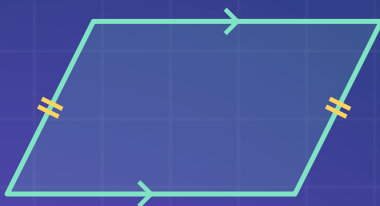
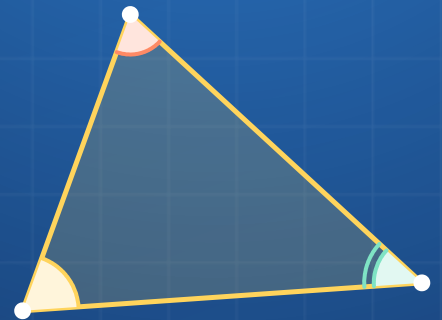


ΠΛΗΡΕΣ ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΜΕΝΟ ΒΟΗΘΗΜΑ

Μαθηματικά Α' Γυμνασίου

Μέρος Β' · Γεωμετρία

Όλη η θεωρία με απλά λόγια, εκατοντάδες λυμένα παραδείγματα, «παγίδες» και συχνά λάθη, άλυτες ασκήσεις κλιμακούμενης δυσκολίας με τις λύσεις τους.



3 κεφάλαια · 23 μαθήματα

Πλούσια εικονογράφηση

Λυμένα παραδείγματα

Προσοχή & συχνά λάθη

Άλυτες ασκήσεις με λύσεις

Επαναληπτικά ανά κεφάλαιο



mathgreece.com

Το δωρεάν, πλήρες και ολοκληρωμένο online φροντιστήριο
Μαθηματικών
για Γυμνάσιο, Λύκειο και Πανεπιστήμιο

Τάσος Κοβατσίδης
Μαθηματικός

Πρόλογος

Αγαπητή μαθήτριά, αγαπητέ μαθητή,

η Γεωμετρία είναι ίσως το πιο «οπτικό» κομμάτι των Μαθηματικών. Γεννήθηκε στην αρχαία Αίγυπτο από την ανάγκη να ξαναμετρηθούν τα χωράφια μετά από κάθε πλημμύρα του Νείλου — «γεω-μετρία», δηλαδή μέτρηση της γης — και έγινε **επιστήμη** στην αρχαία Ελλάδα, με τον Θαλή, τον Πυθαγόρα και τον Ευκλείδη. Στην Α' Γυμνασίου μαθαίνεις τη **γλώσσα** της: σημεία, ευθείες, γωνίες, κύκλους, συμμετρίες, τρίγωνα και τετράπλευρα. Θα μάθεις να **βλέπεις**, να **σχεδιάζεις** με ακρίβεια και να **αιτιολογείς** — δεξιότητες που θα σου χρειαστούν σε όλα τα επόμενα χρόνια.

Το βοήθημα αυτό γράφτηκε με ένα και μόνο στόχο: **να καταλάβεις** — όχι απλώς να αποστηθίσεις. Γι' αυτό κάθε μάθημα ξεκινά από κάτι απλό και οικείο, προχωρά σιγά-σιγά στη θεωρία, τη «δείχνει» με εικόνες και σχήματα και τη δουλεύει με πολλά λυμένα παραδείγματα. Μετά από είκοσι και πλέον χρόνια στην τάξη, ξέρω πολύ καλά πού «σκοντάφτουν» οι μαθητές· αυτά τα σημεία θα τα βρεις σημειωμένα ως **Προσοχή!** και **Συχνό λάθος**.

Στο τέλος κάθε μαθήματος υπάρχουν **άλυτες ασκήσεις** διαβαθμισμένης δυσκολίας και στο τέλος κάθε κεφαλαίου μια **ανακεφαλαίωση** με **επαναληπτικές ασκήσεις**. Όλες οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου. Η συμβουλή μου: **προσπάθησε πρώτα μόνος σου** και κοίτα τη λύση μόνο για να ελέγξεις το αποτέλεσμα ή όταν έχεις πραγματικά κολλήσει.

Αν κάπου χρειαστείς περισσότερη βοήθεια, το **mathgreece.com** είναι πάντα ανοιχτό για σένα: ένα **πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο** με βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις, κουίζ και παιχνίδια γνώσεων.

Καλή μελέτη και... καλή επιτυχία!



Τάσος Κοβατσίδης

Μαθηματικός · mathgreece.com

Πώς να διαβάσεις αυτό το βοήθημα

Το βιβλίο χωρίζεται σε **3 κεφάλαια**, όσα και τα κεφάλαια του Μέρους Β' (Γεωμετρία) της ύλης. Κάθε κεφάλαιο έχει το δικό του **χρώμα** και τη δική του **πλαϊνή ετικέτα** στο δεξί άκρο της σελίδας, ώστε να το βρίσκεις αμέσως. Στην κορυφή κάθε σελίδας γράφεται πάντα **σε ποιο κεφάλαιο και σε ποιο μάθημα βρίσκεσαι**. Κάθε μάθημα ξεκινά σε νέα σελίδα με μια χρωματιστή «ταμπέλα» σαν αυτή:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Μάθημα 1.8

Παραπληρωματικές και συμπληρωματικές γωνίες – Κατακορυφήν γωνίες

Μέσα στα μαθήματα θα συναντήσεις τα παρακάτω πλαίσια:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Στα πλαίσια αυτά θα βρίσκεις τους **ορισμούς**, τους **κανόνες** και τις **ιδιότητες** — δηλαδή όσα πρέπει να ξέρεις «απ' έξω και ανακατωτά».



Παράδειγμα 1

Κάθε λυμένο παράδειγμα έχει πρώτα την **εκφώνηση...**

ΛΥΣΗ

...και μετά τη **λύση**, γραμμένη βήμα-βήμα, όπως θα την έγραφες στο τετράδιό σου ή σε ένα διαγώνισμα.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Η κουκουβάγια μας, η **Γλαύκα**, σε ειδοποιεί για σημεία που θέλουν ιδιαίτερη προσοχή.

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

Εδώ βλέπεις πώς **δεν** πρέπει να λύσεις...

✓ ΣΩΣΤΟ

...και εδώ πώς είναι το σωστό.

Από κάτω εξηγείται **γιατί** γίνεται το λάθος, ώστε να μην το ξανακάνεις.



ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ιστορικά στοιχεία, περιέργειες και εφαρμογές από την καθημερινή ζωή.

Συνέχισε στο **mathgreece.com**



Σε κάθε μάθημα θα σε περιμένει μια υπενθύμιση: στο mathgreece.com υπάρχουν βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις, κουίζ και παιχνίδια γνώσεων για το ίδιο ακριβώς μάθημα.



Οι ασκήσεις

Κάθε άσκηση έχει δίπλα της τελείες δυσκολίας:

●●● εύκολη, ●●● μέτρια, ●●● απαιτητική.

Ξεκίνα πάντα από τις εύκολες!

Οι λύσεις

Στο τέλος του βιβλίου, οργανωμένες ανά **κεφάλαιο** και **μάθημα**, με τον ίδιο αριθμό που έχει η άσκηση. Η ενότητα των λύσεων έχει τη δική της ετικέτα **Λ**.

Τα όργανα της Γεωμετρίας

Πριν ξεκινήσεις, φρόντισε να έχεις πάντα στην τσάντα σου τα **γεωμετρικά όργανα**. Ένα σωστό σχήμα είναι η μισή λύση!

Χάρακας (κανόνας)

- Για να χαράζουμε **ευθείες γραμμές**.
- Με τη βαθμολογία του μετράμε **μήκη** σε cm και mm.

Γνώμονας

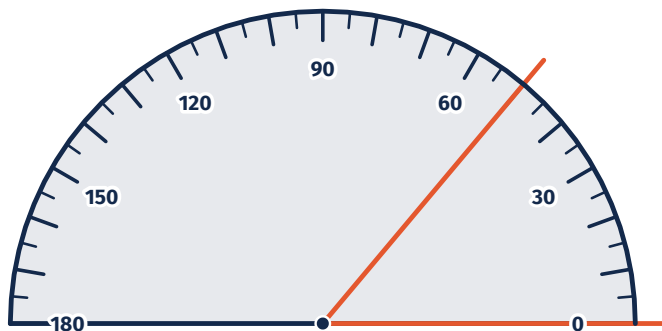
- Τρίγωνο με μία **ορθή γωνία**.
- Για να σχεδιάζουμε **κάθετες** και **παράλληλες** ευθείες.

Διαβήτης

- Για να σχεδιάζουμε **κύκλους** και **τόξα**.
- Για να μεταφέρουμε **ίσα τμήματα** χωρίς μέτρηση.

Μοιρογνωμόνιο

- Για να **μετράμε** και να **σχεδιάζουμε γωνίες** σε μοίρες.
- Το κέντρο του τοποθετείται πάντα στην κορυφή της γωνίας.



Το μοιρογνωμόνιο: εδώ «διαβάζουμε» μια γωνία 50° .



ΣΥΜΒΟΥΛΗ

Σχεδιάζε **πάντα** με **μολύβι** και με **καλά ξυσμένη μύτη**. Στα σχήματα του βιβλίου θα δεις «σημαδάκια»: **ίσες γραμμούλες** πάνω σε τμήματα σημαίνουν **ίσα τμήματα**, **ίδια τοξάκια** σε γωνίες σημαίνουν **ίσες γωνίες**, ένα **τετραγωνάκι** σε γωνία σημαίνει **ορθή γωνία** και **βελάκια** πάνω σε ευθείες σημαίνουν ότι είναι **παράλληλες**.

Περιεχόμενα

Πάτησε πάνω σε έναν τίτλο για να μεταφερθείς απευθείας στη σελίδα του (στην ηλεκτρονική μορφή).

1 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Βασικές γεωμετρικές έννοιες 8

1.1	Σημείο – Ευθύγραμμο τμήμα – Ευθεία – Ημιευθεία – Επίπεδο – Ημιεπίπεδο	9
1.2	Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα – Ευθύγραμμα σχήματα – Ίσα σχήματα	14
1.3	Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων – Απόσταση σημείων – Μέσο ευθύγραμμου τμήματος	18
1.4	Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων	22
1.5	Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών – Διχοτόμος γωνίας	26
1.6	Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες	30
1.7	Εφεξής και διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα γωνιών	33
1.8	Παραπληρωματικές και συμπληρωματικές γωνίες – Κατακορυφήν γωνίες	37
1.9	Θέσεις ευθειών στο επίπεδο	41
1.10	Απόσταση σημείου από ευθεία – Απόσταση παραλλήλων	45
1.11	Κύκλος και στοιχεία του κύκλου	48
1.12	Επίκεντρο γωνία – Σχέση επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου – Μέτρηση τόξου	52
1.13	Θέσεις ευθείας και κύκλου	55
★	Ανακεφαλαίωση – Επαναληπτικές ασκήσεις	58

2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Συμμετρία 60

2.1	Συμμετρία ως προς άξονα	61
2.2	Άξονας συμμετρίας	64
2.3	Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος	67
2.4	Συμμετρία ως προς σημείο	70
2.5	Κέντρο συμμετρίας	73
2.6	Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη ευθεία	76
★	Ανακεφαλαίωση – Επαναληπτικές ασκήσεις	80

3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Τρίγωνα – Παραλληλόγραμμα – Τραπεζία 82

3.1	Στοιχεία τριγώνου – Είδη τριγώνων	83
3.2	Άθροισμα γωνιών τριγώνου – Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου	88
3.3	Παραλληλόγραμμα – Ορθογώνιο – Ρόμβος – Τετράγωνο – Τραπεζίο – Ισοσκελές τραπέζιο ..	92
3.4	Ιδιότητες παραλληλογράμμου – ορθογώνιου – ρόμβου – τετραγώνου – τραπέζιου – ισοσκελούς τραπέζιου	96

★ Ανακεφαλαίωση – Επαναληπτικές ασκήσεις	101
--	-----

Λ ΛΥΣΕΙΣ · Κεφάλαιο 1: Βασικές γεωμετρικές έννοιες	103
--	-----

Λ ΛΥΣΕΙΣ · Κεφάλαιο 2: Συμμετρία	108
----------------------------------	-----

Λ ΛΥΣΕΙΣ · Κεφάλαιο 3: Τρίγωνα – Παραλληλόγραμμα – Τραπεζία	110
---	-----

1

Κεφάλαιο 1

Βασικές γεωμετρικές έννοιες

Κάθε σπίτι χτίζεται από τούβλα· κάθε γεωμετρικό σχήμα χτίζεται από **σημεία**, **ευθείες**, **γωνίες** και **κύκλους**. Σε αυτό το κεφάλαιο γνωρίζουμε τα «τούβλα» της Γεωμετρίας, μαθαίνουμε να τα **ονομάζουμε**, να τα **σχεδιάζουμε** με τα γεωμετρικά όργανα, να τα **μετράμε** και να βρίσκουμε τις **σχέσεις** τους. Είναι το αλφάβητο που θα χρειαστείς σε όλη τη Γεωμετρία!

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 1.1** Σημείο – Τμήμα – Ευθεία – Ημιευθεία – Επίπεδο
- 1.2** Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα και ευθύγραμμα σχήματα – Ίσα σχήματα
- 1.3** Μέτρηση και σύγκριση τμημάτων – Απόσταση – Μέσο
- 1.4** Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων
- 1.5** Μέτρηση και σύγκριση γωνιών – Διχοτόμος
- 1.6** Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες
- 1.7** Εφεξής και διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα γωνιών
- 1.8** Παραπληρωματικές – Συμπληρωματικές – Κατακορυφήν γωνίες
- 1.9** Θέσεις ευθειών στο επίπεδο
- 1.10** Απόσταση σημείου από ευθεία – Απόσταση παραλλήλων
- 1.11** Κύκλος και στοιχεία του κύκλου
- 1.12** Επίκεντρη γωνία – Μέτρηση τόξου
- 1.13** Θέσεις ευθείας και κύκλου
- ★ Ανακεφαλαίωση & επαναληπτικές ασκήσεις



Βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις και κουίζ
για όλο το κεφάλαιο, δωρεάν στο
mathgreece.com

L

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Μάθημα 1.1

Σημείο – Ευθύγραμμο τμήμα – Ευθεία –
Ημιευθεία – Επίπεδο – Ημιεπίπεδο

1

ΕΝΝΟΙΕΣ

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τις **πρωταρχικές έννοιες** της Γεωμετρίας: σημείο, ευθεία, επίπεδο
- ✓ τι είναι **ευθύγραμμο τμήμα**, **ημιευθεία** και **ημιεπίπεδο**
- ✓ πώς **ονομάζουμε** και πώς **συμβολίζουμε** κάθε έννοια
- ✓ πόσες ευθείες περνούν από ένα ή από δύο σημεία

1 Το σημείο

Η μύτη ενός καλά ξυσμένου μολυβιού πάνω στο χαρτί, ένα αστέρι στον νυχτερινό ουρανό, η κουκκίδα στο τέλος μιας πρότασης: όλα μάς δίνουν την εικόνα του **σημείου**.

Το σημείο **δεν έχει διαστάσεις** — ούτε μήκος, ούτε πλάτος, ούτε πάχος. Δείχνει μόνο μια **θέση**. Το σχεδιάζουμε με μια μικρή τελεία και το ονομάζουμε με ένα **κεφαλαίο γράμμα**: σημείο A , σημείο B , σημείο Γ .

Τρία σημεία: A , B , Γ 

ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ο Ευκλείδης, στο πρώτο βιβλίο των «Στοιχείων» (περ. 300 π.Χ.), ξεκινά με τον ορισμό: «**Σημείον ἔστιν, οὗ μέρος οὐθέν**», δηλαδή «σημείο είναι αυτό που δεν έχει μέρη». Το σημείο, η ευθεία και το επίπεδο λέγονται **πρωταρχικές έννοιες**: δεν ορίζονται με άλλες, πιο απλές έννοιες, αλλά τις κατανοούμε από την εμπειρία μας.

2 Το ευθύγραμμο τμήμα

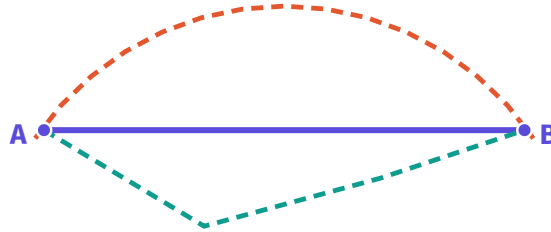
Αν τεντώσουμε ένα νήμα ανάμεσα σε δύο καρφιά A και B , παίρνουμε την εικόνα ενός **ευθύγραμμου τμήματος**. Με τον χάρακα το σχεδιάζουμε ενώνοντας τα δύο σημεία.

Το τμήμα συμβολίζεται AB (ή BA). Τα σημεία A και B λέγονται **άκρα** του τμήματος. Όλα τα υπόλοιπα σημεία του λέγονται **εσωτερικά** σημεία.

Το ευθύγραμμο τμήμα AB

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Από όλες τις γραμμές που ενώνουν δύο σημεία A και B , το **ευθύγραμμο τμήμα AB** είναι η πιο **σύντομη**. Γι' αυτό το μήκος του λέγεται **απόσταση** των σημείων A και B .

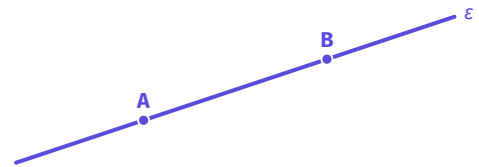


Από το A στο B : η ευθεία διαδρομή (μωβ) είναι πάντα συντομότερη από κάθε καμπύλη ή τεθλασμένη διαδρομή.

3 Η ευθεία

Αν προεκτείνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB **απεριόριστα** και προς τις δύο μεριές, παίρνουμε μια **ευθεία**. Η ευθεία **δεν έχει άκρα** και **δεν μπορεί να μετρηθεί**· στο χαρτί σχεδιάζουμε φυσικά μόνο ένα κομμάτι της.

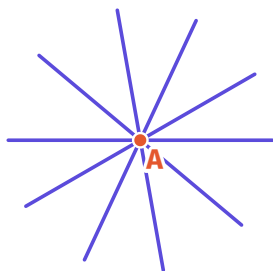
Μια ευθεία την ονομάζουμε με ένα **μικρό γράμμα**, π.χ. ε ή δ , ή με **δύο σημεία της**: ευθεία AB .



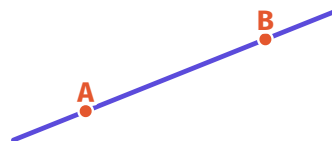
Η ευθεία ε (ή ευθεία AB)

ΔΥΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- Από **ένα** σημείο διέρχονται **άπειρες** ευθείες.
- Από **δύο** διαφορετικά σημεία διέρχεται **μία και μόνο μία** ευθεία. (Γι' αυτό μας αρκούν δύο σημεία για να ονομάσουμε μια ευθεία.)



Από ένα σημείο: άπειρες ευθείες



Από δύο σημεία: μόνο μία

ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

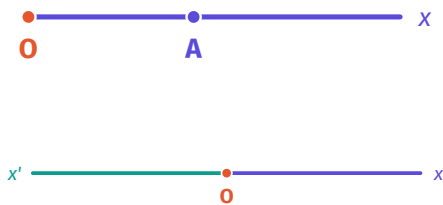
Σημεία που βρίσκονται **πάνω στην ίδια ευθεία** λέγονται **συνευθειακά**. Δύο σημεία είναι πάντα συνευθειακά· τρία σημεία όμως μπορεί να μην είναι (π.χ. οι τρεις κορυφές ενός τριγώνου).

4 Η ημιευθεία

Αν πάρουμε ένα σημείο O πάνω σε μια ευθεία, η ευθεία χωρίζεται σε **δύο κομμάτια**. Καθένα από αυτά, μαζί με το O , λέγεται **ημιευθεία** με **αρχή** το O .

Η ημιευθεία έχει **αρχή** αλλά **όχι τέλος**. Τη συμβολίζουμε Ox ή, αν A είναι ένα σημείο της, OA (πρώτα γράφεται πάντα η αρχή!).

Οι δύο ημιευθείες Ox και Ox' που σχηματίζονται έτσι λέγονται **αντικείμενες ημιευθείες**.



Η ημιευθεία Ox και δύο αντικείμενες ημιευθείες

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

Η ημιευθεία OA είναι ίδια με την ημιευθεία AO .

✓ ΣΩΣΤΟ

Οι OA και AO είναι **διαφορετικές** ημιευθείες: η πρώτη έχει αρχή το O , η δεύτερη το A .

Στο **ευθύγραμμο τμήμα** η σειρά των γραμμάτων δεν έχει σημασία ($AB = BA$). Στην **ημιευθεία** όμως το πρώτο γράμμα δείχνει πάντα την **αρχή** της.

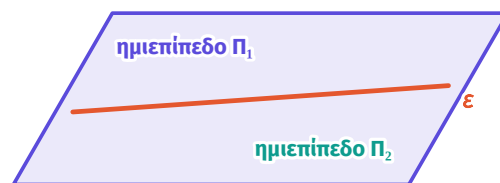
	Ευθύγραμμο τμήμα AB	Ημιευθεία Ax	Ευθεία ε
Αρχή / άκρα	δύο άκρα	μία αρχή	κανένα άκρο
Μετρίεται;	ναι (έχει μήκος)	όχι	όχι
Σχέδιο	$A \bullet \text{-----} \bullet B$	$A \bullet \text{-----} \rightarrow$	$\leftarrow \text{-----} \rightarrow$

5 Επίπεδο και ημιεπίπεδο

Η επιφάνεια ενός ήρεμου νερού, ενός τραπεζιού ή του πίνακα της τάξης μάς δίνουν την εικόνα του **επιπέδου**.

Το επίπεδο είναι **επίπεδη** επιφάνεια που εκτείνεται **απεριόριστα** προς κάθε κατεύθυνση. Το ονομάζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα, π.χ. επίπεδο Π , και το σχεδιάζουμε σαν ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο.

Κάθε ευθεία ε ενός επιπέδου το χωρίζει σε **δύο ημιεπίπεδα**. Η ευθεία ε λέγεται **ακμή** των ημιεπιπέδων.



Η ευθεία ε χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα

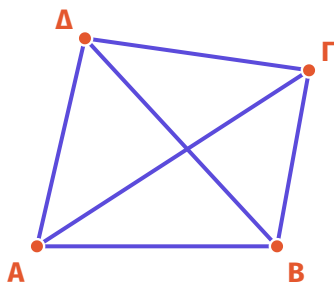
**ΠΡΟΣΟΧΗ!**

Δύο σημεία που βρίσκονται σε **διαφορετικά** ημιεπίπεδα της ευθείας ε ενώνονται με τμήμα που **τέμνει** την ε . Δύο σημεία στο **ίδιο** ημιεπίπεδο ενώνονται με τμήμα που **δεν** την τέμνει. Αυτό είναι ένας γρήγορος τρόπος να ελέγχεις σε ποιο ημιεπίπεδο είναι ένα σημείο.

6 Πόσα τμήματα; Πόσες ευθείες;

**Παράδειγμα 1**

Δίνονται τέσσερα σημεία A, B, Γ, Δ , από τα οποία ανά τρία **δεν** είναι συνευθειακά. Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν;

**ΛΥΣΗ**

Κάθε τμήμα ορίζεται από ένα **ζευγάρι** σημείων. Γράφουμε συστηματικά τα ζευγάρια: $AB, A\Gamma, A\Delta, B\Gamma, B\Delta, \Gamma\Delta$. Άρα 6 τμήματα.

Γενικός κανόνας: από κάθε σημείο ξεκινούν 3 τμήματα· $4 \cdot 3 = 12$, αλλά έτσι μετράμε κάθε τμήμα **δύο** φορές (π.χ. AB και BA). Άρα $12 : 2 = 6$.

**Παράδειγμα 2**

Τρία σημεία A, B, Γ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία, με το B ανάμεσα στα A και Γ . Πόσα τμήματα και πόσες ημιευθείες με αρχή ένα από αυτά τα σημεία (και πάνω στην ευθεία) σχηματίζονται;

ΛΥΣΗ

Τμήματα: $AB, B\Gamma, A\Gamma$, δηλαδή 3.

Ημιευθείες: κάθε σημείο είναι αρχή **δύο** αντικείμενων ημιευθειών, άρα $3 \cdot 2 = 6$ ημιευθείες. (Π.χ. οι BA και $B\Gamma$ είναι αντικείμενες.)



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο-εισαγωγή στη Γεωμετρία με κινούμενα σχήματα για σημεία, ευθείες, ημιευθείες και επίπεδα, καθώς και κουίζ αναγνώρισης.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 1.1

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να σχεδιάσεις: **α)** ένα ευθύγραμμο τμήμα KL , **β)** μια ευθεία ε που περνάει από ένα σημείο M , **γ)** μια ημιευθεία Ox και την αντικείμενή της.
- 2 ●●● Σωστό ή Λάθος; **α)** Μια ευθεία έχει μήκος. **β)** Από δύο σημεία διέρχεται μόνο μία ευθεία. **γ)** Η ημιευθεία έχει δύο άκρα. **δ)** Τα σημεία μιας ευθείας είναι συνευθειακά. **ε)** Τρία σημεία είναι πάντα συνευθειακά.
- 3 ●●● Σε μια ευθεία παίρνουμε με τη σειρά τα σημεία A, B, Γ, Δ . Να γράψεις όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται. Πόσα είναι;
- 4 ●●● Με τα σημεία του προηγούμενου σχήματος, να γράψεις δύο αντικείμενες ημιευθείες με αρχή το B . Είναι οι ημιευθείες $B\Gamma$ και $B\Delta$ ίδιες;
- 5 ●●● Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν 5 σημεία, από τα οποία ανά τρία δεν είναι συνευθειακά; Και 10 σημεία;
- 6 ●●● Δίνονται τρία μη συνευθειακά σημεία. Πόσες ευθείες ορίζουν; Αν προσθέσουμε ένα τέταρτο σημείο ώστε ανά τρία να μην είναι συνευθειακά, πόσες ευθείες ορίζουν τα τέσσερα;
- 7 ●●● Μια ευθεία ε χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα. Τα σημεία A και B είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο, ενώ το Γ στο άλλο. Ποια από τα τμήματα $AB, A\Gamma, B\Gamma$ τέμνουν την ε ;
- 8 ●●● Ένα παιδί λέει: «Η ακτίνα του ήλιου είναι ευθύγραμμο τμήμα». Ένα άλλο: «Είναι ημιευθεία». Ποιο έχει δίκιο, αν φανταστούμε ότι το φως ξεκινά από τον ήλιο και ταξιδεύει χωρίς τέλος;

1

ΕΝΝΟΙΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Μάθημα 1.2

Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα –
Ευθύγραμμα σχήματα – Ίσα σχήματα

1

ΕΝΝΟΙΕΣ

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

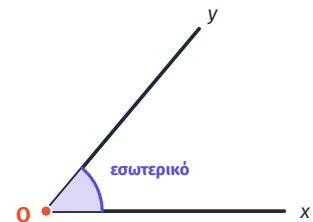
- ✓ τι είναι **γωνία**, ποια είναι η **κορυφή** και ποιες οι **πλευρές** της
- ✓ την **κυρτή** και τη **μη κυρτή** γωνία, την **ευθεία** και την **πλήρη** γωνία
- ✓ τα είδη των **γραμμών** και τα **ευθύγραμμα σχήματα** (πολύγωνα)
- ✓ πότε δύο σχήματα είναι **ίσα**

1 Η γωνία

Δύο ημιευθείες Ox και Oy με **κοινή αρχή** O χωρίζουν το επίπεδο σε δύο μέρη. Το σχήμα που αποτελείται από τις δύο ημιευθείες και το ένα από τα δύο μέρη λέγεται **γωνία**.

- Το σημείο O λέγεται **κορυφή** της γωνίας.
- Οι ημιευθείες Ox , Oy λέγονται **πλευρές** της γωνίας.
- Τα σημεία του επιπέδου που «κλείνει» η γωνία λέγονται **εσωτερικά** σημεία, τα υπόλοιπα **εξωτερικά**.

Τη γωνία τη συμβολίζουμε $x\hat{O}y$ ή, αν A, B είναι σημεία των πλευρών, $A\hat{O}B$, ή απλώς $\hat{O}$ (αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης). Η **κορυφή γράφεται πάντα στη μέση**.

Η γωνία $x\hat{O}y$

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

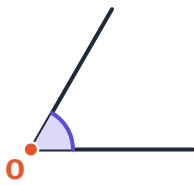
Η γωνία του σχήματος γράφεται $\hat{AOB}$ ή $\hat{OAB}$.

✓ ΣΩΣΤΟ

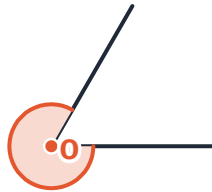
Η γωνία γράφεται $A\hat{O}B$ ή $B\hat{O}A$.

Το «καπελάκι» μπαίνει πάντα στο γράμμα της **κορυφής**, που γράφεται **στη μέση**. Τα άλλα δύο γράμματα είναι σημεία των πλευρών.

2 Κυρτή και μη κυρτή γωνία



κυρτή γωνία



μη κυρτή γωνία



ευθεία γωνία



πλήρης γωνία

ΕΙΔΙΚΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

- Δύο ημιευθείες με κοινή αρχή σχηματίζουν **δύο** γωνίες: τη **μικρότερη** τη λέμε **κυρτή** και τη **μεγαλύτερη μη κυρτή**. Όταν λέμε απλώς «γωνία», εννοούμε την **κυρτή**.
- Αν οι πλευρές είναι **αντικείμενες ημιευθείες**, η γωνία λέγεται **ευθεία γωνία**.
- Αν οι πλευρές **ταυτίζονται**, έχουμε τη **μηδενική γωνία** ή την **πλήρη γωνία** (όλο το επίπεδο).

3 Γραμμές

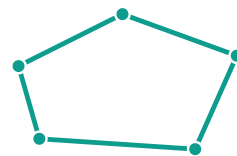
Με το μολύβι μας, χωρίς να το σηκώσουμε από το χαρτί, σχεδιάζουμε **γραμμές**. Ανάλογα με τη μορφή τους, τις χωρίζουμε σε:



ανοιχτή τεθλασμένη



καμπύλη γραμμή



κλειστή τεθλασμένη (πολύγωνο)

ΕΙΔΗ ΓΡΑΜΜΩΝ

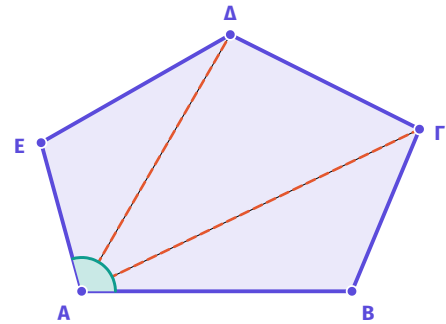
- Τεθλασμένη** (ή πολυγωνική) λέγεται η γραμμή που αποτελείται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα που **δεν** βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Τα τμήματα λέγονται **πλευρές** της.
- Καμπύλη** λέγεται η γραμμή που δεν έχει κανένα ευθύγραμμο κομμάτι.
- Μεικτή** λέγεται η γραμμή που αποτελείται από ευθύγραμμο και καμπύλα κομμάτια.
- Μια γραμμή λέγεται **κλειστή** όταν η αρχή της συμπίπτει με το τέλος της, αλλιώς **ανοιχτή**.

