

ΑΛΓΕΒΡΑ

και Στοιχεία Πιθανοτήτων

Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πλήρες εικονογραφημένο βοήθημα

Θεωρία · Λυμένα παραδείγματα · Προσοχή! · Συχνά λάθη · Ασκήσεις με λύσεις



Πρόλογος

Αγαπητή μαθήτριά, αγαπητέ μαθητή,

η Α' Λυκείου είναι η χρονιά που «στήνονται» τα θεμέλια όλων των μαθηματικών που θα συναντήσεις μέχρι τις Πανελλαδικές εξετάσεις. Οι απόλυτες τιμές, οι ρίζες, οι εξισώσεις και οι ανισώσεις δευτέρου βαθμού, οι πρόοδοι και, κυρίως, οι συναρτήσεις, δεν είναι απλώς κεφάλαια μιας χρονιάς· είναι τα εργαλεία που θα χρησιμοποιείς καθημερινά στη Β' και στη Γ' Λυκείου. Όποιος τα κατακτήσει τώρα σωστά, κερδίζει χρόνο, σιγουριά και βαθμούς αργότερα.

Το βοήθημα που κρατάς γράφτηκε με την εμπειρία πολλών χρόνων διδασκαλίας μέσα στην τάξη. Ακολουθεί πιστά την ύλη και τη σειρά του σχολικού βιβλίου «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α' Γενικού Λυκείου», ώστε να μπορείς να το χρησιμοποιείς παράλληλα με το μάθημα του σχολείου, όμως η παρουσίαση, οι εξηγήσεις, τα σχήματα, τα παραδείγματα και οι ασκήσεις είναι εξ ολοκλήρου πρωτότυπα. Στόχος μας δεν είναι να επαναλάβουμε το σχολικό βιβλίο, αλλά να σου εξηγήσουμε όσα ο καθηγητής σου εξηγεί στον πίνακα: το «γιατί», το «πώς» και, κυρίως, το «πού κάνουν λάθος οι περισσότεροι».

Πώς είναι οργανωμένο το βιβλίο

Το βιβλίο χωρίζεται σε **κεφάλαια** (Εισαγωγικό και Κεφάλαια 1 έως 7) και κάθε κεφάλαιο σε **μάθημα** (π.χ. Μάθημα 3.2). Κάθε κεφάλαιο έχει **δικό του χρώμα**: το χρώμα αυτό το βλέπεις στην κεφαλίδα κάθε σελίδας, στο χρωματιστό «σημάδι» στη δεξιά άκρη της σελίδας και στους τίτλους. Έτσι, με μια ματιά ξέρεις πάντα σε ποιο κεφάλαιο και σε ποιο μάθημα βρίσκεσαι.

Τα «εικονίδια» του βιβλίου

ΟΡΙΣΜΟΣ

Οι βασικές έννοιες, διατυπωμένες με ακρίβεια. Αυτά πρέπει να τα ξέρεις «απ' έξω και ανακατωτά».

ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ / ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι κανόνες και τα αποτελέσματα που χρησιμοποιούμε στις ασκήσεις.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ασκήσεις λυμένες βήμα-βήμα, με τον τρόπο που πρέπει να γράφεις και εσύ στο γραπτό σου.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

«Συνταγές»: τι κάνουμε, με ποια σειρά, όταν συναντάμε ένα συγκεκριμένο είδος άσκησης.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Λεπτά σημεία που ξεφεύγουν εύκολα και κοστίζουν μονάδες.

ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

Τα λάθη που βλέπουμε κάθε χρόνο στα γραπτά, μαζί με τη σωστή αντιμετώπιση.

ΣΧΟΛΙΟ

Μικρά «μυστικά» και συμβουλές από τον καθηγητή.

mathgreece.com

Παραπομπή στο δωρεάν ψηφιακό φροντιστήριο, για βίντεο, κουίζ και επιπλέον υλικό.

■ Πώς να διαβάζεις κάθε μάθημα

1. Διάβασε προσεκτικά τη θεωρία και τους ορισμούς. Μην προσπερνάς τα σχήματα: έχουν σχεδιαστεί για να «δεις» την ιδέα.
2. Μελέτησε τα λυμένα παραδείγματα με μολύβι στο χέρι. Κάλυψε τη λύση και προσπάθησε πρώτα μόνος σου.
3. Διάβασε τα πλαίσια «Προσοχή!» και «Συχνό λάθος». Αυτά είναι που ξεχωρίζουν το 15 από το 20.
4. Λύσε τις ασκήσεις στο τέλος του μαθήματος. Είναι χωρισμένες σε **Α΄ Ομάδα** (βασικές) και **Β΄ Ομάδα** (πιο απαιτητικές). Μόνο αφού προσπαθήσεις, κοίτα τις λύσεις στο τέλος του βιβλίου.

Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com



Στο mathgreece.com θα βρεις ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο: βίντεο-μαθήματα για κάθε ενότητα, σημειώσεις, κουίζ αυτοαξιολόγησης, podcasts, παιχνίδια γνώσεων και πίνακες μελέτης. Ότι διαβάζεις σε αυτό το βιβλίο, μπορείς να το δεις και να το ακούσεις εξηγημένο εκεί.

Καλή μελέτη και καλή επιτυχία!
Τάσος Κοβατσίδης • mathgreece.com

Περιεχόμενα

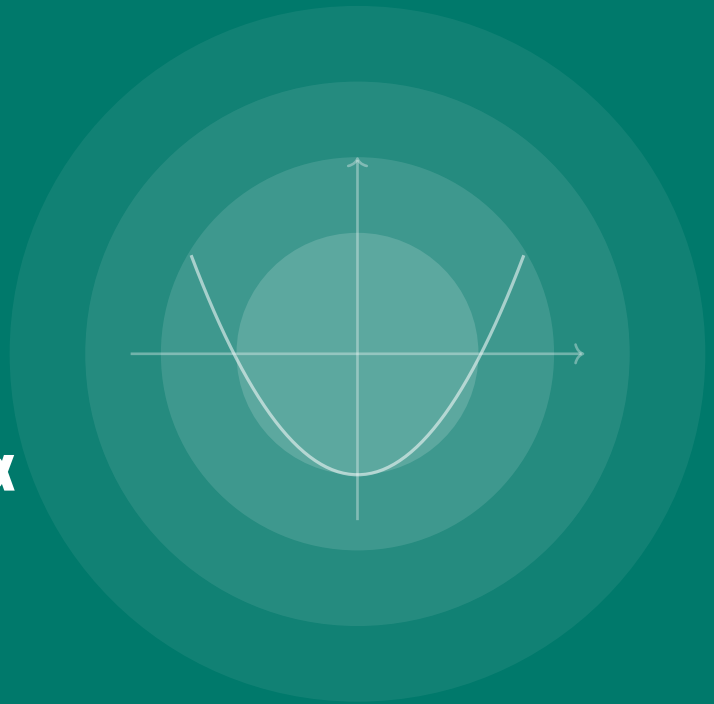
Κάνε κλικ σε κάθε τίτλο για να μεταβείς στο μάθημα

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ · Λογική & Σύνολα	1
E.1 Το λεξιλόγιο της Λογικής	.2
E.2 Σύνολα	.8
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Πιθανότητες	13
1.1 Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα	.14
1.2 Η έννοια της πιθανότητας	.20
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Οι Πραγματικοί Αριθμοί	26
2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους	.27
2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών	.34
2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού	.39
2.4 Ρίζες πραγματικών αριθμών	.43
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Εξισώσεις	48
3.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού	.49
3.2 Η εξίσωση $x^y = a$	.54
3.3 Εξισώσεις 2ου βαθμού	.57
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 · Ανισώσεις	64
4.1 Ανισώσεις 1ου βαθμού	.65
4.2 Ανισώσεις 2ου βαθμού	.69
4.3 Ανισώσεις γινόμενο και ανισώσεις πηλίκου	.74
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 · Πρόοδοι	79
5.1 Ακολουθίες	.80
5.2 Αριθμητική πρόοδος	.84
5.3 Γεωμετρική πρόοδος	.89
5.4 Ανατοκισμός – Ίσες καταθέσεις	.94

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 · Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων	97
6.1 Η έννοια της συνάρτησης	.98
6.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης	.102
6.3 Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$	.107
6.4 Κατακόρυφη – οριζόντια μετατόπιση καμπύλης	.112
6.5 Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες συνάρτησης	.116
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 · Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων	121
7.1 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2$	.122
7.2 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \frac{a}{x}$	.126
7.3 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$	.130
ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ · Επαναληπτικά Θέματα	135
ΕΘ.1 Τεστ θεωρίας «Σωστό – Λάθος»	.136
ΕΘ.2 Επαναληπτικά θέματα (Κεφ. 1–4)	.138
ΕΘ.3 Επαναληπτικά θέματα (Κεφ. 5–7)	.139
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ	141

Ε

Λογική & Σύνολα



Πριν ξεκινήσουμε την Άλγεβρα, χρειαζόμαστε μια κοινή «γλώσσα». Σε αυτό το κεφάλαιο μαθαίνουμε να διαβάζουμε και να γράφουμε σωστά μαθηματικές προτάσεις (συνεπαγωγή, ισοδυναμία, «ή», «και») και να δουλεύουμε με σύνολα: πράξεις, διαγράμματα Venn και συμβολισμούς που θα χρησιμοποιούμε σε όλο το βιβλίο, ιδιαίτερα στις Πιθανότητες.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

E.1 Το λεξιλόγιο της Λογικής

E.2 Σύνολα

Συμπληρωματικό υλικό: Για βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις, κουίζ και παιχνίδια γνώσεων πάνω σε αυτό το κεφάλαιο, επισκέψου το mathgreece.com — ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

ΜΑΘΗΜΑ

Ε.1

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ · Λογική & Σύνολα

Το λεξιλόγιο της Λογικής

Τι θα μάθουμε: τι είναι ένας μαθηματικός ισχυρισμός, πότε ένας ισχυρισμός συνεπάγεται έναν άλλο, τι σημαίνει «ισοδύναμοι» ισχυρισμοί, πώς χρησιμοποιούμε σωστά τους συνδέσμους «ή» και «και» και πώς αποδεικνύουμε ότι ένας ισχυρισμός είναι ψευδής με αντιπαράδειγμα.

Μαθηματικοί ισχυρισμοί

Στα μαθηματικά δουλεύουμε με **ισχυρισμούς** (ή **προτάσεις**): φράσεις για τις οποίες μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι **αληθείς (Α)** ή **ψευδείς (Ψ)**. Για παράδειγμα:

- ▶ «Το 7 είναι πρώτος αριθμός» **αληθής**
- ▶ « $3 + 5 = 9$ » **ψευδής**
- ▶ «Κάθε άρτιος αριθμός διαιρείται με το 4» **ψευδής** (το 6 είναι άρτιος, αλλά δεν διαιρείται με το 4)

Αντίθετα, η φράση « $x + 2 = 5$ » δεν είναι από μόνη της αληθής ή ψευδής: εξαρτάται από την τιμή του x . Τέτοιες φράσεις με μεταβλητές τις ονομάζουμε **ανοικτές προτάσεις**: γίνονται αληθείς ή ψευδείς όταν δώσουμε τιμή στη μεταβλητή (για $x = 3$ αληθεύει, για $x = 4$ όχι).

Συνήθως συμβολίζουμε τους ισχυρισμούς με κεφαλαία γράμματα, όπως P, Q, R .

Η συνεπαγωγή $P \Rightarrow Q$

Σκέψου την εξής γνωστή ιδιότητα: *αν δύο αριθμοί είναι ίσοι, τότε και τα τετράγωνά τους είναι ίσα*. Δηλαδή, κάθε φορά που αληθεύει ο ισχυρισμός « $a = b$ », αληθεύει αναγκαστικά και ο ισχυρισμός « $a^2 = b^2$ ».

ΟΡΙΣΜΟΣ · Συνεπαγωγή

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί τέτοιοι ώστε **κάθε φορά που αληθεύει ο P , να αληθεύει και ο Q** , λέμε ότι ο P **συνεπάγεται** τον Q και γράφουμε

$$P \Rightarrow Q \quad (\text{διαβάζεται: «αν } P, \text{ τότε } Q\text{»}).$$

Ο P λέγεται **υπόθεση** και ο Q **συμπέρασμα** της συνεπαγωγής.



ΔΕΝ ισχύει πάντα την αντίστροφη κατεύθυνση: $(-3)^2 = 3^2$, αλλά $-3 \neq 3$

Με άλλα λόγια, η συνεπαγωγή είναι ένας «μονόδρομος»: η αλήθεια «ταξιδεύει» από την υπόθεση προς το συμπέρασμα. Στο παράδειγμά μας, το αντίστροφο δεν ισχύει: από το $a^2 = b^2$ δεν προκύπτει

ότι $\alpha = \beta$.

Πότε είναι ψευδής μια συνεπαγωγή;

Μια συνεπαγωγή $P \Rightarrow Q$ είναι **ψευδής μόνο σε μία περίπτωση**: όταν η υπόθεση P είναι αληθής και το συμπέρασμα Q ψευδές. Σε κάθε άλλη περίπτωση τη δεχόμαστε ως αληθή (κατά σύμβαση, και όταν η υπόθεση είναι ψευδής).

P	Q	$P \Rightarrow Q$
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A

Πολλοί τρόποι να το πούμε

Η συνεπαγωγή $P \Rightarrow Q$ διατυπώνεται στη μαθηματική γλώσσα με πολλούς ισοδύναμους τρόπους. Όλοι οι παρακάτω σημαίνουν το ίδιο:

- ▶ αν P , τότε Q
- ▶ ο P συνεπάγεται τον Q
- ▶ ο Q είναι **αναγκαία** συνθήκη για τον P
- ▶ ο P είναι **ικανή** συνθήκη για τον Q
- ▶ ο Q έπεται του P
- ▶ ο P ισχύει μόνο αν ισχύει ο Q

Σχόλιο του καθηγητή

Για να θυμάσαι τα «ικανή» και «αναγκαία»: Αν $P =$ «ο αριθμός λήγει σε 0» και $Q =$ «ο αριθμός είναι άρτιος», τότε $P \Rightarrow Q$. Το να λήγει σε 0 *αρκεί* (είναι **ικανό**) για να είναι άρτιος. Το να είναι άρτιος είναι **αναγκαίο** για να λήγει σε 0 (ένας περιττός σίγουρα δεν λήγει σε 0), αλλά δεν αρκεί (το 14 είναι άρτιος και δεν λήγει σε 0).

