3} = \frac{3}{2}$.

2 α) $7x = 63$, $x = 9$. β) $\frac{x}{5} = 1,5$, $x = 7,5$. γ) $x - 2 = 7,5$, $x = 9,5$.

3 $3x + 14 = 50$, $x = 12$.

4 $2 \cdot 8 + 3x = 31 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$ €.

5 Πλάτος x , μήκος $2x$: $6x = 72$, $x = 12$. Διαστάσεις 12 m και 24 m, εμβαδόν 288 m^2 .

6 Πριν από x χρόνια: $66 - x = 30(8 - x) \Rightarrow 66 - x = 240 - 30x \Rightarrow 29x = 174 \Rightarrow x = 6$. Πριν από 6 χρόνια (60 και 2 ετών).

7 $x + (x + 10) + 2(x + 10) = 100 \Rightarrow 4x + 30 = 100 \Rightarrow x = 17,5$. Οι αριθμοί: 17,5, 27,5, 55.

8 $\frac{3}{8} \cdot 40 = 15 \text{ kg}$, $12 = 180$ €. Υπόλοιπο $25 \text{ kg} \cdot 10 = 250$ €. Σύνολο: 430 €.

ΛΥΣΕΙΣ · ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ποσοστά

Μάθημα 5.1 · Ποσοστά

$$1 \quad 30\% = 0,3 = \frac{3}{10} \cdot 4\% = 0,04 = \frac{1}{25} \cdot 60\% = 0,6 = \frac{3}{5} \cdot 62,5\% = 0,625 = \frac{5}{8}.$$

$$2 \quad \alpha) 47, \beta) 16, \gamma) 27, \delta) 60, \epsilon) 10.$$

$$3 \quad 15\% \text{ του } 80: 8 + 4 = 12 \text{ €}. 35\% \text{ του } 60: 30\% = 18, 5\% = 3, \text{ άρα } 21 \text{ €}.$$

$$4 \quad \alpha) \frac{9}{36} = 25\%, \beta) \frac{12}{80} = 15\%, \gamma) \frac{45}{60} = 75\%, \delta) \frac{30}{24} = 1,25 = 125\%.$$

$$5 \quad \text{Μπάσκετ } \frac{110}{250} = 44\%, \text{ ποδόσφαιρο } \frac{95}{250} = 38\%, \text{ βόλεϊ } \frac{45}{250} = 18\%. (\text{Έλεγχος: } 44 + 38 + 18 = 100 \checkmark.)$$

$$6 \quad 0,4x = 26 \Rightarrow x = 65.$$

$$7 \quad 0,035 \cdot 1.030 = 36,05 \approx 36,1 \text{ g}.$$

$$8 \quad \text{Τα λάθη είναι το } 20\%: 0,2x = 6 \Rightarrow x = 30 \text{ ερωτήσεις}.$$

$$9 \quad \text{Και τα δύο είναι } 15, \text{ γιατί } \frac{30}{100} \cdot 50 = \frac{50}{100} \cdot 30 = \frac{1.500}{100} \text{ (αντιμεταθετική ιδιότητα).}$$

Μάθημα 5.2 · Προβλήματα με ποσοστά

$$1 \quad 0,6 \cdot 45 = 27 \text{ €}.$$

$$2 \quad 1,04 \cdot 1.150 = 1.196 \text{ €}.$$

$$3 \quad 1,24 \cdot 540 = 669,60 \text{ €}.$$

$$4 \quad 1,12x = 14 \Rightarrow x = 12,50 \text{ €}.$$

$$5 \quad \text{Έκπτωση } 4 \text{ €}: \frac{4}{25} = 0,16 = 16\%.$$

$$6 \quad 1,24x = 310 \Rightarrow x = 250 \text{ €}. \text{ ΦΠΑ: } 60 \text{ €}.$$

$$7 \quad K \cdot 0,025 \cdot 2 = 300 \Rightarrow 0,05K = 300 \Rightarrow K = 6.000 \text{ €}.$$

$$8 \quad 7.200 \cdot 0,015 \cdot \frac{5}{12} = 108 \cdot \frac{5}{12} = 45 \text{ €}.$$

$$9 \quad 200 \rightarrow 220 \rightarrow 198 \text{ €}. \frac{198}{200} = 99\%: \text{ συνολικά μείωση } 1\%.$$

$$10 \quad \text{Πρώτο: } 150 \rightarrow 120 \rightarrow 108 \text{ €}. \text{ Δεύτερο: } 0,7 \cdot 150 = 105 \text{ €}. \text{ Συμφέρει το δεύτερο (οι διαδοχικές εκπτώσεις } 20\% \text{ και } 10\% \text{ ισοδυναμούν με } 28\%).$$

$$11 \quad \text{Κορίτσια: } 25\% \text{ του } 60\% = 15\%. \text{ Αγόρια (40\%): } 50\% \text{ του } 40\% = 20\%. \text{ Σύνολο: } 35\% \text{ της τάξης}.$$