4 Επίπεδα και ευθύγραμμα σχήματα

Κάθε σχήμα του οποίου όλα τα σημεία βρίσκονται σε ένα επίπεδο λέγεται **επίπεδο σχήμα** (π.χ. ένας κύκλος, ένα τρίγωνο, ένα αστέρι στο χαρτί). Ένα σχήμα που περικλείεται από μια **κλειστή τεθλασμένη γραμμή** λέγεται **ευθύγραμμο σχήμα** ή **πολύγωνο**.

Σε ένα πολύγωνο, π.χ. στο πεντάγωνο $ABΓΔΕ$:

- τα σημεία $A, B, Γ, Δ, Ε$ είναι οι **κορυφές**,
- τα τμήματα $AB, BΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ$ είναι οι **πλευρές**,
- οι γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \dots$ είναι οι **γωνίες** του πολυγώνου,
- τα τμήματα που ενώνουν **μη διαδοχικές** κορυφές (π.χ. $AΓ, AΔ$) λέγονται **διαγώνιοι**,
- το άθροισμα των μηκών όλων των πλευρών λέγεται **περίμετρος**.



Το πεντάγωνο $ABΓΔΕ$ και οι διαγώνιοι από την κορυφή A

Τα πολύγωνα ονομάζονται από το πλήθος των πλευρών τους: **τρίγωνο** (3), **τετράπλευρο** (4), **πεντάγωνο** (5), **εξάγωνο** (6), ... Ένα πολύγωνο έχει **τόσες κορυφές και τόσες γωνίες** όσες **πλευρές**.



Παράδειγμα 1

Πόσες διαγώνιους έχει: **α)** ένα τετράπλευρο, **β)** ένα πεντάγωνο, **γ)** ένα εξάγωνο;

ΛΥΣΗ

Από κάθε κορυφή ξεκινούν διαγώνιοι προς όλες τις άλλες κορυφές **εκτός** από τον εαυτό της και τις **δύο γειτονικές** της. Σε n -γωνο, από κάθε κορυφή: $n - 3$ διαγώνιοι. Συνολικά $n \cdot (n - 3)$, αλλά έτσι κάθε διαγώνιος μετρίεται δύο φορές:

$$\alpha) \frac{4 \cdot 1}{2} = 2, \beta) \frac{5 \cdot 2}{2} = 5, \gamma) \frac{6 \cdot 3}{2} = 9.$$



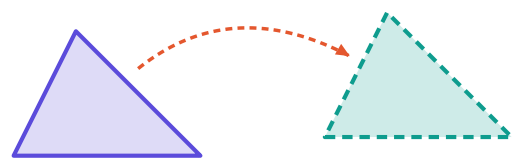
ΠΡΟΣΟΧΗ!

Το **τρίγωνο** είναι το μόνο πολύγωνο **χωρίς διαγώνιους**: κάθε κορυφή του είναι γειτονική με τις άλλες δύο.

5 Ίσα σχήματα

Δύο σχήματα λέγονται **ίσα** όταν, αν τα «αποτυπώσουμε» σε διαφανές χαρτί και μετακινήσουμε το ένα πάνω στο άλλο, **συμπίπτουν** ακριβώς (ταυτίζονται).

Μπορούμε να **μετατοπίσουμε**, να **στρέψουμε** ή και να **αναποδογυρίσουμε** το διαφανές χαρτί. Το σχήμα και η **θέση** δεν έχουν σημασία, μόνο το **μέγεθος** και η **μορφή**.



Δύο ίσα τρίγωνα: το ένα «ταιριάζει» πάνω στο άλλο

**ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...**

Η Γεωμετρία των ίσων σχημάτων κρύβεται στις **πλακοστρώσεις**: τα πλακάκια του μπάνιου, τα κελιά της κηρήθρας, τα ψηφιδωτά. Ο Ολλανδός καλλιτέχνης **Έσσερ** έφτιαξε υπέροχα έργα όπου ίσα σχήματα (πουλιά, ψάρια, σαύρες) γεμίζουν το επίπεδο χωρίς κενά!



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για τις γωνίες και τα πολύγωνα, καθώς και διαδραστικό παιχνίδι «βρες τις διαγώνιους».

★ **Άλυτες ασκήσεις**

Μάθημα 1.2

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να σχεδιάσεις μια γωνία $\hat{K}\hat{L}\hat{M}$ και να γράψεις την κορυφή και τις πλευρές της. Να σημειώσεις ένα εσωτερικό σημείο Σ και ένα εξωτερικό σημείο T .
 - 2 ●●● Στο σχήμα, από το O ξεκινούν οι ημιευθείες OA , OB , OG . Να γράψεις όλες τις (κυρτές) γωνίες που σχηματίζονται.
-
- 3 ●●● Να αντιστοιχίσεις: **α)** τρίγωνο, **β)** εξάγωνο, **γ)** οκτάγωνο, με τον αριθμό των κορυφών τους και των διαγωνίων τους.
 - 4 ●●● Ένα πεντάγωνο έχει πλευρές 3 cm, 4,5 cm, 2,8 cm, 5 cm και 3,7 cm. Να βρεις την περίμετρό του.
 - 5 ●●● Ένα κανονικό εξάγωνο (όλες οι πλευρές ίσες) έχει περίμετρο 27 cm. Πόση είναι η πλευρά του;
 - 6 ●●● Πόσες ημιευθείες με κοινή αρχή χρειάζονται τουλάχιστον για να σχηματιστούν 6 κυρτές γωνίες; (Υπόδειξη: σκέψου τα ζευγάρια ημιευθειών.)
 - 7 ●●● Σωστό ή Λάθος; **α)** Η κορυφή μιας γωνίας γράφεται πρώτη. **β)** Ο κύκλος είναι ευθύγραμμο σχήμα. **γ)** Ένα πολύγωνο με 7 πλευρές έχει 7 γωνίες. **δ)** Δύο ίσα σχήματα έχουν ίση περίμετρο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Μάθημα 1.3

Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων – Απόσταση σημείων – Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

1

ΕΝΝΟΙΕΣ

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

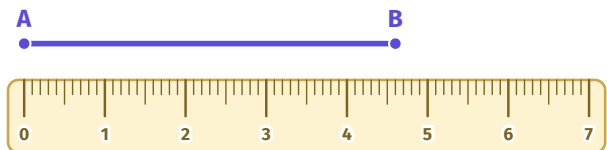
- ✓ να **μετράς** ένα ευθύγραμμο τμήμα και να εκφράζεις το **μήκος** του σε διάφορες μονάδες
- ✓ να **συγκρίνεις** δύο τμήματα (με χάρακα ή με διαβήτη)
- ✓ τι είναι η **απόσταση** δύο σημείων
- ✓ τι είναι το **μέσο** ενός τμήματος και πώς το βρίσκουμε

1 Μέτρηση ευθύγραμμου τμήματος

Μετρώ ένα μέγεθος σημαίνει ότι το **συγκρίνω** με ένα άλλο ομοειδές μέγεθος, που το παίρνω ως **μονάδα**, και βρίσκω **πόσες φορές** χωράει η μονάδα σε αυτό.

Για να μετρήσουμε ένα τμήμα AB με τον χάρακα, τοποθετούμε το 0 του χάρακα **ακριβώς** στο άκρο A και «διαβάζουμε» την ένδειξη στο άκρο B . Στο σχήμα: $AB = 4,6$ cm.

Ο αριθμός αυτός λέγεται **μήκος** του τμήματος. Το μήκος εξαρτάται από τη **μονάδα** που χρησιμοποιούμε: $4,6$ cm = 46 mm = 0,046 m.

Μέτρηση του τμήματος AB με τον χάρακα

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

Τοποθετώ την αρχή του τμήματος στη **χαραγή 1** του χάρακα και διαβάζω 5,6 cm.

✓ ΣΩΣΤΟ

Είτε ξεκινώ από το 0 (και διαβάζω 4,6 cm) είτε **αφαιρώ**: $5,6 - 1 = 4,6$ cm.

Συχνά οι χάρακες έχουν ένα «κενό» πριν από το μηδέν ή φθαρμένη άκρη. Αν δεν ξεκινήσεις από το 0, πρέπει να αφαιρέσεις την ένδειξη από την οποία ξεκίνησες.

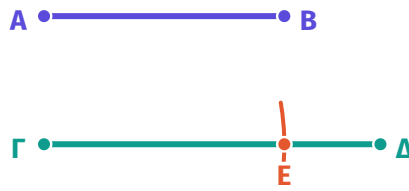
2 Σύγκριση και ισότητα τμημάτων

ΣΥΓΚΡΙΣΗ

Για να συγκρίνουμε δύο τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ μπορούμε:

- να τα **μετρήσουμε** με τον χάρακα και να συγκρίνουμε τα μήκη τους, ή
- να **μεταφέρουμε** το ένα πάνω στο άλλο με τον **διαβήτη**: ανοίγουμε τον διαβήτη στο άνοιγμα AB , τοποθετούμε τη μύτη στο Γ και χαράζουμε ένα τοξάκι πάνω στην ημιευθεία $\Gamma\Delta$.

Αν το τοξάκι πέσει **ακριβώς** στο Δ , τα τμήματα είναι **ίσα** και γράφουμε $AB = \Gamma\Delta$. Αν πέσει **πριν** το Δ , τότε $AB < \Gamma\Delta$ · αν **μετά**, $AB > \Gamma\Delta$.



Με τον διαβήτη μεταφέρουμε το AB πάνω στο $\Gamma\Delta$: $GE = AB$, άρα $AB < \Gamma\Delta$.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Ίσα τμήματα σημειώνονται στα σχήματα με **ίδιο αριθμό γραμμούλων**. Στο σχήμα του Μαθήματος 1.2 και σε όλο το βιβλίο θα δεις αυτή τη σύμβαση: μία γραμμούλα σε δύο τμήματα σημαίνει ότι είναι ίσα, δύο γραμμούλες σε δύο άλλα σημαίνει ότι κι αυτά είναι ίσα μεταξύ τους.

3 Απόσταση δύο σημείων

ΟΡΙΣΜΟΣ

Απόσταση δύο σημείων A και B λέγεται το **μήκος** του ευθύγραμμου τμήματος AB . Είναι το μήκος της **συντομότερης** διαδρομής από το A στο B .



Παράδειγμα 1

Ένα χωριό A και ένα χωριό B απέχουν 7 km σε ευθεία γραμμή. Ο δρόμος που τα ενώνει όμως έχει μήκος 9,5 km. Ποια είναι η απόσταση των χωριών;

ΛΥΣΗ

Η απόσταση είναι το μήκος του **ευθύγραμμου τμήματος** AB , δηλαδή 7 km. Τα 9,5 km είναι το μήκος του **δρόμου** (μιας γραμμής που ενώνει τα χωριά), όχι η απόσταση.

4 Το μέσο ευθύγραμμου τμήματος

Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος AB λέγεται το σημείο M του τμήματος που το χωρίζει σε **δύο ίσα τμήματα**:

$$AM = MB = \frac{AB}{2}$$

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει **ένα και μόνο ένα** μέσο.



Το M είναι το μέσο του AB

ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΟ ΜΕΣΟ

- 1 Με τον χάρακα:** μετράμε το AB , βρίσκουμε το μισό του και το σημειώνουμε από το A . Π.χ. αν $AB = 7,4$ cm, παίρνουμε $AM = 3,7$ cm.
- 2 Με τον διαβήτη (χωρίς μέτρηση):** θα δούμε την κατασκευή στο Μάθημα 2.3, με τη μεσοκάθετο.

× ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

× ΛΑΘΟΣ

«Το M είναι μέσο του AB , αφού $AM = MB$ », για σημείο M **εκτός** του τμήματος.

✓ ΣΩΣΤΟ

Για να είναι μέσο, το M πρέπει να **ανήκει** στο AB και $AM = MB$.

Υπάρχουν άπειρα σημεία που ισαπέχουν από τα A και B (είναι τα σημεία της μεσοκάθετου, Μάθημα 2.3). Ένα μόνο από αυτά βρίσκεται **πάνω** στο τμήμα: το μέσο.



Παράδειγμα 2

Σε μια ευθεία παίρνουμε τα σημεία A, B, Γ με αυτή τη σειρά, ώστε $AB = 8$ cm και $B\Gamma = 4$ cm. Αν M είναι το μέσο του AB και N το μέσο του $B\Gamma$, να βρεις το μήκος του MN .



ΛΥΣΗ

$MB = \frac{AB}{2} = 4$ cm και $BN = \frac{B\Gamma}{2} = 2$ cm. Αφού το B βρίσκεται ανάμεσα στα M και N :

$MN = MB + BN = 4 + 2 = 6$ cm. Παρατήρησε ότι $MN = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{12}{2} = 6$ cm!



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για τη σωστή χρήση του χάρακα και του διαβήτη και ασκήσεις με μέσα τμημάτων.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 1.3

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να σχεδιάσεις τμήματα με μήκη: **α)** 5,3 cm, **β)** 48 mm, **γ)** 0,07 m. Ποιο είναι το μεγαλύτερο;
- 2 ●●● Να μετατρέψεις: **α)** 3,25 m σε cm, **β)** 85 mm σε cm, **γ)** 1.250 m σε km.
- 3 ●●● Το M είναι μέσο του AB και $AM = 4,7$ cm. Πόσο είναι το AB ; Αν $AB = 13$ cm, πόσο είναι το MB ;
- 4 ●●● Σε μια ευθεία παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ με $A\Gamma = 10$ cm και $AB = 6$ cm. Αν M είναι το μέσο του $A\Gamma$, να βρεις το BM .
- 5 ●●● Τα σημεία A, B, Γ, Δ είναι διαδοχικά πάνω σε ευθεία με $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = 3$ cm. Ποιο σημείο είναι το μέσο του $A\Delta$; Ποιο είναι το μέσο του $A\Gamma$;
- 6 ●●● Ένας δρόμος από το σπίτι στο σχολείο έχει μήκος 850 m, ενώ σε ευθεία γραμμή απέχουν 620 m. Ποια είναι η απόσταση σπιτιού–σχολείου; Γιατί δεν είναι 850 m;
- 7 ●●● Σε μια ευθεία παίρνουμε τα σημεία A, B, Γ με αυτή τη σειρά. Αν M, N είναι τα μέσα των AB και $B\Gamma$ και $MN = 7$ cm, να βρεις το $A\Gamma$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Μάθημα 1.4

Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων

1

ΕΝΝΟΙΕΣ

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

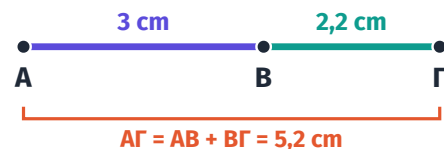
- ✓ να **προσθέτεις** και να **αφαιρείς** ευθύγραμμα τμήματα (με σχεδίαση και με μήκη)
- ✓ να πολλαπλασιάζεις τμήμα με **αριθμό**
- ✓ να λύνεις προβλήματα με **σημεία πάνω σε ευθεία**

1 Πρόσθεση τμημάτων

Δύο τμήματα λέγονται **διαδοχικά** όταν έχουν ένα **κοινό άκρο** και κανένα άλλο κοινό σημείο. Αν τα διαδοχικά τμήματα AB και $BΓ$ βρίσκονται **πάνω στην ίδια ευθεία**, τότε το τμήμα $AΓ$ λέγεται **άθροισμά** τους:

$$AΓ = AB + BΓ$$

Το **μήκος** του αθροίσματος είναι το **άθροισμα των μηκών**: $3 + 2,2 = 5,2$ cm.



Πρόσθεση διαδοχικών συνευθειακών τμημάτων

ΠΩΣ ΠΡΟΣΘΕΤΟΥΜΕ ΔΥΟ ΤΜΗΜΑΤΑ Α ΚΑΙ Β ΜΕ ΣΧΕΔΙΑΣΗ

- 1 Σχεδιάζουμε μια ημιευθεία Ax .
- 2 Με τον διαβήτη μεταφέρουμε πάνω της, από το A , τμήμα $AB = \alpha$.
- 3 Από το B , συνεχίζοντας προς την ίδια κατεύθυνση, μεταφέρουμε τμήμα $BΓ = \beta$.
- 4 Το τμήμα $AΓ$ είναι το άθροισμα $\alpha + \beta$.

2 Αφαίρεση τμημάτων

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Αν $AB > \Gamma\Delta$, η **διαφορά** $AB - \Gamma\Delta$ βρίσκεται αν μεταφέρουμε το $\Gamma\Delta$ πάνω στο AB από το άκρο A , έστω $AE = \Gamma\Delta$. Τότε το τμήμα που περισσεύει, το EB , είναι η διαφορά:

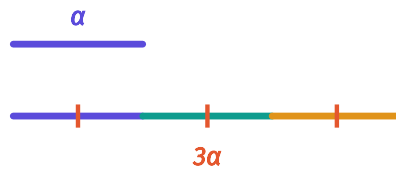
$$EB = AB - AE = AB - \Gamma\Delta$$



Η διαφορά δύο τμημάτων

3 Γινόμενο τμήματος με αριθμό

Αν προσθέσουμε το τμήμα α τρεις φορές, παίρνουμε το τμήμα 3α , που είναι **τριπλάσιο** του α . Γενικά, το **μήκος** του $\nu \cdot \alpha$ είναι ν φορές το μήκος του α . Με τον ίδιο τρόπο μιλάμε για το **μισό** $\frac{\alpha}{2}$, το **τρίτο** $\frac{\alpha}{3}$ κ.λπ. ενός τμήματος.



Το τμήμα 3α είναι τριπλάσιο του α

4 Προβλήματα με σημεία πάνω σε ευθεία



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Στα προβλήματα αυτά **κάνε πάντα σχήμα**, τοποθετώντας τα σημεία με τη **σειρά** που δίνει η εκφώνηση. Αν η σειρά **δεν** δίνεται, μπορεί να υπάρχουν **περισσότερες από μία** απαντήσεις!



Παράδειγμα 1

Σε μια ευθεία παίρνουμε τα σημεία A, B, Γ, Δ με αυτή τη σειρά, ώστε $AB = 2,5 \text{ cm}$, $B\Gamma = 3 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 1,5 \text{ cm}$. Να βρεις τα μήκη $A\Gamma$, $B\Delta$ και $A\Delta$.

ΛΥΣΗ

$A\Gamma = AB + B\Gamma = 2,5 + 3 = 5,5 \text{ cm}$. $B\Delta = B\Gamma + \Gamma\Delta = 3 + 1,5 = 4,5 \text{ cm}$. $A\Delta = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta = 2,5 + 3 + 1,5 = 7 \text{ cm}$.



Παράδειγμα 2

Σε μια ευθεία βρίσκονται τα σημεία A, B, Γ , με $AB = 5 \text{ cm}$ και $B\Gamma = 3 \text{ cm}$. Πόσο μπορεί να είναι το $A\Gamma$;

1η περίπτωση: Γ μετά το B 2η περίπτωση: Γ ανάμεσα στα A, B

ΛΥΣΗ

Δεν μας λένε τη **σειρά** των σημείων, άρα εξετάζουμε περιπτώσεις:

1η περίπτωση: το B είναι ανάμεσα στα A, Γ : $A\Gamma = AB + B\Gamma = 5 + 3 = 8 \text{ cm}$.

2η περίπτωση: το Γ είναι ανάμεσα στα A, B : $A\Gamma = AB - B\Gamma = 5 - 3 = 2 \text{ cm}$. (Το A δεν μπορεί να είναι ανάμεσα στα B, Γ , αφού $AB > B\Gamma$.) Άρα $A\Gamma = 8 \text{ cm}$ ή $A\Gamma = 2 \text{ cm}$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

Βρίσκω μόνο $A\Gamma = 8 \text{ cm}$.

✓ ΣΩΣΤΟ

$A\Gamma = 8 \text{ cm}$ ή $A\Gamma = 2 \text{ cm}$.

Όταν η εκφώνηση **δεν** ορίζει τη σειρά των σημείων, πρέπει να εξετάσεις **όλες** τις δυνατές θέσεις. Είναι από τα αγαπημένα «κόλπα» των διαγωνισμάτων!



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για πρόσθεση και αφαίρεση τμημάτων και πολλές ασκήσεις «με περιπτώσεις».



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 1.4

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- Να σχεδιάσεις τμήματα $\alpha = 3 \text{ cm}$ και $\beta = 2 \text{ cm}$ και μετά, με διαβήτη, τα τμήματα $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ και $2\alpha + \beta$. Ποια είναι τα μήκη τους;
- Σε μια ευθεία παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία K, Λ, M με $K\Lambda = 4,2 \text{ cm}$ και $KM = 7 \text{ cm}$. Να βρεις το ΛM .
- Τα σημεία A, B, Γ, Δ είναι διαδοχικά σε ευθεία, με $A\Delta = 12 \text{ cm}$, $AB = 3 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 4 \text{ cm}$. Να βρεις τα $B\Gamma$, $A\Gamma$, $B\Delta$.
- Σε μια ευθεία βρίσκονται τα σημεία A, B, Γ με $AB = 6 \text{ cm}$ και $A\Gamma = 2 \text{ cm}$. Να βρεις όλες τις δυνατές τιμές του $B\Gamma$.

- 5 ●●● Ένα τμήμα $AB = 15$ cm χωρίζεται από δύο σημεία Γ, Δ σε τρία τμήματα $A\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta B$ τέτοια ώστε $\Gamma\Delta = 2 \cdot A\Gamma$ και $\Delta B = 3 \cdot A\Gamma$. Να βρεις τα μήκη τους.
- 6 ●●● Ένα σύρμα μήκους 1,2 m κόβεται σε 5 ίσα κομμάτια. Πόσο είναι κάθε κομμάτι σε cm; Αν ενώσουμε τρία από αυτά στη σειρά, τι μήκος παίρνουμε;
- 7 ●●● Σε μια ευθεία παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ με $AB = 10$ cm. Αν M είναι το μέσο του $A\Gamma$ και $MB = 2$ cm, να βρεις το $B\Gamma$ (δύο περιπτώσεις για τη θέση του M).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Μάθημα 1.5

Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών –
Διχοτόμος γωνίας

1

ΕΝΝΟΙΕΣ

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ να **μετράς** και να **σχεδιάζεις** γωνίες με το **μοιρογνωμόνιο**
- ✓ τη μονάδα μέτρησης γωνιών, τη **μοίρα**, και τις υποδιαιρέσεις της
- ✓ πότε δύο γωνίες είναι **ίσες** και πώς τις συγκρίνουμε
- ✓ τι είναι η **διχοτόμος** μιας γωνίας

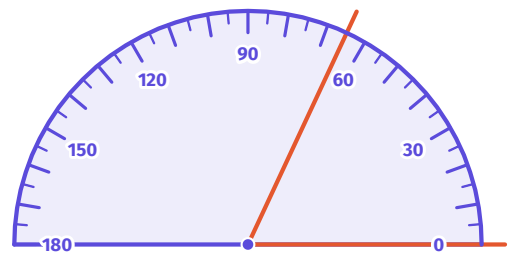
1 Η μοίρα και το μοιρογνωμόνιο

Αν χωρίσουμε μια **πλήρη** γωνία (1 στροφή) σε 360 ίσες γωνίες, καθεμία από αυτές λέγεται **μοίρα** και συμβολίζεται 1° . Άρα:

- πλήρης γωνία = 360° ,
- ευθεία γωνία (μισή στροφή) = 180° .

Για μεγαλύτερη ακρίβεια, η μοίρα χωρίζεται σε 60 **πρώτα λεπτά** ($1^\circ = 60'$) και το λεπτό σε 60 **δεύτερα λεπτά** ($1' = 60''$).

Τις γωνίες τις μετράμε με το **μοιρογνωμόνιο**, ένα ημικύκλιο χωρισμένο σε 180 μοίρες.



Το μοιρογνωμόνιο δείχνει γωνία 65°

ΠΩΣ ΜΕΤΡΑΜΕ ΜΙΑ ΓΩΝΙΑ ΜΕ ΤΟ ΜΟΙΡΟΓΝΩΜΟΝΙΟ

- 1 Τοποθετούμε το **κέντρο** του μοιρογνωμονίου **ακριβώς πάνω στην κορυφή** της γωνίας.
- 2 Ευθυγραμμίζουμε τη **γραμμή του 0°** με τη μία πλευρά της γωνίας.
- 3 Διαβάζουμε την ένδειξη εκεί που περνάει η **άλλη πλευρά**, χρησιμοποιώντας την κλίμακα που **ξεκινά από το 0** στην πρώτη πλευρά.
- 4 Αν οι πλευρές είναι μικρές, τις **προεκτείνουμε** με τον χάρακα.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

Η γωνία των 65° «διαβάζεται» 115° .

✓ ΣΩΣΤΟ

Διαβάζουμε από την κλίμακα που έχει το 0 πάνω στην πρώτη πλευρά: 65° .

Τα μοιρογνωμόνια έχουν **δύο** κλίμακες (μία εσωτερική και μία εξωτερική) που «τρέχουν» ανάποδα. Ένας γρήγορος έλεγχος: αν η γωνία φαίνεται **μυτερή** (μικρότερη από ορθή), η απάντηση πρέπει να είναι **κάτω** από 90° .

ΠΩΣ ΣΧΕΔΙΑΖΟΥΜΕ ΓΩΝΙΑ ΔΟΣΜΕΝΟΥ ΜΕΤΡΟΥ (Π.Χ. 130°)

- 1 Σχεδιάζουμε μια ημιευθεία Ox .
- 2 Τοποθετούμε το κέντρο του μοιρογνωμονίου στο O και το 0° πάνω στην Ox .
- 3 Σημειώνουμε μια τελεία A στη χαραγή των 130° (της σωστής κλίμακας).
- 4 Φέρνουμε την ημιευθεία OA . Η γωνία $x\hat{O}A$ είναι 130° .



Παράδειγμα 1

Να μετατρέψεις: **α)** 2° σε πρώτα λεπτά, **β)** $150'$ σε μοίρες και λεπτά, **γ)** $35,5^\circ$ σε μοίρες και λεπτά.

ΛΥΣΗ

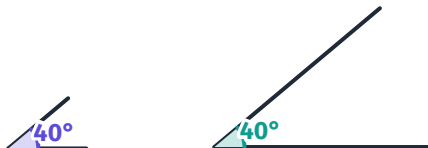
α) $2 \cdot 60 = 120'$. **β)** $150' = 2 \cdot 60' + 30' = 2^\circ 30'$. **γ)** $0,5^\circ = 0,5 \cdot 60' = 30'$, άρα $35^\circ 30'$.

2 Σύγκριση και ισότητα γωνιών

ΙΣΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

Δύο γωνίες είναι **ίσες** όταν, αν τοποθετήσουμε τη μία πάνω στην άλλη (κορυφή πάνω σε κορυφή και πλευρά πάνω σε πλευρά), ταυτίζονται. Ισοδύναμα: όταν έχουν το **ίδιο μέτρο** σε μοίρες.

Το μέτρο μιας γωνίας δεν εξαρτάται από το μήκος των πλευρών της, που άλλωστε είναι ημιευθείες!



μικρές πλευρές

μεγάλες πλευρές

Οι δύο γωνίες είναι ίσες (40°), παρόλο που οι πλευρές τους φαίνονται διαφορετικές.

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

«Η δεύτερη γωνία είναι μεγαλύτερη, γιατί έχει μεγαλύτερες πλευρές.»

✓ ΣΩΣΤΟ

Οι δύο γωνίες είναι ίσες: έχουν το ίδιο **άνοιγμα**.

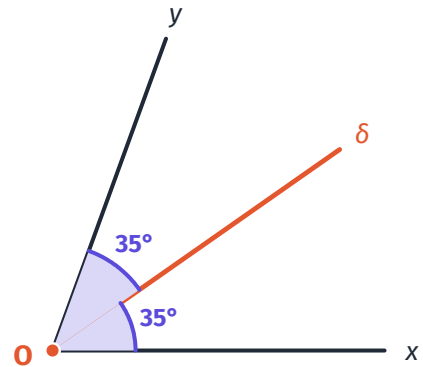
Το μέγεθος μιας γωνίας είναι το **άνοιγμα** ανάμεσα στις πλευρές της, όχι το μήκος των γραμμών που σχεδιάσαμε.

3 Διχοτόμος γωνίας

Διχοτόμος μιας γωνίας $x\hat{O}y$ λέγεται η ημιευθεία $O\delta$ που ξεκινά από την κορυφή και **χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες**:

$$x\hat{O}\delta = \delta\hat{O}y = \frac{x\hat{O}y}{2}$$

Κάθε γωνία έχει **μία μόνο** διχοτόμο. Για να τη σχεδιάσουμε με το μοιρογνωμόνιο, μετράμε τη γωνία, βρίσκουμε το μισό της και σχεδιάζουμε γωνία με αυτό το μέτρο από τη μία πλευρά. (Κατασκευή με διαβήτη: Μάθημα 2.2.)



Η $O\delta$ είναι διχοτόμος της $x\hat{O}y = 70^\circ$



Παράδειγμα 2

Η $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y = 124^\circ$. Να βρεις τη γωνία $x\hat{O}\delta$. Αν μια άλλη γωνία έχει διχοτόμο που σχηματίζει με την πλευρά της γωνία $47^\circ 30'$, πόση είναι η γωνία;

ΛΥΣΗ

$$x\hat{O}\delta = \frac{124^\circ}{2} = 62^\circ. \text{ Η δεύτερη γωνία είναι διπλάσια: } 2 \cdot 47^\circ 30' = 94^\circ 60' = 95^\circ.$$



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο με τη σωστή χρήση του μοιρογνωμονίου βήμα-βήμα και ένα διαδραστικό «εικονικό μοιρογνωμόνιο» για εξάσκηση.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 1.5

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1

●●● Να σχεδιάσεις με το μοιρογνωμόνιο γωνίες: α) 30° , β) 75° , γ) 90° , δ) 145° , ε) 180° .