Το αντίστροφο μιας συνεπαγωγής

Αν σε μια συνεπαγωγή $P \Rightarrow Q$ αλλάξουμε θέση σε υπόθεση και συμπέρασμα, παίρνουμε την **αντίστροφη** συνεπαγωγή $Q \Rightarrow P$. Η αντίστροφη μιας αληθούς συνεπαγωγής **μπορεί να είναι αληθής, μπορεί και όχι**. Πρέπει κάθε φορά να ελέγχουμε.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Ευθεία και αντίστροφη

Να εξετάσετε αν ισχύουν οι συνεπαγωγές και οι αντίστροφές τους:

α) $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ β) $\alpha > 0$ και $\beta > 0 \Rightarrow \alpha\beta > 0$ γ) $x = 3 \Rightarrow 2x + 1 = 7$

ΛΥΣΗ α) Αν $x = 2$, τότε $x^2 = 2^2 = 4$, άρα η συνεπαγωγή **ισχύει**. Η αντίστροφη « $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ » **δεν ισχύει**: για $x = -2$ έχουμε $x^2 = 4$ αλλά $x \neq 2$.

β) Το γινόμενο δύο θετικών είναι θετικό, άρα **ισχύει**. Η αντίστροφη « $\alpha\beta > 0 \Rightarrow \alpha > 0$ και $\beta > 0$ » **δεν ισχύει**: για $\alpha = \beta = -1$ είναι $\alpha\beta = 1 > 0$, όμως οι α, β δεν είναι θετικοί.

γ) Αν $x = 3$, τότε $2x + 1 = 7$. Αντίστροφα, αν $2x + 1 = 7$, τότε $2x = 6$, δηλαδή $x = 3$. Εδώ **ισχύουν και οι δύο κατευθύνσεις**.

Η ισοδυναμία $P \Leftrightarrow Q$

Στο γ) του προηγούμενου παραδείγματος η «κίνηση» γίνεται και προς τις δύο μεριές. Αυτό έχει ειδικό όνομα.

ΟΡΙΣΜΟΣ · Ισοδυναμία

Αν ισχύει $P \Rightarrow Q$ και $Q \Rightarrow P$, λέμε ότι ο P είναι **ισοδύναμος** με τον Q και γράφουμε

$$P \Leftrightarrow Q.$$

Διαβάζουμε: « P αν και μόνο αν Q » ή «ο P είναι **ικανή και αναγκαία** συνθήκη για τον Q ».

Δύο ισοδύναμοι ισχυρισμοί είναι ή και οι δύο αληθείς ή και οι δύο ψευδείς. Γι' αυτό, όταν λύνουμε μια εξίσωση, μπορούμε να την αντικαθιστούμε με μια ισοδύναμή της, πιο απλή:

$$3x - 5 = 7 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4.$$



✗ Συχνό λάθος: «βάζω $\Leftrightarrow$ παντού»

Πολλοί μαθητές γράφουν το σύμβολο $\Leftrightarrow$ ανάμεσα σε κάθε βήμα, χωρίς να ελέγξουν αν η κίνηση αντιστρέφεται.

✗ **ΛΑΘΟΣ:** $x = 3 \Leftrightarrow x^2 = 9$ (από το $x^2 = 9$ προκύπτει και $x = -3$)

✓ **ΣΩΣΤΟ:** $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ ή $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -3$.

Κανόνας: **όταν υψώνουμε στο τετράγωνο, όταν πολλαπλασιάζουμε με παράσταση που μπορεί να είναι 0, ή όταν «χάνουμε» πληροφορία, η κίνηση συνήθως δεν είναι ισοδυναμία.**

Ο σύνδεσμος «ή»

ΟΡΙΣΜΟΣ · Διάζευξη

Ο ισχυρισμός « P ή Q » είναι αληθής όταν **ένας τουλάχιστον** από τους P , Q είναι αληθής. Είναι ψευδής μόνο όταν και οι δύο είναι ψευδείς.

⚠ Προσοχή!

Στην καθημερινή γλώσσα το «ή» συχνά σημαίνει «ένα από τα δύο, όχι και τα δύο» («θα πάρεις παγωτό ή γλυκό»). Στα μαθηματικά **το «ή» επιτρέπει να ισχύουν και τα δύο**. Για παράδειγμα, ο ισχυρισμός «4 είναι άρτιος ή $4 > 1$ » είναι αληθής, παρότι ισχύουν και τα δύο.

Η σημαντικότερη εφαρμογή του «ή» στην Άλγεβρα είναι η εξής βασική ιδιότητα:

⇨ Μηδενικό γινόμενο

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } b = 0$$

Ένα γινόμενο είναι μηδέν **αν και μόνο αν** ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες είναι μηδέν.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Εξίσωση γινόμενο

Να λυθεί η εξίσωση $(x-1)(x+5) = 0$.

ΛΥΣΗ Από την ιδιότητα του μηδενικού γινομένου:

$$(x-1)(x+5) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ ή } x+5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -5.$$

Ο σύνδεσμος «και»

ΟΡΙΣΜΟΣ · Σύζευξη

Ο ισχυρισμός « P και Q » είναι αληθής μόνο όταν **αληθεύουν και οι δύο** ισχυρισμοί P, Q ταυτόχρονα.

P	Q	$P \text{ ή } Q$	$P \text{ και } Q$
A	A	A	A
A	Ψ	A	Ψ
Ψ	A	A	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ

Βασική εφαρμογή του «και»:

Ο· Γινόμενο διάφορο του μηδενός

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$$

✗ Συχνό λάθος: μπέρδεμα «ή» και «και»

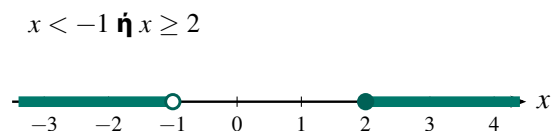
✗ ΛΑΘΟΣ: $\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0$.

Για $\alpha = 5, \beta = 0$ είναι $\alpha \neq 0$, όμως $\alpha\beta = 0$!

✓ ΣΩΣΤΟ: $\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$. Θυμήσου: η άρνηση του «ή» γίνεται «και», και η άρνηση του «και» γίνεται «ή».

Το «ή» και το «και» πάνω στον άξονα

Όταν έχουμε συνθήκες για αριθμούς, το «και» σημαίνει *κοινά σημεία* (τομή), ενώ το «ή» σημαίνει *όλα τα σημεία μαζί* (ένωση):



Άρνηση ισχυρισμού και αντιπαράδειγμα

Η **άρνηση** ενός ισχυρισμού P είναι ο ισχυρισμός «όχι P », που είναι αληθής όταν ο P είναι ψευδής και αντίστροφα. Για παράδειγμα, η άρνηση του « $x > 3$ » είναι το « $x \leq 3$ » (όχι το « $x < 3$ »!).

Πολλοί μαθηματικοί ισχυρισμοί έχουν τη μορφή «για κάθε x ισχύει ...». Για να δείξουμε ότι ένας τέτοιος ισχυρισμός είναι **ψευδής**, αρκεί να βρούμε **ένα** x για το οποίο δεν ισχύει. Αυτό το x λέγεται **αντιπαράδειγμα**.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Αντιπαράδειγμα

Να εξετάσετε αν είναι αληθής ο ισχυρισμός: «Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει $x^2 > x$ ».

ΛΥΣΗ Ο ισχυρισμός είναι **ψευδής**. Ένα αντιπαράδειγμα είναι το $x = \frac{1}{2}$: τότε $x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = x$. (Και το $x = 1$ είναι αντιπαράδειγμα, αφού $1^2 = 1$, δηλαδή όχι $1^2 > 1$.)

Προσοχή!

Για να αποδείξουμε ότι κάτι **ισχύει για κάθε x** , **δεν αρκούν παραδείγματα**, όσο πολλά κι αν είναι. Χρειάζεται γενική απόδειξη. Αντίθετα, για να δείξουμε ότι **δεν ισχύει**, αρκεί **ένα** αντιπαράδειγμα.

Πώς ελέγχω μια συνεπαγωγή

- Υποθέτω ότι αληθεύει η υπόθεση P και προσπαθώ με γνωστές ιδιότητες να καταλήξω στο Q .
- Αν υποψιάζομαι ότι δεν ισχύει, ψάχνω αντιπαράδειγμα: τιμές που κάνουν τον P αληθή και τον Q ψευδή. Δοκιμάζω «ύποπτους» αριθμούς: 0, 1, αρνητικούς, κλάσματα μεταξύ 0 και 1.
- Για ισοδυναμία ελέγχω και τις δύο κατευθύνσεις χωριστά.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Ικανή ή αναγκαία;

Θεωρούμε τους ισχυρισμούς P : « $x > 5$ » και Q : « $x > 2$ ». Ποιος είναι ικανή και ποιος αναγκαία συνθήκη για τον άλλο;

ΛΥΣΗ Αν $x > 5$, τότε σίγουρα $x > 2$. Άρα $P \Rightarrow Q$: η P είναι **ικανή** συνθήκη για την Q , και η Q **αναγκαία** για την P . Η αντίστροφη δεν ισχύει (αντιπαράδειγμα $x = 3$: είναι $3 > 2$ αλλά όχι $3 > 5$), άρα η P δεν είναι αναγκαία για την Q .

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 · Συμπλήρωση με το σωστό σύμβολο

Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο από τα σύμβολα $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$:

$$\alpha) x = -4 \dots x^2 = 16 \quad \beta) x^2 + y^2 = 0 \dots x = y = 0 \quad \gamma) x(x-2) = 0 \dots x = 2$$

ΛΥΣΗ $\alpha) \Rightarrow$ (το αντίστροφο αποτυγχάνει για $x = 4$). $\beta) \Leftrightarrow$. $\gamma) \Leftarrow$: αν $x = 2$ τότε $x(x-2) = 0$, αλλά η εξίσωση έχει και τη λύση $x = 0$.

Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com



Για τα «λογικά σύμβολα» και τη σωστή γραφή των λύσεων, δες το αντίστοιχο βίντεο-μάθημα και λύσε το σύντομο κουίζ στο mathgreece.com. Θα το χρειαστείς σε κάθε κεφάλαιο που ακολουθεί!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα Ε.1

Ε

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

1 Ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι αληθείς και ποιοι ψευδείς; Για τους ψευδείς δώστε αντιπαράδειγμα.

α) Αν $a > b$ τότε $a^2 > b^2$. β) Αν x άρτιος, τότε x^2 άρτιος. γ) Για κάθε x ισχύει $x^2 \geq 0$.

2 Να συμπληρώσετε τα κενά με ένα από τα $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$:

α) $x = 5 \dots x^2 = 25$ β) $x - 3 = 0 \dots x = 3$ γ) $x > 3 \dots x > 0$ δ) $(x - 1)^2 = 0 \dots x = 1$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $(x - 4)(2x + 6) = 0$ β) $x(x + 7)(3 - x) = 0$ γ) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0$.

4 Να γράψετε την άρνηση των ισχυρισμών: α) $x \geq 4$ β) $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ γ) $x > 1$ και $x < 5$.

5 Να παραστήσετε στον άξονα τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει: α) $x \geq -2$ και $x < 3$ β) $x < 0$ ή $x > 4$ γ) $x > 1$ και $x > 3$.

■ Β' ΟΜΑΔΑ

6 Δίνονται οι ισχυρισμοί P : «ο ακέραιος n διαιρείται με το 6» και Q : «ο n διαιρείται με το 3». Ποιος είναι ικανή και ποιος αναγκαία συνθήκη για τον άλλο; Ισχύει $P \Leftrightarrow Q$;

7 Να βρείτε τους x, y αν $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$. (Υπόδειξη: γράψτε την παράσταση ως άθροισμα τετραγώνων.)

8 Ο Νίκος ισχυρίζεται: «Αφού $\alpha\beta > 0$, οι α και β είναι θετικοί». Η Μαρία ισχυρίζεται: «Αφού $\alpha + \beta > 0$ και $\alpha\beta > 0$, οι α και β είναι θετικοί». Ποιος έχει δίκιο;

ΜΑΘΗΜΑ

Ε.2

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ · Λογική & Σύνολα

Σύνολα

Τι θα μάθουμε: τι είναι σύνολο και πώς το περιγράφουμε, τα βασικά σύνολα αριθμών, την έννοια του υποσυνόλου, το κενό σύνολο, τα διαγράμματα Venn και τις πράξεις μεταξύ συνόλων: ένωση, τομή, συμπλήρωμα (και διαφορά).

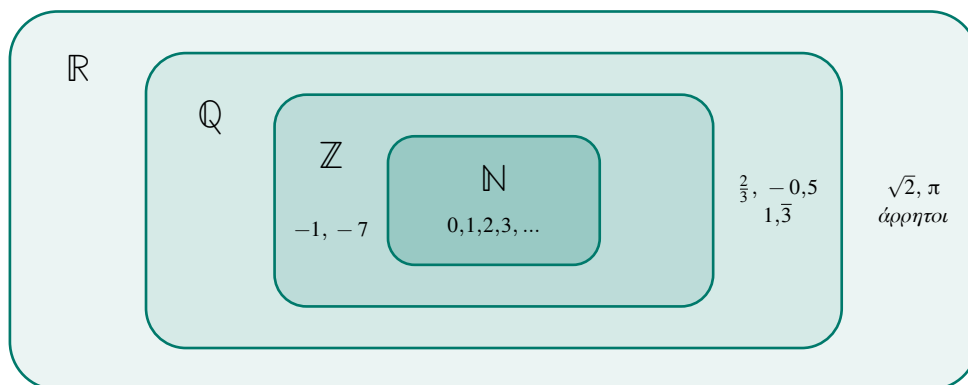
Η έννοια του συνόλου

Με τη λέξη **σύνολο** εννοούμε μια συλλογή αντικειμένων, τα οποία είναι **καλά ορισμένα** (μπορούμε πάντα να αποφασίσουμε αν κάτι ανήκει ή όχι στη συλλογή) και **διακεκριμένα** (δεν μετράμε κάτι δύο φορές). Τα αντικείμενα λέγονται **στοιχεία** του συνόλου.

- ▶ Αν το x είναι στοιχείο του συνόλου A , γράφουμε $x \in A$ (το x ανήκει στο A).
- ▶ Αν δεν είναι, γράφουμε $x \notin A$.

Η συλλογή «οι ψηλοί μαθητές της τάξης» **δεν** είναι σύνολο, γιατί το «ψηλός» δεν είναι καλά ορισμένο. Αντίθετα, «οι μαθητές της τάξης με ύψος πάνω από 1,75 m» είναι σύνολο.

Τα βασικά σύνολα αριθμών



- ▶ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: οι **φυσικοί** αριθμοί.
- ▶ $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: οι **ακέραιοι**.
- ▶ $\mathbb{Q}$: οι **ρητοί**, δηλαδή όσοι γράφονται ως κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ με μ, ν ακέραιους και $\nu \neq 0$.
- ▶ $\mathbb{R}$: οι **πραγματικοί**, δηλαδή οι ρητοί μαζί με τους **άρρητους** (όπως $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$).