Επανάληψη Κεφαλαίου 5

$$1 \quad \alpha) 84, \beta) 25\%, \gamma) 0,08x = 14 \Rightarrow x = 175.$$

$$2 \quad 360 \cdot 1,05 = 378, 378 \cdot 0,8 = 302,40 \text{ €}.$$

$$3 \quad 0,65x = 52 \Rightarrow x = 80 \text{ €}. \text{ Κέρδισε } 80 - 52 = 28 \text{ €}.$$

$$4 \quad \frac{360}{2.400} = 0,15 = 15\%.$$

$$5 \quad \text{Πράσινες: } 25\% \text{ του } 40 = 10. \text{ Μετά: } 20 \text{ πράσινες σε } 50 \text{ μπάλες, δηλαδή } 40\%.$$

$$6 \quad T = 5.000 \cdot 0,06 \cdot 1,5 = 450 \text{ €}. \text{ Σύνολο: } 5.450 \text{ €}.$$

$$7 \quad 68 \cdot 1,15 = 78,20 \text{ €}, 78,20 : 4 = 19,55 \text{ €}.$$

$$8 \quad \alpha) \Lambda (30\%), \beta) \Sigma, \gamma) \Lambda (100 \rightarrow 150 \rightarrow 75), \delta) \Sigma (0,1 \cdot 0,1 = 0,01).$$

ΛΥΣΕΙΣ · ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Ανάλογα ποσά – Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Μάθημα 6.1 · Παράσταση σημείων στο επίπεδο

1 Το A είναι 2 μονάδες δεξιά και 5 πάνω· το B 5 δεξιά και 2 πάνω (διαφορετικό από το A !). Το Γ είναι πάνω στον κατακόρυφο ημιάξονα στο 4, το Δ πάνω στον οριζόντιο στο 3, και το E στη μέση ανάμεσα στο 4 και στο 5, μία μονάδα πάνω.

2 α) Όσα βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο ημιάξονα Ox . β) Όσα βρίσκονται πάνω στον κατακόρυφο ημιάξονα Oy . γ) Όσα βρίσκονται στη διχοτόμο της γωνίας xOy , π.χ. $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$.

3 $\Delta(1, 5)$. Πλευρές: $AB = 4$, $B\Gamma = 3$. Περίμετρος $2 \cdot (4 + 3) = 14$ μονάδες.

4 Τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία που περνάει από την αρχή O . Σε κάθε σημείο η τεταγμένη είναι διπλάσια της τετμημένης, άρα για τετμημένη 5 η τεταγμένη είναι 10.

5 Πλευρά $5 - 2 = 3$. Οι άλλες κορυφές: $\Gamma(5, 4)$, $\Delta(2, 4)$. Εμβαδόν $3^2 = 9$ τετραγωνικές μονάδες.

Μάθημα 6.2 · Λόγος δύο αριθμών – Αναλογία

1 α) $\frac{2}{3}$, β) $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$, γ) $\frac{750}{2.000} = \frac{3}{8}$, δ) $\frac{1.200}{800} = \frac{3}{2}$.

2 $\frac{x}{25} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5x = 75 \Rightarrow x = 15$ αγόρια.

3 α) $12x = 72$, $x = 6$. β) $21x = 210$, $x = 10$. γ) $2x = 6$, $x = 3$. δ) $4x = 3$, $x = \frac{3}{4}$.

4 $8 \cdot 25.000 = 200.000 \text{ cm} = 2 \text{ km}$. $3,5 \text{ km} = 350.000 \text{ cm}$: $25.000 = 14 \text{ cm}$.

5 $25 \cdot 18 = 450 \text{ cm} = 4,5 \text{ m}$.

6 $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ αφού $3 \cdot 20 = 5 \cdot 12 = 60$ ✓. Άλλες: $\frac{3}{12} = \frac{5}{20}$, $\frac{5}{20} = \frac{12}{48}$.