- 2 ●●● Να μετατρέψεις: **α)** 5° σε λεπτά, **β)** $90'$ σε μοίρες, **γ)** $2'$ σε δεύτερα λεπτά, **δ)** $47,25^\circ$ σε μοίρες και λεπτά.
- 3 ●●● Να υπολογίσεις: **α)** $25^\circ 40' + 38^\circ 35'$, **β)** $90^\circ - 47^\circ 18'$.
- 4 ●●● Η διχοτόμος μιας γωνίας σχηματίζει με την πλευρά της γωνία 38° . Πόση είναι η γωνία;
- 5 ●●● Να σχεδιάσεις γωνία $\hat{xOy} = 110^\circ$ και τη διχοτόμο της $Οδ$. Μετά να σχεδιάσεις τη διχοτόμο $Οε$ της $\hat{xOδ}$. Πόση είναι η γωνία $\hat{εOy}$;
- 6 ●●● Οι δείκτες ενός ρολογιού σχηματίζουν γωνία. Πόσες μοίρες είναι η γωνία τους στις: **α)** 3:00, **β)** 6:00, **γ)** 2:00, **δ)** 5:00; (Υπόδειξη: ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς αριθμούς του ρολογιού η γωνία είναι $360^\circ : 12$.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

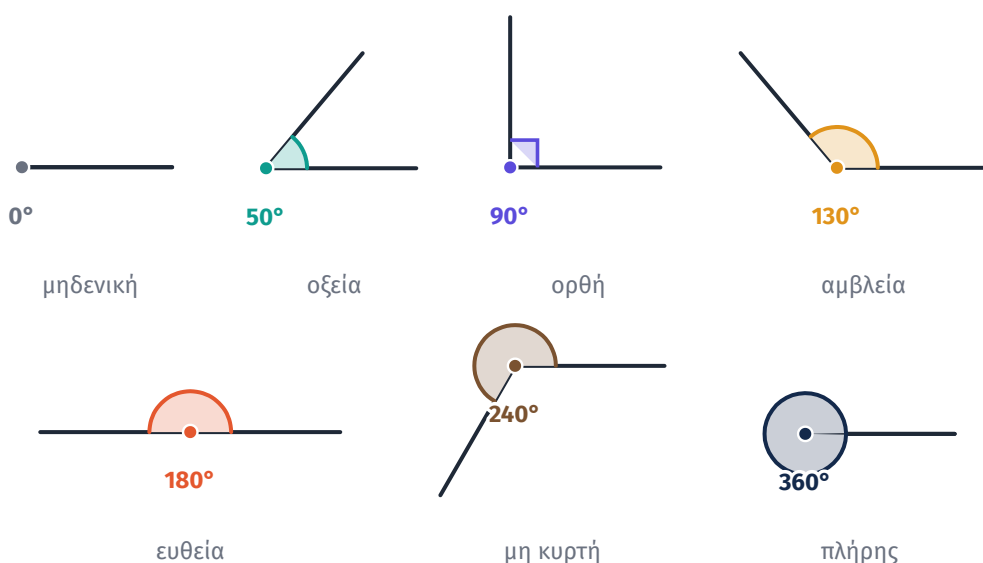
Μάθημα 1.6

Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ να ξεχωρίζεις **οξεία, ορθή, αμβλεία, ευθεία, μη κυρτή** και **πλήρη** γωνία
- ✓ πότε δύο ευθείες είναι **κάθετες** και πώς το συμβολίζουμε
- ✓ να σχεδιάζεις την **κάθετη** σε ευθεία από σημείο με τον **γνώμονα**

1 Τα είδη των γωνιών



Είδος γωνίας	Μέτρο ω
Μηδενική	$\omega = 0^\circ$
Οξεία	$0^\circ < \omega < 90^\circ$
Ορθή	$\omega = 90^\circ$
Αμβλεία	$90^\circ < \omega < 180^\circ$
Ευθεία	$\omega = 180^\circ$
Μη κυρτή	$180^\circ < \omega < 360^\circ$
Πλήρης	$\omega = 360^\circ$

**ΠΡΟΣΟΧΗ!**

Η **ορθή γωνία** σημειώνεται στα σχήματα με ένα **μικρό τετράγωνο** στην κορυφή (όχι με τοξάκι). Είναι η γωνία της γωνιάς του τετραδίου, της πόρτας, του γνώμονα. Και μην ξεχνάς: «αμβλεία» σημαίνει «ανοιχτή», «οξεία» σημαίνει «μυτερή».

**Παράδειγμα 1**

Να χαρακτηρίσεις τις γωνίες: 35° , 90° , 91° , 179° , 180° , 200° , $89^\circ 59'$.

ΛΥΣΗ

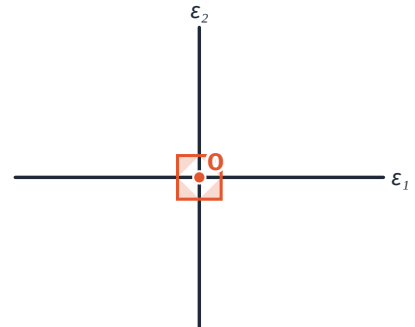
35° : οξεία · 90° : ορθή · 91° : αμβλεία · 179° : αμβλεία · 180° : ευθεία · 200° : μη κυρτή · $89^\circ 59'$: οξεία (λίγο μικρότερη από ορθή!).

2 Κάθετες ευθείες

Δύο ευθείες που τέμνονται σχηματίζουν **τέσσερις** γωνίες. Αν η μία από αυτές είναι **ορθή**, τότε είναι **όλες** ορθές. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι ευθείες είναι **κάθετες** και γράφουμε:

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$$

Το σημείο τομής τους λέγεται **ίχνος** (ή **πόδι**) της κάθετης.



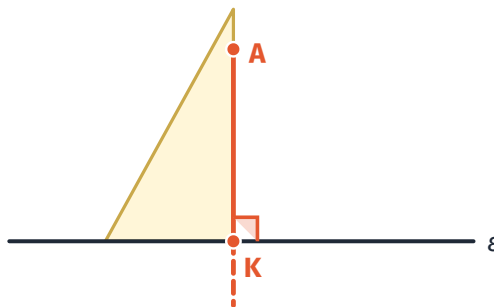
$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$: τέσσερις ορθές γωνίες

ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Από ένα σημείο A (που βρίσκεται είτε **πάνω** είτε **έξω** από μια ευθεία ε) διέρχεται **μία και μόνο μία** ευθεία κάθετη στην ε .

ΠΩΣ ΦΕΡΝΟΥΜΕ ΚΑΘΕΤΗ ΑΠΟ ΣΗΜΕΙΟ Α ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑ Ε ΜΕ ΤΟΝ ΓΝΩΜΟΝΑ

- 1 Τοποθετούμε τη μία κάθετη πλευρά του γνώμονα **πάνω στην ευθεία ε** .
- 2 Σύρουμε τον γνώμονα κατά μήκος της ε μέχρι η **άλλη** κάθετη πλευρά του να περάσει από το A .
- 3 Χαράζουμε την ευθεία κατά μήκος αυτής της πλευράς. Αυτή είναι η κάθετη από το A .



Με τον γνώμονα φέρνουμε την κάθετη AK από το A στην ε

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

Η κάθετη από το A στην ε σχεδιάζεται «με το μάτι», «κατακόρυφα» στο χαρτί.

✓ ΣΩΣΤΟ

Η κάθετη σχηματίζει **ορθή γωνία με την ε** , όποια κι αν είναι η θέση της ε στο χαρτί.

«Κάθετη» **δεν** σημαίνει «όρθια». Αν η ε είναι πλάγια, και η κάθετή της θα είναι πλάγια. Χρησιμοποίησε **πάντα τον γνώμονα**.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για τα είδη γωνιών και τη χάραξη κάθετων με τον γνώμονα, καθώς και κουίζ «αναγνώρισε τη γωνία».



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 1.6

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να χαρακτηρίσεις τις γωνίες: **α)** 72° , **β)** 108° , **γ)** 90° , **δ)** 270° , **ε)** 1° , **στ)** 180° .
- 2 ●●● Ποια γωνία σχηματίζουν οι δείκτες του ρολογιού στις 3:00, 4:00, 1:00; Τι είδους είναι η καθεμία;
- 3 ●●● Η διχοτόμος μιας **αμβλείας** γωνίας σχηματίζει με την πλευρά της γωνία. Τι είδους γωνία είναι αυτή; Να εξηγήσεις.
- 4 ●●● Να σχεδιάσεις μια ευθεία ε , ένα σημείο A έξω από αυτήν και ένα σημείο B πάνω της. Να φέρεις με τον γνώμονα τις κάθετες από το A και από το B στην ε . Τι παρατηρείς για τις δύο κάθετες;
- 5 ●●● Σωστό ή Λάθος; **α)** Κάθε γωνία μικρότερη από 90° είναι οξεία (εκτός από τη μηδενική). **β)** Το διπλάσιο μιας οξείας είναι πάντα αμβλεία. **γ)** Το μισό μιας ευθείας γωνίας είναι ορθή. **δ)** Δύο κάθετες ευθείες σχηματίζουν τέσσερις ορθές γωνίες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Μάθημα 1.7

Εφεξής και διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα γωνιών

1

ΕΝΝΟΙΕΣ

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

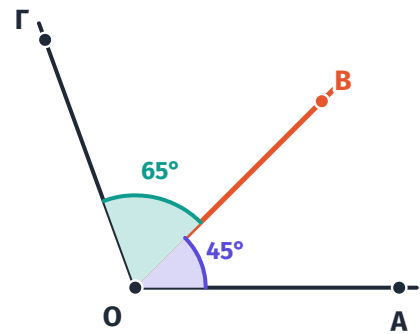
- ✓ πότε δύο γωνίες λέγονται **εφεξής** και πότε **διαδοχικές**
- ✓ να **προσθέτεις** και να **αφαιρείς** γωνίες
- ✓ ότι οι γωνίες **γύρω από ένα σημείο** έχουν άθροισμα 360°

1 Εφεξής γωνίες

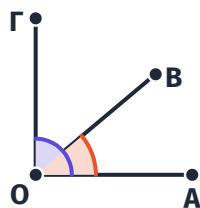
Δύο γωνίες λέγονται **εφεξής** όταν:

1. έχουν την **ίδια κορυφή**,
2. έχουν **μία κοινή πλευρά** και
3. **κανένα άλλο κοινό σημείο** (δηλαδή η μία δεν «μπαίνει» μέσα στην άλλη).

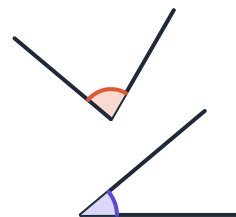
Στο σχήμα, οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}Γ$ είναι εφεξής: κοινή κορυφή το O , κοινή πλευρά η OB , και βρίσκονται σε διαφορετικές μεριές της κοινής πλευράς.



Οι $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}Γ$ είναι εφεξής



$A\hat{O}Γ$ και $A\hat{O}B$: ΟΧΙ εφεξής (η μία μέσα στην άλλη)



ΟΧΙ εφεξής (διαφορετικές κορυφές)

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

Οι $A\hat{O}Γ$ και $A\hat{O}B$ του πρώτου σχήματος είναι εφεξής, αφού έχουν κοινή κορυφή και κοινή πλευρά OA .

✓ ΣΩΣΤΟ

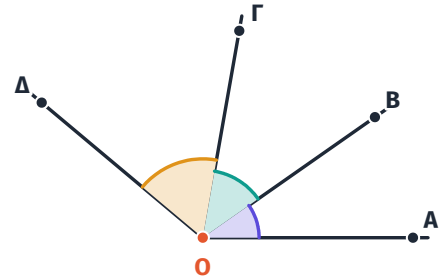
Δεν είναι εφεξής: η $A\hat{O}B$ βρίσκεται **μέσα** στην $A\hat{O}Γ$ (έχουν και άλλα κοινά σημεία).

Μην ξεχνάς την **τρίτη** προϋπόθεση. Οι εφεξής γωνίες «ακουμπούν» η μία την άλλη κατά μήκος της κοινής πλευράς, χωρίς να επικαλύπτονται.

2 Διαδοχικές γωνίες

Τρεις ή περισσότερες γωνίες λέγονται **διαδοχικές** όταν **κάθε μία** είναι εφεξής με την **επόμενη** της.

Στο σχήμα, οι γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}Γ$, $Γ\hat{O}Δ$ είναι διαδοχικές: η πρώτη είναι εφεξής με τη δεύτερη και η δεύτερη με την τρίτη.



Τρεις διαδοχικές γωνίες

3 Άθροισμα και διαφορά γωνιών

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ

Αν οι $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}Γ$ είναι **εφεξής**, η γωνία $A\hat{O}Γ$ που σχηματίζουν οι μη κοινές πλευρές τους λέγεται **άθροισμά** τους:

$$A\hat{O}Γ = A\hat{O}B + B\hat{O}Γ$$

Το μέτρο του αθροίσματος είναι το άθροισμα των μέτρων: στο πρώτο σχήμα του μαθήματος, $45^\circ + 65^\circ = 110^\circ$. Για να προσθέσουμε δύο γωνίες που **δεν** είναι εφεξής, τις «μεταφέρουμε» ώστε να γίνουν εφεξής.



Παράδειγμα 1

Οι γωνίες $x\hat{O}y = 38^\circ$ και $y\hat{O}z$ είναι εφεξής και $x\hat{O}z = 95^\circ$. Πόση είναι η $y\hat{O}z$;

ΛΥΣΗ

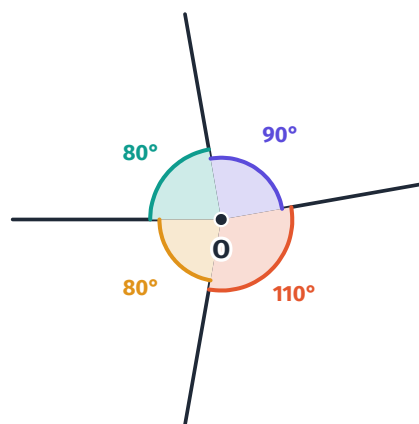
$$y\hat{O}z = x\hat{O}z - x\hat{O}y = 95^\circ - 38^\circ = 57^\circ.$$

4 Γωνίες γύρω από σημείο

Αν φέρουμε από ένα σημείο O αρκετές ημιευθείες, σχηματίζονται διαδοχικές γωνίες που «γεμίζουν» όλο τον γύρο του σημείου. Το άθροισμά τους είναι μία **πλήρης γωνία**:

$$\text{άθροισμα γωνιών γύρω από σημείο} = 360^\circ$$

Αντίστοιχα, διαδοχικές γωνίες που σχηματίζονται **από τη μία μεριά** μιας ευθείας (με κορυφή ένα σημείο της) έχουν άθροισμα 180° .



$$90^\circ + 80^\circ + 80^\circ + 110^\circ = 360^\circ$$

**Παράδειγμα 2**

Γύρω από ένα σημείο σχηματίζονται τέσσερις διαδοχικές γωνίες. Οι τρεις είναι 85° , 120° και 70° . Πόση είναι η τέταρτη; Τι είδους γωνία είναι;

ΛΥΣΗ

$$360^\circ - (85^\circ + 120^\circ + 70^\circ) = 360^\circ - 275^\circ = 85^\circ: \text{οξεία.}$$

**Παράδειγμα 3**

Τρεις διαδοχικές γωνίες, που σχηματίζονται γύρω από ένα σημείο, είναι ανάλογες με τους αριθμούς 2, 3, 4. Να τις βρεις.

ΛΥΣΗ

Το άθροισμά τους είναι 360° και χωρίζεται σε $2 + 3 + 4 = 9$ ίσα μερίδια των $360^\circ : 9 = 40^\circ$. Οι γωνίες: 80° , 120° , 160° .



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για εφεξής και διαδοχικές γωνίες και παιχνίδι «συμπλήρωσε τον κύκλο των 360° ».

★ **Άλυτες ασκήσεις**

Μάθημα 1.7

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Οι $\angle A\hat{O}B = 27^\circ$ και $\angle B\hat{O}\Gamma = 54^\circ$ είναι εφεξής. Πόση είναι η $\angle A\hat{O}\Gamma$; Τι είδους γωνία είναι;

2 ●●● Η $\angle x\hat{O}z = 150^\circ$ χωρίζεται από την ημιευθεία Oy σε δύο εφεξής γωνίες, από τις οποίες η $\angle x\hat{O}y$ είναι διπλάσια από την $\angle y\hat{O}z$. Να τις βρεις.

- 3 ●●● Γύρω από ένα σημείο υπάρχουν πέντε ίσες διαδοχικές γωνίες. Πόσες μοίρες είναι η καθεμία;
- 4 ●●● Από ένα σημείο O μιας ευθείας $x'x$ φέρνουμε, προς το ίδιο ημιεπίπεδο, τις ημιευθείες Oy και Oz , ώστε $\hat{xOy} = 40^\circ$ και $\hat{yOz} = 75^\circ$. Πόση είναι η $\hat{zOx'}$;
- 5 ●●● Οι γωνίες $\hat{AOB}$, $\hat{BO\Gamma}$, $\hat{\Gamma O\Delta}$ είναι διαδοχικές και ίσες, και $\hat{AO\Delta} = 126^\circ$. Πόση γωνία σχηματίζουν οι διχοτόμοι των $\hat{AOB}$ και $\hat{\Gamma O\Delta}$;
- 6 ●●● Σωστό ή Λάθος; **α)** Δύο εφεξής γωνίες έχουν πάντα άθροισμα 180° . **β)** Δύο εφεξής γωνίες έχουν κοινή κορυφή. **γ)** Οι γωνίες γύρω από σημείο έχουν άθροισμα 360° .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Μάθημα 1.8

Παραπληρωματικές και συμπληρωματικές γωνίες – Κατακορυφήν γωνίες

1

ΕΝΝΟΙΕΣ

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ πότε δύο γωνίες λέγονται **παραπληρωματικές** και πότε **συμπληρωματικές**
- ✓ να υπολογίζεις την **παραπληρωματική** και τη **συμπληρωματική** μιας γωνίας
- ✓ τι είναι οι **κατακορυφήν** γωνίες και γιατί είναι **ίσες**

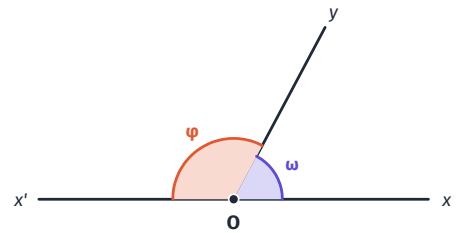
1 Παραπληρωματικές γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται **παραπληρωματικές** όταν έχουν **άθροισμα** 180° . Η καθεμία λέγεται **παραπληρωματική** της άλλης.

$$\omega + \varphi = 180^\circ$$

Π.χ. οι γωνίες 62° και 118° είναι παραπληρωματικές.

Όταν δύο παραπληρωματικές γωνίες είναι **εφεξής** (όπως στο σχήμα), οι μη κοινές πλευρές τους είναι **αντικείμενες ημιευθείες**: μαζί σχηματίζουν μια **ευθεία γωνία**. Λέγονται **εφεξής και παραπληρωματικές**.



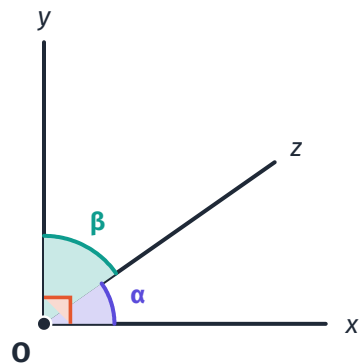
$\omega + \varphi = 180^\circ$: εφεξής και παραπληρωματικές

2 Συμπληρωματικές γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται **συμπληρωματικές** όταν έχουν **άθροισμα** 90° . Η καθεμία λέγεται **συμπληρωματική** της άλλης.

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Π.χ. οι 35° και 55° είναι συμπληρωματικές.



$\alpha + \beta = 90^\circ$

	Συμπληρωματικές	Παραπληρωματικές
Άθροισμα	90°	180°
Η «άλλη» γωνία της ω	$90^\circ - \omega$	$180^\circ - \omega$
Παράδειγμα για $\omega = 40^\circ$	50°	140°

**ΒΟΗΘΗΜΑ ΜΝΗΜΗΣ**

Ένα κόλπο για να μην τα μπερδεύεις: **παραπληρωματικές** = «**παραπάνω**» άθροισμα (180°), ενώ **συμπληρωματικές** «**συμπληρώνουν**» μια ορθή (90°).

**Παράδειγμα 1**

Να βρεις: **α)** τη συμπληρωματική και την παραπληρωματική της 27° , **β)** την παραπληρωματική της $112^\circ 35'$.

ΛΥΣΗ

α) Συμπληρωματική: $90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$. Παραπληρωματική: $180^\circ - 27^\circ = 153^\circ$.

β) $180^\circ - 112^\circ 35' = 179^\circ 60' - 112^\circ 35' = 67^\circ 25'$.

**ΠΡΟΣΟΧΗ!**

Μόνο **οξείες** γωνίες έχουν συμπληρωματική. Μια ορθή ή αμβλεία γωνία **δεν** έχει συμπληρωματική! Επίσης, η παραπληρωματική μιας **οξείας** είναι **αμβλεία** και αντίστροφα, ενώ η παραπληρωματική μιας **ορθής** είναι **ορθή**.

**Παράδειγμα 2**

Δύο παραπληρωματικές γωνίες διαφέρουν κατά 40° . Να τις βρεις.

ΛΥΣΗ

Έστω x η μικρότερη. Η μεγαλύτερη είναι $x + 40^\circ$ και $x + (x + 40^\circ) = 180^\circ \Rightarrow 2x = 140^\circ \Rightarrow x = 70^\circ$. Οι γωνίες είναι 70° και 110° .

**Παράδειγμα 3**

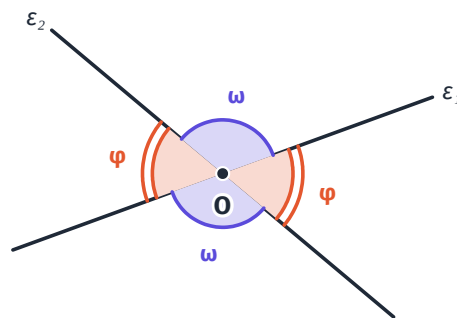
Μια γωνία είναι τετραπλάσια από τη συμπληρωματική της. Πόσες μοίρες είναι;

ΛΥΣΗ

Αν x η συμπληρωματική, η γωνία είναι $4x$: $x + 4x = 90^\circ \Rightarrow x = 18^\circ$. Η γωνία είναι 72° .

3 Κατακορυφήν γωνίες

Όταν δύο ευθείες τέμνονται, σχηματίζουν τέσσερις γωνίες. Δύο από αυτές που **δεν** έχουν κοινή πλευρά, αλλά οι πλευρές της μιας είναι **αντικείμενες ημιευθείες** των πλευρών της άλλης, λέγονται **κατακορυφήν** γωνίες.



Οι γωνίες ω είναι κατακορυφήν, όπως και οι φ

ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

Γιατί; Στο σχήμα, η ω και η φ είναι εφεξής και παραπληρωματικές, άρα $\omega + \varphi = 180^\circ$. Το ίδιο ισχύει και για την άλλη ω (την κάτω) με την ίδια φ . Αφού και οι δύο γωνίες ω «συμπληρώνουν» την ίδια φ στις 180° , είναι ίσες: $\omega = 180^\circ - \varphi$.



Παράδειγμα 4

Δύο ευθείες τέμνονται και μία από τις γωνίες που σχηματίζονται είναι 64° . Να βρεις τις άλλες τρεις.

ΛΥΣΗ

Η κατακορυφήν της είναι επίσης 64° . Οι άλλες δύο είναι παραπληρωματικές της: $180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$, και μεταξύ τους κατακορυφήν, άρα και οι δύο 116° . Έλεγχος: $64^\circ + 116^\circ + 64^\circ + 116^\circ = 360^\circ$ ✓.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

Δύο εφεξής γωνίες που σχηματίζονται από δύο τεμνόμενες ευθείες είναι «κατακορυφήν», άρα ίσες.

✓ ΣΩΣΤΟ

Οι εφεξής είναι παραπληρωματικές· κατακορυφήν είναι οι **απέναντι**.

Οι κατακορυφήν γωνίες «κοιτάζουν» η μία την άλλη **από απέναντι** μέσα από την κορυφή, σαν το σχήμα X. Οι γειτονικές (με κοινή πλευρά) δεν είναι κατακορυφήν.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για παραπληρωματικές, συμπληρωματικές και κατακορυφήν γωνίες και πολλές ασκήσεις υπολογισμού γωνιών.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 1.8

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να βρεις τη συμπληρωματική των: **α)** 15° , **β)** 72° , **γ)** 45° , **δ)** 89° .
- 2 ●●● Να βρεις την παραπληρωματική των: **α)** 40° , **β)** 135° , **γ)** 90° , **δ)** $57^\circ 20'$.
- 3 ●●● Δύο συμπληρωματικές γωνίες είναι ίσες. Πόσες μοίρες είναι η καθεμία; Και δύο ίσες παραπληρωματικές;
- 4 ●●● Μια γωνία είναι κατά 30° μεγαλύτερη από τη συμπληρωματική της. Να τη βρεις.
- 5 ●●● Η παραπληρωματική μιας γωνίας είναι πενταπλάσια από τη γωνία. Να βρεις τη γωνία.
- 6 ●●● Δύο ευθείες τέμνονται και σχηματίζουν τέσσερις γωνίες, από τις οποίες η μία είναι τριπλάσια της εφεξής της. Να βρεις και τις τέσσερις γωνίες.
- 7 ●●● Να βρεις τη γωνία ω αν η παραπληρωματική της είναι κατά 100° μεγαλύτερη από τη συμπληρωματική της. Τι παρατηρείς;
- 8 ●●● Οι διχοτόμοι δύο εφεξής παραπληρωματικών γωνιών σχηματίζουν γωνία. Πόσες μοίρες είναι; (Δοκίμασε με γωνίες 50° και 130° και μετά εξήγησε γενικά.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

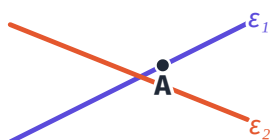
Μάθημα 1.9

Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

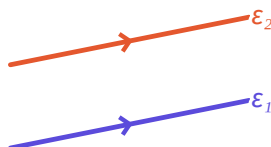
ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τις δυνατές **σχετικές θέσεις** δύο ευθειών του επιπέδου
- ✓ τι είναι οι **παράλληλες** ευθείες και πώς τις συμβολίζουμε
- ✓ να σχεδιάζεις **παράλληλη** από σημείο με **γνώμονα και χάρακα**
- ✓ βασικές ιδιότητες παράλληλων και κάθετων ευθειών

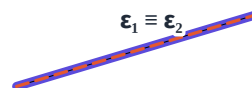
1 Τεμνόμενες και παράλληλες ευθείες



τέμνονται (1 κοινό σημείο)



παράλληλες (κανένα κοινό σημείο)



ταυτίζονται

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

Δύο (διαφορετικές) ευθείες ενός επιπέδου είτε:

- **τέμνονται**, δηλαδή έχουν **ένα μόνο** κοινό σημείο, το **σημείο τομής**, είτε
- **δεν έχουν κανένα** κοινό σημείο, όσο κι αν τις προεκτείνουμε. Τότε λέγονται **παράλληλες** και γράφουμε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

(Αν έχουν δύο κοινά σημεία, τότε **ταυτίζονται**, αφού από δύο σημεία περνά μία μόνο ευθεία.)

**ΠΡΟΣΟΧΗ!**

Δύο ευθείες μπορεί **στο σχέδιο** να φαίνεται ότι δεν συναντιούνται, αλλά να τέμνονται «μακριά», αν τις προεκτείνουμε. Για να είναι παράλληλες πρέπει να **μην** συναντιούνται **ποτέ**. Οι ράγες του τρένου και οι γραμμές του τετραδίου είναι καλά παραδείγματα παραλλήλων.

2 Το αίτημα της παραλληλίας

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟ ΑΙΤΗΜΑ

Από ένα σημείο A που βρίσκεται **έξω** από μια ευθεία ε , διέρχεται **μία και μόνο μία** ευθεία παράλληλη προς την ε .

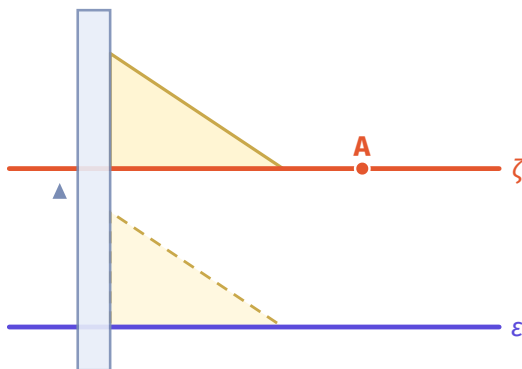


ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Αυτή η πρόταση είναι το περίφημο **πέμπτο αίτημα** του Ευκλείδη. Για δύο χιλιάδες χρόνια οι μαθηματικοί προσπαθούσαν να το αποδείξουν από τα άλλα αξιώματα — χωρίς επιτυχία. Τον 19ο αιώνα οι **Λομπατσέφσκι**, **Μπολιάι** και **Ρίμαν** κατάλαβαν ότι, αν το αλλάξουμε, προκύπτουν εντελώς **νέες γεωμετρίες** («μη Ευκλείδειες»), που χρησιμοποίησε αργότερα ο **Αϊνστάιν** στη Θεωρία της Σχετικότητας!

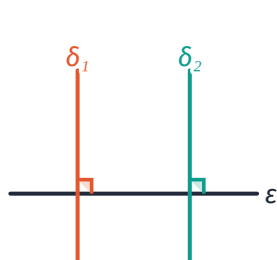
ΠΩΣ ΦΕΡΝΟΥΜΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΑΠΟ ΣΗΜΕΙΟ Α ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑ Ε

- 1 Τοποθετούμε τη μία πλευρά του **γνώμονα** πάνω στην ευθεία ε .
- 2 Ακουμπάμε τον **χάρακα** σταθερά στην άλλη κάθετη πλευρά του γνώμονα.
- 3 **Σύρουμε** τον γνώμονα πάνω στον χάρακα (χωρίς να κουνήσουμε τον χάρακα) μέχρι η πλευρά που ήταν πάνω στην ε να περάσει από το A .
- 4 Χαράζουμε την ευθεία. Αυτή είναι η παράλληλη από το A .

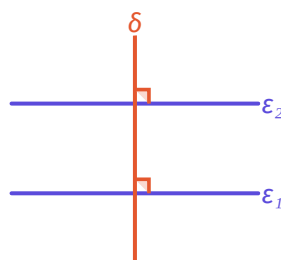


Ο γνώμονας «γλιστράει» πάνω στον χάρακα από την ε μέχρι το A

3 Ιδιότητες παραλλήλων και καθέτων



$$\delta_1 \perp \varepsilon \text{ και } \delta_2 \perp \varepsilon \Rightarrow \delta_1 \parallel \delta_2$$



$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \text{ και } \delta \perp \varepsilon_1 \Rightarrow \delta \perp \varepsilon_2$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- Δύο ευθείες **κάθετες στην ίδια ευθεία** είναι **παράλληλες** μεταξύ τους.
- Αν δύο ευθείες είναι **παράλληλες**, κάθε ευθεία **κάθετη** στη μία είναι κάθετη και στην άλλη.
- Αν δύο ευθείες είναι **παράλληλες προς μια τρίτη**, είναι παράλληλες και μεταξύ τους: $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon$ και $\varepsilon_2 \parallel \varepsilon \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.
- Αν μια ευθεία **τέμνει** τη μία από δύο παράλληλες, τότε τέμνει και την άλλη.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

«Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι και οι δύο κάθετες στη δ , άρα $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.»

✓ ΣΩΣΤΟ

$$\varepsilon_1 \perp \delta \text{ και } \varepsilon_2 \perp \delta \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$$

Δύο κάθετες **στην ίδια** ευθεία είναι **παράλληλες**, όχι κάθετες μεταξύ τους. Κάνε ένα γρήγορο σχήμα για να το δεις: είναι σαν τα σκαλοπάτια μιας σκάλας!



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο που δείχνει βήμα-βήμα τη χάραξη παραλλήλων με γνώμονα και χάρακα και κουίζ για τις θέσεις ευθειών.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 1.9

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- Να αναφέρεις τρία παραδείγματα παραλλήλων και τρία παραδείγματα καθέτων ευθειών από το περιβάλλον σου.