Όπως βλέπεις στο σχήμα, κάθε σύνολο περιέχεται στο επόμενο: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Πώς παριστάνουμε ένα σύνολο

1. Με αναγραφή των στοιχείων

Γράφουμε τα στοιχεία, μία φορά το καθένα, μέσα σε άγκιστρα: $A = \{1, 3, 5, 7\}$. Η σειρά δεν παίζει ρόλο: $\{1, 3, 5, 7\} = \{7, 5, 3, 1\}$.

2. Με περιγραφή (χαρακτηριστική ιδιότητα)

Δίνουμε μια ιδιότητα που έχουν **όλα** τα στοιχεία του συνόλου και **μόνο** αυτά:

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 9\}$$

διαβάζεται «το σύνολο των πραγματικών x τέτοιων ώστε $x^2 = 9$ ». Με αναγραφή, $B = \{-3, 3\}$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Από την περιγραφή στην αναγραφή

Να γραφούν με αναγραφή τα σύνολα:

α) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$ β) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 3\}$ γ) $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x+2) = 0\}$

ΛΥΣΗ α) $A = \{0, 1, 2, 3\}$ (προσοχή: το 0 είναι φυσικός!). β) $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. γ) $\Gamma = \{1, -2\}$.

Ίσα σύνολα, υποσύνολα, κενό σύνολο

ΟΡΙΣΜΟΣ · Υποσύνολο – Ίσα σύνολα

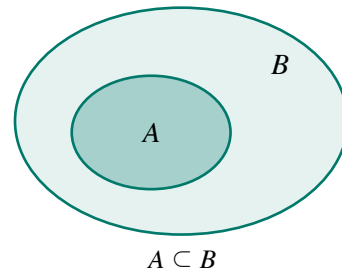
- ▶ Το A είναι **υποσύνολο** του B , και γράφουμε $A \subseteq B$, όταν **κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B** .
- ▶ Τα A και B είναι **ίσα**, $A = B$, όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, δηλαδή όταν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Για κάθε σύνολο A ισχύουν:

- ▶ $A \subseteq A$
- ▶ αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$.

ΟΡΙΣΜΟΣ · Κενό σύνολο

Κενό λέγεται το σύνολο που **δεν έχει κανένα στοιχείο**. Συμβολίζεται με $\emptyset$ ή $\{\}$. Θεωρούμε ότι $\emptyset \subseteq A$ για κάθε σύνολο A .



✗ Συχνό λάθος: $\in$ ή $\subseteq$;

Το σύμβολο $\in$ συνδέει **στοιχείο** με σύνολο, ενώ το $\subseteq$ συνδέει **σύνολο** με σύνολο.

✗ ΛΑΘΟΣ: $2 \subseteq \{1, 2, 3\}$

✓ ΣΩΣΤΟ: $2 \in \{1, 2, 3\}$ και $\{2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.

Επίσης: $\emptyset$ και $\{0\}$ **δεν** είναι το ίδιο. Το $\{0\}$ έχει ένα στοιχείο, το 0· το $\emptyset$ δεν έχει κανένα.

Βασικό σύνολο και διαγράμματα Venn

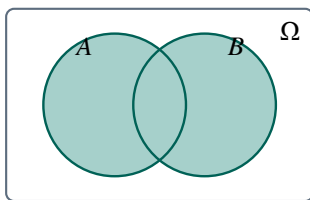
Σε κάθε πρόβλημα τα σύνολα με τα οποία δουλεύουμε είναι υποσύνολα ενός «μεγάλου» συνόλου, που λέγεται **βασικό σύνολο** και συμβολίζεται με Ω . Για να «βλέπουμε» τις σχέσεις συνόλων χρησιμοποιούμε τα **διαγράμματα Venn**: το Ω το σχεδιάζουμε σαν ορθογώνιο και τα υποσύνολά του σαν κλειστές καμπύλες (κύκλους) μέσα σε αυτό.

Πράξεις με σύνολα

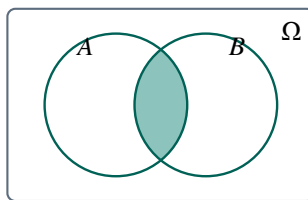
ΟΡΙΣΜΟΣ · Ένωση – Τομή – Συμπλήρωμα

Έστω A, B υποσύνολα ενός βασικού συνόλου Ω .

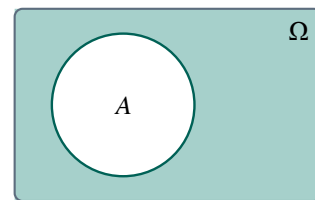
- **Ένωση** $A \cup B$: το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα A, B :
 $A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$.
- **Τομή** $A \cap B$: το σύνολο των κοινών στοιχείων τους: $A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$.
 Αν $A \cap B = \emptyset$, τα σύνολα λέγονται **ξένα**.
- **Συμπλήρωμα** A' : το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο A : $A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$.



$A \cup B$ (ένωση)



$A \cap B$ (τομή)

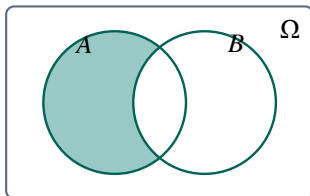


A' (συμπλήρωμα)

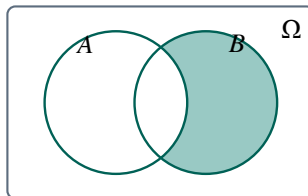
Επιπλέον, θα χρειαστούμε (κυρίως στις Πιθανότητες) και τη **διαφορά**:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ και } x \notin B\} = A \cap B',$$

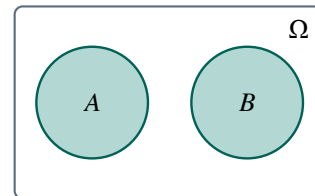
δηλαδή τα στοιχεία του A που δεν είναι στο B .



$A - B$



$B - A$



$A \cap B = \emptyset$ (ξένα)

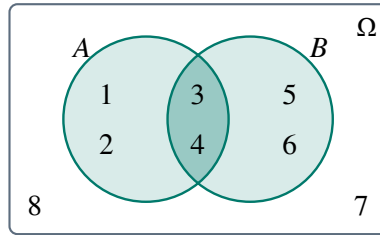
Οι Χρήσιμες ιδιότητες

- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
- $A \cup A' = \Omega, \quad A \cap A' = \emptyset$
- $(A')' = A, \quad \Omega' = \emptyset, \quad \emptyset' = \Omega$
- Αν $A \subseteq B$, τότε $A \cup B = B$ και $A \cap B = A$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (De Morgan)
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (De Morgan)

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Πράξεις με αναγραφή

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Να βρεθούν τα $A \cup B$, $A \cap B$, A' , B' , $A - B$ και $(A \cup B)'$.

ΛΥΣΗ



Τοποθετούμε πρώτα τα κοινά στοιχεία 3,4 στο κοινό μέρος των κύκλων, και μετά τα υπόλοιπα. Διαβάζουμε από το σχήμα:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad A \cap B = \{3,4\}, \quad A' = \{5,6,7,8\}, \quad B' = \{1,2,7,8\},$$

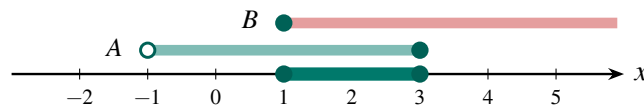
$$A - B = \{1,2\}, \quad (A \cup B)' = \{7,8\}.$$

Παρατήρησε ότι $A' \cap B' = \{7,8\} = (A \cup B)'$, όπως λέει ο κανόνας De Morgan.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Σύνολα πάνω στον άξονα

Έστω $\Omega = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$ και $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$. Να βρεθούν τα $A \cap B$ και $A \cup B$.

ΛΥΣΗ



Κοινά σημεία έχουν οι αριθμοί από το 1 ως το 3: $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$.

Όλα μαζί καλύπτουν από το -1 (χωρίς αυτό) και δεξιά: $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$.

⚠ Προσοχή!

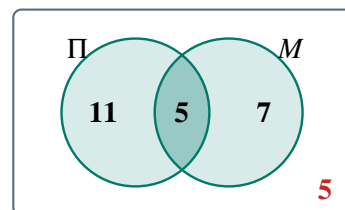
- ▶ Στην ένωση **δεν γράφουμε δύο φορές** τα κοινά στοιχεία: $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$ και όχι $\{1,2,2,3\}$.
- ▶ Το συμπλήρωμα εξαρτάται από το βασικό σύνολο Ω . Αν το Ω αλλάξει, αλλάζει και το A' .
- ▶ Όταν σχεδιάζεις διάγραμμα Venn από αναγραφή, **ξεκίνα πάντα από την τομή**.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Πρόβλημα με διάγραμμα Venn

Σε μια τάξη 28 μαθητών, 16 παίζουν ποδόσφαιρο, 12 μπάσκετ και 5 και τα δύο αθλήματα. Πόσοι μαθητές δεν παίζουν κανένα από τα δύο;

ΛΥΣΗ

Έστω Π οι μαθητές του ποδοσφαίρου και M του μπάσκετ. Στην τομή γράφουμε 5. «Μόνο ποδόσφαιρο» παίζουν $16 - 5 = 11$ και «μόνο μπάσκετ» $12 - 5 = 7$. Άρα σε ένα τουλάχιστον άθλημα συμμετέχουν $11 + 5 + 7 = 23$ μαθητές και **σε κανένα** $28 - 23 = 5$ μαθητές.



✖ Συχνό λάθος

✖ **ΛΑΘΟΣ:** «Σε ένα τουλάχιστον άθλημα παίζουν $16 + 12 = 28$, άρα όλοι.»

Έτσι οι 5 που παίζουν και τα δύο μετρήθηκαν **δύο φορές!**

✓ **ΣΩΣΤΟ:** $16 + 12 - 5 = 23$. Γενικά, για πεπερασμένα σύνολα: $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$.

Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com

Τα διαγράμματα Venn είναι το βασικό εργαλείο για το επόμενο κεφάλαιο, τις Πιθανότητες. Στο mathgreece.com θα βρεις διαδραστικές ασκήσεις με σύνολα και βίντεο όπου οι πράξεις «χρωματίζονται» βήμα-βήμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα Ε.2

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Να γράψετε με αναγραφή τα σύνολα: α) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$ β) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 5\}$ γ) $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x = 0\}$ δ) $\Delta = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$.
- 2 Να συμπληρώσετε με $\in$, $\notin$, $\subseteq$: α) $\sqrt{2} \dots \mathbb{Q}$ β) $\{0\} \dots \mathbb{N}$ γ) $-3 \dots \mathbb{Z}$ δ) $\emptyset \dots \{1,2\}$ ε) $\frac{4}{2} \dots \mathbb{N}$.
- 3 Δίνονται $\Omega = \{1,2, \dots, 10\}$, $A = \{2,4,6,8,10\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$. Να σχεδιάσετε διάγραμμα Venn και να βρείτε τα $A \cup B$, $A \cap B$, A' , $B - A$, $A' \cap B'$.
- 4 Να γράψετε όλα τα υποσύνολα του $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Πόσα είναι;
- 5 Αν $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$ και $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ με $\Omega = \mathbb{R}$, να βρείτε τα $A \cap B$, $A \cup B$ και A' .

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 6 Να γραμμοσκιάσετε σε διάγραμμα Venn τα σύνολα: α) $A' \cap B$ β) $(A \cap B)'$ γ) $(A - B) \cup (B - A)$.
- 7 Σε έρευνα σε 100 μαθητές, 60 είπαν ότι διαβάζουν βιβλία, 45 ότι βλέπουν σειρές και 20 ότι κάνουν και τα δύο. Πόσοι: α) κάνουν μόνο το ένα από τα δύο; β) δεν κάνουν κανένα;
- 8 Αν $A \subseteq B$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: α) $A \cup B$ β) $A \cap B$ γ) $A - B$ δ) $B' \cap A$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1

Πιθανότητες



Πόσο πιθανό είναι να βρέξει αύριο; Ποια η πιθανότητα να κερδίσει ένα δελτίο; Η Θεωρία Πιθανοτήτων είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που μετράει την αβεβαιότητα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μάθουμε να περιγράφουμε με ακρίβεια όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος, να κάνουμε πράξεις με ενδεχόμενα και να υπολογίζουμε πιθανότητες με τον κλασικό ορισμό και τους βασικούς κανόνες λογισμού.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1.1 Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

1.2 Η έννοια της πιθανότητας

Συμπληρωματικό υλικό: Για βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις, κουίζ και παιχνίδια γνώσεων πάνω σε αυτό το κεφάλαιο, επισκέψου το mathgreece.com — ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

ΜΑΘΗΜΑ

1.1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Πιθανότητες

Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

Τι θα μάθουμε: τι είναι πείραμα τύχης, πώς βρίσκουμε τον δειγματικό χώρο (με αναγραφή, δέντρο-διάγραμμα ή πίνακα διπλής εισόδου), τι είναι ενδεχόμενο, πότε ένα ενδεχόμενο «πραγματοποιείται» και πώς κάνουμε πράξεις με ενδεχόμενα, μεταφράζοντας τη φυσική γλώσσα σε γλώσσα συνόλων.

Πείραμα τύχης

Αν ζεστάνουμε νερό στο επίπεδο της θάλασσας, ξέρουμε από πριν ότι θα βράσει στους 100°C : το αποτέλεσμα είναι *προβλέψιμο*. Τέτοια πειράματα λέγονται **αιτιοκρατικά**. Αν όμως ρίξουμε ένα ζάρι, όσο προσεκτικά κι αν το ρίξουμε, **δεν μπορούμε να προβλέψουμε** ποια ένδειξη θα φέρει, παρότι ξέρουμε ποιες είναι οι δυνατές ενδείξεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ · Πείραμα τύχης

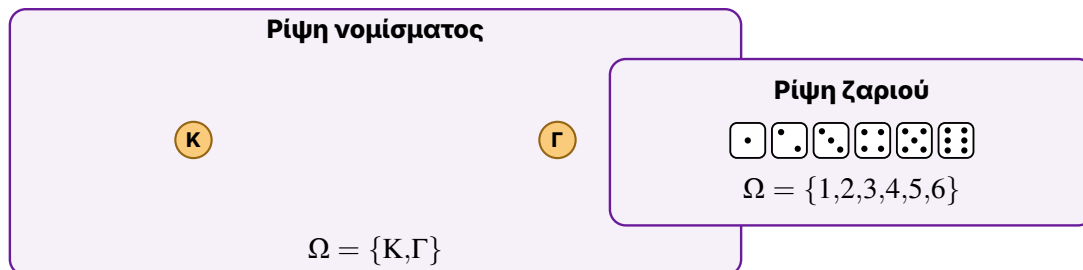
Πείραμα τύχης λέγεται κάθε πείραμα το οποίο, όσες φορές κι αν επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες (φαινομενικά) συνθήκες, **δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα του**.