7 $\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{11} = \frac{66}{11} = 6$. Άρα $x = 24$, $y = 42$.

Μάθημα 6.3 · Ανάλογα ποσά – Ιδιότητες αναλόγων ποσών

1 $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$. Ανάλογα με συντελεστή $\frac{4}{3}$, $y = \frac{4}{3}x$.

2 Συντελεστής $\frac{7}{2} = 3,5$. Για $x = 5$: $y = 17,5$. Για $y = 28$: $x = 8$. Για $x = 12$: $y = 42$.

3 Ανάλογα: α, γ ($P = 3\alpha$), δ. Όχι: β και ε ($V = \alpha^3$).

4 α) $y = 9,5x$. β) 342 €. γ) $285 : 9,5 = 30$ ώρες.

5 $1,20 \text{ €/kg}$. $7,5 \cdot 1,2 = 9 \text{ €}$. $15 : 1,2 = 12,5 \text{ kg}$.

6 Αφού $y = \alpha x$, για $x = 0$ πρέπει $y = \alpha \cdot 0 = 0$. Άρα το ζεύγος $(0, 5)$ είναι αδύνατο.

Μάθημα 6.4 · Γραφική παράσταση σχέσης αναλογίας

1 Η $y = 3x$ περνάει από τα $O(0,0)$ και $(1,3)$ · η $y = \frac{1}{3}x$ από τα O και $(3,1)$. Πιο απότομη είναι η $y = 3x$ (μεγαλύτερος συντελεστής).

2 α) $\alpha = \frac{10}{4} = 2,5$. β) $y = 2,5 \cdot 6 = 15$. γ) $2,5 \cdot 10 = 25 \neq 24$: όχι.

3 Πίνακας: $0 \rightarrow 0$, $1 \rightarrow 6$, $2 \rightarrow 12$, $3 \rightarrow 18$, $4 \rightarrow 24$. Ημιευθεία από το O . Για $2,5 \text{ m}$: 15 €.

4 $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = 1,5$ αλλά $\frac{8}{6} \neq 1,5$. Τα A και B ανήκουν στην $y = 1,5x$, το Γ όχι. Άρα **όχι** και τα τρία.

5 Όχι: για 0 km πληρώνουμε 4 €, όχι 0. Η σχέση είναι $y = x + 4$ και η γραφική παράσταση είναι ευθεία που **δεν** περνάει από το O (ξεκινάει από το $(0,4)$).

Μάθημα 6.5 · Προβλήματα αναλογιών

1 75 km/h: 375 km σε 5 ώρες. $300 : 75 = 4$ ώρες.

2 $\frac{x}{20} = \frac{45}{12} \Rightarrow x = 75$ ψωμιά. Για 65: $65 \cdot \frac{12}{20} = 39$ kg.

3 $\frac{360}{9} = 40$: 40, 120, 200.

4 Λόγος $15 : 25 = 3 : 5$. $8.400 : 8 = 1.050$. Ο πρώτος 3.150 €, ο δεύτερος 5.250 €.

5 Άθροισμα 180° : $180 : 9 = 20$. Γωνίες 40° , 60° , 80° .

6 $\frac{\kappa}{5} = \frac{3}{2} \Rightarrow \kappa = 7,5$ L. Σύνολο 12,5 L.

7 Τραπέζι: $3,2 \cdot 50 = 160$ cm = 1,6 m. Δωμάτιο: $400 : 50 = 8$ cm και $300 : 50 = 6$ cm, εμβαδόν στο σχέδιο 48 cm².

8 $1.620 : 18 = 90$ € τη μέρα. Πήραν 360, 540 και 720 €.

Μάθημα 6.6 · Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

1 $1 \cdot 18 = 3 \cdot 6 = 6 \cdot 3 = 9 \cdot 2 = 18$. Ναι, $x \cdot y = 18$.

2 $x \cdot y = 40$: για $x = 4$, $y = 10$ · για $y = 5$, $x = 8$ · για $x = 16$, $y = 2,5$.

3 Ανάλογα: **β, ε**. Αντιστρόφως ανάλογα: **α, δ**. Τίποτα: **γ**.

4 $40x = 30 \cdot 12 = 360 \Rightarrow x = 9$ μέρες.

5 Σταθερό γινόμενο 24. Με 4 βρύσες: 6 ώρες. Για 2 ώρες: 12 βρύσες.