- Να σχεδιάσεις μια ευθεία ε και δύο σημεία A, B έξω από αυτήν, στο ίδιο ημιεπίπεδο. Να φέρεις από το A και από το B τις παράλληλες προς την ε . Πότε οι δύο παράλληλες ταυτίζονται;

- 3 ●●● Σωστό ή Λάθος; **α)** Δύο ευθείες που δεν τέμνονται είναι παράλληλες. **β)** Από σημείο εκτός ευθείας περνούν δύο παράλληλες προς αυτήν. **γ)** Αν $\varepsilon_1 \perp \delta$ και $\varepsilon_2 \perp \delta$, τότε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. **δ)** Δύο τεμνόμενες ευθείες έχουν δύο κοινά σημεία.
- 4 ●●● Οι ευθείες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι τέτοιες ώστε $\alpha \parallel \beta, \beta \perp \gamma$ και $\gamma \parallel \delta$. Τι σχέση έχουν: **α)** η α με τη γ , **β)** η α με τη δ , **γ)** η β με τη δ ;
- 5 ●●● Πόσα σημεία τομής μπορεί να έχουν τρεις διαφορετικές ευθείες ενός επιπέδου; Να σχεδιάσεις όλες τις περιπτώσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Μάθημα 1.10

Απόσταση σημείου από ευθεία – Απόσταση παραλλήλων

1

ΕΝΝΟΙΕΣ

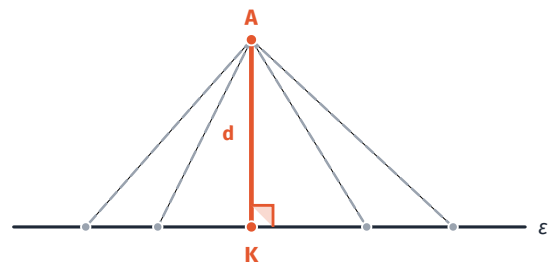
ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τι είναι η **απόσταση σημείου από ευθεία** και πώς τη μετράμε
- ✓ γιατί το **κάθετο** τμήμα είναι το **συντομότερο**
- ✓ τι είναι η **απόσταση δύο παραλλήλων** ευθειών

1 Απόσταση σημείου από ευθεία

Από ένα σημείο A έξω από μια ευθεία ε μπορούμε να φέρουμε **άπειρα** τμήματα προς σημεία της ε . Από όλα αυτά, το **συντομότερο** είναι το **κάθετο** τμήμα AK .

Απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε λέγεται το μήκος του κάθετου τμήματος AK . Το σημείο K λέγεται **προβολή** (ή **ίχνος** της κάθετης) του A στην ε .



Το κάθετο τμήμα AK είναι το συντομότερο

**ΠΡΟΣΟΧΗ!**

Αν το σημείο A βρίσκεται **πάνω** στην ευθεία ε , η απόστασή του από την ε είναι **μηδέν**. Επίσης, για να **μετρήσουμε** την απόσταση, πρώτα φέρνουμε την κάθετη με τον **γνώμονα** και μετά μετράμε με τον **χάρακα**.

**Παράδειγμα 1**

Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα στο σημείο K και θέλει να βγει στην (ευθύγραμμη) ακτή όσο πιο γρήγορα γίνεται. Ποια διαδρομή πρέπει να ακολουθήσει;

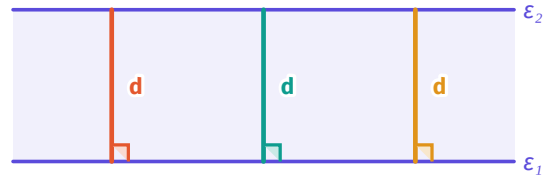
ΛΥΣΗ

Την **κάθετη** από το K προς την ακτή: είναι η συντομότερη διαδρομή, και το μήκος της είναι η απόσταση του κολυμβητή από την ακτή.

2 Απόσταση παραλλήλων ευθειών

Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι **παράλληλες**, τότε **όλα** τα σημεία της μίας απέχουν **το ίδιο** από την άλλη. Αυτή η σταθερή απόσταση d λέγεται **απόσταση των παραλλήλων**.

Τη μετράμε παίρνοντας **οποιοδήποτε** σημείο της μίας ευθείας και βρίσκοντας την απόστασή του από την άλλη. Η περιοχή ανάμεσα στις δύο παράλληλες λέγεται **ζώνη**.



Όλα τα κάθετα τμήματα ανάμεσα σε δύο παράλληλες είναι ίσα

1

ΕΝΝΟΙΕΣ

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

Η απόσταση των παραλλήλων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ μετρίεται με ένα **πλάγιο** τμήμα AB από τη μία στην άλλη.

✓ ΣΩΣΤΟ

Μετρίεται με **κάθετο** τμήμα: $AK \perp \varepsilon_2$.

Κάθε πλάγιο τμήμα είναι **μεγαλύτερο** από το κάθετο. Η απόσταση είναι πάντα το **συντομότερο** τμήμα, δηλαδή το κάθετο.



Παράδειγμα 2

Δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ απέχουν 3 cm. Μια τρίτη ευθεία ε_3 είναι παράλληλη και προς τις δύο και απέχει 1 cm από την ε_1 . Πόσο απέχει από την ε_2 ;

ΛΥΣΗ

Υπάρχουν **δύο** περιπτώσεις:

α) Η ε_3 βρίσκεται **ανάμεσα** στις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$: απέχει $3 - 1 = 2$ cm από την ε_2 .

β) Η ε_3 βρίσκεται **έξω** από τη ζώνη, από τη μεριά της ε_1 : απέχει $3 + 1 = 4$ cm από την ε_2 .



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για την απόσταση σημείου από ευθεία και την απόσταση παραλλήλων, με εφαρμογές από την καθημερινή ζωή.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 1.10

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1

●●● Να σχεδιάσεις μια ευθεία ε και ένα σημείο A που απέχει από αυτήν 2,5 cm. Πόσα τέτοια σημεία υπάρχουν; Πού βρίσκονται;

- 2 ●●● Από ένα σημείο A φέρνουμε την κάθετη $AK = 4$ cm προς μια ευθεία ε και ένα πλάγιο τμήμα AB προς την ε . Μπορεί το AB να είναι 3,5 cm; Να εξηγήσεις.
- 3 ●●● Οι γραμμές ενός τετραδίου είναι παράλληλες και απέχουν 8 mm η μία από την επόμενη. Πόσο απέχει η 1η από την 10η γραμμή;
- 4 ●●● Δύο παράλληλες ευθείες απέχουν 5 cm. Ένα σημείο M απέχει 2 cm από τη μία. Πόσο μπορεί να απέχει από την άλλη;
- 5 ●●● Σωστό ή Λάθος; **α)** Η απόσταση σημείου από ευθεία είναι το μήκος του κάθετου τμήματος. **β)** Όλα τα σημεία μιας ευθείας απέχουν το ίδιο από μια παράλληλή της. **γ)** Η απόσταση ενός σημείου της ευθείας από την ίδια την ευθεία είναι 1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Μάθημα 1.11

Κύκλος και στοιχεία του κύκλου

1

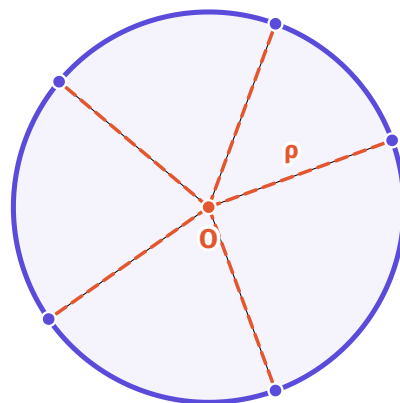
ΕΝΝΟΙΕΣ

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τι είναι **κύκλος**, **κέντρο** και **ακτίνα**
- ✓ τα στοιχεία του κύκλου: **χορδή**, **διάμετρος**, **τόξο**, **ημικύκλιο**
- ✓ πότε ένα σημείο είναι **εσωτερικό**, **εξωτερικό** ή **σημείο** του κύκλου
- ✓ τι είναι **κυκλικός δίσκος**, **ίσοι** και **ομόκεντροι** κύκλοι

1 Ο κύκλος

Αν δέσουμε ένα κατσίκι με ένα σχοινί σε έναν πάσσαλο, όσο το σχοινί είναι τεντωμένο, τα σημεία στα οποία μπορεί να φτάσει απέχουν **όλα το ίδιο** από τον πάσσαλο. Αυτά τα σημεία σχηματίζουν έναν **κύκλο**.



Όλα τα σημεία του κύκλου απέχουν ρ από το κέντρο O

ΟΡΙΣΜΟΣ

Κύκλος με **κέντρο** O και **ακτίνα** ρ λέγεται το σχήμα που αποτελείται από **όλα** τα σημεία του επιπέδου που **απέχουν απόσταση** ρ από το σημείο O . Συμβολίζεται (O, ρ) . Κάθε τμήμα που ενώνει το κέντρο με ένα σημείο του κύκλου λέγεται επίσης **ακτίνα**. **Όλες οι ακτίνες ενός κύκλου είναι ίσες.**

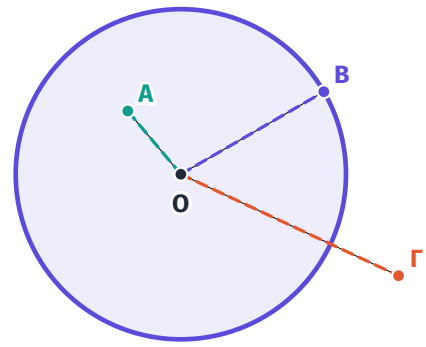
Τον κύκλο τον σχεδιάζουμε με τον **διαβήτη**: ανοίγουμε τον διαβήτη όσο η ακτίνα, στερεώνουμε τη μύτη στο κέντρο και περιστρέφουμε το μολύβι μια ολόκληρη στροφή.

2 Θέση σημείου ως προς κύκλο

Για ένα σημείο M και έναν κύκλο (O, ρ) συγκρίνουμε την απόσταση OM με την ακτίνα:

- αν $OM < \rho$, το M είναι **εσωτερικό** σημείο του κύκλου (σημείο A),
- αν $OM = \rho$, το M είναι **σημείο του κύκλου** (σημείο B),
- αν $OM > \rho$, το M είναι **εξωτερικό** σημείο (σημείο Γ).

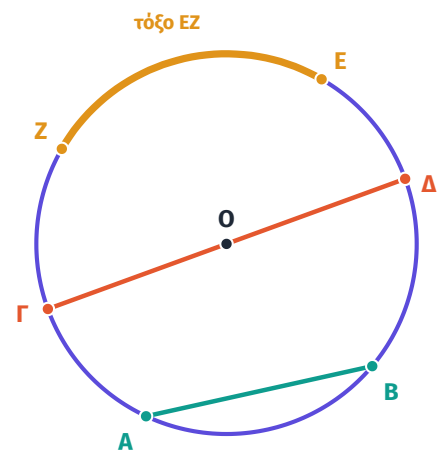
Ο κύκλος **μαζί** με τα εσωτερικά του σημεία λέγεται **κυκλικός δίσκος**.



Εσωτερικό (A), σημείο του κύκλου (B), εξωτερικό (Γ)

3 Χορδή, διάμετρος, τόξο

- **Χορδή** λέγεται κάθε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει **δύο σημεία του κύκλου** (π.χ. η AB).
- **Διάμετρος** λέγεται κάθε χορδή που **περνάει από το κέντρο** (π.χ. η $\Gamma\Delta$). Η διάμετρος είναι **διπλάσια** από την ακτίνα: $\delta = 2\rho$. Είναι η **μεγαλύτερη** χορδή του κύκλου.
- **Τόξο** λέγεται κάθε κομμάτι του κύκλου ανάμεσα σε δύο σημεία του (π.χ. το τόξο $\widehat{EZ}$). Δύο σημεία χωρίζουν τον κύκλο σε **δύο** τόξα.
- Μια διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα τόξα, τα **ημικύκλια**.
- Τα άκρα μιας διαμέτρου λέγονται **αντιδιαμετρικά** σημεία.



Χορδή AB , διάμετρος $\Gamma\Delta$, τόξο EZ

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

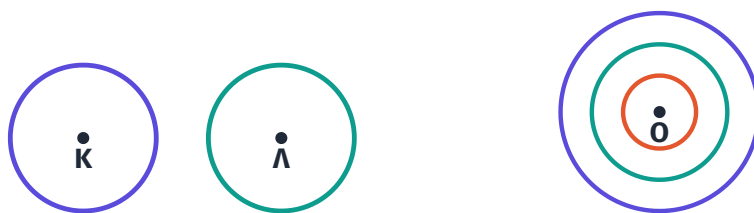
«Η διάμετρος είναι οποιαδήποτε χορδή.»

✓ ΣΩΣΤΟ

Διάμετρος είναι **μόνο** η χορδή που περνάει από το **κέντρο**.

Κάθε διάμετρος είναι χορδή, αλλά **δεν** είναι κάθε χορδή διάμετρος! Οι χορδές που δεν περνούν από το κέντρο είναι πάντα **μικρότερες** από τη διάμετρο.

4 Ίσοι και ομόκεντροι κύκλοι



ίσοι κύκλοι (ίσες ακτίνες)

ομόκεντροι κύκλοι (ίδιο κέντρο)

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Δύο κύκλοι με **ίσες ακτίνες** λέγονται **ίσοι** (ταυτίζονται αν τοποθετήσουμε τον έναν πάνω στον άλλον).
- Κύκλοι με **ίδιο κέντρο** (και διαφορετικές ακτίνες) λέγονται **ομόκεντροι**. Η περιοχή ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους κύκλους λέγεται **δακτύλιος**.



Παράδειγμα 1

Ένας κύκλος έχει διάμετρο 9 cm. Ένα σημείο A απέχει 4 cm από το κέντρο και ένα σημείο B απέχει 4,5 cm. Πού βρίσκονται τα A και B ;

ΛΥΣΗ

Η ακτίνα είναι $\rho = 9 : 2 = 4,5$ cm. Αφού $OA = 4 < 4,5$, το A είναι **εσωτερικό**. Αφού $OB = 4,5 = \rho$, το B είναι **σημείο του κύκλου**.



ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ο κύκλος θεωρούνταν από τους αρχαίους Έλληνες το «τελειότερο» σχήμα, γιατί όλα του τα σημεία είναι «ισότιμα». Ο **Αρχιμήδης** βρήκε με εκπληκτική ακρίβεια τη σχέση του μήκους του κύκλου με τη διάμετρό του — τον αριθμό $\pi \approx 3,14$, που θα γνωρίσεις στη Β' Γυμνασίου.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για τον κύκλο και τα στοιχεία του και ένα διαδραστικό «διαβήτη» για να σχεδιάζεις κύκλους στον υπολογιστή.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 1.11

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να σχεδιάσεις κύκλο (O , 3 cm) και μέσα του: μια ακτίνα OA , μια διάμετρο $BΓ$, μια χορδή $ΔΕ$ που δεν είναι διάμετρος. Πόσο είναι το $BΓ$;
- 2 ●●● Ένας κύκλος έχει ακτίνα 5 cm. Να χαρακτηρίσεις τα σημεία A , B , $Γ$, $Δ$ αν απέχουν από το κέντρο 3 cm, 5 cm, 7,5 cm και 0 cm αντίστοιχα.
- 3 ●●● Μπορεί μια χορδή κύκλου με ακτίνα 4 cm να έχει μήκος 9 cm; Να εξηγήσεις.
- 4 ●●● Δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες 3 cm και 5 cm. Πόσο είναι το «πλάτος» του δακτυλίου τους; Ένα σημείο απέχει 4 cm από το κέντρο: πού βρίσκεται ως προς κάθε κύκλο;
- 5 ●●● Να σχεδιάσεις δύο σημεία A , B με $AB = 5$ cm. Να βρεις με διαβήτη όλα τα σημεία που απέχουν 3 cm από το A και 4 cm από το B . Πόσα είναι;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Μάθημα 1.12

Επίκεντρη γωνία – Σχέση επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου – Μέτρηση τόξου

1

ΕΝΝΟΙΕΣ

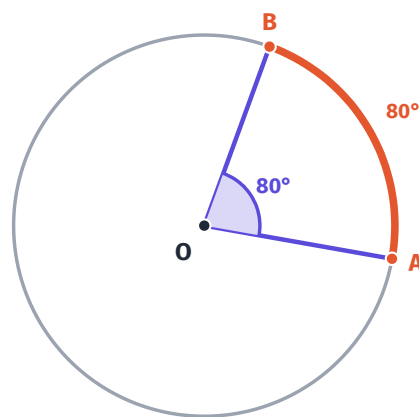
ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τι είναι **επίκεντρη γωνία** και ποιο είναι το **αντίστοιχο τόξο** της
- ✓ πώς **μετράμε ένα τόξο** σε μοίρες
- ✓ τη σχέση ανάμεσα σε **ίσα τόξα**, **ίσες επίκεντρες γωνίες** και **ίσες χορδές**

1 Επίκεντρη γωνία

Μια γωνία που έχει την **κορυφή της στο κέντρο** ενός κύκλου λέγεται **επίκεντρη γωνία**.

Οι πλευρές της επίκεντρης γωνίας $\widehat{AOB}$ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία A και B . Το τόξο $\widehat{AB}$ που βρίσκεται **μέσα** στη γωνία λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της επίκεντρης γωνίας. Λέμε επίσης ότι η γωνία **βαίνει** στο τόξο $\widehat{AB}$.



Η επίκεντρη γωνία $\widehat{AOB}$ και το αντίστοιχο τόξο $\widehat{AB}$

2 Μέτρηση τόξου

ΜΕΤΡΟ ΤΟΞΟΥ

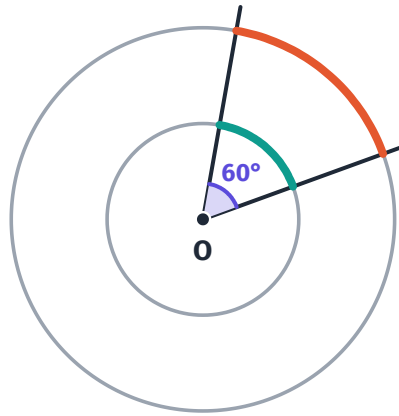
Αν χωρίσουμε έναν κύκλο σε 360 ίσα τόξα, καθένα λέγεται **τόξο μιας μοίρας** (1°). Ισχύει:

$$\text{μέτρο τόξου} = \text{μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας}$$

Δηλαδή **ένα τόξο έχει τόσες μοίρες όσες και η επίκεντρη γωνία που βαίνει σε αυτό**. Έτσι: ο κύκλος είναι 360° , το ημικόκλιο 180° , το τεταρτοκύκλιο 90° .

**ΠΡΟΣΟΧΗ!**

Οι **μοίρες** ενός τόξου **δεν** είναι το **μήκος** του! Σε δύο ομόκεντρους κύκλους, η ίδια επίκεντρη γωνία 60° αντιστοιχεί σε τόξα των 60° και στους δύο, αλλά το τόξο του μεγάλου κύκλου είναι **μακρύτερο**. Οι μοίρες μετρούν «πόσο κομμάτι του κύκλου» είναι το τόξο.



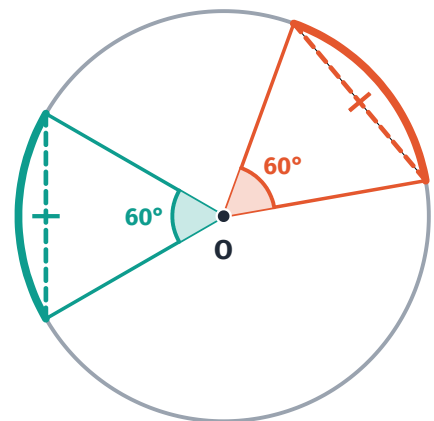
Και τα δύο τόξα είναι 60° , αλλά έχουν διαφορετικό μήκος.

3 Ίσα τόξα – ίσες χορδές

Σε έναν κύκλο (ή σε ίσους κύκλους):

- **ίσες επίκεντρες γωνίες** βαίνουν σε **ίσα τόξα**, και αντίστροφα,
- **ίσα τόξα** έχουν **ίσες χορδές**, και αντίστροφα.

Αυτό μας επιτρέπει να χωρίσουμε έναν κύκλο σε ίσα μέρη: π.χ. για να τον χωρίσουμε σε 6 ίσα τόξα σχεδιάζουμε 6 επίκεντρες γωνίες των $360^\circ : 6 = 60^\circ$.



Ίσες επίκεντρες γωνίες $\rightarrow$ ίσα τόξα $\rightarrow$ ίσες χορδές

**Παράδειγμα 1**

Ένας κύκλος χωρίζεται σε τόξα ανάλογα με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4. Να βρεις το μέτρο κάθε τόξου και την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία.

ΛΥΣΗ

Ο κύκλος είναι 360° , χωρισμένος σε $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ μερίδια των 36° . Τα τόξα (και οι επίκεντρες γωνίες τους): 36° , 72° , 108° , 144° .



Παράδειγμα 2

Ένα ρολόι έχει τους αριθμούς 1–12 σε ίσες αποστάσεις στον κύκλο. Πόσες μοίρες είναι το τόξο από το 12 έως το 5; Πόση είναι η επίκεντρη γωνία των δεικτών στις 5:00;

ΛΥΣΗ

Κάθε «ώρα» αντιστοιχεί σε τόξο $360^\circ : 12 = 30^\circ$. Από το 12 στο 5: $5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$. Άρα και η γωνία των δεικτών είναι 150° .



ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Η διαίρεση του κύκλου σε 360 μοίρες προέρχεται από τους **Βαβυλώνιους**, που χρησιμοποιούσαν αριθμητικό σύστημα με βάση το 60 και υπολόγιζαν το έτος σε περίπου 360 ημέρες. Το 360 έχει πολλούς διαιρέτες (24!), γι' αυτό είναι πολύ «βολικό».



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για επίκεντρες γωνίες και τόξα, και δραστηριότητα «χώρισε τον κύκλο σε ίσα κομμάτια» (πίτες, ρολόγια, ροδέλες).



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 1.12

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Μια επίκεντρη γωνία είναι 125° . Πόσες μοίρες είναι το αντίστοιχο τόξο; Πόσες μοίρες είναι το **άλλο** τόξο που ορίζουν τα ίδια σημεία;
- 2 ●●● Να χωρίσεις, με μοιρογνωμόνιο, έναν κύκλο σε 5 ίσα τόξα. Πόση είναι η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί σε κάθε τόξο; Αν ενώσεις τα σημεία διαίρεσης, τι σχήμα παίρνεις;
- 3 ●●● Ποια είναι η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί σε: **α)** ημικύκλιο, **β)** το $\frac{1}{3}$ του κύκλου, **γ)** το $\frac{1}{8}$ του κύκλου;
- 4 ●●● Τα σημεία A, B, Γ ενός κύκλου χωρίζουν τον κύκλο σε τρία τόξα, από τα οποία το $\widehat{AB} = 100^\circ$ και το $\widehat{B\Gamma}$ είναι κατά 40° μεγαλύτερο από το $\widehat{\Gamma A}$. Να βρεις τα τόξα.
- 5 ●●● Σε ένα κυκλικό διάγραμμα μιας τάξης 24 μαθητών, οι 6 προτιμούν το μπάσκετ. Πόσες μοίρες πρέπει να είναι ο αντίστοιχος «τομέας»;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

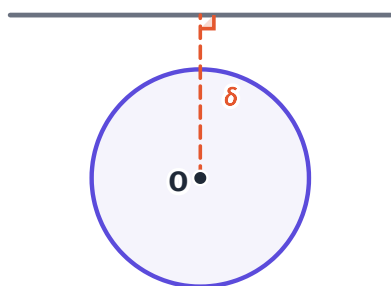
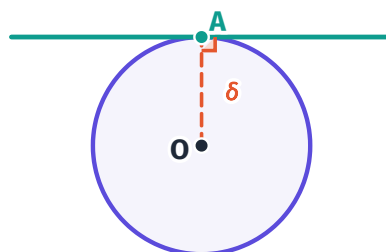
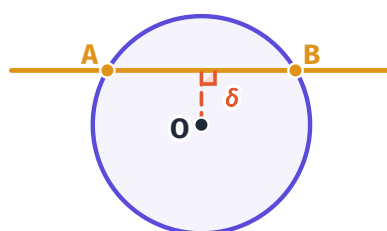
Μάθημα 1.13

Θέσεις ευθείας και κύκλου

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τις τρεις δυνατές θέσεις μιας **ευθείας** ως προς έναν **κύκλο**
- ✓ πώς τις αναγνωρίζουμε συγκρίνοντας την **απόσταση του κέντρου** από την ευθεία με την **ακτίνα**
- ✓ ότι η **εφαπτομένη** είναι **κάθετη** στην ακτίνα στο σημείο επαφής

1 Τρεις δυνατές θέσεις

 $\delta > r$: εξωτερική $\delta = r$: εφαπτομένη $\delta < r$: τέμνουσα

ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ – ΚΥΚΛΟΥ

Έστω κύκλος (O, r) και ευθεία ε που απέχει από το κέντρο O απόσταση δ .

- Αν $\delta > r$, η ευθεία **δεν έχει κοινό σημείο** με τον κύκλο. Λέγεται **εξωτερική** του κύκλου.
- Αν $\delta = r$, η ευθεία έχει **ένα μόνο κοινό σημείο** με τον κύκλο. Λέγεται **εφαπτομένη** του κύκλου και το κοινό σημείο **σημείο επαφής**.
- Αν $\delta < r$, η ευθεία έχει **δύο κοινά σημεία** με τον κύκλο. Λέγεται **τέμνουσα** του κύκλου.

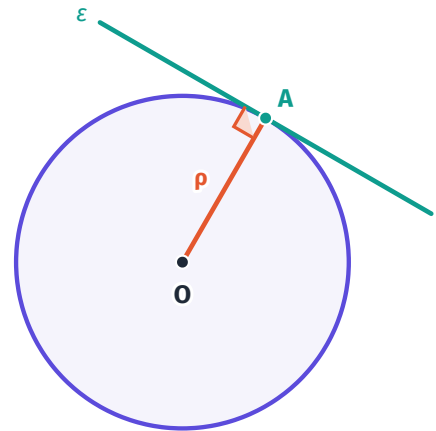
2 Η εφαπτομένη

Η εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του A είναι **κάθετη** στην ακτίνα OA :

$$\varepsilon \perp OA$$

Αυτό μας δίνει έναν απλό τρόπο να τη **σχεδιάσουμε**: φέρνουμε την ακτίνα OA και, με τον γνώμονα, την κάθετη σε αυτήν στο A .

Από **κάθε** σημείο του κύκλου περνάει **μία μόνο** εφαπτομένη.



Η εφαπτομένη ε είναι κάθετη στην ακτίνα OA

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

«Η εφαπτομένη ακουμπάει τον κύκλο σε ένα μικρό κομμάτι.»

✓ ΣΩΣΤΟ

Η εφαπτομένη έχει με τον κύκλο **ένα μόνο σημείο** κοινό.

Στο σχέδιο, λόγω του πάχους της γραμμής, φαίνεται σαν να «ακουμπούν» σε ένα κομματάκι. Στη Γεωμετρία όμως οι γραμμές δεν έχουν πάχος: το κοινό σημείο είναι **ένα**.



Παράδειγμα 1

Ένας κύκλος έχει ακτίνα $\rho = 3$ cm. Τρεις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ απέχουν από το κέντρο του 2,5 cm, 3 cm και 4 cm αντίστοιχα. Ποια είναι η θέση κάθε ευθείας ως προς τον κύκλο;

ΛΥΣΗ

- ε_1 : $2,5 < 3$, **τέμνουσα** (δύο κοινά σημεία).
- ε_2 : $3 = 3$, **εφαπτομένη** (ένα κοινό σημείο).
- ε_3 : $4 > 3$, **εξωτερική** (κανένα κοινό σημείο).



Παράδειγμα 2

Μια ευθεία είναι εφαπτομένη ενός κύκλου με διάμετρο 10 cm. Πόσο απέχει το κέντρο από την ευθεία;

ΛΥΣΗ

Για εφαπτομένη $\delta = \rho = 10 : 2 = 5$ cm.

**ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...**

Όταν ένας ποδηλάτης κινείται σε ευθύ δρόμο, ο δρόμος είναι **εφαπτομένη** στον τροχό, στο σημείο όπου ο τροχός ακουμπά το έδαφος. Και όταν μια σφεντόνα αφήσει το βότσαλο, αυτό φεύγει κατά την **εφαπτομένη** του κύκλου που διέγραφε!



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις κινούμενο σχήμα που δείχνει μια ευθεία να «πλησιάζει» έναν κύκλο: από εξωτερική γίνεται εφαπτομένη και μετά τέμνουσα.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 1.13

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Ένας κύκλος έχει ακτίνα 4 cm. Να βρεις τη θέση ευθείας που απέχει από το κέντρο: **α)** 3 cm, **β)** 4 cm, **γ)** 5,2 cm, **δ)** 0 cm.
- 2 ●●● Να σχεδιάσεις κύκλο (O , 2,5 cm), ένα σημείο του A και την εφαπτομένη του κύκλου στο A .
- 3 ●●● Δύο παράλληλες ευθείες είναι και οι δύο εφαπτόμενες ενός κύκλου ακτίνας 3 cm. Πόσο απέχουν μεταξύ τους;
- 4 ●●● Πόσα κοινά σημεία μπορεί να έχει μια ευθεία με έναν κύκλο; Μπορεί να έχει τρία; Να εξηγήσεις.
- 5 ●●● Μια ευθεία τέμνει έναν κύκλο ακτίνας 5 cm. Τι τιμές μπορεί να έχει η απόσταση δ του κέντρου από την ευθεία;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Ανακεφαλαίωση

Όλο το κεφάλαιο σε λίγες σελίδες & επαναληπτικές ασκήσεις

1 Η θεωρία με μια ματιά

Βασικές έννοιες

- Σημείο, ευθεία, επίπεδο: πρωταρχικές έννοιες
- Τμήμα AB : δύο άκρα, έχει μήκος
- Ημιευθεία Ox : αρχή, χωρίς τέλος

Τμήματα

- Απόσταση = μήκος τμήματος
- Μέσο M : $AM = MB = \frac{AB}{2}$
- Σημεία σε ευθεία: **πρόσεχε τη σειρά!**

Γωνίες

- Οξεία $< 90^\circ$, ορθή $= 90^\circ$, αμβλεία $> 90^\circ$
- Ευθεία 180° , πλήρης 360°
- Διχοτόμος: δύο ίσες γωνίες

Σχέσεις γωνιών

- Συμπληρωματικές: 90°
- Παραπληρωματικές: 180°
- Κατακορυφήν: **ίσες** · γύρω από σημείο: 360°

Ευθείες

- Τέμνονται ή παράλληλες ($\parallel$)
- Κάθετες ($\perp$): ορθή γωνία
- Δύο κάθετες στην ίδια: παράλληλες

Κύκλος

- $\delta = 2\rho$ · διάμετρος η μεγαλύτερη χορδή
- Τόξο = επίκεντρη γωνία (σε μοίρες)
- Ευθεία: $\delta > \rho$ εξωτ., = εφαπτ., $<$ τέμνουσα



Η ΓΛΑΥΚΑ ΘΥΜΙΖΕΙ

Στη Γεωμετρία **κάνε πάντα σχήμα**, ακόμη κι όταν η άσκηση δεν το ζητά, και **σημείωσε πάνω του** όσα ξέρεις (ίσα τμήματα, μοίρες, ορθές γωνίες). Τα μισά λάθη γίνονται επειδή ο μαθητής «φαντάστηκε» το σχήμα αντί να το σχεδιάσει!