Παραδείγματα: η ρίψη ενός νομίσματος, η ρίψη ενός ζαριού, η κλήρωση ενός λαχνού, η επιλογή ενός μαθητή στην τύχη από την τάξη, η καταγραφή του φύλου των παιδιών μιας οικογένειας.

Δειγματικός χώρος

ΟΡΙΣΜΟΣ · Δειγματικός χώρος

Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης λέγεται **δειγματικός χώρος** και συμβολίζεται με Ω . Κάθε αποτέλεσμα λέγεται και **δυνατή περίπτωση**. Αν $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα, γράφουμε $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$.



(Κ = κεφαλή, Γ = γράμματα.)

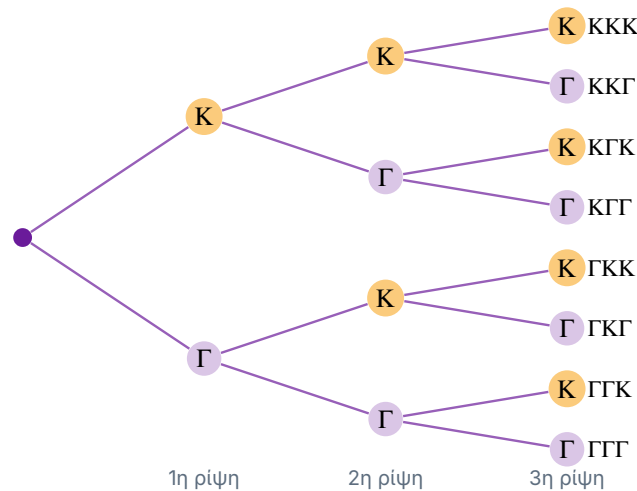
Όταν το πείραμα γίνεται σε **στάδια** (π.χ. ρίχνουμε δύο φορές ένα νόμισμα), τα αποτελέσματα είναι *διατεταγμένα ζεύγη* ή *τριάδες*. Για να μη χάσουμε κανένα, χρησιμοποιούμε δύο πολύ χρήσιμα εργαλεία.

Εργαλείο 1: Το δεντροδιάγραμμα

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Τρεις ρίψεις νομίσματος

Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος.

ΛΥΣΗ Φτιάχνουμε δεντροδιάγραμμα: από κάθε «κόμβο» ξεκινούν δύο κλαδιά (Κ ή Γ).



Διαβάζοντας κάθε «διαδρομή» από τη ρίζα ως το τέλος, παίρνουμε:

$$\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\},$$

δηλαδή $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ δυνατά αποτελέσματα.

Εργαλείο 2: Ο πίνακας διπλής εισόδου

Όταν το πείραμα έχει δύο στάδια με πολλά αποτελέσματα, ο πίνακας είναι πιο βολικός από το δέντρο.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Δύο ζάρια

Ρίχνουμε ένα κόκκινο και ένα μπλε ζάρι. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος και το πλήθος των στοιχείων του.

ΛΥΣΗ

Κάθε αποτέλεσμα είναι ένα ζεύγος (x, y) , όπου x η ένδειξη του κόκκινου και y του μπλε ζαριού. Τα γράφουμε σε πίνακα 6×6 :

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$$

με $N(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$ στοιχεία.

Τα ζεύγη $(1,2)$ και $(2,1)$ είναι **διαφορετικά** αποτελέσματα: στο πρώτο το κόκκινο έφερε 1, στο δεύτερο 2.

Στο σχήμα έχουμε χρωματίσει τα ζεύγη με άθροισμα 7, τα οποία θα μας χρειαστούν αργότερα.

		μπλε ζάρι					
		1	2	3	4	5	6
κόκκινο ζάρι	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
	6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Η πολλαπλασιαστική αρχή

Αν ένα πείραμα γίνεται σε δύο στάδια και το πρώτο έχει μ δυνατά αποτελέσματα, ενώ το δεύτερο ν , τότε το πείραμα έχει συνολικά $\mu \cdot \nu$ δυνατά αποτελέσματα. Έτσι: δύο ζάρια $\rightarrow 6 \cdot 6 = 36$, τρία νομίσματα $\rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, νόμισμα και ζάρι $\rightarrow 2 \cdot 6 = 12$.

Ενδεχόμενα**ΟΡΙΣΜΟΣ · Ενδεχόμενο**

Ενδεχόμενο (ή γεγονός) λέγεται κάθε **υποσύνολο** του δειγματικού χώρου Ω .

- ▶ Ένα ενδεχόμενο με ένα μόνο στοιχείο λέγεται **απλό**, ενώ με περισσότερα **σύνθετο**.
- ▶ Λέμε ότι ένα ενδεχόμενο A **πραγματοποιείται** όταν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι στοιχείο του A . Τα στοιχεία του A λέγονται **ευνοϊκές περιπτώσεις** για το A .
- ▶ Το Ω πραγματοποιείται πάντα: λέγεται **βέβαιο** ενδεχόμενο.
- ▶ Το $\emptyset$ δεν πραγματοποιείται ποτέ: λέγεται **αδύνατο** ενδεχόμενο.

Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου A το συμβολίζουμε με $N(A)$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Ενδεχόμενα στη ρίψη ζαριού

Ρίχνουμε ένα ζάρι. Να γραφούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα: A : «η ένδειξη είναι άρτια», B : «η ένδειξη είναι μεγαλύτερη του 4», Γ : «η ένδειξη είναι 7», Δ : «η ένδειξη είναι μικρότερη του 10».

ΛΥΣΗ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Τότε $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{5, 6\}$, $\Gamma = \emptyset$ (αδύνατο), $\Delta = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$ (βέβαιο). Αν ρίξουμε το ζάρι και έρθει $\begin{smallmatrix} \square & \vdots & \square \end{smallmatrix}$, πραγματοποιούνται τα A, B, Δ . Αν έρθει $\begin{smallmatrix} \square & \bullet & \square \end{smallmatrix}$, πραγματοποιείται μόνο το Δ .

Πράξεις με ενδεχόμενα

Επειδή τα ενδεχόμενα είναι σύνολα, κάνουμε μ' αυτά τις πράξεις των συνόλων που μάθαμε στο μάθημα Ε.2. Το σημαντικό είναι να «μεταφράζουμε» σωστά από την καθημερινή γλώσσα στη γλώσσα των συνόλων.

Συμβολισμός	Πραγματοποιείται όταν...	Διάγραμμα
$A \cup B$	πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B	
$A \cap B$	πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A και B	
A'	δεν πραγματοποιείται το A	
$A - B$	πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B	
$(A - B) \cup (B - A)$	πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A, B	
$(A \cup B)'$	δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A, B	
$A \subseteq B$	όταν πραγματοποιείται το A , πραγματοποιείται και το B	

ΟΡΙΣΜΟΣ · Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ασυμβίβαστα** (ή αμοιβαίως αποκλειόμενα) όταν $A \cap B = \emptyset$, δηλαδή όταν **δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα**.

Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού, τα ενδεχόμενα «άρτια ένδειξη» και «ένδειξη 3» είναι ασυμβίβαστα. Κάθε ενδεχόμενο A και το αντίθετό του A' είναι πάντα ασυμβίβαστα.

❌ Συχνό λάθος: «ασυμβίβαστα» ή «αντίθετα»;

Τα αντίθετα ενδεχόμενα (A και A') είναι πάντα ασυμβίβαστα, **αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο**. Στο ζάρι, τα $A = \{1, 2\}$ και $B = \{5\}$ είναι ασυμβίβαστα, αλλά δεν είναι αντίθετα, γιατί αν έρθει 3 δεν πραγματοποιείται κανένα. Αντίθετα είναι όταν, επιπλέον, $A \cup B = \Omega$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Μετάφραση λεκτικών εκφράσεων

Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , να εκφράσετε με σύμβολα τα ενδεχόμενα:

α) πραγματοποιείται μόνο το A β) δεν πραγματοποιείται το B γ) πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα A, B

δ) πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A', B .

ΛΥΣΗ α) Πραγματοποιείται το A και όχι το B : $A - B = A \cap B'$.

β) B' .

- γ) «Το πολύ ένα» σημαίνει «όχι και τα δύο»: $(A \cap B)'$.
 δ) $A' \cup B$.

⚠ Προσοχή στις εκφράσεις!

- ▶ «ένα τουλάχιστον» $\rightarrow$ ένωση «και τα δύο» / «ταυτόχρονα» $\rightarrow$ τομή
- ▶ «μόνο το A » $\rightarrow A - B$ (όχι απλώς A !)
- ▶ «το πολύ ένα» $\rightarrow (A \cap B)'$ (περιλαμβάνει και το «κανένα»)
- ▶ «ακριβώς ένα» $\rightarrow (A - B) \cup (B - A)$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 · Δύο ζάρια και ενδεχόμενα

Ρίχνουμε δύο ζάρια. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A : «το άθροισμα των ενδείξεων είναι 7», B : «οι δύο ενδείξεις είναι ίσες», Γ : «η ένδειξη του πρώτου ζαριού είναι 6». Να βρεθούν τα A , B , Γ , $A \cap \Gamma$, $A \cap B$ και να εξεταστεί ποια είναι ασυμβίβαστα.

ΛΥΣΗ Από τον πίνακα των 36 ζευγών:

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}, \quad B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\},$$

$$\Gamma = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}, \quad A \cap \Gamma = \{(6,1)\}.$$

Αφού το άθροισμα δύο ίσων ενδείξεων είναι άρτιο και δεν μπορεί να είναι 7, είναι $A \cap B = \emptyset$: τα A , B είναι **ασυμβίβαστα**. Τα A, Γ δεν είναι (έχουν κοινό το $(6,1)$), ούτε τα B, Γ (κοινό το $(6,6)$).

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 · Επιλογή από κάλπη

Μια κάλπη περιέχει 2 κόκκινες (K_1, K_2) και 1 άσπρη (A) μπάλα. Παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες χωρίς επανατοποθέτηση. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος και το ενδεχόμενο E : «οι δύο μπάλες έχουν το ίδιο χρώμα».

ΛΥΣΗ Η πρώτη μπάλα μπορεί να είναι οποιαδήποτε από τις 3 και η δεύτερη οποιαδήποτε από τις 2 που απέμειναν: $3 \cdot 2 = 6$ αποτελέσματα:

$$\Omega = \{K_1 K_2, K_1 A, K_2 K_1, K_2 A, A K_1, A K_2\}.$$

Ίδιο χρώμα έχουν μόνο οι δύο κόκκινες: $E = \{K_1 K_2, K_2 K_1\}$.

⊗ Συχνό λάθος: Ξεχνάω τη σειρά

Στο προηγούμενο παράδειγμα πολλοί γράφουν $\Omega = \{KK, KA, AK\}$. Αυτό δεν είναι λάθος ως περιγραφή, όμως τα αποτελέσματα αυτά **δεν είναι ισοπίθανα**, και αυτό θα μας οδηγήσει σε λάθος πιθανότητες στο επόμενο μάθημα. **Ξεχώριζε πάντα τα αντικείμενα** (π.χ. K_1, K_2), ώστε όλα τα αποτελέσματα να έχουν την ίδια «ευκαιρία».



Θέλεις περισσότερα; $\rightarrow$ mathgreece.com

Στο mathgreece.com υπάρχουν βίντεο με κατασκευή δεντροδιαγραμμάτων και πινάκων διπλής εισόδου, καθώς και κουίζ «μετάφρασης» εκφράσεων σε σύμβολα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.1

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Να γράψετε τον δειγματικό χώρο των πειραμάτων: α) ρίχνουμε ένα νόμισμα και ένα ζάρι, β) μια οικογένεια έχει δύο παιδιά και καταγράφουμε το φύλο τους κατά σειρά γέννησης (A = αγόρι, K = κορίτσι).
- 2 Ρίχνουμε ένα ζάρι. Να γράψετε με αναγραφή τα ενδεχόμενα: A : «ένδειξη πρώτος αριθμός», B : «ένδειξη περιττή», και στη συνέχεια τα $A \cup B$, $A \cap B$, A' , $A - B$.
- 3 Ρίχνουμε δύο φορές ένα νόμισμα. Να βρείτε τον δειγματικό χώρο και τα ενδεχόμενα A : «φέρνουμε ακριβώς μία κεφαλή», B : «φέρνουμε τουλάχιστον μία κεφαλή», Γ : «δεν φέρνουμε κεφαλή». Ποια από αυτά είναι ασυμβίβαστα;
- 4 Αν A, B ενδεχόμενα του Ω , να εκφράσετε με σύμβολα: α) πραγματοποιείται μόνο το B , β) πραγματοποιούνται και τα δύο, γ) δεν πραγματοποιείται κανένα, δ) πραγματοποιείται ακριβώς ένα.
- 5 Ρίχνουμε δύο ζάρια. Να βρείτε πόσα στοιχεία έχουν τα ενδεχόμενα: A : «άθροισμα ενδείξεων 4», B : «άθροισμα μεγαλύτερο του 10», Γ : «γινόμενο ενδείξεων 12».

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 6 Ένα κουτί περιέχει τρεις κάρτες με τους αριθμούς 1, 2, 3. Παίρνουμε διαδοχικά δύο κάρτες α) με επανατοποθέτηση, β) χωρίς επανατοποθέτηση, και σχηματίζουμε διψήφιο αριθμό (πρώτη κάρτα = δεκάδες). Να γράψετε τον δειγματικό χώρο σε κάθε περίπτωση και το ενδεχόμενο «ο αριθμός είναι άρτιος».
- 7 Αν $A \subseteq B$, να εξηγήσετε γιατί τα ενδεχόμενα A και B' είναι ασυμβίβαστα.
- 8 Ένας μαθητής απαντά σε τρεις ερωτήσεις «Σωστό – Λάθος» στην τύχη. Να βρείτε με δέντρο-διάγραμμα τον δειγματικό χώρο (Σ = σωστή απάντηση, Λ = λάθος απάντηση) και το ενδεχόμενο «απαντά σωστά σε δύο τουλάχιστον ερωτήσεις».

ΜΑΘΗΜΑ

1.2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Πιθανότητες

Η έννοια της πιθανότητας

Τι θα μάθουμε: πώς μετράμε πόσο «εύκολα» πραγματοποιείται ένα ενδεχόμενο: σχετική συχνότητα, κλασικός ορισμός της πιθανότητας (ισοπίθανα αποτελέσματα), αξιωματικός ορισμός και οι βασικοί κανόνες λογισμού πιθανοτήτων: αντίθετο ενδεχόμενο, προσθετικός νόμος, διαφορά και εγκλεισμός.