6 $x \cdot y = 36$, π.χ. $(1,36)$, $(4,9)$, $(6,6)$, $(12,3)$.
Αντιστρόφως ανάλογα.

7 Συνολική εργασία: $5 \cdot 9 = 45$ «μηχανο-ώρες». Σε 3 ώρες έγιναν 15· μένουν 30, που με 4 μηχανήματα γίνονται σε 7,5 ώρες. Σύνολο: $3 + 7,5 = 10,5$ ώρες.

Επανάληψη Κεφαλαίου 6

- 1 $7x = 42, x = 6.$
- 2 $2,4 \cdot 300.000 = 720.000 \text{ cm} = 7,2 \text{ km}.$
- 3 $\alpha = 0,4, y = 0,4x.$ Για $y = 7: x = 17,5.$
- 4 $6 \cdot 10 = 60, 60 : 4 = 15$ αντλίες.
- 5 $2.700 : 36 = 75: 600 \text{ €}, 900 \text{ €}, 1.200 \text{ €}.$
- 6 $3,75 \cdot 80 = 300 \text{ km}.$ $300 : 3 = 100 \text{ km/h}.$
- 7 $y = 2,5x,$ άρα για $x = 10: y = 25.$ $y \cdot z = 60,$ άρα $z = 60 : 25 = 2,4.$
- 8 Ανάλογα: 750 g ζυμαρικά και 1,5 L σάλτσα.

ΛΥΣΕΙΣ · ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί

Μάθημα 7.1 · Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) – Η ευθεία των ρητών – Τετμημένη σημείου

1 α) $+120$, β) -3 , γ) -15 , δ) -480 , ε) $+2.917$.

2 Με μονάδα 1 cm: το A 3 cm αριστερά του O , το B 2 cm δεξιά, το Γ μισό εκατοστό αριστερά, το Δ 1,5 cm δεξιά, το E 2,5 cm αριστερά (ανάμεσα στα -3 και -2).

3 α) -7 , 0, 15, $-\frac{8}{4} = -2$. β) -7 , $-1,25$, $-\frac{8}{4}$. γ) 0.

4 Μεσημέρι: $+5^\circ\text{C}$. Βράδυ: -2°C .

5 $A: 40$, $B: 30$, $\Gamma: 20$, $\Delta: 10$. Το E βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$ (στον αρνητικό ημιάξονα).

6 $570 - 384 = 186$ χρόνια. Από το 384 π.Χ. μέχρι το 2026 μ.Χ.: $384 + 2026 = 2.410$ χρόνια (περίπου, αφού δεν υπάρχει «έτος 0», ακριβέστερα 2.409).

Μάθημα 7.2 · Απόλυτη τιμή ρητού – Αντίθετοι ρητοί – Σύγκριση ρητών

1 α) 12, β) 3,5, γ) $\frac{7}{9}$, δ) 10, ε) 5, στ) -10 .

2 8, $-2,4$, $\frac{1}{3}$, 0, -6 .

3 α) $<$, β) $>$, γ) $<$, δ) $>$ ($\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$), ε) $>$.

4 $1,5 > 0 > -\frac{1}{4} > -2 > -2,5 > -3$.

5 Μικρότερη -6 , μεγαλύτερη 4. Κάτω από -2 : -3 , -5 , -6 , δηλαδή 3 μέρες.

6 α) -2 , $-1,0$, $1,2$. β) -4 , -3 , -2 . γ) 0.

7 α) Σ , β) Σ , γ) Λ (π.χ. 3 και -3), δ) Σ (το -1).

Μάθημα 7.3 · Πρόσθεση ρητών αριθμών

1 α) 15 β) -15 γ) -3 δ) 3 ε) 0 ζ) -25

2 α) -5 , β) $-2,3$, γ) $-\frac{6}{10} + \frac{5}{10} = -\frac{1}{10}$, δ) $-\frac{6}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{9}{4}$.

3 α) Θετικοί 15, αρνητικοί -21 : -6 . β) Αντίθετοι 15, -15 και $-20,20$: μένει 8. γ) $2 - 6,5 = -4,5$.

4 $-18 + 7 - 12 + 20 = -3$ m.

5 $45 - 60 + 20 - 15 = -10$ πόντοι.