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις επαναληπτικό τεστ για τις βασικές γεωμετρικές έννοιες με βίντεο-λύσεις, ιδανικό πριν από το διαγώνισμα.



★ Επαναληπτικές ασκήσεις

Κεφάλαιο 1

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Σε μια ευθεία παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ, Δ ώστε $AB = 4 \text{ cm}$, $B\Gamma = 6 \text{ cm}$, $\Gamma\Delta = 2 \text{ cm}$. Αν M είναι το μέσο του $A\Delta$, να βρεις το MB και το $M\Gamma$.

- 2 ●●● Μια γωνία είναι ίση με τα $\frac{2}{3}$ της παραπληρωματικής της. Να τη βρεις. Ποια είναι η συμπληρωματική της;
- 3 ●●● Δύο ευθείες τέμνονται στο O και σχηματίζουν τέσσερις γωνίες. Το άθροισμα δύο κατακορυφών γωνιών είναι 110° . Να βρεις όλες τις γωνίες.
- 4 ●●● Από ένα σημείο O μιας ευθείας $x'x$ φέρνουμε προς το ίδιο ημιεπίπεδο τις ημιευθείες Oy και Oz , ώστε $\hat{xOy} = 50^\circ$ και η Oz να είναι διχοτόμος της $\hat{yOx'}$. Να βρεις τη $\hat{zOx'}$ και τη $\hat{xOz}$.
- 5 ●●● Γύρω από ένα σημείο σχηματίζονται τρεις διαδοχικές γωνίες: x , $2x$ και $x + 60^\circ$. Να βρεις το x και τις γωνίες.
- 6 ●●● Ένας κύκλος έχει ακτίνα 3,5 cm. **α)** Πόσο είναι η διάμετρός του; **β)** Μια ευθεία απέχει από το κέντρο 35 mm. Ποια είναι η θέση της; **γ)** Ένα σημείο απέχει από το κέντρο 0,04 m. Πού βρίσκεται;
- 7 ●●● Τα σημεία A, B, Γ, Δ ενός κύκλου τον χωρίζουν σε τέσσερα τόξα που είναι ανάλογα με τους αριθμούς 2, 3, 3, 4. Να βρεις τα τόξα. Ποια χορδή είναι η μεγαλύτερη;
- 8 ●●● Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες στην ευθεία δ και η ε_3 είναι κάθετη στην ε_1 . Τι σχέση έχουν: **α)** οι ε_1 και ε_2 , **β)** οι ε_3 και δ , **γ)** οι ε_3 και ε_2 ;
- 9 ●●● Σωστό ή Λάθος; **α)** Δύο εφεξής γωνίες είναι πάντα παραπληρωματικές. **β)** Η συμπληρωματική μιας οξείας είναι οξεία. **γ)** Η διάμετρος είναι χορδή. **δ)** Ένα τόξο 90° έχει πάντα το ίδιο μήκος, όποιος κι αν είναι ο κύκλος.

2

Κεφάλαιο 2
Συμμετρία

Η **συμμετρία** είναι παντού: στο ανθρώπινο σώμα, στα λουλούδια, στις χιονονιφάδες, στα κτίρια, στα λογότυπα. Σε αυτό το κεφάλαιο μαθαίνουμε να την περιγράφουμε **με ακρίβεια**: τι σημαίνει δύο σχήματα να είναι συμμετρικά ως προς **ευθεία** ή ως προς **σημείο**, ποια σχήματα έχουν **άξονες** και **κέντρα** συμμετρίας, πώς κατασκευάζουμε τη **μεσοκάθετο** και τη **διχοτόμο** και τι συμβαίνει όταν **παράλληλες** ευθείες τέμνονται από μια τρίτη.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 2.1 Συμμετρία ως προς άξονα
- 2.2 Άξονας συμμετρίας
- 2.3 Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος
- 2.4 Συμμετρία ως προς σημείο
- 2.5 Κέντρο συμμετρίας
- 2.6 Παράλληλες που τέμνονται από άλλη ευθεία
- ★ Ανακεφαλαίωση & επαναληπτικές ασκήσεις



Βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις και κουίζ
για όλο το κεφάλαιο, δωρεάν στο
mathgreece.com



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Μάθημα 2.1

Συμμετρία ως προς άξονα

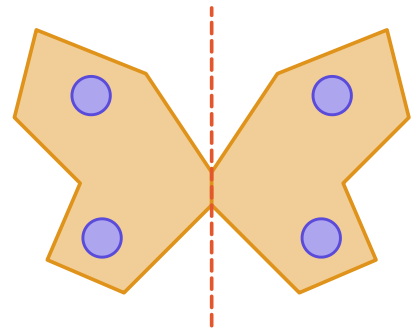
ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ πότε δύο σημεία είναι **συμμετρικά ως προς μια ευθεία**
- ✓ να βρίσκεις το **συμμετρικό** ενός σημείου, ενός τμήματος και ενός σχήματος
- ✓ ότι δύο σχήματα συμμετρικά ως προς ευθεία είναι **ίσα**

1 Η ιδέα της συμμετρίας

Αν διπλώσουμε ένα χαρτί στη μέση, ρίξουμε μια σταγόνα μελάνι στη μία μεριά και το πιέσουμε, θα δούμε ένα σχέδιο σαν πεταλούδα: η μία μεριά είναι **καθρέφτης** της άλλης. Λέμε ότι το σχέδιο είναι **συμμετρικό** ως προς τη **γραμμή της τσάκισης**.

Συμμετρία βρίσκουμε παντού: στο πρόσωπό μας, στα φύλλα, στις πεταλούδες, στην αρχιτεκτονική (π.χ. η πρόσοψη του Παρθενώνα), στα λογότυπα.



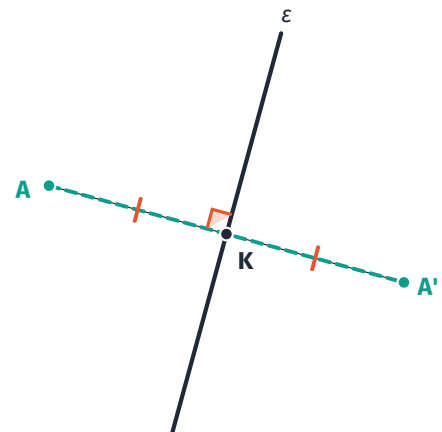
Η «πεταλούδα» είναι συμμετρική ως προς τη διακεκομμένη ευθεία

2 Συμμετρικό σημείου ως προς ευθεία

Δύο σημεία A και A' λέγονται **συμμετρικά ως προς μια ευθεία ε** όταν η ε είναι:

- **κάθετη** στο τμήμα AA' και
- περνάει από το **μέσο** του AA' .

Με άλλα λόγια: η ε είναι η **μεσοκάθετος** του AA' (θα τη μελετήσουμε στο Μάθημα 2.3). Η ευθεία ε λέγεται **άξονας συμμετρίας**.



Τα A και A' είναι συμμετρικά ως προς την ε

ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΤΟΥ Α ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ Ε

- 1 Φέρνουμε από το A την **κάθετη** προς την ε (με τον γνώμονα). Έστω K το σημείο τομής.
- 2 **Προεκτείνουμε** την κάθετη από την άλλη μεριά της ε .
- 3 Παίρνουμε πάνω στην προέκταση τμήμα $KA' = AK$ (με τον διαβήτη ή τον χάρακα).
- 4 Το A' είναι το συμμετρικό του A .

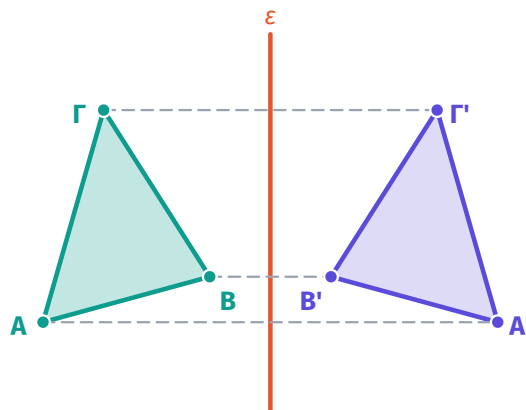
**ΠΡΟΣΟΧΗ!**

Αν το σημείο A βρίσκεται **πάνω** στην ευθεία ε , τότε το συμμετρικό του είναι **ο εαυτός του**: $A' = A$.

3 Συμμετρικό σχήματος

Για να βρούμε το συμμετρικό ενός **ευθύγραμμου σχήματος** ως προς μια ευθεία, βρίσκουμε τα συμμετρικά των **κορυφών** του και τα ενώνουμε με την ίδια σειρά.

Στο σχήμα, το τρίγωνο $A'B'Γ'$ είναι συμμετρικό του $ABΓ$ ως προς την ε .



Το τρίγωνο $A'B'Γ'$ είναι συμμετρικό του $ABΓ$

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Δύο σχήματα συμμετρικά ως προς μια ευθεία είναι **ίσα**: αν διπλώσουμε το χαρτί κατά μήκος του άξονα, το ένα **ταυτίζεται** με το άλλο. Συνεπώς:

- το συμμετρικό ενός **τμήματος** είναι **ίσο** τμήμα,
- το συμμετρικό μιας **γωνίας** είναι **ίση** γωνία,
- το συμμετρικό ενός **κύκλου** είναι **ίσος** κύκλος (με κέντρο το συμμετρικό του κέντρου),
- το συμμετρικό μιας **ευθείας** είναι **ευθεία**.

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

Το συμμετρικό του A βρίσκεται «απέναντι» από την ε , σε **οποιαδήποτε** κατεύθυνση, αρκεί να απέχει το ίδιο.

✓ ΣΩΣΤΟ

Το A' βρίσκεται πάνω στην **κάθετη** από το A προς την ε , σε **ίση απόσταση**.

Δεν αρκεί ίση απόσταση· η γραμμή AA' πρέπει να είναι **κάθετη** στον άξονα. Αν ο άξονας είναι πλάγιος, το συμμετρικό **δεν** είναι «οριζόντια απέναντι»!



ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ο καθρέφτης κάνει ακριβώς **συμμετρία ως προς άξονα** (στην πραγματικότητα ως προς επίπεδο). Γι' αυτό, όταν σηκώνεις το **δεξί** χέρι, το είδωλό σου σηκώνει το **αριστερό**, και γι' αυτό η λέξη «ΑΣΘΕΝΟΦΟΡΟ» γράφεται ανάποδα μπροστά στα ασθενοφόρα: για να διαβάζεται σωστά στον καθρέφτη του αυτοκινήτου που προηγείται!



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις κινούμενα σχήματα για τη συμμετρία ως προς άξονα και δραστηριότητες «καθρέφτη» σε τετραγωνισμένο χαρτί.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 2.1

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να σχεδιάσεις μια ευθεία ε και ένα σημείο A που απέχει 2 cm από αυτήν. Να βρεις το συμμετρικό A' του A ως προς την ε . Πόσο είναι το AA' ;
- 2 ●●● Να σχεδιάσεις ένα τμήμα $AB = 4$ cm και μια ευθεία ε που δεν το τέμνει. Να βρεις το συμμετρικό $A'B'$ του AB ως προς την ε . Πόσο είναι το $A'B'$;
- 3 ●●● Μια γωνία $x\hat{O}y = 65^\circ$ έχει συμμετρική τη γωνία $x'\hat{O}'y'$ ως προς μια ευθεία. Πόσες μοίρες είναι η $x'\hat{O}'y'$;
- 4 ●●● Ένας κύκλος (K , 2 cm) και μια ευθεία ε που απέχει 3 cm από το K . Να σχεδιάσεις τον συμμετρικό κύκλο ως προς την ε . Πόσο απέχουν τα δύο κέντρα;
- 5 ●●● Σε τετραγωνισμένο χαρτί, το σημείο A βρίσκεται 3 τετραγωνάκια αριστερά και 1 πάνω από ένα σημείο O μιας **κατακόρυφης** ευθείας ε που περνάει από το O . Πού βρίσκεται το συμμετρικό του;
- 6 ●●● Τα σημεία A και A' είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ε και M είναι ένα σημείο της ε . Αν $MA = 5$ cm, πόσο είναι το MA' ; Να εξηγήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Μάθημα 2.2

Άξονας συμμετρίας

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ πότε ένα σχήμα έχει **άξονα συμμετρίας**
- ✓ να βρίσκεις **πόσους** άξονες συμμετρίας έχουν βασικά σχήματα
- ✓ ότι η **διχοτόμος** είναι άξονας συμμετρίας της γωνίας και να την **κατασκευάζεις** με διαβήτη

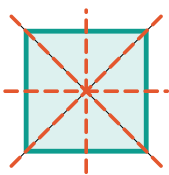
1 Ορισμός

ΑΞΟΝΑΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

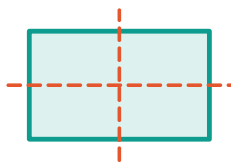
Μια ευθεία ε λέγεται **άξονας συμμετρίας** ενός σχήματος, όταν το συμμετρικό **κάθε** σημείου του σχήματος ως προς την ε είναι επίσης σημείο του **ίδιου** σχήματος. Πρακτικά: αν **διπλώσουμε** το σχήμα κατά μήκος της ε , τα δύο μέρη του **ταυτίζονται**.

Στο προηγούμενο μάθημα είχαμε **δύο** σχήματα συμμετρικά μεταξύ τους. Τώρα μιλάμε για **ένα** σχήμα που είναι συμμετρικό με τον **εαυτό** του.

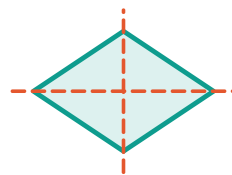
2 Άξονες συμμετρίας βασικών σχημάτων



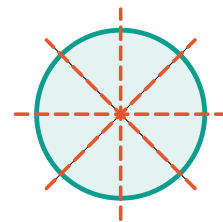
τετράγωνο: 4



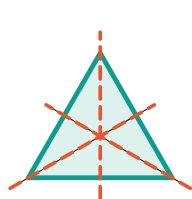
ορθογώνιο: 2



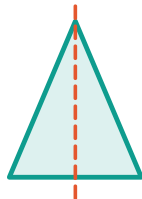
ρόμβος: 2



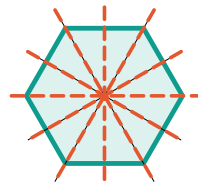
κύκλος: άπειροι



ισόπλευρο: 3



ισοσκελές: 1



κανονικό εξάγωνο: 6



σκαληνό σχήμα: κανένας

Σχήμα	Άξονες συμμετρίας
Ευθύγραμμο τμήμα	2 (η μεσοκάθετος και ο φορέας του)
Γωνία	1 (η διχοτόμος)
Ισοσκελές τρίγωνο	1
Ισόπλευρο τρίγωνο	3
Ορθογώνιο	2
Ρόμβος	2 (οι διαγώνιοί του)
Τετράγωνο	4
Κανονικό n -γωνο	n
Κύκλος	άπειροι (κάθε ευθεία που περνά από το κέντρο)

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

«Οι **διαγώνιοι** του ορθογωνίου είναι άξονες συμμετρίας.»

✓ ΣΩΣΤΟ

Άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου είναι οι δύο ευθείες που ενώνουν τα **μέσα απέναντι πλευρών**.

Δοκίμασε να διπλώσεις ένα ορθογώνιο χαρτί (όχι τετράγωνο) κατά μήκος της διαγωνίου: τα δύο μισά **δεν** ταυτίζονται! Οι διαγώνιοι είναι άξονες μόνο στο **τετράγωνο** και στον **ρόμβο**.



Παράδειγμα 1

Πόσους άξονες συμμετρίας έχει καθένα από τα κεφαλαία γράμματα: Α, Η, Ο, Ζ, Δ, Φ, Κ;

ΛΥΣΗ

- **Α**: 1 (κατακόρυφος) · **Η**: 2 (κατακόρυφος και οριζόντιος) · **Ο**: 2 (αν είναι «οβάλ»· αν ήταν κύκλος, άπειροι)
- **Ζ**: 0 · **Δ**: 1 (κατακόρυφος) · **Φ**: 2 · **Κ**: 1 (οριζόντιος).

3 Η διχοτόμος ως άξονας συμμετρίας – Κατασκευή

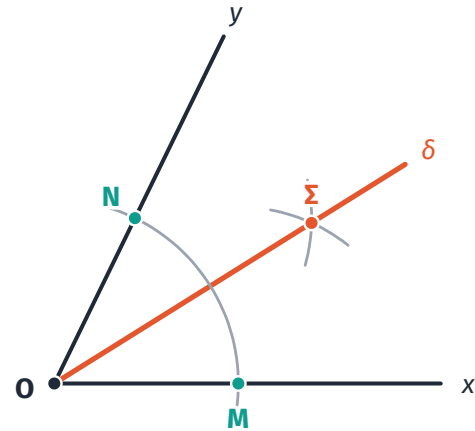
ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Η **διχοτόμος** μιας γωνίας είναι **άξονας συμμετρίας** της γωνίας. Συνέπεια: **κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας**.

Κατασκευή της διχοτόμου με κανόνα και διαβήτη:

1. Με κέντρο την κορυφή O γράφουμε ένα τόξο που τέμνει τις πλευρές στα M και N .
2. Με κέντρα τα M και N και την **ίδια** ακτίνα γράφουμε δύο τόξα που τέμνονται σε ένα σημείο Σ μέσα στη γωνία.
3. Η ημιευθεία $O\Sigma$ είναι η **διχοτόμος**.

Η κατασκευή «δουλεύει» επειδή το σχήμα είναι συμμετρικό ως προς την $O\Sigma$ ($OM = ON$ και $\Sigma M = \Sigma N$).



Κατασκευή της διχοτόμου με διαβήτη



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο με την κατασκευή της διχοτόμου με διαβήτη και κουίζ «πόσους άξονες συμμετρίας έχει;» με εικόνες από την καθημερινή ζωή.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 2.2

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Πόσους άξονες συμμετρίας έχουν: **α)** ένα ισόπλευρο τρίγωνο, **β)** ένα τετράγωνο, **γ)** ένα κανονικό πεντάγωνο, **δ)** ένας κύκλος, **ε)** ένα ευθύγραμμο τμήμα;
- 2 ●●● Να γράψεις τρία κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου που **δεν** έχουν κανέναν άξονα συμμετρίας και τρία που έχουν ακριβώς δύο.
- 3 ●●● Να σχεδιάσεις γωνία 100° και να κατασκευάσεις με διαβήτη τη διχοτόμο της. Να ελέγξεις με μοιρογνωμόνιο ότι χωρίζει τη γωνία σε δύο γωνίες των 50° .
- 4 ●●● Ένα σημείο Σ της διχοτόμου μιας γωνίας απέχει 3 cm από τη μία πλευρά της. Πόσο απέχει από την άλλη; Να εξηγήσεις.
- 5 ●●● Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις 6 cm και 4 cm. Να σχεδιάσεις τους άξονες συμμετρίας του. Σε πόσα ίσα κομμάτια χωρίζουν το ορθογώνιο; Ποιες είναι οι διαστάσεις κάθε κομματιού;
- 6 ●●● Να συμπληρώσεις το σχήμα σε τετραγωνισμένο χαρτί ώστε η κατακόρυφη ευθεία να είναι άξονας συμμετρίας του: ένα «μισό σπίτι» με βάση 3 τετραγωνάκια, τοίχο 3 τετραγωνάκια και στέγη που ανεβαίνει 2 τετραγωνάκια προς τον άξονα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Μάθημα 2.3

Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

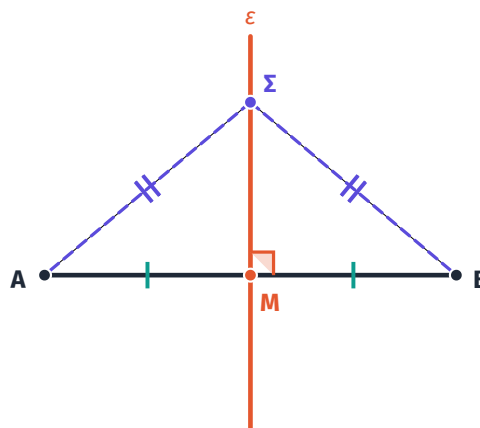
ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τι είναι η **μεσοκάθετος** ενός τμήματος
- ✓ τη βασική ιδιότητα: κάθε σημείο της **ισαπέχει** από τα άκρα του τμήματος
- ✓ να **κατασκευάζεις** τη μεσοκάθετο και το **μέσο** τμήματος με κανόνα και διαβήτη

1 Ορισμός

Μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος AB λέγεται η ευθεία που είναι **κάθετη** στο AB και περνάει από το **μέσο** του M .

Η μεσοκάθετος είναι **άξονας συμμετρίας** του τμήματος: τα άκρα A και B είναι συμμετρικά ως προς αυτήν.



$H \varepsilon$ είναι μεσοκάθετος του AB : $SA = SB$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΥ

- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός τμήματος AB **ισαπέχει** από τα άκρα του: αν το Σ ανήκει στη μεσοκάθετο, τότε $SA = SB$.
- Και **αντίστροφα**: κάθε σημείο που ισαπέχει από τα A και B ανήκει στη μεσοκάθετο του AB .

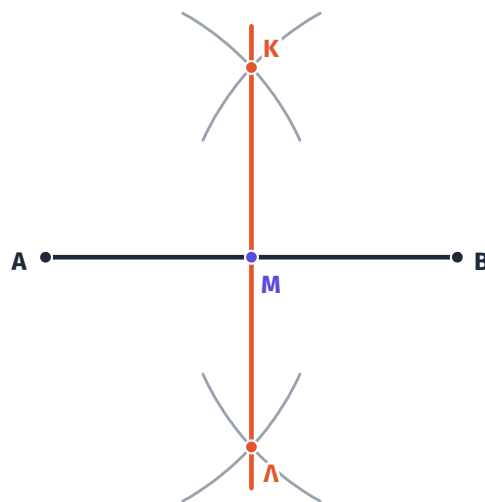


ΠΡΟΣΟΧΗ!

Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ χρήσιμη σε προβλήματα του τύπου: «Πού πρέπει να χτιστεί ένα πηγάδι ώστε να **απέχει εξίσου** από δύο σπίτια;». Απάντηση: σε **οποιοδήποτε** σημείο της μεσοκαθέτου του τμήματος που ενώνει τα δύο σπίτια!

2 Κατασκευή με κανόνα και διαβήτη

1. Ανοίγουμε τον διαβήτη σε άνοιγμα **μεγαλύτερο από το μισό** του AB .
2. Με κέντρο το A γράφουμε τόξα πάνω και κάτω από το AB .
3. Με κέντρο το B και **την ίδια ακτίνα** γράφουμε τόξα που τέμνουν τα προηγούμενα στα σημεία K και Λ .
4. Η ευθεία $K\Lambda$ είναι η **μεσοκάθετος** του AB .
5. Το σημείο M όπου η $K\Lambda$ τέμνει το AB είναι το **μέσο** του AB .



Κατασκευή της μεσοκαθέτου

Γιατί δουλεύει; Τα K και Λ ισαπέχουν από τα A και B (ίδια ακτίνα), άρα ανήκουν και τα δύο στη μεσοκάθετο. Και δύο σημεία ορίζουν μία ευθεία!

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

Αλλάζω το άνοιγμα του διαβήτη ανάμεσα στο τόξο από το A και στο τόξο από το B .

✓ ΣΩΣΤΟ

Το άνοιγμα του διαβήτη μένει **ίδιο** και για τα δύο κέντρα.

Αν αλλάξει η ακτίνα, τα σημεία τομής **δεν** ισαπέχουν από τα A και B , άρα η ευθεία που βρίσκεις **δεν** είναι η μεσοκάθετος. Επίσης, αν το άνοιγμα είναι μικρότερο από το μισό του AB , τα τόξα δεν θα τέμνονται καθόλου.



Παράδειγμα 1

Δύο χωριά A και B απέχουν 8 km. Θέλουμε να χτίσουμε ένα σχολείο Σ που να απέχει 5 km και **από τα δύο χωριά**. Πόσες δυνατές θέσεις υπάρχουν; Πόσο απέχει κάθε τέτοια θέση από το μέσο M του AB ;

ΛΥΣΗ

Αφού $\Sigma A = \Sigma B$, το Σ ανήκει στη **μεσοκάθετο** του AB . Επιπλέον $\Sigma A = 5$ km, άρα το Σ ανήκει στον κύκλο (A , 5 km). Η μεσοκάθετος τέμνει αυτόν τον κύκλο σε **δύο** σημεία (ένα από κάθε μεριά του AB): δύο δυνατές θέσεις. Με σχέδιο υπό κλίμακα (1 cm για 1 km) μετράμε $\Sigma M = 3$ km. (Στη Β' Γυμνασίου θα το υπολογίσεις με το Πυθαγόρειο θεώρημα: $5^2 = 4^2 + 3^2$.)



ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Αν πάρουμε τρία σημεία A, B, Γ (κορυφές τριγώνου), οι τρεις μεσοκάθετοι των $AB, B\Gamma, \Gamma A$ περνούν **από το ίδιο σημείο**! Αυτό το σημείο ισαπέχει από τις τρεις κορυφές και είναι το **κέντρο του κύκλου** που περνά και από τις τρεις — τον λεγόμενο **περιγεγραμμένο κύκλο** του τριγώνου.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο με την κατασκευή μεσοκάθετου και μέσου τμήματος με κανόνα και διαβήτη, βήμα-βήμα.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 2.3

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να σχεδιάσεις τμήμα $AB = 6 \text{ cm}$ και να κατασκευάσεις με κανόνα και διαβήτη τη μεσοκάθετό του. Να ελέγξεις με τον χάρακα ότι $MA = MB = 3 \text{ cm}$.
- 2 ●●● Ένα σημείο K της μεσοκάθετου του AB απέχει από το A 7 cm . Πόσο απέχει από το B ; Ένα σημείο Λ απέχει 5 cm από το A και 6 cm από το B . Ανήκει στη μεσοκάθετο;
- 3 ●●● Να σχεδιάσεις ένα τμήμα $AB = 5 \text{ cm}$ και να βρεις όλα τα σημεία που απέχουν 4 cm και από το A και από το B .
- 4 ●●● Σε έναν χάρτη υπάρχουν τρία χωριά A, B, Γ (όχι στην ίδια ευθεία). Πού πρέπει να τοποθετηθεί μια κεραία ώστε να απέχει **το ίδιο** από τα τρία χωριά; Να περιγράψεις την κατασκευή.
- 5 ●●● Η μεσοκάθετος του AB τέμνει το AB στο M . Αν $AB = 9 \text{ cm}$, πόσο είναι το AM ; Τι γωνία σχηματίζει η μεσοκάθετος με το AB ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Μάθημα 2.4

Συμμετρία ως προς σημείο

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

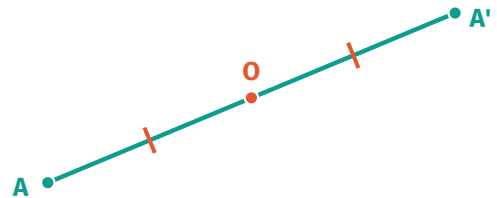
- ✓ πότε δύο σημεία είναι **συμμετρικά ως προς ένα σημείο**
- ✓ να βρίσκεις το **συμμετρικό** σημείου, τμήματος και σχήματος ως προς σημείο
- ✓ ότι η συμμετρία ως προς σημείο είναι μια **στροφή κατά 180°**

1 Συμμετρικό σημείου ως προς σημείο

Δύο σημεία A και A' λέγονται **συμμετρικά ως προς ένα σημείο O** , όταν το O είναι το **μέσο** του τμήματος AA' :

$$OA = OA' \quad \text{και τα } A, O, A' \text{ είναι συνευθειακά}$$

Το O λέγεται **κέντρο συμμετρίας**. Το συμμετρικό του O είναι ο εαυτός του.



Τα A και A' είναι συμμετρικά ως προς το O

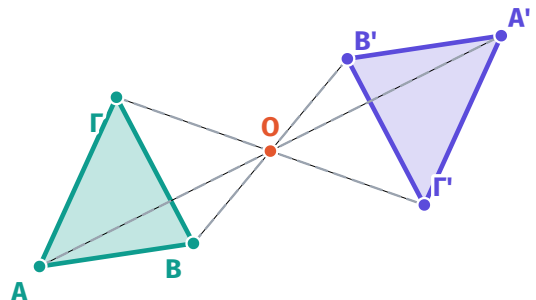
ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΤΟΥ A ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ O

- 1 Φέρνουμε την ημιευθεία AO και την προεκτείνουμε πέρα από το O .
- 2 Παίρνουμε πάνω στην προέκταση τμήμα $OA' = OA$.
- 3 Το A' είναι το συμμετρικό του A ως προς το O .

2 Συμμετρικό σχήματος ως προς σημείο

Όπως και στη συμμετρία ως προς άξονα, για να βρούμε το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου σχήματος ως προς σημείο, βρίσκουμε τα συμμετρικά των **κορυφών** του και τα ενώνουμε.

Το σχήμα $A'B'Γ'$ προκύπτει από το $ABΓ$ αν το **στρέψουμε κατά 180°** (μισή στροφή) γύρω από το O .



Το $A'B'Γ'$ είναι συμμετρικό του $ABΓ$ ως προς το O

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- Δύο σχήματα συμμετρικά ως προς σημείο είναι **ίσα** (ταυτίζονται μετά από στροφή 180°).
- Το συμμετρικό ενός **τμήματος** είναι **ίσο και παράλληλο** τμήμα.
- Το συμμετρικό μιας **ευθείας** είναι ευθεία **παράλληλη** προς αυτήν (ή η ίδια, αν περνά από το O).
- Το συμμετρικό μιας γωνίας είναι **ίση** γωνία.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

Η συμμετρία ως προς σημείο είναι το ίδιο με τη συμμετρία ως προς άξονα: «αναποδογυρίζω» το σχήμα.

✓ ΣΩΣΤΟ

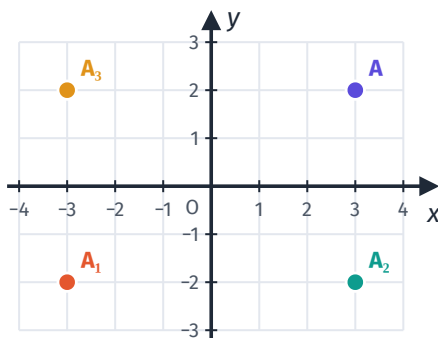
Η συμμετρία ως προς **σημείο** είναι **στροφή** 180° · ως προς **άξονα** είναι **δίπλωση** (καθρέφτης).