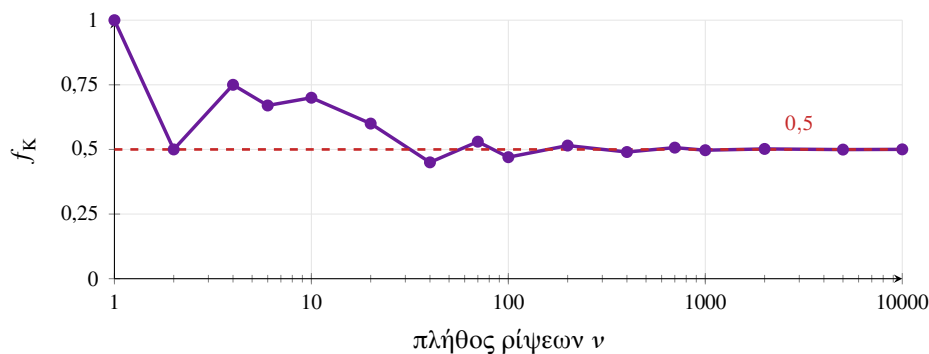
Σχετική συχνότητα

Αν επαναλάβουμε ένα πείραμα τύχης ν φορές και ένα ενδεχόμενο A πραγματοποιηθεί κ φορές, ο λόγος

$$f_A = \frac{\kappa}{\nu}$$

λέγεται **σχετική συχνότητα** του A . Προφανώς $0 \leq f_A \leq 1$.

Αν ρίξουμε ένα νόμισμα 10 φορές, μπορεί να έρθει κεφαλή 7 φορές ($f = 0,7$). Όσο όμως αυξάνουμε τις ρίψεις, η σχετική συχνότητα της κεφαλής «σταθεροποιείται» γύρω από το 0,5. Αυτό το εμπειρικό γεγονός λέγεται **στατιστική ομαλότητα** (ή νόμος των μεγάλων αριθμών).



Σχετική συχνότητα της κεφαλής σε επαναλαμβανόμενες ρίψεις νομίσματος.

Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Ας πούμε ότι ο δειγματικός χώρος έχει ν αποτελέσματα, τα οποία έχουν όλα την **ίδια δυνατότητα** να εμφανιστούν, όπως οι 6 έδρες ενός «τίμιου» ζαριού. Τέτοια αποτελέσματα λέγονται **ισοπίθανα**. Τότε είναι φυσικό να δεχτούμε ότι κάθε απλό ενδεχόμενο έχει πιθανότητα $\frac{1}{\nu}$, και ότι ένα ενδεχόμενο με κ στοιχεία έχει πιθανότητα $\frac{\kappa}{\nu}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ · Κλασικός ορισμός – Laplace

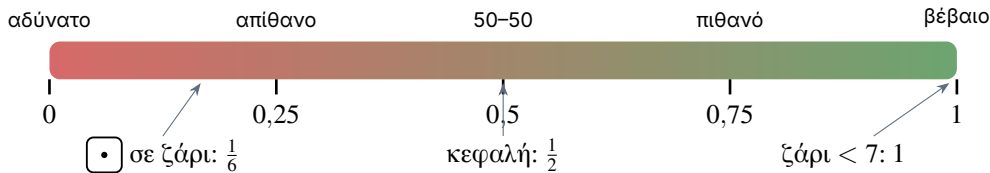
Σε ένα πείραμα με **ισοπίθανα** αποτελέσματα, η **πιθανότητα** ενός ενδεχομένου A είναι

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Από τον ορισμό προκύπτουν αμέσως:

➔ Άμεσες συνέπειες

$$P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0, \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \text{ για κάθε ενδεχόμενο } A.$$



ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Πιθανότητες στη ρίψη ζαριού

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων A : «άρτια ένδειξη», B : «ένδειξη τουλάχιστον 5», Γ : «ένδειξη πολλαπλάσιο του 3».

ΛΥΣΗ Τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα, με $N(\Omega) = 6$. Είναι $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{5, 6\}$, $\Gamma = \{3, 6\}$, άρα

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(\Gamma) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Δύο ζάρια

Ρίχνουμε δύο ζάρια. Ποια η πιθανότητα: α) το άθροισμα να είναι 7; β) το άθροισμα να είναι 11; γ) οι ενδείξεις να είναι ίσες;

ΛΥΣΗ $N(\Omega) = 36$, όλα ισοπίθανα (δες τον πίνακα του Μαθήματος 1.1).

α) Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι οι 6 χρωματισμένες: $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

β) Άθροισμα 11: (5,6), (6,5). Άρα $P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

γ) Ίσες ενδείξεις: (1,1), ..., (6,6). Άρα $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

✗ Συχνό λάθος: τα «μη ισοπίθανα» αποτελέσματα

Ρίχνουμε δύο νομίσματα. Πιθανότητα να φέρουμε μία κεφαλή και ένα γράμμα;

✗ ΛΑΘΟΣ: «Τα δυνατά αποτελέσματα είναι “2 κεφαλές”, “2 γράμματα”, “1 και 1”, άρα $P = \frac{1}{3}$.»

✓ ΣΩΣΤΟ: Τα ισοπίθανα αποτελέσματα είναι ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ. Ευνοϊκά είναι τα ΚΓ, ΓΚ, άρα $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Ο κλασικός ορισμός εφαρμόζεται μόνο αν τα στοιχεία του Ω είναι ισοπίθανα.

■ Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας

Τι γίνεται όμως όταν τα αποτελέσματα δεν είναι ισοπίθανα (π.χ. ένα «πειραγμένο» ζάρι); Τότε αναθέτουμε σε κάθε αποτέλεσμα έναν αριθμό, την πιθανότητά του, με τους εξής κανόνες.

ΟΡΙΣΜΟΣ · Αξιωματικός ορισμός

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν αριθμό $P(\omega_i)$ ώστε:

$$0 \leq P(\omega_i) \leq 1 \quad \text{και} \quad P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = 1.$$

Η **πιθανότητα** ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \neq \emptyset$ είναι το άθροισμα $P(A) = P(\alpha_1) + \dots + P(\alpha_k)$, ενώ $P(\emptyset) = 0$.

Ο κλασικός ορισμός είναι η ειδική περίπτωση όπου $P(\omega_i) = \frac{1}{\nu}$ για κάθε i .

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Ένα «πειραγμένο» ζάρι

Ένα ζάρι είναι κατασκευασμένο έτσι ώστε κάθε άρτια ένδειξη να έχει διπλάσια πιθανότητα από κάθε περιττή. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρουμε ένδειξη μικρότερη του 4.

ΛΥΣΗ Έστω $P(1) = P(3) = P(5) = p$. Τότε $P(2) = P(4) = P(6) = 2p$. Το άθροισμα όλων είναι 1:

$$p + 2p + p + 2p + p + 2p = 1 \Leftrightarrow 9p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{9}.$$

Για $A = \{1, 2, 3\}$: $P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.

Κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων

Οι κανόνες που ακολουθούν ισχύουν **πάντα** (και για τον αξιωματικό ορισμό). Τους αποδεικνύουμε εδώ για ισοπίθανα αποτελέσματα, όπου η απόδειξη είναι απλή και διδακτική.

Ο 1. Απλός προσθετικός νόμος

Αν A, B είναι **ασυμβίβαστα** ενδεχόμενα ($A \cap B = \emptyset$), τότε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Απόδειξη. Αφού δεν έχουν κοινά στοιχεία, $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$. Διαιρώντας με $N(\Omega)$ παίρνουμε το ζητούμενο. Ο κανόνας επεκτείνεται σε περισσότερα ανά δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.

Ο 2. Αντίθετο ενδεχόμενο

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Απόδειξη. Τα A, A' είναι ασυμβίβαστα και $A \cup A' = \Omega$. Από τον κανόνα 1: $P(A) + P(A') = P(\Omega) = 1$.

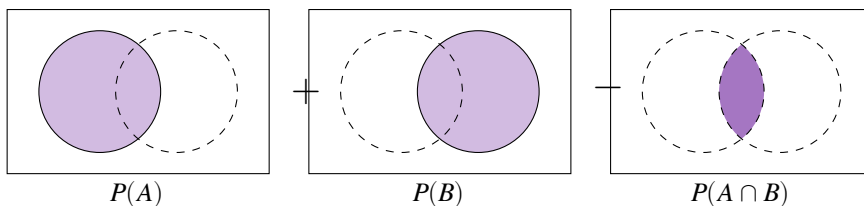
💡 Πότε χρησιμοποιώ το αντίθετο;

Όταν ένα ενδεχόμενο περιγράφεται με «**τουλάχιστον ένα**» ή έχει **πολλές** ευνοϊκές περιπτώσεις, συχνά είναι πιο εύκολο να υπολογίσουμε την πιθανότητα του αντιθέτου του και να την αφαιρέσουμε από το 1.

Ο 3. Προσθετικός νόμος (γενικός)

Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$



Προσθέτοντας $P(A) + P(B)$ μετράμε την τομή **δύο φορές**· γι' αυτό την αφαιρούμε μία φορά.

Απόδειξη (για ισοπίθανα). Στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ τα στοιχεία της τομής μετρήθηκαν δύο φορές, άρα $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$. Διαιρούμε με $N(\Omega)$.

➔ 4. Εγκλεισμός

Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$.

➔ 5. Πιθανότητα διαφοράς

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Απόδειξη. Τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και η ένωσή τους είναι το A . Άρα $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$.

✗ Τα τρία κλασικά λάθη

✗ **ΛΑΘΟΣ:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ πάντα.

✓ **ΣΩΣΤΟ:** μόνο αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα.

✗ **ΛΑΘΟΣ:** $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

✓ **ΣΩΣΤΟ:** $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

✗ **ΛΑΘΟΣ:** Αποτέλεσμα $P(A) = 1,2$ ή $P(A) = -0,1$. Μια πιθανότητα είναι **πάντα** στο $[0,1]$ · αν βγει έξω, κάπου υπάρχει λάθος!

↘ Ασκήσεις με κανόνες λογισμού

1. Γράφω τι δίνεται και τι ζητείται με σύμβολα: π.χ. «μόνο το A » $\rightarrow P(A - B)$.
2. Αν δίνονται τρεις από τις $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, βρίσκω την τέταρτη από τον προσθετικό νόμο.
3. Για «ούτε το A ούτε το B » χρησιμοποιώ $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$.
4. Για ανισότητες με πιθανότητες: $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$, άρα $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq 1$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Εφαρμογή του προσθετικού νόμου

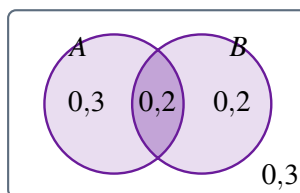
Για δύο ενδεχόμενα A, B είναι $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ και $P(A \cap B) = 0,2$. Να βρεθούν οι πιθανότητες: α) να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα A, B , β) να μην πραγματοποιηθεί κανένα, γ) να πραγματοποιηθεί μόνο το A , δ) να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα.

ΛΥΣΗ α) $P(A \cup B) = 0,5 + 0,4 - 0,2 = 0,7$.

β) $P((A \cup B)') = 1 - 0,7 = 0,3$.

γ) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,5 - 0,2 = 0,3$.

δ) $P(B - A) = 0,4 - 0,2 = 0,2$. Τα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα, άρα η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα είναι $0,3 + 0,2 = 0,5$.



Γέμισε πρώτα την τομή! Όλοι οι αριθμοί μαζί δίνουν 1.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 · Με το αντίθετο ενδεχόμενο

Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Ποια η πιθανότητα να φέρουμε τουλάχιστον μία κεφαλή;

ΛΥΣΗ Από το Μάθημα 1.1, $N(\Omega) = 8$ ισοπίθανα αποτελέσματα. Το αντίθετο του «τουλάχιστον μία κεφαλή» είναι το «καμία κεφαλή» = $\{\Gamma\Gamma\Gamma\}$, με πιθανότητα $\frac{1}{8}$. Άρα

$$P(\text{τουλάχιστον μία κεφαλή}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 · Πρόβλημα με ποσοστά

Σε ένα σχολείο, το 60% των μαθητών μαθαίνει Αγγλικά, το 35% Γαλλικά και το 15% και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Ποια η πιθανότητα: α) να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις δύο γλώσσες; β) να μη μαθαίνει καμία; γ) να μαθαίνει μόνο Γαλλικά;

ΛΥΣΗ Με A : «Αγγλικά», Γ : «Γαλλικά»: $P(A) = 0,6$, $P(\Gamma) = 0,35$, $P(A \cap \Gamma) = 0,15$.
α) $P(A \cup \Gamma) = 0,6 + 0,35 - 0,15 = 0,8$. β) $1 - 0,8 = 0,2$. γ) $P(\Gamma - A) = 0,35 - 0,15 = 0,2$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 · Ανισότητες με πιθανότητες

Αν $P(A) = 0,7$ και $P(B) = 0,6$, να δείξετε ότι τα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα και ότι $0,3 \leq P(A \cap B) \leq 0,6$.

ΛΥΣΗ Αν ήταν ασυμβίβαστα, θα ήταν $P(A \cup B) = 0,7 + 0,6 = 1,3 > 1$, άτοπο.
Αφού $P(A \cup B) \leq 1$: $0,7 + 0,6 - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow P(A \cap B) \geq 0,3$.
Αφού $A \cap B \subseteq B$: $P(A \cap B) \leq P(B) = 0,6$. Συνολικά $0,3 \leq P(A \cap B) \leq 0,6$.

Προσοχή!

Για να εφαρμόσεις τον τύπο $\frac{N(A)}{N(\Omega)}$, **γράψε ρητά** ότι τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα («αμερόληπτο ζάρι», «τυχαία επιλογή» κ.λπ.). Στα γραπτά, αυτή η αιτιολόγηση μετράει!

Το ήξερες;

Η θεωρία πιθανοτήτων γεννήθηκε τον 17ο αιώνα από την αλληλογραφία των Γάλλων μαθηματικών *Pascal* και *Fermat*, με αφορμή ερωτήματα ενός παίκτη τυχερών παιχνιδιών. Τον αξιωματικό ορισμό τον έδωσε το 1933 ο Ρώσος μαθηματικός *Kolmogorov*.

Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com



Δες στο **mathgreece.com** τα βίντεο-μαθήματα «Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων» και δοκίμασε το παιχνίδι γνώσεων με ζάρια και νομίσματα. Υπάρχουν και πολλές επιπλέον ασκήσεις επανάληψης με λύσεις!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.2

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

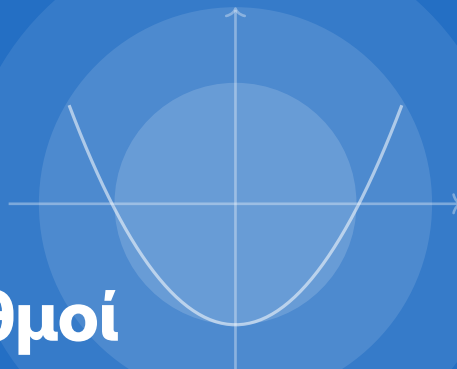
■ Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Ένα κουτί περιέχει 5 κόκκινες, 3 πράσινες και 2 μπλε μπάλες. Παίρνουμε τυχαία μία. Να βρείτε την πιθανότητα η μπάλα να είναι: α) κόκκινη, β) όχι πράσινη, γ) κόκκινη ή μπλε.
- 2 Ρίχνουμε δύο ζάρια. Να βρείτε την πιθανότητα: α) το άθροισμα να είναι 8, β) το άθροισμα να είναι μικρότερο από 4, γ) μία τουλάχιστον ένδειξη να είναι 6.
- 3 Αν $P(A) = 0,45$, $P(B) = 0,3$ και $P(A \cup B) = 0,6$, να βρείτε τις πιθανότητες $P(A \cap B)$, $P(A')$, $P(A - B)$ και $P((A \cup B)')$.
- 4 Αν A, B ασυμβίβαστα με $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{1}{4}$, να βρείτε τις $P(A \cup B)$, $P(A' \cap B')$ και $P(A - B)$.
- 5 Σε μια τάξη 25 μαθητών, 15 έχουν ποδήλατο, 8 πατίνι και 5 έχουν και τα δύο. Επιλέγουμε τυχαία μαθητή. Πιθανότητα: α) να έχει ένα τουλάχιστον από τα δύο, β) να μην έχει κανένα, γ) να έχει μόνο πατίνι.
- 6 Μια οικογένεια έχει τρία παιδιά. Υποθέτοντας ότι αγόρι και κορίτσι είναι εξίσου πιθανά, να βρείτε την πιθανότητα να έχει: α) ακριβώς δύο κορίτσια, β) τουλάχιστον ένα αγόρι.

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 7 Σε ένα ζάρι η πιθανότητα κάθε ένδειξης είναι ανάλογη της ένδειξης (δηλαδή $P(k) = \lambda k$, $k = 1, \dots, 6$). Να βρείτε το λ και την πιθανότητα να έρθει άρτια ένδειξη.
- 8 Αν $P(A) = 0,6$ και $P(B) = 0,7$, να αποδείξετε ότι: α) $P(A \cap B) \geq 0,3$, β) $P(A \cup B) \geq 0,7$, γ) τα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα.
- 9 Για τα ενδεχόμενα A, B ισχύει $P(A) = 2P(B)$, $P(A \cap B) = 0,1$ και $P(A \cup B) = 0,8$. Να βρείτε: α) τις $P(A)$, $P(B)$, β) την πιθανότητα να πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A, B .
- 10 Από τους αριθμούς $1, 2, 3, \dots, 30$ επιλέγουμε τυχαία έναν. Ποια η πιθανότητα να διαιρείται με το 2 ή με το 3;

Οι Πραγματικοί Αριθμοί



Οι πραγματικοί αριθμοί είναι το «υλικό» με το οποίο είναι φτιαγμένη όλη η Άλγεβρα. Στο κεφάλαιο αυτό επαναλαμβάνουμε και, κυρίως, εμβαθύνουμε στις πράξεις και στις ιδιότητές τους, μαθαίνουμε να δουλεύουμε με ανισότητες και διαστήματα, γνωρίζουμε την απόλυτη τιμή ως «απόσταση» και επεκτείνουμε την έννοια της ρίζας. Είναι το πιο «τεχνικό» κεφάλαιο της χρονιάς: ό,τι κατακτήσεις εδώ, θα το χρησιμοποιείς σε κάθε σελίδα μέχρι τις Πανελλαδικές.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 2.1** Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους
- 2.2** Διάταξη πραγματικών αριθμών
- 2.3** Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού
- 2.4** Ρίζες πραγματικών αριθμών

Συμπληρωματικό υλικό: Για βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις, κούιζ και παιχνίδια γνώσεων πάνω σε αυτό το κεφάλαιο, επισκέψου το **mathgreece.com** — ένα πλήρες και ολοκληρωμένο **δωρεάν** φροντιστήριο.

ΜΑΘΗΜΑ

2.1

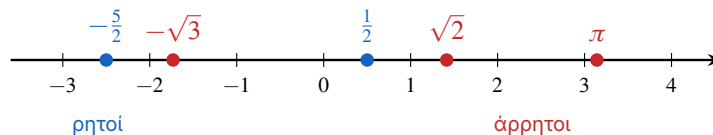
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Οι Πραγματικοί Αριθμοί

Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

Τι θα μάθουμε: τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, τις «επικίνδυνες» πράξεις με το μηδέν, τις αναλογίες, τις δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη, τις αξιοσημείωτες ταυτότητες, την παραγοντοποίηση και τις βασικές μεθόδους απόδειξης (ευθεία απόδειξη και απαγωγή σε άτοπο).

Οι πραγματικοί αριθμοί

Υπενθυμίζουμε ότι **ρητοί** είναι οι αριθμοί της μορφής $\frac{a}{b}$ με a, b ακέραιους και $b \neq 0$. Κάθε ρητός γράφεται ως δεκαδικός **πεπερασμένος** ($\frac{3}{8} = 0,375$) ή **περιοδικός** ($\frac{1}{3} = 0,333 \dots = 0,\bar{3}$). Οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί, όπως ο $\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$ και ο $\pi = 3,14159 \dots$, έχουν άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία και λέγονται **άρρητοι**. Ρητοί και άρρητοι μαζί αποτελούν τους **πραγματικούς αριθμούς** $\mathbb{R}$, που τους φανταζόμαστε ως τα σημεία μιας ευθείας, του **άξονα**.



Ιδιότητες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού

Οι βασικές ιδιότητες

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
Αντίθετος / αντί-στροφος	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	

Η **αφαίρεση** και η **διαίρεση** ορίζονται μέσω της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta), \quad \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \quad (\beta \neq 0).$$

⚠ Το μηδέν θέλει προσοχή

- ▶ Δεν διαιρούμε ποτέ με το μηδέν: παραστάσεις όπως $\frac{5}{0}$ ή $\frac{0}{0}$ δεν έχουν νόημα.
- ▶ Ο 0 δεν έχει αντίστροφο. Κάθε άλλος αριθμός έχει.

► $\alpha \cdot 0 = 0$ για κάθε α , και $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

Οι Χρήσιμες συνέπειες

► $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$

► $\alpha\gamma = \beta\gamma$ και $\gamma \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

► $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$

► $-(-\alpha) = \alpha$, $(-\alpha)\beta = -\alpha\beta$

► $\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$ (διαγραφή)

► $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$

✗ Συχνό λάθος: «διαγράφω» χωρίς έλεγχο

✗ **ΛΑΘΟΣ:** $x^2 = 3x \Rightarrow x = 3$ (διαιρέσαμε με x).

Έτσι χάσαμε τη λύση $x = 0$! Η διαγραφή επιτρέπεται **μόνο αν ξέρουμε ότι ο κοινός παράγοντας δεν είναι μηδέν**.

✓ **ΣΩΣΤΟ:** $x^2 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 3$.

Πράξεις με κλάσματα

Για $\beta, \delta \neq 0$:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma, \quad \frac{\alpha}{\beta} \pm \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta \pm \beta\gamma}{\beta\delta}, \quad \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}, \quad \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} \quad (\gamma \neq 0).$$

Αναλογίες

Η ισότητα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ λέγεται **αναλογία**. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$, τότε $\alpha = \lambda\beta$ και $\gamma = \lambda\delta$. Αυτή η «τεχνική του λ » λύνει σχεδόν όλες τις ασκήσεις αναλογιών. Επίσης ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \quad (\beta + \delta \neq 0).$$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Η τεχνική του λ

Αν $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ και $x + y + z = 40$, να βρεθούν οι x, y, z .

ΛΥΣΗ Θέτουμε $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \lambda$. Τότε $x = 2\lambda$, $y = 3\lambda$, $z = 5\lambda$ και

$$2\lambda + 3\lambda + 5\lambda = 40 \Leftrightarrow 10\lambda = 40 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

Άρα $x = 8$, $y = 12$, $z = 20$.

Δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη

ΟΡΙΣΜΟΣ · Δύναμη

Για πραγματικό a και φυσικό $n \geq 2$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_n$, $a^1 = a$.

Για $a \neq 0$ ορίζουμε επίσης: $a^0 = 1$ και $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

➔ Ιδιότητες δυνάμεων

(με την προϋπόθεση ότι οι βάσεις είναι διάφορες του μηδενός όταν οι εκθέτες δεν είναι θετικοί)

$$\triangleright a^u \cdot a^v = a^{u+v}$$

$$\triangleright a^u : a^v = a^{u-v}$$

$$\triangleright (a^u)^v = a^{uv}$$

$$\triangleright (ab)^v = a^v b^v$$

$$\triangleright \left(\frac{a}{b}\right)^v = \frac{a^v}{b^v}$$

$$\triangleright \left(\frac{a}{b}\right)^{-v} = \left(\frac{b}{a}\right)^v$$

⚠ Πρόσημο και δυνάμεις

$$\triangleright (-a)^v = a^v \text{ αν ο } v \text{ είναι άρτιος, ενώ } (-a)^v = -a^v \text{ αν είναι περιττός.}$$

$$\triangleright -3^2 = -9 \text{ ενώ } (-3)^2 = 9. \text{ Η δύναμη «προηγείται» του προσήμου!}$$

$$\triangleright 2^{-3} = \frac{1}{8} \text{ (θετικός αριθμός!)}, \text{ όχι } -8 \text{ ούτε } -6.$$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Υπολογισμοί με δυνάμεις

Να απλοποιηθούν: α) $\frac{2^5 \cdot 4^{-2}}{8^{-1}}$ β) $\frac{(x^2 y^{-1})^3}{x^4 y^{-5}}, x, y \neq 0.$

ΛΥΣΗ α) Γράφουμε όλα ως δυνάμεις του 2: $4^{-2} = (2^2)^{-2} = 2^{-4}$, $8^{-1} = 2^{-3}$. Άρα

$$\frac{2^5 \cdot 2^{-4}}{2^{-3}} = 2^{5-4-(-3)} = 2^4 = 16.$$

$$\beta) \frac{x^6 y^{-3}}{x^4 y^{-5}} = x^{6-4} y^{-3+5} = x^2 y^2.$$

✗ Συχνά λάθη με δυνάμεις

✗ **ΛΑΘΟΣ:** $2^3 \cdot 2^4 = 2^{12}$

✓ **ΣΩΣΤΟ:** $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$ (οι εκθέτες **προστίθενται**).

✗ **ΛΑΘΟΣ:** $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

✓ **ΣΩΣΤΟ:** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

✗ **ΛΑΘΟΣ:** $2^3 \cdot 3^3 = 6^9$

✓ **ΣΩΣΤΟ:** $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3.$

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Ταυτότητα λέγεται μια ισότητα με μεταβλητές που ισχύει **για όλες** τις τιμές των μεταβλητών. Οι παρακάτω πρέπει να είναι «κτήμα» σου:

Οι βασικές ταυτότητες

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

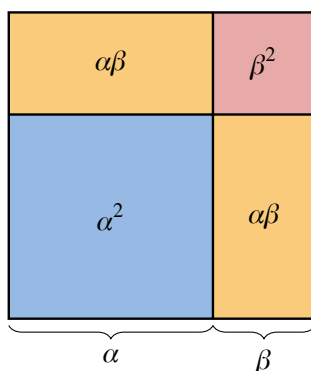
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a + b + \gamma)^2 = a^2 + b^2 + \gamma^2 + 2ab + 2b\gamma + 2\gamma a$$



Η ταυτότητα με μια ματιά. Το τετράγωνο με πλευρά $a + b$ έχει εμβαδόν $(a + b)^2$. Αποτελείται από ένα τετράγωνο a^2 , ένα τετράγωνο b^2 και δύο ορθογώνια ab . Γι' αυτό

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Το « $2ab$ » που ξεχνούν πολλοί μαθητές είναι ακριβώς τα δύο κίτρινα ορθογώνια!

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Ανάπτυξη με ταυτότητες

Να γίνουν οι πράξεις: α) $(2x - 3)^2$ β) $(x + 2)^3$ γ) $(3a - 1)(3a + 1)$ δ) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

ΛΥΣΗ α) $(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$.

β) $x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

γ) $(3a)^2 - 1^2 = 9a^2 - 1$.

δ) Είναι της μορφής $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ με $a = x$, $b = 2$, άρα ισούται με $x^3 - 8$.

Παραγοντοποίηση

Παραγοντοποίηση είναι η μετατροπή μιας παράστασης από άθροισμα σε **γινόμενο**. Είναι πολύ σημαντική, γιατί με γινόμενα λύνουμε εξισώσεις ($ab = 0$), απλοποιούμε κλάσματα και βρίσκουμε πρόσημα.

Η σειρά που δοκιμάζουμε

- Κοινός παράγοντας:** $6x^2 - 9x = 3x(2x - 3)$.
- Ομαδοποίηση:** $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$.
- Διαφορά τετραγώνων:** $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$.
- Ανάπτυγμα τετραγώνου:** $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.
- Άθροισμα/διαφορά κύβων:** $x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$.
- Τριώνυμο** $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$: π.χ. $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ (ψάχνω δύο αριθμούς με γινόμενο 6 και άθροισμα 5).

Μετά από κάθε βήμα **ελέγχω αν οι παράγοντες παραγοντοποιούνται περαιτέρω**.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Παραγοντοποίηση

Να παραγοντοποιηθούν: α) $x^3 - 4x$ β) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ γ) $2x^2 - 8x + 8$ δ) $x^4 - 1$.

ΛΥΣΗ α) $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$.

β) $x^2(x-2) - 9(x-2) = (x-2)(x^2 - 9) = (x-2)(x-3)(x+3)$.

γ) $2(x^2 - 4x + 4) = 2(x-2)^2$.

δ) $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2 + 1)$. (Το $x^2 + 1$ δεν παραγοντοποιείται.)

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 · Απλοποίηση ρητής παράστασης

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$.

ΛΥΣΗ Πρώτα ο **περιορισμός**: ο παρονομαστής $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ πρέπει να είναι $\neq 0$, δηλαδή $x \neq 3$. Τότε

$$A = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2} = \frac{x+3}{x-3}.$$

❌ Συχνό λάθος: «απλοποίηση» προσθετών

❌ ΛΑΘΟΣ: $\frac{x+3}{x} = 3$ ή $\frac{x^2+4}{x+2} = x+2$.

✓ ΣΩΣΤΟ: Απλοποιούμε μόνο **κοινούς παράγοντες** (γινόμενα), **ποτέ προσθετούς**. Πρώτα παραγοντοποιούμε, μετά απλοποιούμε.