6 Κεντρικό 0, άρα αντιδιαμετρικά ζεύγη αντίθετα: κάτω δεξιά 1, πάνω δεξιά -3 , πάνω μέση 4, μέση αριστερά -2 , μέση δεξιά 2. Πρώτη γραμμή: -1 , 4, -3 . δεύτερη: -2 , 0, 2· τρίτη: 3, -4 , 1.

Μάθημα 7.4 · Αφαίρεση ρητών αριθμών

1 α) -5 β) -13 γ) 13 δ) 5 ε) -7 ζ) 0

2 α) $-6,2$, β) 2, γ) $-\frac{3}{6} - \frac{4}{6} = -\frac{7}{6}$, δ) $\frac{6}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

3 α) $8 - 3 + 6 = 11$. β) $-4 + 10 - 2 + 5 = 9$. γ) $15 - 7 - 3 + 12 + 4 + 1 = 22$.

4 $4 - 11 = -7$. $-2 + 7 = 5$. $3 - 5 + 6 = 4$.

5 $250 - (-120) = 370$ m.

6 $-35 + 80 - 62 + 15 = -2$ €.

7 α) $x = 3 - 7 = -4$. β) $x = -8 + 5 = -3$. γ) $x = -4 - 6 = -10$.

Μάθημα 7.5 · Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

1 α) -40 β) 40 γ) $-0,9$ δ) 6 ε) $\frac{3}{2}$ ζ) -1

2 α) Τρεις αρνητικοί: αρνητικό (-210). β) Τέσσερις αρνητικοί: θετικό (16). γ) Μηδέν.

3 α) $-6 + 20 = 14$. β) $-6 - 6 = -12$. γ) $5 + 6 = 11$.

4 α) $(-25 \cdot 4) \cdot (-7) = (-100) \cdot (-7) = 700$. β) $-13 \cdot (17 - 7) = -13 \cdot 10 = -130$.

5 $6 \cdot (-2,5) = -15^\circ\text{C}$. Θα είναι $4 - 15 = -11^\circ\text{C}$.

6 α) 30, β) $-6 - 15 = -21$, γ) $-2 \cdot 8 = -16$, δ)
 $-(-2) \cdot (-5) = 2 \cdot (-5) = -10$.

Μάθημα 7.6 · Διαίρεση ρητών αριθμών

1 α) -4 β) 4 γ) -3 δ) -4 ε) $\frac{1}{4}$ ζ) $-\frac{1}{8}$

2 α) $-\frac{3}{5}$, β) $-\frac{2}{3}$, γ) $\frac{3}{4}$, δ) $\frac{2}{5}$.

3 α) $\frac{-6}{-3} = 2$, β) $\frac{-20}{-10} = 2$, γ) $-4 + 3 = -1$.

4 $-\frac{1}{6} : \left(-\frac{1}{6}\right) = 1 \cdot 1 + 3 = 4$.

5 Μεταβολή $-9 - 6 = -15$, ανά ώρα $-15 : 5 = -3^\circ$
C.

6 α) $x = -7$, β) $x = -15$, γ) $x = 4$.

Μάθημα 7.7 · Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

1 α) 0,375, β) $0,\bar{5}$, γ) $-0,\bar{63}$, δ) $0,8\bar{3}$, ε) $-0,52$.

2 $\frac{3}{40}$ ($40 = 2^3 \cdot 5$) ναι. $\frac{2}{15}$ ($15 = 3 \cdot 5$) όχι. $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ ναι
 ($0,75$). $\frac{1}{7}$ όχι.

3 α) $\frac{8}{9}$, β) $\frac{27}{99} = \frac{3}{11}$, γ) $1 + \frac{3}{9} = \frac{4}{3}$, δ) $\frac{123}{999} = \frac{41}{333}$.

4 α) $0,333 \dots > 0,33$. β) $0,4545 \dots$ και $0,4555 \dots$: ο
 δεύτερος είναι μεγαλύτερος.

5 $\frac{3}{9} + \frac{6}{9} = 1$ και $\frac{1}{9} \cdot 9 = 1$.

Μάθημα 7.8 · Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

1 α) 16 β) -16 γ) -64 δ) 1 ε) $\frac{1}{9}$ ζ) $-0,008$ η)
 -16 θ) 1

2 α) 7^9 , β) $(-6)^6$, γ) 3^8 , δ) α^{10} , ε) 100^5 .

3 α) $-8 + 9 = 1$, β) $-16 + 16 = 0$, γ) $-1 - 1 + 1 =$
 -1 .