Δοκίμασε με ένα γράμμα: το συμμετρικό του «Γ» ως προς σημείο είναι ένα «Γ» **ανάποδο** (στραμμένο), ενώ ως προς κατακόρυφο άξονα είναι ένα «Γ» **καθρεφτισμένο**. Είναι διαφορετικά!



Παράδειγμα 1

Σε σύστημα αξόνων, να βρεις το συμμετρικό του σημείου $A(3, 2)$: **α)** ως προς την αρχή $O(0,0)$, **β)** ως προς τον άξονα $x'x$, **γ)** ως προς τον άξονα $y'y$.



ΛΥΣΗ

α) Ως προς την αρχή, αλλάζουν πρόσημο **και οι δύο** συντεταγμένες: $A_1(-3, -2)$.

β) Ως προς τον $x'x$, αλλάζει πρόσημο μόνο η **τεταγμένη**: $A_2(3, -2)$.

γ) Ως προς τον $y'y$, αλλάζει πρόσημο μόνο η **τετμημένη**: $A_3(-3, 2)$.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις κινούμενα σχήματα που δείχνουν τη στροφή κατά 180° και ασκήσεις συμμετρίας σε σύστημα αξόνων.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 2.4

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να σχεδιάσεις δύο σημεία A, O με $AO = 2,5$ cm και να βρεις το συμμετρικό A' του A ως προς το O . Πόσο είναι το AA' ;
- 2 ●●● Τα A και A' είναι συμμετρικά ως προς το O και $AA' = 9$ cm. Πόσο είναι το OA ;
- 3 ●●● Να σχεδιάσεις ένα τμήμα $AB = 3$ cm και ένα σημείο O έξω από αυτό. Να βρεις το συμμετρικό $A'B'$ ως προς το O . Τι παρατηρείς για τα AB και $A'B'$;
- 4 ●●● Σε σύστημα αξόνων να βρεις τα συμμετρικά των σημείων $B(-2, 5)$ και $\Gamma(4, -1)$ ως προς την αρχή O .
- 5 ●●● Ένα σημείο M είναι μέσο του τμήματος AB . Ποιο είναι το συμμετρικό του A ως προς το M ; Να εξηγήσεις.
- 6 ●●● Να βρεις το συμμετρικό ενός κύκλου $(K, 2$ cm) ως προς ένα σημείο O με $KO = 3$ cm. Πόσο απέχουν τα κέντρα των δύο κύκλων; Τέμνονται οι κύκλοι;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Μάθημα 2.5

Κέντρο συμμετρίας

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ πότε ένα σχήμα έχει **κέντρο συμμετρίας**
- ✓ να αναγνωρίζεις σχήματα με κέντρο συμμετρίας
- ✓ να συνδυάζεις **άξονες** και **κέντρο** συμμετρίας

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα σημείο O λέγεται **κέντρο συμμετρίας** ενός σχήματος, όταν το συμμετρικό **κάθε** σημείου του σχήματος ως προς το O είναι επίσης σημείο του **ίδιου** σχήματος. Πρακτικά: αν **στρέψουμε** το σχήμα κατά 180° γύρω από το O , το σχήμα **συμπίπτει με τον εαυτό του**.

1 Σχήματα με κέντρο συμμετρίας



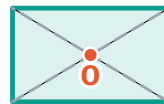
κύκλος



ευθ. τμήμα



παραλληλόγραμμο



ορθογώνιο



κανονικό εξάγωνο

ΒΑΣΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

- Ο **κύκλος** έχει κέντρο συμμετρίας το **κέντρο** του.
- Ένα **ευθύγραμμο τμήμα** έχει κέντρο συμμετρίας το **μέσο** του.
- Το **παραλληλόγραμμο** (και άρα το ορθογώνιο, ο ρόμβος, το τετράγωνο) έχει κέντρο συμμετρίας το **σημείο τομής των διαγωνίων** του.
- Μια **ευθεία** έχει άπειρα κέντρα συμμετρίας (κάθε σημείο της).
- **Κανένα τρίγωνο** δεν έχει κέντρο συμμετρίας!



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Ένα σχήμα μπορεί να έχει άξονες συμμετρίας **χωρίς** να έχει κέντρο (π.χ. το ισόπλευρο τρίγωνο, το γράμμα Α), ή κέντρο **χωρίς** άξονες (π.χ. ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο, τα γράμματα Ζ, Ν, Σ), ή **και τα δύο** (π.χ. τετράγωνο, κύκλος, γράμματα Η, Ο, Χ). Ισχύει όμως ότι **αν ένα σχήμα έχει δύο κάθετους άξονες συμμετρίας, τότε έχει και κέντρο συμμετρίας** το σημείο τομής τους.



Παράδειγμα 1

Ποια από τα κεφαλαία γράμματα Η, Ν, Ζ, Α, Χ, Τ, Ι, Σ έχουν κέντρο συμμετρίας;

ΛΥΣΗ

Έχουν κέντρο συμμετρίας (μένουν ίδια αν τα γυρίσουμε ανάποδα): **Η, Ν, Ζ, Χ, Ι**. Δεν έχουν: **Α, Τ, Σ**.

Σχήμα	Άξονες συμμετρίας	Κέντρο συμμετρίας
Ισοσκελές τρίγωνο	1	όχι
Ισόπλευρο τρίγωνο	3	όχι
Παραλληλόγραμμο (πλάγιο)	0	ναι
Ορθογώνιο	2	ναι
Ρόμβος	2	ναι
Τετράγωνο	4	ναι
Ισοσκελές τραπέζιο	1	όχι
Κύκλος	άπειροι	ναι

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

«Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει κέντρο συμμετρίας, αφού είναι “πολύ συμμετρικό”.»

✓ ΣΩΣΤΟ

Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει 3 άξονες, αλλά **όχι** κέντρο συμμετρίας.

Αν το στρέψουμε κατά 180° , η κορυφή που ήταν «πάνω» θα βρεθεί «κάτω»: το τρίγωνο **δεν** συμπίπτει με τον εαυτό του. (Συμπίπτει όμως με στροφή 120° !)



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις παιχνίδι γνώσεων «βρες τον άξονα και το κέντρο» με λογότυπα, σημαίες και γράμματα.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 2.5

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1

●●● Ποια από τα σχήματα έχουν κέντρο συμμετρίας: **α)** τετράγωνο, **β)** ισοσκελές τρίγωνο, **γ)** κύκλος, **δ)** ρόμβος, **ε)** τραπέζιο, **στ)** ευθύγραμμο τμήμα;

2

●●● Να γράψεις τρεις αριθμούς (π.χ. τριψήφιους) που μένουν ίδιοι αν στρέψουμε το χαρτί κατά 180° (χρησιμοποιώντας ψηφία όπως 0, 1, 8 και το ζευγάρι 6–9).

- 3 ●●● Ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έχει κέντρο συμμετρίας το O . Ποιο είναι το συμμετρικό του A ως προς το O ; Του B ; Τι συμπέρασμα βγάζεις για τις διαγώνιους;
- 4 ●●● Σωστό ή Λάθος; α) Κάθε σχήμα με κέντρο συμμετρίας έχει και άξονα συμμετρίας. β) Ο κύκλος έχει ένα μόνο κέντρο συμμετρίας. γ) Ένα τρίγωνο δεν έχει ποτέ κέντρο συμμετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Μάθημα 2.6

Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη ευθεία

2

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

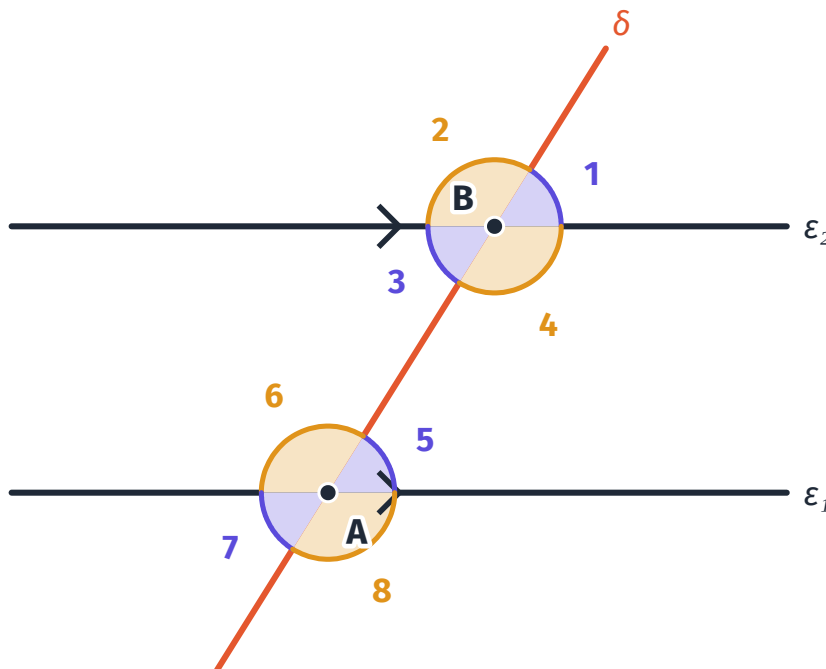
ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ να ονομάζεις τις **οκτώ γωνίες** που σχηματίζουν δύο ευθείες με μια **τέμνουσα**
- ✓ ότι αν οι ευθείες είναι **παράλληλες**, οι **εντός εναλλάξ** και οι **εντός εκτός και επί τα αυτά** γωνίες είναι **ίσες**
- ✓ ότι οι **εντός και επί τα αυτά** γωνίες είναι **παραπληρωματικές**
- ✓ να υπολογίζεις γωνίες σε σχήματα με παράλληλες

1 Οι οκτώ γωνίες

Δύο ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται από μια τρίτη ευθεία δ (την **τέμνουσα**) στα σημεία A και B . Σχηματίζονται **οκτώ γωνίες**, τέσσερις γύρω από το A και τέσσερις γύρω από το B .

- **Εντός** λέγονται οι γωνίες που βρίσκονται **ανάμεσα** στις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$: οι $\hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}$.
- **Εκτός** λέγονται οι υπόλοιπες: οι $\hat{1}, \hat{2}, \hat{7}, \hat{8}$.
- **Εναλλάξ** λέγονται δύο γωνίες σε **διαφορετικές** μεριές της δ , **επί τα αυτά** σε **ίδια** μεριά.



Οι οκτώ γωνίες που σχηματίζει η τέμνουσα δ (οι μωβ είναι ίσες μεταξύ τους, όπως και οι πορτοκαλί, όταν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$)

Ζεύγος γωνιών	Παραδείγματα (στο σχήμα)	Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$
Εντός εναλλάξ	$\hat{3}$ και $\hat{5}$ · $\hat{4}$ και $\hat{6}$	ίσες
Εκτός εναλλάξ	$\hat{1}$ και $\hat{7}$ · $\hat{2}$ και $\hat{8}$	ίσες
Εντός εκτός και επί τα αυτά (αντίστοιχες)	$\hat{1}$ και $\hat{5}$ · $\hat{2}$ και $\hat{6}$ · $\hat{3}$ και $\hat{7}$ · $\hat{4}$ και $\hat{8}$	ίσες
Εντός και επί τα αυτά	$\hat{4}$ και $\hat{5}$ · $\hat{3}$ και $\hat{6}$	παραπληρωματικές (180°)

ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μια τρίτη ευθεία, τότε:

- οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες,
- οι εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες είναι ίσες,
- οι εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι παραπληρωματικές.

Και αντίστροφα: αν δύο ευθείες τέμνονται από τρίτη και σχηματίζουν ίσες εντός εναλλάξ γωνίες (ή ίσες αντίστοιχες, ή παραπληρωματικές εντός και επί τα αυτά), τότε είναι παράλληλες.

Γιατί; Οι παράλληλες ε_1 και ε_2 είναι συμμετρικές ως προς το μέσο του AB . Με αυτή τη συμμετρία (στροφή 180°) η γωνία $\hat{3}$ «πηγαίνει» πάνω στη $\hat{5}$, άρα είναι ίσες. Οι άλλες ισότητες προκύπτουν από τις κατακορυφήν και τις παραπληρωματικές γωνίες.



ΚΟΛΠΟ ΤΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΗ

Στην πράξη, όλες οι οκτώ γωνίες παίρνουν μόνο δύο τιμές: μια οξεία ω και την παραπληρωματική της $180^\circ - \omega$ (εκτός αν η τέμνουσα είναι κάθετη, οπότε όλες είναι 90°). Στο σχήμα, οι μωβ γωνίες είναι όλες ίσες μεταξύ τους και οι πορτοκαλί επίσης. Αυτό το «κόλπο» λύνει τις περισσότερες ασκήσεις γρήγορα!



Παράδειγμα 1

Στο σχήμα του μαθήματος είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $\hat{1} = 58^\circ$. Να βρεις όλες τις άλλες γωνίες.

ΛΥΣΗ

- $\hat{3} = \hat{1} = 58^\circ$ (κατακορυφήν).
- $\hat{2} = \hat{4} = 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$ (παραπληρωματικές της $\hat{1}$).
- $\hat{5} = \hat{1} = 58^\circ$ (εντός εκτός και επί τα αυτά), $\hat{7} = \hat{5} = 58^\circ$.
- $\hat{6} = \hat{8} = 122^\circ$.

Έλεγχος: $\hat{4} + \hat{5} = 122^\circ + 58^\circ = 180^\circ \checkmark$ (εντός και επί τα αυτά).

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

Οι **εντός και επί τα αυτά** γωνίες είναι ίσες.

✓ ΣΩΣΤΟ

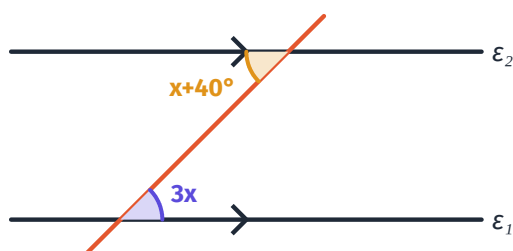
Οι εντός και επί τα αυτά είναι **παραπληρωματικές**. Ίσες είναι οι **εντός εναλλάξ**.

Είναι το πιο συχνό μπέρδεμα. Θυμήσου: «εναλλάξ» (διαφορετικές μεριές) → **ίσες**. «εντός και επί τα αυτά» (ίδια μεριά, ανάμεσα) → **άθροισμα 180°** .



Παράδειγμα 2

Στο σχήμα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. Να βρεις το x και τις γωνίες.



ΛΥΣΗ

Οι δύο σημειωμένες γωνίες είναι **εντός εναλλάξ**, άρα ίσες:

$$3x = x + 40^\circ \Rightarrow 2x = 40^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$$

Οι γωνίες είναι $3 \cdot 20^\circ = 60^\circ$ και $20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$ ✓.



ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Με αυτό το θεώρημα ο **Ερατοσθένης** μέτρησε την περιφέρεια της Γης! Θεώρησε ότι οι ακτίνες του Ήλιου είναι **παράλληλες**, μέτρησε τη γωνία της σκιάς στην Αλεξάνδρεια ($7,2^\circ$) και κατάλαβε ότι η ίδια γωνία (εντός εναλλάξ!) είναι η επίκεντρη γωνία ανάμεσα στην Αλεξάνδρεια και τη Σήνη. Αφού $7,2^\circ$ είναι το $\frac{1}{50}$ του κύκλου, η περιφέρεια είναι 50 φορές η απόσταση των δύο πόλεων.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις κινούμενο σχήμα με τις οκτώ γωνίες και παιχνίδι «αναγνώρισε το ζευγάρι γωνιών».



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 2.6

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη και μία από τις γωνίες που σχηματίζονται είναι 73° . Πόσες μοίρες είναι οι υπόλοιπες επτά;
- 2 ●●● Στο σχήμα του μαθήματος ($\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$) να γράψεις: **α)** δύο ζεύγη εντός εναλλάξ, **β)** δύο ζεύγη εντός και επί τα αυτά, **γ)** δύο ζεύγη εντός εκτός και επί τα αυτά γωνιών.
- 3 ●●● Δύο παράλληλες τέμνονται από τρίτη. Δύο εντός και επί τα αυτά γωνίες διαφέρουν κατά 50° . Να τις βρεις.
- 4 ●●● Δύο ευθείες τέμνονται από τρίτη και σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες 47° και 48° . Είναι οι ευθείες παράλληλες;
- 5 ●●● Δύο παράλληλες τέμνονται από τρίτη και δύο εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι $2x + 10^\circ$ και $3x - 30^\circ$. Να βρεις το x και τις γωνίες.
- 6 ●●● Αν μια ευθεία είναι κάθετη στη μία από δύο παράλληλες, να εξηγήσεις με τις γωνίες του μαθήματος γιατί είναι κάθετη και στην άλλη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Ανακεφαλαίωση

Όλο το κεφάλαιο σε λίγες σελίδες & επαναληπτικές ασκήσεις

1 Η θεωρία με μια ματιά

Συμμετρία ως προς άξονα

- ε μεσοκάθετος του AA'
- «Δίπλωση» / καθρέφτης
- Συμμετρικά σχήματα: ίσα

Άξονας συμμετρίας σχήματος

- Τετράγωνο 4 · ορθογώνιο 2 · ρόμβος 2
- Ισόπλευρο 3 · ισοσκελές 1 · κύκλος άπειροι
- Διχοτόμος: άξονας της γωνίας

Μεσοκάθετος

- Κάθετη στο μέσο
- Κάθε σημείο της ισαπέχει από τα άκρα
- Κατασκευή: ίδιο άνοιγμα διαβήτη

Συμμετρία ως προς σημείο

- O μέσο του AA'
- Στροφή 180°
- Τμήμα $\rightarrow$ ίσο και παράλληλο

Κέντρο συμμετρίας

- Κύκλος, τμήμα, παραλληλόγραμμα: ναι
- Τρίγωνα: ποτέ

Παράλληλες και τέμνουσα

- Εντός εναλλάξ: ίσες
- Αντίστοιχες: ίσες
- Εντός και επί τα αυτά: 180°



Η ΓΛΑΥΚΑ ΘΥΜΙΖΕΙ

Στις ασκήσεις με παράλληλες, **σημείωσε στο σχήμα** όλες τις γωνίες που είναι ίσες με το ίδιο χρώμα ή σημάδι. Θα δεις ότι υπάρχουν μόνο **δύο** διαφορετικές τιμές!



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο **mathgreece.com**

Στο mathgreece.com θα βρεις επαναληπτικό τεστ για τη συμμετρία με διαδραστικά σχήματα.



★ Επαναληπτικές ασκήσεις

Κεφάλαιο 2

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να συμπληρώσεις τον πίνακα με τον αριθμό αξόνων και το αν υπάρχει κέντρο συμμετρίας: ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, ισόπλευρο τρίγωνο, ρόμβος, κύκλος.

- 2 ●●● Να σχεδιάσεις τρίγωνο $AB\Gamma$ και να βρεις το συμμετρικό του: **α)** ως προς την ευθεία $B\Gamma$, **β)** ως προς την κορυφή Γ .
- 3 ●●● Ένα σημείο Σ απέχει 6 cm από τα άκρα ενός τμήματος $AB = 8$ cm. Πού βρίσκεται το Σ ; Πόσα τέτοια σημεία υπάρχουν;
- 4 ●●● Δύο παράλληλες τέμνονται από τρίτη. Μία γωνία είναι τα $\frac{4}{5}$ μιας άλλης, με την οποία είναι εντός και επί τα αυτά. Να βρεις τις δύο γωνίες.
- 5 ●●● Σε σύστημα αξόνων, το σημείο $A(2, -3)$. Να βρεις το συμμετρικό του ως προς: **α)** τον άξονα $x'x$, **β)** τον άξονα $y'y$, **γ)** την αρχή O .
- 6 ●●● Σωστό ή Λάθος; **α)** Το συμμετρικό ευθείας ως προς σημείο είναι παράλληλη ευθεία (ή η ίδια). **β)** Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι άξονες συμμετρίας. **γ)** Οι εντός εναλλάξ γωνίες παραλλήλων είναι ίσες. **δ)** Ένα σχήμα με δύο κάθετους άξονες συμμετρίας έχει κέντρο συμμετρίας.

3

Κεφάλαιο 3

Τρίγωνα – Παραλληλόγραμμα – Τραπεζίδια

Το **τρίγωνο** είναι το πιο απλό πολύγωνο — και ταυτόχρονα το πιο σταθερό: γι' αυτό το βλέπουμε σε γέφυρες, στέγες και γερανούς. Σε αυτό το κεφάλαιο γνωρίζουμε τα **είδη τριγώνων**, αποδεικνύουμε ότι οι γωνίες κάθε τριγώνου έχουν άθροισμα 180° και μελετάμε τα βασικά **τετράπλευρα**: παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, τραπέζιο — και τις **ιδιότητές** τους.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 3.1** Στοιχεία τριγώνου – Είδη τριγώνων
- 3.2** Άθροισμα γωνιών τριγώνου – Ισοσκελές τρίγωνο
- 3.3** Παραλληλόγραμμο – Ορθογώνιο – Ρόμβος – Τετράγωνο – Τραπεζίτιο
- 3.4** Ιδιότητες των τετραπλεύρων
- ★ Ανακεφαλαίωση & επαναληπτικές ασκήσεις



Βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις και κουίζ
για όλο το κεφάλαιο, δωρεάν στο
mathgreece.com



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΤΡΙΓΩΝΑ – ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ – ΤΡΑΠΕΖΙΑ

Μάθημα 3.1

Στοιχεία τριγώνου – Είδη τριγώνων

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τα **κύρια στοιχεία** ενός τριγώνου: κορυφές, πλευρές, γωνίες
- ✓ τα **είδη** τριγώνων ως προς τις **πλευρές** και ως προς τις **γωνίες**
- ✓ τα **δευτερεύοντα στοιχεία**: διάμεσο, διχοτόμο, ύψος
- ✓ την **τριγωνική ανισότητα**: τότε τρία τμήματα σχηματίζουν τρίγωνο

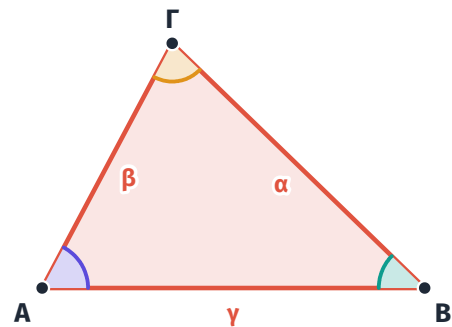
1 Τα κύρια στοιχεία

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει:

- τρεις **κορυφές**: A, B, Γ ,
- τρεις **πλευρές**: $AB, B\Gamma, \Gamma A$,
- τρεις **γωνίες**: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$.

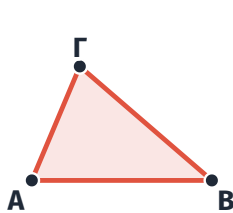
Αυτά τα έξι στοιχεία (πλευρές και γωνίες) λέγονται **κύρια στοιχεία** του τριγώνου.

Η πλευρά $B\Gamma$ λέγεται **απέναντι** πλευρά της γωνίας $\hat{A}$ και συχνά συμβολίζεται α . Ομοίως $\Gamma A = \beta$ (απέναντι από τη $\hat{B}$) και $AB = \gamma$ (απέναντι από τη $\hat{\Gamma}$). Οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ λέγονται **προσκειμένες** στην πλευρά $B\Gamma$.

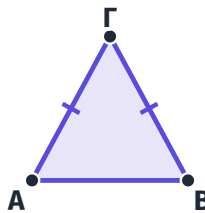


Το τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα κύρια στοιχεία του

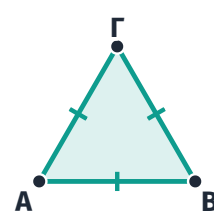
2 Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές



σκαληνό: όλες άνισες



ισοσκελές: δύο ίσες

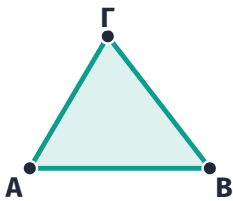


ισόπλευρο: όλες ίσες

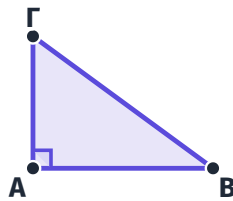
ΟΡΙΣΜΟΙ

- **Σκαληνό** λέγεται το τρίγωνο που έχει **όλες τις πλευρές άνισες**.
- **Ισοσκελές** λέγεται το τρίγωνο που έχει **δύο πλευρές ίσες**. Η τρίτη πλευρά λέγεται **βάση** και η απέναντι κορυφή **κορυφή** του ισοσκελούς.
- **Ισόπλευρο** λέγεται το τρίγωνο που έχει **και τις τρεις πλευρές ίσες**. (Κάθε ισόπλευρο είναι και ισοσκελές!)

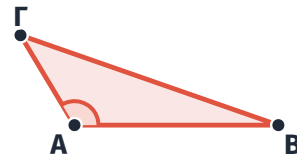
3 Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες



οξυγώνιο: 3 οξείες



ορθογώνιο: 1 ορθή



αμβλυγώνιο: 1 αμβλεία

ΟΡΙΣΜΟΙ

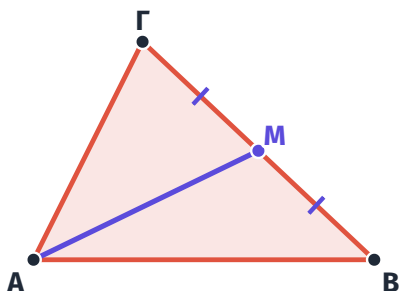
- **Οξυγώνιο** λέγεται το τρίγωνο που έχει **όλες τις γωνίες οξείες**.
- **Ορθογώνιο** λέγεται το τρίγωνο που έχει **μία ορθή** γωνία. Η πλευρά απέναντι από την ορθή λέγεται **υποτείνουσα** και οι άλλες δύο **κάθετες πλευρές**.
- **Αμβλυγώνιο** λέγεται το τρίγωνο που έχει **μία αμβλεία** γωνία.



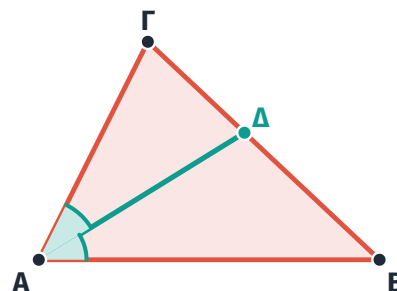
ΠΡΟΣΟΧΗ!

Ένα τρίγωνο **δεν** μπορεί να έχει **δύο** ορθές ή δύο αμβλείες γωνίες (θα το εξηγήσουμε στο Μάθημα 3.2). Άρα **κάθε τρίγωνο έχει τουλάχιστον δύο οξείες γωνίες**. Τα δύο είδη χαρακτηρισμού συνδυάζονται: π.χ. ένα τρίγωνο μπορεί να είναι **ορθογώνιο και ισοσκελές**.

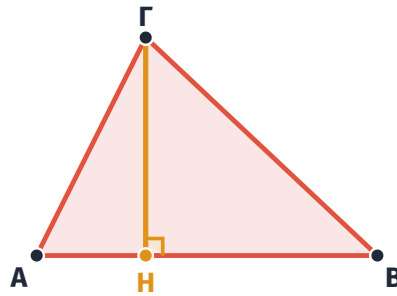
4 Δευτερεύοντα στοιχεία: διάμεσος, διχοτόμος, ύψος



διάμεσος AM



διχοτόμος AD



ύψος ΓΗ

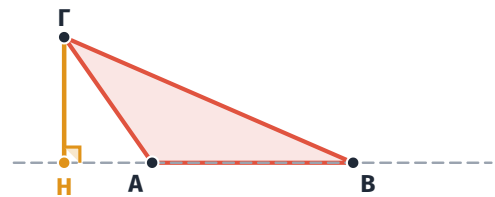
ΟΡΙΣΜΟΙ

- **Διάμεσος** λέγεται το τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το **μέσο** της απέναντι πλευράς.
- **Διχοτόμος** λέγεται το τμήμα της διχοτόμου μιας γωνίας του τριγώνου, από την κορυφή μέχρι την απέναντι πλευρά.
- **Ύψος** λέγεται το **κάθετο** τμήμα από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.

Κάθε τρίγωνο έχει **τρεις** διαμέσους, **τρεις** διχοτόμους και **τρία** ύψη.

Στο **αμβλυγώνιο** τρίγωνο, τα ύψη από τις κορυφές των οξείων γωνιών πέφτουν **έξω** από το τρίγωνο, πάνω στην **προέκταση** της απέναντι πλευράς. Γι' αυτό λέμε «κάθετο προς την **ευθεία** της απέναντι πλευράς».

Στο **ορθογώνιο** τρίγωνο, οι δύο κάθετες πλευρές είναι **και** ύψη!



Ύψος ΓΗ έξω από αμβλυγώνιο τρίγωνο

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ**✗ ΛΑΘΟΣ**

Η **διάμεσος** και η **διχοτόμος** από την ίδια κορυφή είναι πάντα το ίδιο τμήμα.

✓ ΣΩΣΤΟ

Γενικά είναι **διαφορετικά** τμήματα· ταυτίζονται μόνο σε ειδικά τρίγωνα (π.χ. στο ισοσκελές, από την κορυφή του).

Η διάμεσος «κόβει» την **απέναντι πλευρά** στη μέση· η διχοτόμος «κόβει» τη **γωνία** στη μέση. Είναι δύο διαφορετικά πράγματα, όπως φαίνεται στα σχήματα.

5 Η τριγωνική ανισότητα

ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

Σε κάθε τρίγωνο, **κάθε πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων**:

$$\alpha < \beta + \gamma \quad \beta < \gamma + \alpha \quad \gamma < \alpha + \beta$$

Γιατί; Επειδή το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ είναι η **συντομότερη** διαδρομή από το B στο Γ — πιο σύντομη από τη «στροφή» μέσω του A .



Παράδειγμα 1

Υπάρχει τρίγωνο με πλευρές: **α)** 4, 5, 7 cm; **β)** 3, 4, 8 cm; **γ)** 2, 5, 7 cm;

ΛΥΣΗ

Αρκεί να ελέγξουμε τη **μεγαλύτερη** πλευρά: είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο;

α) $7 < 4 + 5 = 9$ ✓: υπάρχει.

β) $8 < 3 + 4 = 7$; Όχι: **δεν** υπάρχει (τα δύο μικρά τμήματα δεν «φτάνουν» να συναντηθούν).

γ) $7 < 2 + 5 = 7$; Όχι ($7 = 7$): τα τμήματα θα έπεφταν **πάνω στην ίδια ευθεία**, δεν σχηματίζουν τρίγωνο.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΜΕ ΓΝΩΣΤΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ (Π.Χ. 5, 4, 3 CM)

- 1 Σχεδιάζουμε τη μία πλευρά, π.χ. $B\Gamma = 5$ cm.
- 2 Με κέντρο το B και ακτίνα 4 cm γράφουμε ένα τόξο.
- 3 Με κέντρο το Γ και ακτίνα 3 cm γράφουμε ένα δεύτερο τόξο.
- 4 Το σημείο τομής των τόξων είναι η τρίτη κορυφή A . Ενώνουμε.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για τα είδη τριγώνων και τα δευτερεύοντα στοιχεία, καθώς και διαδραστικό εργαλείο κατασκευής τριγώνου από τις πλευρές του.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 3.1

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να χαρακτηρίσεις ως προς τις πλευρές τα τρίγωνα με πλευρές: **α)** 5, 5, 5, **β)** 4, 6, 4, **γ)** 3, 4, 5, **δ)** 7, 7, 2.