Μέθοδοι απόδειξης

Ευθεία απόδειξη

Ξεκινάμε από την υπόθεση (ή από γνωστές αλήθειες) και με διαδοχικές συνεπαγωγές φτάνουμε στο συμπέρασμα. Όταν ζητείται να αποδείξουμε μια **ισότητα**, συνήθως ξεκινάμε από το πιο «σύνθετο» μέλος και καταλήγουμε στο άλλο.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 · Απόδειξη ταυτότητας

Να αποδειχθεί ότι $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$.

ΛΥΣΗ $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = 4\alpha\beta$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 · Άθροισμα διαδοχικών περιττών

Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα δύο διαδοχικών περιττών είναι πολλαπλάσιο του 4.

ΛΥΣΗ Δύο διαδοχικοί περιττοί γράφονται $2k + 1$ και $2k + 3$, $k \in \mathbb{Z}$. Το άθροισμά τους είναι $4k + 4 = 4(k + 1)$, πολλαπλάσιο του 4.

Απαγωγή σε άτοπο

Υποθέτουμε ότι **ισχύει το αντίθετο** από αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε και, με σωστούς συλλογισμούς, καταλήγουμε σε κάτι που είναι σίγουρα ψευδές (σε **άτοπο**). Άρα η υπόθεσή μας ήταν λάθος και ισχύει αυτό που θέλαμε.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 · Αν ο α^2 είναι άρτιος, τότε και ο α

Αν α ακέραιος και ο α^2 είναι άρτιος, να αποδειχθεί ότι ο α είναι άρτιος.

ΛΥΣΗ Έστω ότι ο α δεν είναι άρτιος, δηλαδή $\alpha = 2\kappa + 1$. Τότε $\alpha^2 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 = 2(2\kappa^2 + 2\kappa) + 1$, περιττός. Αυτό είναι **άτοπο**, αφού ο α^2 είναι άρτιος. Άρα ο α είναι άρτιος.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 · Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος

ΛΥΣΗ Έστω ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός, δηλαδή $\sqrt{2} = \frac{\kappa}{\lambda}$ με κ, λ θετικούς ακέραιους και το κλάσμα **ανάγωγο**. Τότε $2 = \frac{\kappa^2}{\lambda^2}$, δηλαδή $\kappa^2 = 2\lambda^2$. Άρα ο κ^2 είναι άρτιος, οπότε (από το προηγούμενο παράδειγμα) και ο κ είναι άρτιος: $\kappa = 2\mu$. Τότε $4\mu^2 = 2\lambda^2$, δηλαδή $\lambda^2 = 2\mu^2$, οπότε και ο λ είναι άρτιος. Οι κ, λ είναι και οι δύο άρτιοι, άρα το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ απλοποιείται με το 2, **άτοπο**. Επομένως ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Το ήξερες;

Η ανακάλυψη ότι η διαγώνιος ενός τετραγώνου πλευράς 1 (δηλαδή ο $\sqrt{2}$) δεν εκφράζεται ως λόγος ακέραιων αποδίδεται στους Πυθαγόρειους (5ος αι. π.Χ.) και προκάλεσε, σύμφωνα με την παράδοση, μεγάλη αναστάτωση στη σχολή τους.

**Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com**

Ταυτότητες και παραγοντοποίηση θέλουν πολλή εξάσκηση. Στο mathgreece.com θα βρεις φυλλάδια με διαβαθμισμένες ασκήσεις, βίντεο με «κόλπα» παραγοντοποίησης και κουίζ ταχύτητας!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**Μάθημα 2.1**

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Να υπολογίσετε: α) $(\frac{1}{2})^{-3} + (-2)^2 - 2^0$ β) $\frac{3^{-2} \cdot 9^2}{27}$ γ) $(-1)^{2027} + (-1)^{2026}$.
- 2 Να κάνετε τις πράξεις: α) $(3x + 2)^2$ β) $(1 - 2a)^3$ γ) $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$ δ) $(\alpha + \beta - 1)^2$.
- 3 Να παραγοντοποιήσετε: α) $5x^2 - 20$ β) $x^2 - 10x + 25$ γ) $\alpha^3 - 8$ δ) $x^2 - 7x + 12$ ε) $x^3 + x^2 - x - 1$.
- 4 Να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 16}$, αφού βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται.
- 5 Αν $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{4}$ και $\alpha + \beta = 21$, να βρείτε τους α, β .
- 6 Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ και, αν $\alpha + \beta = 5$ και $\alpha\beta = 3$, να υπολογίσετε το $\alpha^2 + \beta^2$.

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 7 Αν $x + \frac{1}{x} = 3$ ($x \neq 0$), να υπολογίσετε τις παραστάσεις $x^2 + \frac{1}{x^2}$ και $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

- 8 Να αποδείξετε ότι αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$. (Υπόδειξη: $\gamma = -(\alpha + \beta)$.)
- 9 Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο n , ο αριθμός $n^3 - n$ είναι πολλαπλάσιο του 6.
- 10 Να αποδείξετε με απαγωγή σε άτοπο ότι ο $\sqrt{3}$ είναι άρρητος. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι: αν ο k^2 είναι πολλαπλάσιο του 3, τότε και ο k είναι.)

ΜΑΘΗΜΑ

2.2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Οι Πραγματικοί Αριθμοί

Διάταξη πραγματικών αριθμών

Τι θα μάθουμε: τι σημαίνει ότι ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος από έναν άλλο, τις ιδιότητες των ανισοτήτων (και ποιες πράξεις «γυρίζουν» τη φορά), πώς αποδεικνύουμε ανισότητες, πώς βρίσκουμε μεταξύ ποιων τιμών κινείται μια παράσταση και τι είναι τα διαστήματα πραγματικών αριθμών.

Η έννοια της διάταξης

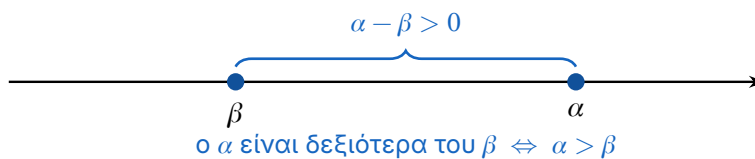
Στον άξονα, ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος από έναν άλλο όταν βρίσκεται **δεξιότερα**. Αλγεβρικά αυτό εκφράζεται με τη διαφορά τους:

ΟΡΙΣΜΟΣ · Διάταξη

Ο αριθμός α είναι **μεγαλύτερος** από τον β , και γράφουμε $\alpha > \beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι **θετική**:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$$

Γράφουμε $\alpha \geq \beta$ όταν $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$.



💡 Ο «χρυσός κανόνας»

Για να συγκρίνουμε δύο αριθμούς ή παραστάσεις, **σχηματίζουμε τη διαφορά τους** και εξετάζουμε το πρόσημό της. Αυτή η μέθοδος δουλεύει σχεδόν πάντα!

Γνωρίζουμε επίσης τους **κανόνες προσήμων**:

- ▶ $(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0) \Rightarrow \alpha + \beta > 0$ $(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0) \Rightarrow \alpha + \beta < 0$
- ▶ α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow \alpha\beta > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0$ α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow \alpha\beta < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0$
- ▶ $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, με την ισότητα μόνο για $\alpha = 0$.

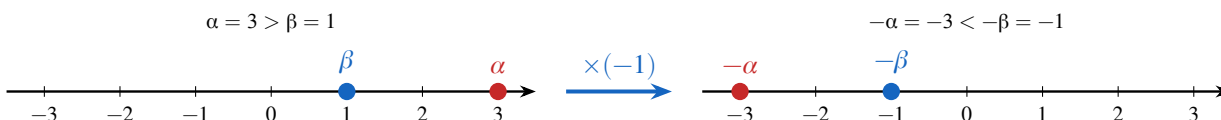
Ιδιότητες των ανισοτήτων

➡ Οι ιδιότητες της διάταξης

1. **Μεταβατική:** $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$.
2. **Πρόσθεση αριθμού:** $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$.
3. **Πολλαπλασιασμός με θετικό:** αν $\gamma > 0$: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$.
4. **Πολλαπλασιασμός με αρνητικό:** αν $\gamma < 0$: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$ (αλλάζει η φορά!).

5. **Πρόσθεση κατά μέλη:** $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$.
6. **Πολλαπλασιασμός κατά μέλη (θετικών):** αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$: $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\delta$.
7. **Δυνάμεις θετικών:** αν $\alpha, \beta > 0$ και n θετικός ακέραιος: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$.
8. **Αντίστροφοι ομόσημων:** αν α, β ομόσημοι: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$.

Απόδειξη της 4. $\alpha\gamma - \beta\gamma = (\alpha - \beta)\gamma$. Είναι $\alpha - \beta > 0$ και $\gamma < 0$, άρα το γινόμενο είναι αρνητικό, δηλαδή $\alpha\gamma < \beta\gamma$.



Ο πολλαπλασιασμός με αρνητικό «καθρεφτίζει» τους αριθμούς γύρω από το 0, γι' αυτό η σειρά τους αντιστρέφεται.

✗ Τα πιο συχνά λάθη με ανισότητες

✗ **ΛΑΘΟΣ:** $-2x > 6 \Rightarrow x > -3$.

✓ **ΣΩΣΤΟ:** $-2x > 6 \Rightarrow x < -3$ (διαιρούμε με αρνητικό: **αλλάζει η φορά**).

✗ **ΛΑΘΟΣ:** Αφαίρεση κατά μέλη: $5 > 2$ και $4 > 1 \Rightarrow 5 - 4 > 2 - 1$, δηλαδή $1 > 1$!! **Ανισότητες δεν αφαιρούνται ούτε διαιρούνται κατά μέλη.**

✗ **ΛΑΘΟΣ:** $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2$ πάντα. Για $\alpha = 1, \beta = -3$: $1 < 9$. Ισχύει μόνο για **θετικούς**.

✗ **ΛΑΘΟΣ:** $x > 2 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{2}$.

✓ **ΣΩΣΤΟ:** $x > 2 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ (θετικοί: η φορά αλλάζει στους αντίστροφους).

Απόδειξη ανισοτήτων

Πώς αποδεικνύω μια ανισότητα

1. **Μέθοδος της διαφοράς:** Για να δείξω $A \geq B$, δείχνω ότι $A - B \geq 0$. Συνήθως η διαφορά γίνεται τετράγωνο ή άθροισμα τετραγώνων.
2. **Ισοδυναμίες:** Ξεκινώ από τη ζητούμενη και με **ισοδύναμες** μετατροπές καταλήγω σε κάτι προφανώς αληθές (π.χ. $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$).
3. **Από γνωστή ανισότητα:** Ξεκινώ από αληθή ανισότητα και φτάνω στη ζητούμενη.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Μια κλασική ανισότητα

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$. Πότε ισχύει η ισότητα;

ΛΥΣΗ $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, άρα $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $(\alpha - \beta)^2 = 0$, δηλαδή $\alpha = \beta$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Άθροισμα αριθμού και αντιστρόφου

Αν $\alpha > 0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$.

ΛΥΣΗ Αφού $a > 0$, πολλαπλασιάζουμε με a χωρίς να αλλάξει η φορά:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 \geq 0,$$

που ισχύει. Η ισότητα ισχύει για $a = 1$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Άθροισμα τετραγώνων

Να αποδειχθεί ότι $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 \geq 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

ΛΥΣΗ «Σπάμε» το 5 σε $1 + 4$ για να σχηματίσουμε τέλεια τετράγωνα:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 \geq 0.$$

Ισότητα όταν $x - 1 = 0$ και $y + 2 = 0$, δηλαδή $x = 1$, $y = -2$.

Από πού ως πού; (Εύρεση ορίων παράστασης)

Πολύ συχνά ξέρουμε ότι οι x, y βρίσκονται μεταξύ κάποιων τιμών και ζητάμε μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται μια παράσταση τους.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Όρια παραστάσεων

Αν $2 < x < 5$ και $1 < y < 3$, να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις: α) $x + y$, β) $x - y$, γ) xy , δ) $\frac{x}{y}$, ε) $3x - 2y$.

ΛΥΣΗ α) Προσθέτουμε κατά μέλη: $3 < x + y < 8$.

β) **Δεν αφαιρούμε!** Γράφουμε $x - y = x + (-y)$. Από $1 < y < 3$, πολλαπλασιάζοντας με -1 : $-3 < -y < -1$. Προσθέτουμε με $2 < x < 5$: $-1 < x - y < 4$.

γ) Όλοι οι αριθμοί είναι θετικοί, άρα πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη: $2 < xy < 15$.

δ) **Δεν διαιρούμε!** $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$. Από $1 < y < 3$ (θετικοί) έχουμε $\frac{1}{3} < \frac{1}{y} < 1$. Πολλαπλασιάζουμε: $\frac{2}{3} < \frac{x}{y} < 5$.

ε) $6 < 3x < 15$ και $-6 < -2y < -2$, άρα $0 < 3x - 2y < 13$.

⚠ Προσοχή!

Στη διαφορά και στο πηλίκο ακολουθούμε πάντα τη «στρατηγική»: **αφαίρεση = πρόσθεση του αντιθέτου** και **διαίρεση = πολλαπλασιασμός με τον αντίστροφο**. Ο πολλαπλασιασμός κατά μέλη επιτρέπεται **μόνο** όταν όλα τα μέλη είναι **θετικά**.

Διαστήματα πραγματικών αριθμών

Σύνολα της μορφής $\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$ εμφανίζονται τόσο συχνά, ώστε έχουν δικό τους σύντομο συμβολισμό, τα **διαστήματα**. Οι αριθμοί α, β λέγονται **άκρα** του διαστήματος. Η «τελεία» σημαίνει ότι το άκρο **ανήκει** στο διάστημα, ο «κενός κύκλος» ότι **δεν ανήκει**.

Ανισότητα	Διάστημα	Στον άξονα	Ονομασία
$\alpha \leq x \leq \beta$	$[\alpha, \beta]$		κλειστό
$\alpha < x < \beta$	(α, β)		ανοικτό
$\alpha \leq x < \beta$	$[\alpha, \beta)$		κλειστό– ανοικτό
$\alpha < x \leq \beta$	$(\alpha, \beta]$		ανοικτό– κλειστό
$x \geq \alpha$	$[\alpha, +\infty)$		μη φραγμένα
$x > \alpha$	$(\alpha, +\infty)$		
$x \leq \alpha$	$(-\infty, \alpha]$		διαστήματα
$x < \alpha$	$(-\infty, \alpha)$		

Επίσης $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Για ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ (ή (α, β) κ.λπ.):

- **κέντρο** είναι ο αριθμός $x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$ (το μέσο του),
- **ακτίνα** είναι ο αριθμός $\rho = \frac{\beta - \alpha}{2}$ (το μισό του μήκους του).

✗ **Συχνό λάθος: κλειστό άκρο στο άπειρο**

✗ **ΛΑΘΟΣ:** $[2, +\infty]$.