4 α) $2^3 = 8$, β) $5^2 = 25$, γ) $(0,5 \cdot 2)^8 = 1$.

5 $3 \cdot (-8) - 16 : (-8) + 1 = -24 + 2 + 1 = -21$.

6 α) Λ, β) Σ, γ) Λ ($12 \neq 32$), δ) Λ (για περιττό n είναι
 -1), ε) Λ (2^6).

Μάθημα 7.9 · Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

1 α) $\frac{1}{5}$ β) $\frac{1}{16}$ γ) $0,01$ δ) $\frac{1}{9}$ ε) $-\frac{1}{125}$ ζ) $\frac{16}{9}$ η) 8
θ) -2

2 α) 3^2 , β) 7^{-5} , γ) 5^6 , δ) 2^{-6} , ε) $x^0 = 1$.

3 α) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, β) $\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 8 = 2$.

4 $2^2 - 9 + (-1) = 4 - 9 - 1 = -6$.

5 α) 10^{-1} , β) 10^{-4} , γ) 10^{-5} , δ) 10^0 .

Μάθημα 7.10 · Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών

1 α) $6 \cdot 10^{-3}$ β) $4,1 \cdot 10^{-4}$ γ) $5 \cdot 10^{-1}$ δ) $7,2 \cdot 10^{-6}$
ε) $3,5 \cdot 10^5$ ζ) $1,02 \cdot 10^{-2}$

2 α) $0,0002$, β) $0,093$, γ) $0,00000017$.

3 $8 \cdot 10^{-4} < 1,2 \cdot 10^{-3} < 5 \cdot 10^{-3} < 3 \cdot 10^{-2}$.

4 α) $12 \cdot 10^{-7} = 1,2 \cdot 10^{-6}$, β) $3 \cdot 10^3$, γ) $30 \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^{-2}$.

5 $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$. $10^{-2} : (2 \cdot 10^{-6}) = 0,5 \cdot 10^4 = 5.000$ βακτήρια.

Επανάληψη Κεφαλαίου 7

1 $-8 - 6 + 3 = -11$.

2 $-8 - 3 - 5 = -16$.

3 $4 - 6 = -2$, $2 + 6 = 8$, $-64 + 7 = -57$.

4 $4 - 1 - 2 = 1$.

5 α) $9 - 4 = 5$, β) $(-1)^3 = -1$, γ) $-(-3) \cdot 4 = 12$, δ)
 $-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

6 $(-2)^{-1} = -0,5$. Σειρά: $-0,5 < -0, \bar{3} < -0,3 < -0,25 < 0$, δηλαδή $(-2)^{-1} < -0, \bar{3} < -0,3 < -\frac{1}{4} < 0$.

7 $8 - (-12) = 20^\circ\text{C}$. Μέση: $(8 - 12 - 5) : 3 = -9 : 3 = -3^\circ\text{C}$.

8 $\frac{2^6 \cdot 2^{-5}}{2^{-3}} = 2^{6-5+3} = 2^4$.

9 $2,5 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot 1 : (2,5 \cdot 10^{-5}) = 0,4 \cdot 10^5 = 40.000$ κύτταρα.

10 α) $\Sigma (3 > 2)$, β) Λ , γ) $\Lambda (-1)$, δ) Σ , ε) $\Lambda (-\frac{1}{4})$.

Συνέχισε τη μάθηση στο **mathgreece.com**

Το βοήθημα αυτό είναι η αρχή. Στο **mathgreece.com** θα βρεις ένα **πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο** για κάθε μάθημα της Α' Γυμνασίου — και όχι μόνο:

Βίντεο-μαθήματα

Κάθε ενότητα εξηγημένη βήμα-βήμα, να τη βλέπεις όσες φορές θέλεις.

Σημειώσεις

Συνοπτική θεωρία για γρήγορη επανάληψη πριν από το διαγώνισμα.

Κουίζ & τεστ

Έλεγξε μόνος σου πόσο καλά έμαθες το κάθε μάθημα.

Παιχνίδια γνώσεων

Μάθηση με παιχνίδι: εξάσκηση που δεν κουράζει.

Podcasts

Μαθηματικά για να τα ακούς όπου κι αν βρίσκεσαι.

Panels μελέτης

Οργανωμένη μελέτη από το Γυμνάσιο έως το Πανεπιστήμιο.



mathgreece.com

Σκάνανε τον κωδικό με το κινητό σου
και ξεκίνα δωρεάν, τώρα!