- 2 ●●● Να χαρακτηρίσεις ως προς τις γωνίες τα τρίγωνα με γωνίες: **α)** 60° , 70° , 50° , **β)** 90° , 35° , 55° , **γ)** 110° , 40° , 30° .
- 3 ●●● Ποιες από τις τριάδες μπορούν να είναι πλευρές τριγώνου; **α)** 6, 8, 10, **β)** 2, 3, 6, **γ)** 5, 5, 9, **δ)** 1, 1, 2.
- 4 ●●● Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει βάση 6 cm και περίμετρο 20 cm. Πόσο είναι καθεμία από τις ίσες πλευρές;
- 5 ●●● Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει δύο πλευρές 3 cm και 7 cm. Ποια είναι η βάση και ποια η περίμετρος; (Σκέψου την τριγωνική ανισότητα!)
- 6 ●●● Να κατασκευάσεις με κανόνα και διαβήτη τρίγωνο με πλευρές 6 cm, 5 cm και 4 cm. Να φέρεις μια διάμεσο, μια διχοτόμο και ένα ύψος του.
- 7 ●●● Σωστό ή Λάθος; **α)** Κάθε ισόπλευρο είναι ισοσκελές. **β)** Κάθε ισοσκελές είναι ισόπλευρο. **γ)** Ένα τρίγωνο μπορεί να είναι ορθογώνιο και αμβλυγώνιο. **δ)** Στο ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες πλευρές είναι ύψη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΤΡΙΓΩΝΑ – ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ – ΤΡΑΠΕΖΙΑ

Μάθημα 3.2

Άθροισμα γωνιών τριγώνου – Ιδιότητες
ισοσκελούς τριγώνου

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ ότι το **άθροισμα των γωνιών** κάθε τριγώνου είναι 180° — και **γιατί**
- ✓ τι είναι **εξωτερική γωνία** τριγώνου και πόσο είναι
- ✓ τις **ιδιότητες** του **ισοσκελούς** και του **ισόπλευρου** τριγώνου
- ✓ να **υπολογίζεις** άγνωστες γωνίες σε τρίγωνα

1 Το άθροισμα των γωνιών

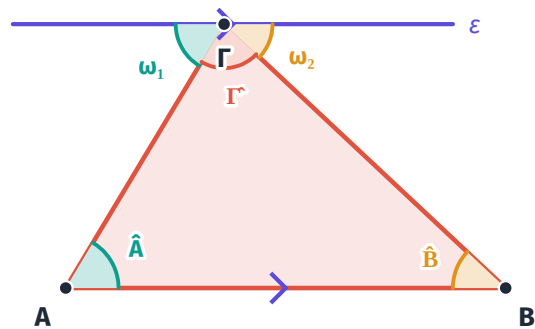
Θεώρημα: Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

Απόδειξη. Από την κορυφή Γ φέρνουμε την ευθεία ε παράλληλη προς την AB .

- Η ω_1 είναι ίση με την $\hat{A}$ (εντός εναλλάξ, με τέμνουσα την AG).
- Η ω_2 είναι ίση με τη $\hat{B}$ (εντός εναλλάξ, με τέμνουσα τη $B\Gamma$).
- Οι $\omega_1, \hat{\Gamma}, \omega_2$ σχηματίζουν **ευθεία γωνία**: $\omega_1 + \hat{\Gamma} + \omega_2 = 180^\circ$.

Άρα $\hat{A} + \hat{\Gamma} + \hat{B} = 180^\circ$.



Απόδειξη με την παράλληλη ε από το Γ



ΔΟΚΙΜΑΣΕ ΤΟ!

Ένα πείραμα για το σπίτι: κόψε ένα χάρτινο τρίγωνο, σκίσε τις τρεις γωνίες του και ένωσέ τες έτσι ώστε να ακουμπούν οι κορυφές τους. Θα σχηματίσουν **πάντα** μια ευθεία γωνία (180°), όποιο κι αν είναι το τρίγωνο!

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

- Ένα τρίγωνο έχει **το πολύ μία** ορθή ή αμβλεία γωνία (αλλιώς το άθροισμα θα ξεπερνούσε τις 180°).
- Σε **ορθογώνιο** τρίγωνο οι δύο οξείες γωνίες είναι **συμπληρωματικές**: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$.
- Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε έχουν ίσες και τις τρίτες γωνίες.

**Παράδειγμα 1**

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 48^\circ$ και $\hat{B} = 67^\circ$. Να βρεις τη $\hat{\Gamma}$ και να χαρακτηρίσεις το τρίγωνο.

ΛΥΣΗ

$\hat{\Gamma} = 180^\circ - 48^\circ - 67^\circ = 65^\circ$. Όλες οι γωνίες είναι οξείες, άρα το τρίγωνο είναι **οξυγώνιο** (και σκαληνό, αφού οι γωνίες είναι άνισες).

**Παράδειγμα 2**

Οι γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες με τους αριθμούς 2, 3, 5. Να τις βρεις.

ΛΥΣΗ

$180^\circ : (2 + 3 + 5) = 18^\circ$. Γωνίες: $36^\circ, 54^\circ, 90^\circ$ — το τρίγωνο είναι **ορθογώνιο**.

2 Εξωτερική γωνία τριγώνου

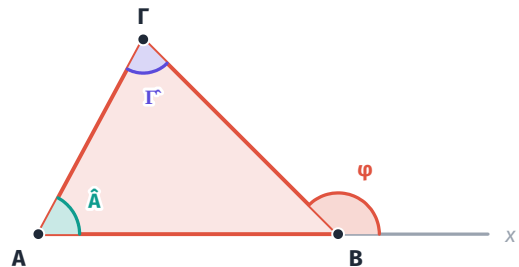
Αν προεκτείνουμε την πλευρά AB πέρα από το B , σχηματίζεται η γωνία $\varphi = \Gamma\hat{B}x$, που λέγεται **εξωτερική γωνία** του τριγώνου στην κορυφή B .

Η εξωτερική γωνία είναι **παραπληρωματική** της εσωτερικής $\hat{B}$. Επιπλέον:

$$\varphi = \hat{A} + \hat{\Gamma}$$

Κάθε εξωτερική γωνία ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.

(Γιατί; Και η φ και το άθροισμα $\hat{A} + \hat{\Gamma}$ ισούνται με $180^\circ - \hat{B}$.)



Η εξωτερική γωνία $\varphi = \hat{A} + \hat{\Gamma}$

**Παράδειγμα 3**

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η εξωτερική γωνία στην κορυφή Γ είναι 125° και $\hat{A} = 70^\circ$. Να βρεις τις $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

ΛΥΣΗ

$\hat{A} + \hat{B} = 125^\circ \Rightarrow \hat{B} = 55^\circ$. Η $\hat{\Gamma}$ είναι παραπληρωματική της εξωτερικής: $\hat{\Gamma} = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$. (Το τρίγωνο είναι ισοσκελές, αφού $\hat{B} = \hat{\Gamma}$!)

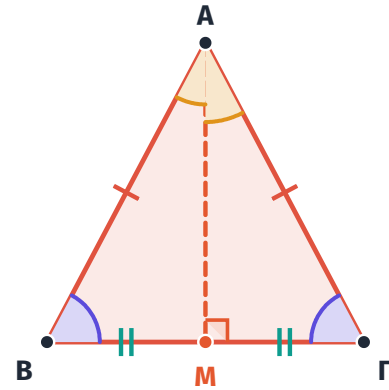
3 Το ισοσκελές τρίγωνο

Στο **ισοσκελές** τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ (βάση τη $B\Gamma$):

- Οι **γωνίες της βάσης** είναι **ίσες**: $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

2. Η **διχοτόμος** της γωνίας της κορυφής $\hat{A}$ είναι **ταυτόχρονα διάμεσος και ύψος** (και μεσοκάθετος της βάσης).
3. Η ευθεία AM είναι **άξονας συμμετρίας** του τριγώνου.

Αντίστροφα: αν ένα τρίγωνο έχει **δύο γωνίες ίσες**, τότε είναι **ισοσκελές** (οι πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι ίσες).



Ισοσκελές τρίγωνο: AM διχοτόμος, διάμεσος και ύψος

ΤΟ ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

Το ισόπλευρο τρίγωνο είναι ισοσκελές ως προς **κάθε** πλευρά του, άρα:

- έχει **όλες τις γωνίες ίσες**: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 180^\circ : 3 = 60^\circ$,
- σε **κάθε** κορυφή, διχοτόμος, διάμεσος και ύψος **ταυτίζονται**,
- έχει **τρεις** άξονες συμμετρίας.



Παράδειγμα 4

Σε ισοσκελές τρίγωνο η γωνία της κορυφής είναι 40° . Να βρεις τις γωνίες της βάσης. Και αν μια γωνία της **βάσης** είναι 40° ;

ΛΥΣΗ

α) Οι γωνίες της βάσης είναι ίσες: $(180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$ η καθεμία.

β) Αν μια γωνία της βάσης είναι 40° , τότε και η άλλη είναι 40° , και η γωνία της κορυφής $180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ (αμβλυγώνιο ισοσκελές).

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✗ ΛΑΘΟΣ

«Σε ισοσκελές τρίγωνο με μία γωνία 40° , οι άλλες είναι 70° και 70° .»

✓ ΣΩΣΤΟ

Υπάρχουν **δύο** περιπτώσεις: $40^\circ, 70^\circ, 70^\circ$ ή $40^\circ, 40^\circ, 100^\circ$.

Αν δεν μας λένε αν η γωνία είναι **της κορυφής** ή **της βάσης**, πρέπει να εξετάσουμε **και τις δύο** περιπτώσεις.



Παράδειγμα 5

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο, πόσες μοίρες είναι οι οξείες γωνίες;

ΛΥΣΗ

Η ορθή γωνία πρέπει να είναι η γωνία της **κορυφής** (δεν γίνεται δύο ορθές). Οι γωνίες της βάσης:
 $(180^\circ - 90^\circ) : 2 = 45^\circ$.



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για το άθροισμα γωνιών τριγώνου (με το πείραμα του σκισμένου χαρτιού!) και πολλές ασκήσεις υπολογισμού γωνιών.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 3.2

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να βρεις την τρίτη γωνία τριγώνου, αν οι δύο είναι: **α)** 50° και 60° , **β)** 90° και 27° , **γ)** 105° και $45^\circ 30'$.
- 2 ●●● Μπορεί ένα τρίγωνο να έχει γωνίες: **α)** 60° , 60° , 60° , **β)** 90° , 90° , 0° , **γ)** 100° , 50° , 40° , **δ)** 30° , 60° , 90° ;
- 3 ●●● Σε ορθογώνιο τρίγωνο η μία οξεία γωνία είναι διπλάσια της άλλης. Να βρεις τις γωνίες.
- 4 ●●● Σε ισοσκελές τρίγωνο η γωνία της κορυφής είναι κατά 30° μεγαλύτερη από κάθε γωνία της βάσης. Να βρεις τις γωνίες.
- 5 ●●● Η εξωτερική γωνία στην κορυφή B τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 120° και $\hat{A} = 2\hat{\Gamma}$. Να βρεις τις γωνίες του τριγώνου.
- 6 ●●● Οι εξωτερικές γωνίες ενός τριγώνου (μία σε κάθε κορυφή) έχουν πάντα το ίδιο άθροισμα. Πόσο είναι; Να εξηγήσεις.
- 7 ●●● Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) η διάμεσος AM σχηματίζει με την πλευρά AB γωνία 25° . Να βρεις όλες τις γωνίες του τριγώνου και τη γωνία $\hat{AMB}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΤΡΙΓΩΝΑ – ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ – ΤΡΑΠΕΖΙΑ

Μάθημα 3.3

Παραλληλόγραμμο – Ορθογώνιο – Ρόμβος – Τετράγωνο – Τραπεζίο – Ισοσκελές τραπέζιο

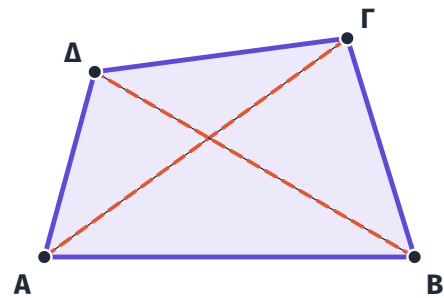
ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τα στοιχεία ενός **τετραπλεύρου** και ότι το άθροισμα των γωνιών του είναι 360°
- ✓ τους **ορισμούς** των βασικών τετραπλεύρων
- ✓ πώς σχετίζονται μεταξύ τους (ποιο είναι «ειδική περίπτωση» ποιου)

1 Το τετράπλευρο

Ένα **τετράπλευρο** $AB\Gamma\Delta$ έχει τέσσερις **κορυφές**, τέσσερις **πλευρές** και τέσσερις **γωνίες**.

- **Απέναντι** πλευρές: AB και $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$ και ΔA .
- **Διαδοχικές** πλευρές: με κοινή κορυφή (π.χ. AB και $B\Gamma$).
- **Απέναντι** γωνίες: $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$.
- **Διαγώνιοι**: $A\Gamma$ και $B\Delta$.

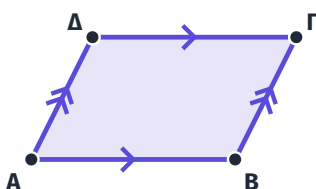
Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και οι διαγώνιοί του

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ

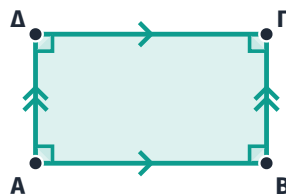
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ$$

Γιατί; Η διαγώνιος $A\Gamma$ χωρίζει το τετράπλευρο σε **δύο τρίγωνα**, καθένα με άθροισμα γωνιών 180° : $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$.

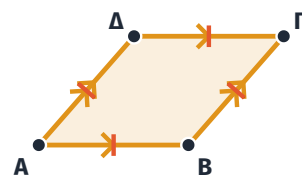
2 Τα βασικά τετράπλευρα



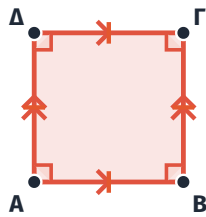
παραλληλόγραμμο



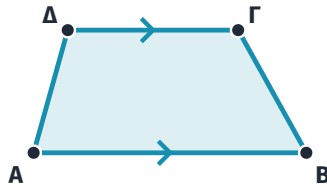
ορθογώνιο



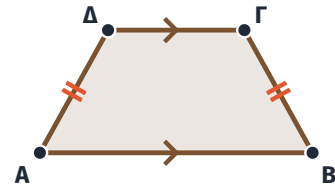
ρόμβος



τετράγωνο



τραπέζιο



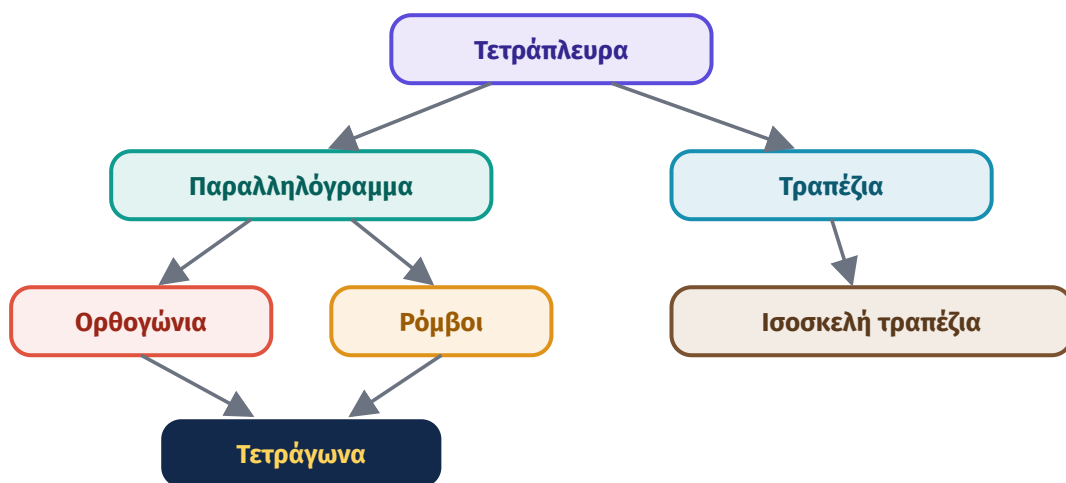
ισοσκελές τραπέζιο

Τετράπλευρο	Ορισμός
Παραλληλόγραμμο	έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες ($AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$)
Ορθογώνιο	παραλληλόγραμμο με μία ορθή γωνία (οπότε έχει και τις τέσσερις ορθές)
Ρόμβος	παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες (οπότε και τις τέσσερις ίσες)
Τετράγωνο	παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος (όλες οι γωνίες ορθές, όλες οι πλευρές ίσες)
Τραπέζιο	τετράπλευρο με μόνο δύο απέναντι πλευρές παράλληλες (τις βάσεις)
Ισοσκελές τραπέζιο	τραπέζιο με τις μη παράλληλες πλευρές ίσες

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ

Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$: οι AB και $\Gamma\Delta$ λέγονται **βάσεις** (μεγάλη και μικρή), οι $A\Delta$ και $B\Gamma$ **μη παράλληλες πλευρές**. Η απόσταση των βάσεων λέγεται **ύψος** του τραpezίου. Αν μία από τις μη παράλληλες πλευρές είναι κάθετη στις βάσεις, το τραπέζιο λέγεται **ορθογώνιο τραπέζιο**.

3 Η «οικογένεια» των τετραπλεύρων



Κάθε βέλος σημαίνει «ειδική περίπτωση του». Π.χ. κάθε τετράγωνο είναι και ορθογώνιο και ρόμβος και παραλληλόγραμμο.

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

«Το τετράγωνο **δεν** είναι ορθογώνιο, γιατί έχει όλες τις πλευρές ίσες.»

✓ ΣΩΣΤΟ

Το τετράγωνο **είναι** ορθογώνιο (έχει τέσσερις ορθές γωνίες) **και** ρόμβος.

Στα Μαθηματικά, ένα σχήμα ανήκει σε μια κατηγορία αν **ικανοποιεί τον ορισμό** της. Το ορθογώνιο ορίζεται από τις **ορθές γωνίες** — δεν απαιτεί οι πλευρές να είναι άνισες. Άρα το τετράγωνο είναι ένα «ειδικό» ορθογώνιο. Ομοίως, **το παραλληλόγραμμο δεν είναι τραπέζιο**, γιατί το τραπέζιο έχει **μόνο ένα** ζεύγος παράλληλων πλευρών.



Παράδειγμα 1

Σε ένα τετράπλευρο οι τρεις γωνίες είναι 85° , 95° και 110° . Πόση είναι η τέταρτη;

ΛΥΣΗ

$$360^\circ - (85^\circ + 95^\circ + 110^\circ) = 360^\circ - 290^\circ = 70^\circ.$$



Παράδειγμα 2

Ένας ρόμβος έχει περίμετρο 26 cm. Πόση είναι η πλευρά του; Ένα τετράγωνο έχει την ίδια περίμετρο: πόσο είναι το εμβαδόν του;

ΛΥΣΗ

Πλευρά ρόμβου: $26 : 4 = 6,5$ cm. Το τετράγωνο έχει επίσης πλευρά 6,5 cm και εμβαδόν $6,5^2 = 42,25$ cm².



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις διαδραστικό «δέντρο των τετραπλεύρων» και κουίζ «ποιο τετράπλευρο είμαι».



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 3.3

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●●● Να σχεδιάσεις σε τετραγωνισμένο χαρτί: ένα παραλληλόγραμμο, ένα ορθογώνιο, έναν ρόμβο, ένα τετράγωνο, ένα τραπέζιο και ένα ισοσκελές τραπέζιο.
- 2 ●●● Οι γωνίες ενός τετραπλεύρου είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4. Να τις βρεις.
- 3 ●●● Σωστό ή Λάθος; **α)** Κάθε ορθογώνιο είναι παραλληλόγραμμο. **β)** Κάθε ρόμβος είναι τετράγωνο. **γ)** Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος. **δ)** Κάθε παραλληλόγραμμο είναι τραπέζιο. **ε)** Ένα τετράπλευρο μπορεί να έχει τέσσερις αμβλείες γωνίες.

4

••• Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 30 cm και το μήκος του είναι διπλάσιο του πλάτους. Να βρεις τις διαστάσεις και το εμβαδόν.

5

••• Ποιο τετράπλευρο είμαι; **α)** «Έχω τέσσερις ίσες πλευρές αλλά καμία ορθή γωνία». **β)** «Έχω μόνο δύο παράλληλες πλευρές και οι άλλες δύο είναι ίσες». **γ)** «Έχω τέσσερις ορθές γωνίες και τέσσερις ίσες πλευρές».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΤΡΙΓΩΝΑ – ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ – ΤΡΑΠΕΖΙΑ

Μάθημα 3.4

Ιδιότητες παραλληλογράμμου – ορθογωνίου –
 ρόμβου – τετραγώνου – τραπεζίου –
 ισοσκελούς τραπεζίου

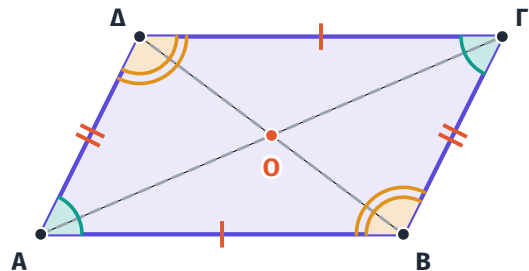
ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ✓ τις **ιδιότητες** των πλευρών, των γωνιών και των **διαγωνίων** κάθε τετραπλεύρου
- ✓ τους **άξονες** και τα **κέντρα συμμετρίας** τους
- ✓ να χρησιμοποιείς τις ιδιότητες για να **υπολογίζεις** πλευρές, γωνίες και τμήματα

1 Ιδιότητες του παραλληλογράμμου

Σε κάθε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$:

1. Οι **απέναντι πλευρές** είναι **ίσες**: $AB = \Gamma\Delta$,
 $A\Delta = B\Gamma$.
2. Οι **απέναντι γωνίες** είναι **ίσες**: $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, $\hat{B} = \hat{\Delta}$.
3. Δύο **διαδοχικές γωνίες** είναι **παραπληρωματικές**:
 $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ (εντός και επί τα αυτά!).
4. Οι **διαγώνιοι διχοτομούνται**: το σημείο τομής
 τους O είναι **μέσο** και των δύο ($OA = O\Gamma$,
 $OB = O\Delta$).
5. Το O είναι **κέντρο συμμετρίας** του
 παραλληλογράμμου.



Οι ιδιότητες του παραλληλογράμμου



Παράδειγμα 1

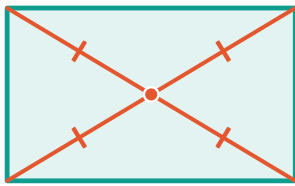
Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = 65^\circ$, $AB = 7 \text{ cm}$ και $B\Gamma = 4 \text{ cm}$. Να βρεις τις άλλες γωνίες και την περίμετρο.

ΛΥΣΗ

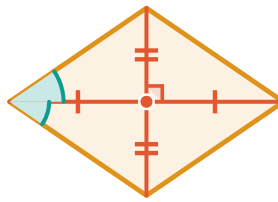
$\hat{\Gamma} = \hat{A} = 65^\circ$ (απέναντι). $\hat{B} = \hat{\Delta} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$ (διαδοχικές παραπληρωματικές).

Περίμετρος: $2 \cdot (7 + 4) = 22 \text{ cm}$.

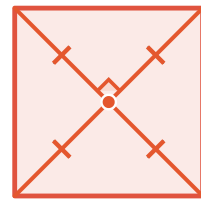
2 Ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο



ορθογώνιο: ίσες διαγώνιοι



ρόμβος: κάθετες διαγώνιοι, διχοτόμοι γωνιών



τετράγωνο: όλα μαζί

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Ορθογώνιο, ρόμβος και τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμα, άρα έχουν **όλες** τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου. Επιπλέον:

- **Ορθογώνιο:** οι διαγώνιοι είναι **ίσες**. Έχει **δύο άξονες συμμετρίας** (τις μεσοκαθέτους των πλευρών).
- **Ρόμβος:** οι διαγώνιοι είναι **κάθετες** και **διχοτομούν τις γωνίες** του. Έχει **δύο άξονες συμμετρίας** (τις διαγώνιους).
- **Τετράγωνο:** οι διαγώνιοι είναι **ίσες, κάθετες** και **διχοτομούν τις γωνίες** (σχηματίζουν 45° με τις πλευρές). Έχει **τέσσερις άξονες συμμετρίας**.

3

ΤΡΙΓΩΝΑ



Παράδειγμα 2

Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ οι διαγώνιοι τέμνονται στο O και $A\Gamma = 10$ cm. Πόσο είναι το $B\Delta$; Πόσο είναι το OB ; Τι είδους τρίγωνο είναι το OAB ;

ΛΥΣΗ

$B\Delta = A\Gamma = 10$ cm (ίσες διαγώνιοι). $OB = 10 : 2 = 5$ cm (διχοτομούνται). Επίσης $OA = 5$ cm, άρα το τρίγωνο OAB είναι **ισοσκελές** ($OA = OB$).



Παράδειγμα 3

Σε ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = 70^\circ$. Οι διαγώνιοι τέμνονται στο O . Να βρεις τις γωνίες του τριγώνου OAB .

ΛΥΣΗ

Η διαγώνιος $A\Gamma$ διχοτομεί τη $\hat{A}$: $O\hat{A}B = 35^\circ$. Οι διαγώνιοι είναι κάθετες: $A\hat{O}B = 90^\circ$. Άρα $O\hat{B}A = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$. (Έλεγχος: $\hat{B} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ και η $B\Delta$ τη διχοτομεί: $55^\circ \checkmark$.)

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

✖ ΛΑΘΟΣ

«Στο ορθογώνιο οι διαγώνιοι είναι κάθετες.»

✓ ΣΩΣΤΟ

Στο ορθογώνιο οι διαγώνιοι είναι **ίσες**· **κάθετες** είναι στον **ρόμβο** (και στο τετράγωνο).

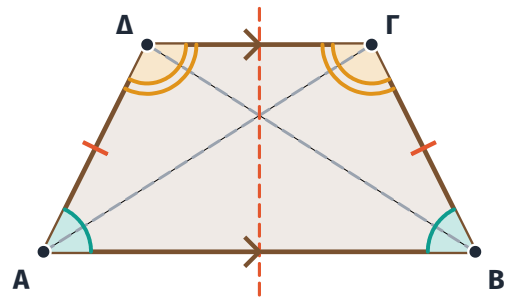
Σχεδιάσε ένα μακρόστενο ορθογώνιο: οι διαγώνιοί του τέμνονται με γωνία πολύ διαφορετική από 90° . Μόνο όταν το ορθογώνιο γίνει τετράγωνο οι διαγώνιοι γίνονται κάθετες.

3 Ιδιότητες τραπέζιου και ισοσκελούς τραπέζιου

Σε **κάθε** τραπέζιο με βάσεις $AB \parallel \Gamma\Delta$: οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια **μη παράλληλη** πλευρά είναι **παραπληρωματικές**: $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ (εντός και επί τα αυτά).

Στο **ισοσκελές** τραπέζιο επιπλέον:

- οι **γωνίες κάθε βάσης** είναι **ίσες**: $\hat{A} = \hat{B}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$,
- οι **διαγώνιοι** είναι **ίσες**: $A\Gamma = B\Delta$,
- έχει **έναν άξονα συμμετρίας**: τη **μεσοκάθετο των βάσεων**.



Ισοσκελές τραπέζιο και ο άξονας συμμετρίας του



Παράδειγμα 4

Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $\hat{A} = 62^\circ$. Να βρεις τις άλλες γωνίες.

ΛΥΣΗ

$\hat{B} = \hat{A} = 62^\circ$ (ίσες γωνίες βάσης). $\hat{\Delta} = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 118^\circ$.

4 Συνοπτικός πίνακας

Ιδιότητα	Παραλληλόγ.	Ορθογώνιο	Ρόμβος	Τετράγωνο	Ισοσκ. τραπέζιο
Απέναντι πλευρές ίσες	✓	✓	✓	✓	—
Όλες οι πλευρές ίσες	—	—	✓	✓	—
Απέναντι γωνίες ίσες	✓	✓	✓	✓	—
Όλες οι γωνίες ορθές	—	✓	—	✓	—
Διαγώνιοι διχοτομούνται	✓	✓	✓	✓	—
Διαγώνιοι ίσες	—	✓	—	✓	✓
Διαγώνιοι κάθετες	—	—	✓	✓	—
Άξονες συμμετρίας	0	2	2	4	1
Κέντρο συμμετρίας	✓	✓	✓	✓	—

**ΠΡΟΣΟΧΗ!**

Ο πίνακας αυτός είναι «χρυσός» για τις επαναλήψεις. Μια καλή άσκηση: σκέψου **γιατί** κάθε ✓ ισχύει, χρησιμοποιώντας τις **συμμετρίες** του σχήματος!



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο για τις ιδιότητες όλων των τετραπλεύρων και εκτυπώσιμο πίνακα επανάληψης.



★ Άλυτες ασκήσεις

Μάθημα 3.4

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

- Σε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ είναι $\hat{B} = 3\hat{A}$. Να βρεις όλες τις γωνίες.
- Σε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ οι διαγώνιοι τέμνονται στο O , $OA = 3,5$ cm και $OB = 5$ cm. Να βρεις τις διαγώνιους. Είναι ορθογώνιο;
- Ένας ρόμβος έχει μία γωνία 120° και πλευρά 5 cm. Να βρεις τις γωνίες του και την περίμετρο. Τι τρίγωνα σχηματίζει η μικρή διαγώνιος;
- Σε τετράγωνο $ABΓΔ$, πόση γωνία σχηματίζει η διαγώνιος $ΑΓ$ με την πλευρά AB ; Πόση είναι η γωνία $\hat{A}OB$, όπου O το κέντρο;
- Σε ισοσκελές τραπέζιο οι γωνίες της μεγάλης βάσης είναι 70° η καθεμία. Να βρεις τις γωνίες της μικρής βάσης.

- 6 ●●● Ένα τραπέζιο έχει $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 125^\circ$ (με $AB \parallel \Gamma\Delta$). Να βρεις τις $\hat{B}, \hat{\Delta}$. Τι είδους τραπέζιο είναι;
- 7 ●●● Ποιο τετράπλευρο είναι το $AB\Gamma\Delta$, αν: **α)** οι διαγώνιοι διχοτομούνται και είναι ίσες, **β)** οι διαγώνιοι διχοτομούνται και είναι κάθετες, **γ)** οι διαγώνιοι διχοτομούνται, είναι ίσες και κάθετες;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΤΡΙΓΩΝΑ – ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ – ΤΡΑΠΕΖΙΑ

Ανακεφαλαίωση

Όλο το κεφάλαιο σε λίγες σελίδες & επαναληπτικές ασκήσεις

1 Η θεωρία με μια ματιά

Τρίγωνα

- Σκαληνό, ισοσκελές, ισόπλευρο (πλευρές)
- Οξυγώνιο, ορθογώνιο, αμβλυγώνιο (γωνίες)
- Διάμεσος, διχοτόμος, ύψος

Γωνίες τριγώνου

- $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$
- Εξωτερική = άθροισμα απέναντι εσωτερικών
- Ορθογώνιο: οξείες συμπληρωματικές

Ισοσκελές – Ισόπλευρο

- Ίσες γωνίες βάσης
- Διχοτόμος κορυφής = διάμεσος = ύψος
- Ισόπλευρο: 60° , 3 άξονες

Τετράπλευρα

- Άθροισμα γωνιών 360°
- Παραλληλόγραμμο: απέναντι ίσες, διαγώνιοι διχοτομούνται
- Ορθογώνιο: ίσες διαγ. · Ρόμβος: κάθετες διαγ.



Η ΓΛΑΥΚΑ ΘΥΜΙΖΕΙ

Πριν από το διαγώνισμα, φτιάξε μόνος σου τον **συνοπτικό πίνακα** των ιδιοτήτων των τετραπλεύρων (Μάθημα 3.4) **χωρίς να κοιτάς**. Αν τον γράψεις σωστά, ξέρεις το κεφάλαιο!



Θέλεις περισσότερα; Μπες στο mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις μεγάλο επαναληπτικό τεστ Γεωμετρίας για όλη την ύλη της Α' Γυμνασίου, με βίντεο-λύσεις.



★ Επαναληπτικές ασκήσεις

Κεφάλαιο 3

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

Βαθμός δυσκολίας: ●●● εύκολη ●●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●●● Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = \hat{B} + 20^\circ$ και $\hat{\Gamma} = \hat{B} - 20^\circ$. Να βρεις τις γωνίες και να χαρακτηρίσεις το τρίγωνο.

2 ●●● Σε ισοσκελές τρίγωνο η εξωτερική γωνία στην κορυφή είναι 100° . Να βρεις τις γωνίες του τριγώνου.

- 3 ●●● Ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα τετράγωνο έχουν την ίδια περίμετρο 36 cm. Ποια είναι η πλευρά του καθενός;
- 4 ●●● Σε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ η διχοτόμος της $\hat{A}$ σχηματίζει με την πλευρά AB γωνία 35° . Να βρεις όλες τις γωνίες του παραλληλογράμμου.
- 5 ●●● Υπάρχει τρίγωνο με πλευρές 5 cm, 9 cm, 3 cm; Υπάρχει τρίγωνο με γωνίες 45° , 45° , 90° ; Να εξηγήσεις.
- 6 ●●● Ένα ορθογώνιο $ABΓΔ$ έχει $AB = 8$ cm και η διαγώνιος σχηματίζει με την AB γωνία 30° . Αν οι διαγώνιοι τέμνονται στο O , να βρεις τις γωνίες του τριγώνου OAB και του τριγώνου OBT .
- 7 ●●● Σωστό ή Λάθος; α) Ένα τρίγωνο μπορεί να έχει δύο αμβλείες γωνίες. β) Η εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε απέναντι εσωτερική. γ) Ο ρόμβος έχει ίσες διαγώνιους. δ) Το ισοσκελές τραπέζιο έχει κέντρο συμμετρίας. ε) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαδοχικές γωνίες είναι παραπληρωματικές.

ΤΕΛΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Λύσεις των ασκήσεων

Οργανωμένες ανά κεφάλαιο και μάθημα. Ο αριθμός κάθε λύσης είναι ίδιος με τον αριθμό της άσκησης. Θυμήσου: πρώτα προσπαθείς, μετά ελέγχεις!

ΛΥΣΕΙΣ · ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικές γεωμετρικές έννοιες

Μάθημα 1.1 · Σημείο – Ευθύγραμμο τμήμα – Ευθεία – Ημιευθεία – Επίπεδο – Ημιεπίπεδο

1 α) Δύο σημεία K, Λ ενωμένα με χάρακα. β) Μια ευθεία (χωρίς άκρα) που περιέχει το M – υπάρχουν άπειρες τέτοιες. γ) Μια ημιευθεία με αρχή το O και η προέκτασή της προς την άλλη μεριά, Ox' .

2 α) Λ , β) Σ , γ) Λ (μόνο αρχή), δ) Σ , ε) Λ .

3 $AB, AG, AD, BG, BD, \Gamma\Delta$: 6 τμήματα.

4 Αντικείμενες: BA και $B\Gamma$. Οι $B\Gamma$ και $B\Delta$ είναι η ίδια ημιευθεία (ίδια αρχή, ίδια κατεύθυνση).

5 5 σημεία: $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. 10 σημεία: $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

6 Τρία σημεία: 3 ευθείες. Τέσσερα σημεία: 6 ευθείες (όσα και τα ζευγάρια).

7 Τα AG και $B\Gamma$ (ενώνουν σημεία διαφορετικών ημιεπιπέδων). Το AB δεν την τέμνει.

8 Το δεύτερο: έχει **αρχή** (τον ήλιο) αλλά δεν έχει τέλος, άρα μοιάζει με **ημιευθεία**.

Μάθημα 1.2 · Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα – Ευθύγραμμα σχήματα – Ίσα σχήματα

1 Κορυφή το Λ , πλευρές οι ημιευθείες ΛK και ΛM . Το Σ πρέπει να βρίσκεται ανάμεσα στις πλευρές (στο «άνοιγμα»), το T έξω από αυτό.

2 $A\hat{O}B, B\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Gamma$: τρεις γωνίες.

3 α) 3 κορυφές, 0 διαγώνιοι. β) 6 κορυφές, 9 διαγώνιοι. γ) 8 κορυφές, $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$ διαγώνιοι.

4 $3 + 4,5 + 2,8 + 5 + 3,7 = 19$ cm.

5 $27 : 6 = 4,5$ cm.

6 Κάθε ζευγάρι ημιευθειών ορίζει μια γωνία. Με 3 ημιευθείες: 3 ζευγάρια. Με 4 ημιευθείες: $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ ζευγάρια. Άρα 4 ημιευθείες.

7 α) Λ (στη μέση), β) Λ (καμπύλη γραμμή), γ) Σ , δ) Σ .

Μάθημα 1.3 · Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων – Απόσταση σημείων – Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

1 48 mm = $4,8$ cm και $0,07$ m = 7 cm. Το μεγαλύτερο είναι το (γ).

2 α) 325 cm, β) $8,5$ cm, γ) $1,25$ km.

3 $AB = 2 \cdot 4,7 = 9,4$ cm. $MB = 13 : 2 = 6,5$ cm.

4 $AM = 5$ cm. Αφού $AB = 6 > 5$, το M είναι ανάμεσα στα A και B : $BM = AB - AM = 6 - 5 = 1$ cm.

5 $AD = 9$ cm, μέσο σε απόσταση $4,5$ cm από το A : βρίσκεται στο μέσο του $B\Gamma$ (κανένα από τα σημεία). Το μέσο του AG (6 cm) είναι το B .

6 Η απόσταση είναι 620 m: η απόσταση δύο σημείων είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος, δηλαδή της πιο σύντομης διαδρομής.

7 $MN = MB + BN = \frac{AB}{2} + \frac{BG}{2} = \frac{AG}{2}$. Άρα
 $AG = 2 \cdot 7 = 14 \text{ cm}$.

Μάθημα 1.4 · Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων

1 $\alpha + \beta = 5 \text{ cm}$, $\alpha - \beta = 1 \text{ cm}$, $2\alpha + \beta = 8 \text{ cm}$.

2 $AM = KM - K\Lambda = 7 - 4,2 = 2,8 \text{ cm}$.

3 $B\Gamma = 12 - 3 - 4 = 5 \text{ cm}$, $A\Gamma = 3 + 5 = 8 \text{ cm}$,
 $B\Delta = 5 + 4 = 9 \text{ cm}$.

4 Αν το Γ είναι ανάμεσα στα A, B : $B\Gamma = 6 - 2 = 4 \text{ cm}$.
 Αν το A είναι ανάμεσα στα Γ, B : $B\Gamma = 6 + 2 = 8 \text{ cm}$.

5 Αν $AG = x$: $x + 2x + 3x = 15 \Rightarrow 6x = 15 \Rightarrow x = 2,5$.
 Άρα $AG = 2,5 \text{ cm}$, $\Gamma\Delta = 5 \text{ cm}$, $\Delta B = 7,5 \text{ cm}$.

6 $120 : 5 = 24 \text{ cm}$. Τρία κομμάτια: 72 cm .

7 Αν το M είναι ανάμεσα στα A, B : $AM = 8$, $AG = 16$, $B\Gamma = 6 \text{ cm}$.
 Αν το M είναι ανάμεσα στα B, Γ :
 $AM = 12$, $AG = 24$, $B\Gamma = 14 \text{ cm}$.

Μάθημα 1.5 · Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών – Διχοτόμος γωνίας

1 Ακολουθούμε τη μέθοδο: ημιευθεία Ox , κέντρο στο O , 0° πάνω στην Ox , σημάδι στην αντίστοιχη χαραγή και ημιευθεία. Η γωνία 180° είναι ευθεία γωνία (αντικείμενες ημιευθείες).

2 α) $300'$, β) $1^\circ 30'$ ή $1,5^\circ$, γ) $120''$, δ) $0,25 \cdot 60 = 15'$:
 $47^\circ 15'$.

3 α) $63^\circ 75' = 64^\circ 15'$. β) $89^\circ 60' - 47^\circ 18' = 42^\circ 42'$.

4 $2 \cdot 38^\circ = 76^\circ$.

5 $x\hat{O}\delta = 55^\circ$, $x\hat{O}\varepsilon = \varepsilon\hat{O}\delta = 27,5^\circ = 27^\circ 30'$. Τότε
 $\varepsilon\hat{O}\gamma = 27^\circ 30' + 55^\circ = 82^\circ 30'$.

6 Κάθε «ώρα» αντιστοιχεί σε 30° . α) 90° , β) 180° , γ) 60° , δ) 150° .

Μάθημα 1.6 · Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες

1 α) οξεία, β) αμβλεία, γ) ορθή, δ) μη κυρτή, ε) οξεία, στ) ευθεία.

2 3:00: 90° ορθή. 4:00: 120° αμβλεία. 1:00: 30° οξεία.

3 Αφού η γωνία είναι μεταξύ 90° και 180° , το μισό της είναι μεταξύ 45° και 90° : **οξεία**.

4 Οι δύο κάθετες στην ίδια ευθεία δεν τέμνονται: είναι **παράλληλες** (θα το δούμε στο Μάθημα 1.9).

5 α) Σ, β) Λ (π.χ. $2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$), γ) Σ, δ) Σ.

Μάθημα 1.7 · Εφεξής και διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα γωνιών

1 81° , οξεία.

2 $3 \cdot y\hat{O}z = 150^\circ \Rightarrow y\hat{O}z = 50^\circ, x\hat{O}y = 100^\circ$.

3 $360^\circ : 5 = 72^\circ$.

4 Οι τρεις διαδοχικές γωνίες σχηματίζουν ευθεία γωνία: $z\hat{O}x' = 180^\circ - 40^\circ - 75^\circ = 65^\circ$.

5 Κάθε γωνία είναι 42° . Οι διχοτόμοι απέχουν: $21^\circ + 42^\circ + 21^\circ = 84^\circ$.

6 α) Λ, β) Σ, γ) Σ.

Μάθημα 1.8 · Παραπληρωματικές και συμπληρωματικές γωνίες – Κατακορυφήν γωνίες

1 α) 75° , β) 18° , γ) 45° , δ) 1° .

2 α) 140° , β) 45° , γ) 90° , δ) $122^\circ 40'$.

3 Συμπληρωματικές: 45° . Παραπληρωματικές: 90° .

4 $x + (x - 30^\circ) = 90^\circ \Rightarrow 2x = 120^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$.

5 $x + 5x = 180^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$.

6 $x + 3x = 180^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$. Οι γωνίες: $45^\circ, 135^\circ, 45^\circ, 135^\circ$.

7 $(180^\circ - \omega) - (90^\circ - \omega) = 90^\circ$ για **κάθε** οξεία ω . Άρα η διαφορά είναι πάντα 90° και **δεν** μπορεί να είναι 100° : δεν υπάρχει τέτοια γωνία.

8 $25^\circ + 65^\circ = 90^\circ$. Γενικά: $\frac{\omega}{2} + \frac{\varphi}{2} = \frac{\omega + \varphi}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. Οι διχοτόμοι είναι **κάθετες**.

Μάθημα 1.9 · Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

1 Παράλληλες: οι ράγες του τρένου, οι γραμμές του τετραδίου, οι απέναντι ακμές ενός θρανίου. Κάθετες: οι διαδοχικές ακμές μιας πόρτας, ο τοίχος με το πάτωμα, οι δείκτες του ρολογιού στις 3:00.

2 Ταυτίζονται όταν τα A και B απέχουν **το ίδιο** από την ε (βρίσκονται στην ίδια παράλληλη), γιατί τότε από το A περνά μία μόνο παράλληλη, που περιέχει και το B .

3 α) Σ, β) Λ (μία μόνο), γ) Σ, δ) Λ (ένα).

4 α) $\alpha \perp \gamma$ (αφού $\alpha \parallel \beta$ και $\beta \perp \gamma$). β) $\alpha \perp \delta$. γ) $\beta \perp \delta$.

5 0 (και οι τρεις παράλληλες), 1 (περνούν από το ίδιο σημείο), 2 (δύο παράλληλες και μια τρίτη που τις τέμνει), 3 (ανά δύο τέμνονται σε διαφορετικά σημεία, σχηματίζοντας τρίγωνο).

Μάθημα 1.10 · Απόσταση σημείου από ευθεία – Απόσταση παραλλήλων

- 1 Άπειρα: βρίσκονται πάνω σε **δύο** ευθείες παράλληλες προς την ε , μία σε κάθε ημιεπίπεδο, σε απόσταση 2,5 cm.
- 2 Όχι: το κάθετο τμήμα είναι το **συντομότερο**, άρα κάθε πλάγιο AB είναι μεγαλύτερο από 4 cm.
- 3 Ανάμεσά τους υπάρχουν 9 διαστήματα: $9 \cdot 8 = 72$ mm = 7,2 cm.
- 4 3 cm (αν είναι ανάμεσα) ή 7 cm (αν είναι έξω από τη ζώνη, από τη μεριά της πρώτης).
- 5 α) Σ, β) Σ, γ) Λ (είναι 0).

Μάθημα 1.11 · Κύκλος και στοιχεία του κύκλου

- 1 $B\Gamma = 2 \cdot 3 = 6$ cm. Η χορδή ΔE θα είναι μικρότερη από 6 cm.
- 2 Α εσωτερικό, Β σημείο του κύκλου, Γ εξωτερικό, Δ είναι το ίδιο το κέντρο (εσωτερικό σημείο).
- 3 Όχι: η μεγαλύτερη χορδή είναι η διάμετρος, 8 cm.
- 4 Πλάτος δακτυλίου: $5 - 3 = 2$ cm. Το σημείο είναι **εξωτερικό** του μικρού και **εσωτερικό** του μεγάλου κύκλου, δηλαδή μέσα στον δακτύλιο.
- 5 Σχεδιάζουμε τους κύκλους (Α, 3 cm) και (Β, 4 cm). Τα κοινά τους σημεία είναι **δύο**, ένα σε κάθε ημιεπίπεδο της ευθείας AB .

Μάθημα 1.12 · Επίκεντρη γωνία – Σχέση επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου – Μέτρηση τόξου

- 1 125° και $360^\circ - 125^\circ = 235^\circ$.
- 2 $360^\circ : 5 = 72^\circ$. Προκύπτει **κανονικό πεντάγωνο** (ίσες πλευρές, ως ίσες χορδές).
- 3 α) 180° , β) 120° , γ) 45° .
- 4 $\widehat{B\Gamma} + \widehat{\Gamma A} = 260^\circ$, άρα $2 \cdot \widehat{\Gamma A} + 40^\circ = 260^\circ \Rightarrow \widehat{\Gamma A} = 110^\circ$, $\widehat{B\Gamma} = 150^\circ$.
- 5 $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ του κύκλου: 90° .

Μάθημα 1.13 · Θέσεις ευθείας και κύκλου

- 1 α) τέμνουσα, β) εφαπτομένη, γ) εξωτερική, δ) τέμνουσα (περνάει από το κέντρο· η χορδή της είναι διάμετρος).

2 Φέρνουμε την ακτίνα OA και με τον γνώμονα την κάθετη στην OA στο σημείο A .

3 Βρίσκονται σε αντίθετες μεριές του κέντρου, η κάθε μία σε απόσταση 3 cm: απέχουν 6 cm (όσο η διάμετρος).

4 0, 1 ή 2. Τρία δεν μπορεί: θα έπρεπε η ευθεία να «μπει» και να «βγει» από τον κύκλο περισσότερες φορές, πράγμα αδύνατο αφού ο κύκλος είναι κυρτό σχήμα.

5 $0 \leq \delta < 5 \text{ cm}$.

Επανάληψη Κεφαλαίου 1

1 $AD = 12 \text{ cm}$, $AM = 6 \text{ cm}$. $MB = 6 - 4 = 2 \text{ cm}$,
 $MG = AG - AM = 10 - 6 = 4 \text{ cm}$.

2 $x = \frac{2}{3}(180^\circ - x) \Rightarrow 3x = 360^\circ - 2x \Rightarrow x = 72^\circ$.
 Συμπληρωματική: 18° .

3 Κάθε μία από τις κατακορυφήν είναι 55° . Οι άλλες δύο: 125° η κάθε μία.

4 $y\hat{O}x' = 130^\circ$, άρα $z\hat{O}x' = 65^\circ$ και $x\hat{O}z = 50^\circ + 65^\circ = 115^\circ$.

5 $4x + 60^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 75^\circ$. Γωνίες: $75^\circ, 150^\circ, 135^\circ$.

6 α) 7 cm. β) $35 \text{ mm} = 3,5 \text{ cm} = \rho$: **εφαπτομένη**. γ) $0,04 \text{ m} = 4 \text{ cm} > 3,5$: **εξωτερικό**.

7 $360^\circ : 12 = 30^\circ$: τόξα $60^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 120^\circ$.
 Μεγαλύτερη χορδή είναι αυτή του τόξου των 120° (μεγαλύτερο τόξο, μικρότερο του ημικυκλίου).

8 α) παράλληλες, β) παράλληλες (ή ταυτίζονται), αφού και οι δύο είναι κάθετες στην ε_1 , γ) κάθετες.

9 α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ.

ΛΥΣΕΙΣ · ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Συμμετρία

Μάθημα 2.1 · Συμμετρία ως προς άξονα

- 1 Φέρνουμε κάθετη AK και παίρνουμε $KA' = AK = 2 \text{ cm}$. Άρα $AA' = 4 \text{ cm}$.
- 2 Βρίσκουμε τα συμμετρικά A', B' των άκρων και τα ενώνουμε. Αφού συμμετρικά σχήματα είναι ίσα, $A'B' = 4 \text{ cm}$.
- 3 65° (συμμετρικά σχήματα είναι ίσα).

- 4 Ο συμμετρικός κύκλος έχει κέντρο K' (συμμετρικό του K) και ακτίνα 2 cm . $KK' = 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}$.
- 5 3 τετραγωνάκια **δεξιά** και 1 πάνω από το O (η κατακόρυφη απόσταση μένει ίδια, η οριζόντια «αναποδογυρίζει»).
- 6 $MA' = 5 \text{ cm}$: το τμήμα MA' είναι συμμετρικό του MA (αφού το M είναι συμμετρικό του εαυτού του), άρα ίσο.

Μάθημα 2.2 · Άξονας συμμετρίας

- 1 α) 3, β) 4, γ) 5, δ) άπειρους, ε) 2.
- 2 Κανέναν άξονα: π.χ. **Z, N, P**. Ακριβώς δύο: π.χ. **H, Φ, X** (επίσης **I, O**).
- 3 Εφαρμόζουμε τα τρία βήματα της κατασκευής. Η μέτρηση πρέπει να δώσει 50° και 50° .
- 4 3 cm : κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις πλευρές, γιατί η διχοτόμος είναι άξονας συμμετρίας.

- 5 Οι δύο άξονες το χωρίζουν σε 4 ίσα ορθογώνια διαστάσεων $3 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$.
- 6 Σχεδιάζουμε το συμμετρικό κάθε κορυφής ως προς τον άξονα (ίδιο ύψος, ίση απόσταση από την άλλη μεριά) και ενώνουμε: προκύπτει «σπίτι» με βάση 6 τετραγωνάκια και στέγη σε σχήμα ισοσκελούς τριγώνου.

Μάθημα 2.3 · Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

- 1 Ακολουθούμε τα βήματα της κατασκευής (άνοιγμα διαβήτη π.χ. 4 cm).
- 2 $KB = 7 \text{ cm}$. Το Λ **δεν** ανήκει στη μεσοκάθετο, αφού $LA \neq LB$.
- 3 Είναι τα σημεία τομής της μεσοκαθέτου του AB με τον κύκλο ($A, 4 \text{ cm}$): δύο σημεία.

- 4 Κατασκευάζουμε τις μεσοκαθέτους των AB και $B\Gamma$. Το σημείο τομής τους ισαπέχει από τα A, B και από τα B, Γ , άρα και από τα τρία χωριά. Εκεί τοποθετείται η κεραία.
- 5 $AM = 4,5 \text{ cm}$. Σχηματίζει **ορθή** γωνία (90°).

Μάθημα 2.4 · Συμμετρία ως προς σημείο

- 1 $AA' = 2 \cdot 2,5 = 5 \text{ cm}$.
- 2 $OA = 4,5 \text{ cm}$.
- 3 Είναι **ίσα** ($A'B' = 3 \text{ cm}$) και **παράλληλα**.

- 4 $B'(2, -5), \Gamma'(-4, 1)$.
- 5 Το B , γιατί το M είναι μέσο του AB .
- 6 Είναι κύκλος ($K', 2 \text{ cm}$) με $KK' = 6 \text{ cm}$. Αφού $6 > 2 + 2$, οι κύκλοι **δεν** τέμνονται.

Μάθημα 2.5 · Κέντρο συμμετρίας

- 1 Ναι: α, γ, δ, στ. Όχι: β, ε.
- 2 Π.χ. 808, 181, 609 (το 6 στρεφόμενο γίνεται 9), 916, 111.
- 3 Του Α το Γ, του Β το Δ. Άρα το Ο είναι μέσο και της ΑΓ και της ΒΔ: οι διαγώνιοι διχοτομούνται.
- 4 α) Λ (π.χ. πλάγιο παραλληλόγραμμο), β) Σ, γ) Σ.

Μάθημα 2.6 · Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη ευθεία

- 1 Τρεις ακόμη 73° και τέσσερις 107° .
- 2 α) $\hat{3}, \hat{5}$ και $\hat{4}, \hat{6}$. β) $\hat{4}, \hat{5}$ και $\hat{3}, \hat{6}$. γ) π.χ. $\hat{1}, \hat{5}$ και $\hat{2}, \hat{6}$.
- 3 $x + (x + 50^\circ) = 180^\circ \Rightarrow x = 65^\circ$. Γωνίες 65° και 115° .
- 4 Όχι: αν ήταν παράλληλες, οι εντός εναλλάξ θα ήταν ίσες.
- 5 $5x - 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$. Γωνίες: 90° και 90° (η τέμνουσα είναι κάθετη!).
- 6 Η γωνία με την πρώτη είναι 90° . Η αντίστοιχή της (εντός εκτός και επί τα αυτά) με τη δεύτερη είναι ίση, δηλαδή επίσης 90° .

Επανάληψη Κεφαλαίου 2

- 1 Τμήμα: 2 άξονες, κέντρο ναι. Γωνία: 1, όχι. Ισόπλευρο: 3, όχι. Ρόμβος: 2, ναι. Κύκλος: άπειροι, ναι.
- 2 α) Τα Β, Γ μένουν στη θέση τους· βρίσκουμε μόνο το συμμετρικό Α' του Α ως προς τη ΒΓ (κάθετη και ίση απόσταση). β) Το Γ μένει· βρίσκουμε τα Α', Β' ώστε το Γ να είναι μέσο των ΑΑ' και ΒΒ'.
- 3 Πάνω στη μεσοκάθετο του ΑΒ. Υπάρχουν 2 (τομή της μεσοκαθέτου με τον κύκλο (Α, 6 cm)).
- 4 $x + \frac{4}{5}x = 180^\circ \Rightarrow \frac{9}{5}x = 180^\circ \Rightarrow x = 100^\circ$. Γωνίες: 100° και 80° .
- 5 α) (2, 3), β) (-2, -3), γ) (-2, 3).
- 6 α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ.

ΛΥΣΕΙΣ · ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Τρίγωνα – Παραλληλόγραμμα – Τραπεζίδια

Μάθημα 3.1 · Στοιχεία τριγώνου – Είδη τριγώνων

1 α) ισόπλευρο, β) ισοσκελές, γ) σκαληνό, δ) ισοσκελές.

2 α) οξυγώνιο, β) ορθογώνιο, γ) αμβλυγώνιο.

3 α) ναι ($10 < 14$), β) όχι ($6 > 5$), γ) ναι ($9 < 10$), δ) όχι ($2 = 2$).

4 $(20 - 6) : 2 = 7$ cm.

5 Αν οι ίσες ήταν 3 cm: $7 < 3 + 3$; όχι. Άρα οι ίσες είναι 7 cm και η βάση 3 cm. Περίμετρος 17 cm.

6 Ακολουθούμε τη μέθοδο κατασκευής (βάση 6 cm, τόξα 5 cm και 4 cm). Για τη διάμεσο βρίσκουμε το μέσο μιας πλευράς (με μεσοκάθετο), για τη διχοτόμο εφαρμόζουμε την κατασκευή του Μαθήματος 2.2, για το ύψος τον γνώμονα.

7 α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ.

Μάθημα 3.2 · Άθροισμα γωνιών τριγώνου – Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

1 α) 70° , β) 63° , γ) $180^\circ - 150^\circ 30' = 29^\circ 30'$.

2 α) ναι (ισόπλευρο), β) όχι (μηδενική γωνία, δύο ορθές), γ) όχι (άθροισμα 190°), δ) ναι.

3 $x + 2x = 90^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$. Γωνίες 30° , 60° , 90° .

4 $x + x + (x + 30^\circ) = 180^\circ \Rightarrow x = 50^\circ$. Γωνίες 50° , 50° , 80° .

5 $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ \Rightarrow 3\hat{\Gamma} = 120^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 40^\circ$, $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

6 Κάθε εξωτερική είναι 180° – (εσωτερική). Άθροισμα: $3 \cdot 180^\circ - 180^\circ = 360^\circ$.

7 Η AM είναι και διχοτόμος: $\hat{A} = 50^\circ$, $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 65^\circ$. Η AM είναι και ύψος: $\hat{AMB} = 90^\circ$.

Μάθημα 3.3 · Παραλληλόγραμμα – Ορθογώνιο – Ρόμβος – Τετράγωνο – Τραπεζίδιο – Ισοσκελές τραπέζιο

1 Π.χ. ορθογώνιο 4×2 τετραγωνάκια· παραλληλόγραμμα με βάσεις 4 τετραγωνάκια μετατοπισμένες κατά 1· ρόμβος με διαγώνιους 4 και 2 τετραγωνάκια· τραπέζιο με βάσεις 5 και 3 τετραγωνάκια.

2 $360^\circ : 10 = 36^\circ$: 36° , 72° , 108° , 144° .

3 α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ (άθροισμα $> 360^\circ$).

4 $2(2x + x) = 30 \Rightarrow x = 5$. Διαστάσεις 10 cm και 5 cm, εμβαδόν 50 cm^2 .

5 α) ρόμβος (όχι τετράγωνο), β) ισοσκελές τραπέζιο, γ) τετράγωνο.

Μάθημα 3.4 · Ιδιότητες παραλληλογράμμου – ορθογωνίου – ρόμβου – τετραγώνου – τραπέζιου – ισοσκελούς τραπέζιου

1 $\hat{A} + 3\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 45^\circ$. Γωνίες: 45° , 135° , 45° , 135° .

2 $AG = 7$ cm, $B\Delta = 10$ cm. Όχι ορθογώνιο, αφού οι διαγώνιοι δεν είναι ίσες.

3 Γωνίες 120° , 60° , 120° , 60° . Περίμετρος 20 cm. Η μικρή διαγώνιος (από τις κορυφές των 120°) χωρίζει τον ρόμβο σε δύο τρίγωνα με γωνίες 60° : **ισόπλευρα**, άρα η μικρή διαγώνιος είναι 5 cm.

4 45° (διχοτομεί την ορθή). $\hat{AOB} = 90^\circ$.

5 $180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ η καθεμία.

6 $\hat{A} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, $\hat{B} = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$.

Είναι ορθογώνιο τραπέζιο.

7 α) ορθογώνιο, β) ρόμβος, γ) τετράγωνο.

Επανάληψη Κεφαλαίου 3

1 $3\hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$, $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{\Gamma} = 40^\circ$.

Οξυγώνιο σκαληνό.

2 Η γωνία της κορυφής είναι 80° , οι γωνίες της βάσης 50° η καθεμία. (Και ο κανόνας: $100^\circ = 50^\circ + 50^\circ$ ✓.)

3 Τρίγωνο: 12 cm. Τετράγωνο: 9 cm.

4 $\hat{A} = 70^\circ = \hat{\Gamma}$, $\hat{B} = \hat{\Delta} = 110^\circ$.

5 Όχι για τις πλευρές ($9 > 5 + 3$). Ναι για τις γωνίες (άθροισμα 180°): είναι το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο.

6 Στο OAB ($OA = OB$): $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 30^\circ$, $A\hat{O}B = 120^\circ$. Στο $OB\Gamma$: $O\hat{B}\Gamma = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, και αφού $OB = O\Gamma$, $O\hat{\Gamma}B = 60^\circ$, $B\hat{O}\Gamma = 60^\circ$: είναι ισόπλευρο.

7 α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ.

Συνέχισε τη μάθηση στο **mathgreece.com**

Το βοήθημα αυτό είναι η αρχή. Στο **mathgreece.com** θα βρεις ένα **πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο** για κάθε μάθημα της Α' Γυμνασίου — και όχι μόνο:

Βίντεο-μαθήματα

Κάθε ενότητα εξηγημένη βήμα-βήμα, να τη βλέπεις όσες φορές θέλεις.

Σημειώσεις

Συνοπτική θεωρία για γρήγορη επανάληψη πριν από το διαγώνισμα.

Κουίζ & τεστ

Έλεγξε μόνος σου πόσο καλά έμαθες το κάθε μάθημα.

Παιχνίδια γνώσεων

Μάθηση με παιχνίδι: εξάσκηση που δεν κουράζει.

Podcasts

Μαθηματικά για να τα ακούς όπου κι αν βρίσκεσαι.

Panels μελέτης

Οργανωμένη μελέτη από το Γυμνάσιο έως το Πανεπιστήμιο.



mathgreece.com

Σκάνανε τον κωδικό με το κινητό σου
και ξεκίνα δωρεάν, τώρα!