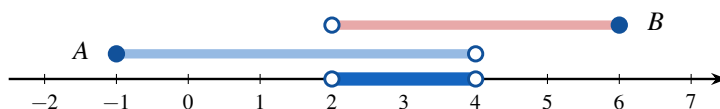
✓ **ΣΩΣΤΟ:** $[2, +\infty)$.

Τα $+\infty$ και $-\infty$ **δεν είναι αριθμοί**, άρα δεν «ανήκουν» ποτέ σε διάστημα: δίπλα τους βάζουμε πάντα παρένθεση.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 · Τομή και ένωση διαστημάτων

Να βρεθούν τα $A \cap B$ και $A \cup B$ αν $A = [-1, 4)$ και $B = (2, 6]$.

ΛΥΣΗ



Από το σχήμα: $A \cap B = (2, 4)$ και $A \cup B = [-1, 6]$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 · Κέντρο και ακτίνα

Να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του διαστήματος $[-3, 7]$.

ΛΥΣΗ $x_0 = \frac{-3+7}{2} = 2, \quad \rho = \frac{7-(-3)}{2} = 5$. Πράγματι, $[-3, 7] = [2 - 5, 2 + 5]$.

Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com



Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο-μάθημα για τις ιδιότητες των ανισοτήτων, με πολλά «πα-γιδευμένα» παραδείγματα, και κουίζ με διαστήματα στον άξονα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 2.2

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Να συγκρίνετε τους αριθμούς: α) $\frac{5}{7}$ και $\frac{7}{10}$ β) $a^2 + 9$ και $6a$ γ) $(a + 1)^2$ και $4a$.
- 2 Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$: α) $x^2 + 4 \geq 4x$ β) $x^2 + y^2 + 2 \geq 2(x + y)$.
- 3 Αν $1 < x < 3$ και $-2 < y < -1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι: α) $x + y$ β) $2x - y$ γ) $x \cdot (-y)$ δ) y^2 .
- 4 Να γράψετε με μορφή διαστήματος και να παραστήσετε στον άξονα: α) $-2 < x \leq 5$ β) $x \geq 3$ γ) $x < -1$. Στη συνέχεια να βρείτε την τομή των συνόλων του α) και του β).
- 5 Αν $a < \beta$, να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς a, β και $\frac{a + \beta}{2}$.

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 6 Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει $a^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq a\beta + \beta\gamma + \gamma a$. (Υπόδειξη: πολλαπλασιάστε επί 2.)
- 7 Αν $a, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι $\frac{a}{\beta} + \frac{\beta}{a} \geq 2$.
- 8 Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις x και y (σε cm) με $4 \leq x \leq 6$ και $2 \leq y \leq 3$. Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκονται η περίμετρος και το εμβαδόν του;
- 9 Αν $a > 1$, να αποδείξετε ότι $a^3 > a^2$ και $a^3 + 1 > a^2 + a$.

ΜΑΘΗΜΑ

2.3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Οι Πραγματικοί Αριθμοί

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

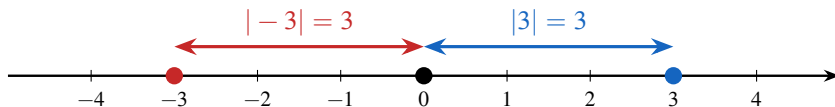
Τι θα μάθουμε: τον ορισμό και τη γεωμετρική σημασία της απόλυτης τιμής, τις ιδιότητές της (με την τριγωνική ανισότητα), την απόσταση δύο αριθμών και πώς «διαβάζουμε» σχέσεις όπως $|x - x_0| < \rho$ και $|x - x_0| > \rho$ πάνω στον άξονα.

Ορισμός και γεωμετρική ερμηνεία

ΟΡΙΣΜΟΣ · Απόλυτη τιμή

Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού a λέγεται η **απόσταση** του σημείου a από το 0 πάνω στον άξονα. Συμβολίζεται $|a|$ και ισούται με

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$



Οι αντίθετοι αριθμοί απέχουν το ίδιο από το 0, άρα έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.

✗ Το πιο κλασικό λάθος

✗ ΛΑΘΟΣ: « $|-x| = x$ » ή «η απόλυτη τιμή απλώς διώχνει το μείον».

Αν $x = -5$, τότε $|-x| = |5| = 5 = -x$, όχι x ! Ο ορισμός λέει: αν ο αριθμός μέσα στο απόλυτο είναι **αρνητικός**, βγαίνει **με αλλαγμένο πρόσημο**. Π.χ. αν $x < 2$, τότε $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$.

Οι Άμεσες συνέπειες του ορισμού

▶ $|a| \geq 0$, και $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

▶ $|-a| = |a|$

▶ $-|a| \leq a \leq |a|$

▶ $|a|^2 = a^2$

▶ $\sqrt{a^2} = |a|$ (θα το δούμε στο 2.4)

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · «Βγάζω» απόλυτα

Να γραφούν χωρίς απόλυτες τιμές: α) $|3 - \pi|$ β) $|\sqrt{2} - 1|$ γ) $|x - 4|$ αν $x < 4$ δ) $|x^2 + 1|$.

ΛΥΣΗ α) $3 - \pi < 0$ (αφού $\pi \approx 3,14$), άρα $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$.

β) $\sqrt{2} > 1$, άρα $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$.

γ) $x - 4 < 0$, άρα $|x - 4| = 4 - x$.

δ) $x^2 + 1 > 0$ για κάθε x , άρα $|x^2 + 1| = x^2 + 1$.

Πώς βγάζω απόλυτα

1. Βρίσκω το **πρόσημο** της παράστασης που είναι μέσα στο απόλυτο.
2. Αν είναι ≥ 0 , **βγαίνει ως έχει**. Αν είναι < 0 , βγαίνει **με αλλαγμένο πρόσημο** (σε παρένθεση!).
3. Αν το πρόσημο εξαρτάται από το x , **χωρίζω σε περιπτώσεις** (π.χ. $x \geq 4$ και $x < 4$).

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Απλοποίηση με δεδομένο διάστημα

Αν $1 < x < 3$, να απλοποιηθεί η παράσταση $A = |x - 1| + |x - 3|$.

ΛΥΣΗ Αφού $x > 1$: $x - 1 > 0$, άρα $|x - 1| = x - 1$. Αφού $x < 3$: $x - 3 < 0$, άρα $|x - 3| = 3 - x$.
Επομένως

$$A = (x - 1) + (3 - x) = 2.$$

Ιδιότητες της απόλυτης τιμής

Οι Βασικές ιδιότητες

Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$1. |\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \quad 2. \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad (\beta \neq 0) \quad 3. |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Η 3 λέγεται **τριγωνική ανισότητα**. Η ισότητα $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$ (οι α, β είναι ομόσημοι ή κάποιος είναι μηδέν).

Απόδειξη της τριγωνικής. Και τα δύο μέλη είναι μη αρνητικά, οπότε αρκεί να συγκρίνουμε τα τετράγωνα τους:

$$|\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha||\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta|,$$

που ισχύει πάντα, με ισότητα μόνο όταν $\alpha\beta \geq 0$.

Συχνό λάθος

Χ ΛΑΘΟΣ: $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ πάντα. Για $\alpha = 3, \beta = -5$: $|3 - 5| = 2$, ενώ $|3| + |-5| = 8$.

Χ ΛΑΘΟΣ: $|\alpha - \beta| = |\alpha| - |\beta|$. Για $\alpha = 1, \beta = 4$: $|1 - 4| = 3$, ενώ $|1| - |4| = -3$.

Το απόλυτο «σπάει» μόνο σε **γινόμενα και πηλίκια**, όχι σε αθροίσματα και διαφορές.

Από τον ορισμό προκύπτουν και οι εξής πολύ χρήσιμες ισοδυναμίες (για $\theta > 0$):

Οι Εξισώσεις και ανισώσεις με απόλυτο – η βασική μορφή

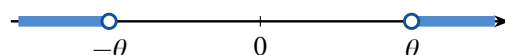
$$|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta \quad |x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -\alpha$$

$$|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta \quad |x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta \text{ ή } x > \theta$$

$|x| < \theta$: **κοντά** στο 0



$|x| > \theta$: **μακριά** από το 0



Απόσταση δύο αριθμών

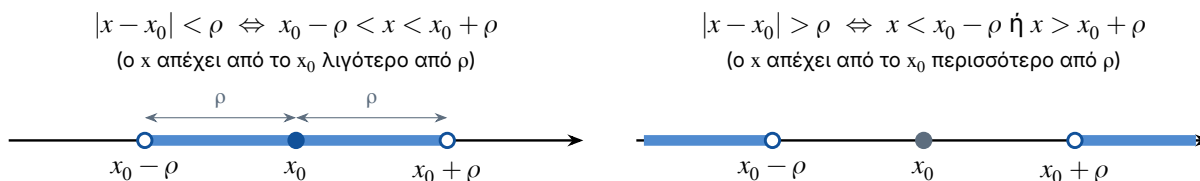
ΟΡΙΣΜΟΣ · Απόσταση

Η **απόσταση** των αριθμών a και b στον άξονα είναι

$$d(a,b) = |a - b|.$$

Ισχύει $d(a,b) = d(b,a)$, αφού $|a - b| = |b - a|$. Για παράδειγμα $d(-2,5) = |-2 - 5| = 7$.

Αυτή η ερμηνεία είναι το «κλειδί» για να καταλαβαίνουμε σχέσεις με απόλυτα. Αν x_0 σταθερός αριθμός και $\rho > 0$:



Με άλλα λόγια, το διάστημα $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ έχει **κέντρο** x_0 και **ακτίνα** ρ , και περιγράφεται από τη σχέση $|x - x_0| < \rho$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Από την απόλυτη τιμή στο διάστημα

Να βρεθούν οι x που ικανοποιούν: α) $|x-3| < 2$ β) $|x+1| \leq 4$ γ) $|x-2| > 5$ δ) $|2x-6| = 8$.

ΛΥΣΗ α) Απόσταση του x από το 3 μικρότερη από 2: $-2 < x - 3 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 5$, δηλαδή $x \in (1,5)$.

β) $|x - (-1)| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x + 1 \leq 4 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 3$, δηλαδή $x \in [-5,3]$.

γ) $x - 2 < -5$ ή $x - 2 > 5$, δηλαδή $x < -3$ ή $x > 7$: $x \in (-\infty, -3) \cup (7, +\infty)$.

δ) $2x - 6 = 8$ ή $2x - 6 = -8$, δηλαδή $x = 7$ ή $x = -1$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Από το διάστημα στην απόλυτη τιμή

Να γραφεί με τη βοήθεια απόλυτης τιμής η σχέση $-1 < x < 7$.

ΛΥΣΗ Κέντρο $x_0 = \frac{-1+7}{2} = 3$, ακτίνα $\rho = \frac{7-(-1)}{2} = 4$. Άρα $-1 < x < 7 \Leftrightarrow |x - 3| < 4$.

⚠ Προσοχή!

- ▶ Η εξίσωση $|x| = \theta$ με $\theta < 0$ είναι **αδύνατη** (μια απόσταση δεν είναι αρνητική). Π.χ. $|x - 1| = -2$: αδύνατη.
- ▶ Η ανίσωση $|x| < \theta$ με $\theta \leq 0$ είναι αδύνατη, ενώ η $|x| > \theta$ με $\theta < 0$ ισχύει για **κάθε** x .
- ▶ Για να γράψουμε το $|x + 2|$ ως απόσταση, το βλέπουμε ως $|x - (-2)|$: απόσταση από το -2 .

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 · Ιδιότητες σε απόδειξη

Αν $|x - 2| < 1$ και $|y - 3| < 2$, να αποδειχθεί ότι $|x + y - 5| < 3$.

ΛΥΣΗ Με την τριγωνική ανισότητα:

$$|x + y - 5| = |(x - 2) + (y - 3)| \leq |x - 2| + |y - 3| < 1 + 2 = 3.$$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 · Παράσταση με απόλυτα για κάθε x

Να γραφεί χωρίς απόλυτα η παράσταση $B = |x| + |x - 2|$.

ΛΥΣΗ Οι «κρίσιμες» τιμές είναι εκεί όπου μηδενίζονται οι παραστάσεις: $x = 0$ και $x = 2$. Χωρίζουμε σε περιπτώσεις:

- ▶ Αν $x < 0$: $B = -x - (x - 2) = -2x + 2$.
- ▶ Αν $0 \leq x < 2$: $B = x - (x - 2) = 2$.
- ▶ Αν $x \geq 2$: $B = x + x - 2 = 2x - 2$.

Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com



Η απόλυτη τιμή είναι από τα «αγαπημένα» θέματα των εξετάσεων. Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο με τη γεωμετρική ερμηνεία, ασκήσεις τύπου εξετάσεων και ένα διαδραστικό παιχνίδι με αποστάσεις στον άξονα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**Μάθημα 2.3**

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές: α) $|2 - \sqrt{5}|$ β) $|\pi - 3| + |3 - \pi|$ γ) $|-x^2 - 4|$ δ) $|x - 5| - |5 - x|$.
- 2 Αν $-2 < x < 1$, να απλοποιήσετε την παράσταση $A = |x + 2| + |x - 1| - |x - 3|$.
- 3 Να βρείτε τους x για τους οποίους: α) $|x - 4| = 3$ β) $|x + 2| < 5$ γ) $|x - 1| \geq 2$ δ) $|x + 7| = -1$.
- 4 Να γράψετε με απόλυτη τιμή: α) $2 < x < 8$ β) $-6 \leq x \leq 0$ γ) «ο x απέχει από το -1 τουλάχιστον 3 μονάδες».
- 5 Να βρείτε την απόσταση των αριθμών: α) -4 και 6 , β) $\sqrt{3}$ και 2 , γ) x και $-x$.

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 6 Να γράψετε χωρίς απόλυτα, για κάθε τιμή του x , την παράσταση $A = |x + 1| - |x - 3|$.
- 7 Αν $|\alpha - 1| < 0,1$ και $|\beta - 2| < 0,2$, να αποδείξετε ότι $|\alpha + \beta - 3| < 0,3$ και $|2\alpha - \beta| < 0,4$.
- 8 Να αποδείξετε ότι $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- 9 Να βρείτε τους ακέραιους x για τους οποίους ισχύει $|2x - 3| < 5$.

ΜΑΘΗΜΑ

2.4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Οι Πραγματικοί Αριθμοί

Ρίζες πραγματικών αριθμών

Τι θα μάθουμε: τον ορισμό της τετραγωνικής και της n -οστής ρίζας μη αρνητικού αριθμού, τις ιδιότητές τους, πώς απλοποιούμε ρίζες, πώς «διώχνουμε» ρίζες από παρονομαστές και τι σημαίνουν οι δυνάμεις με ρητό εκθέτη, όπως $8^{\frac{2}{3}}$.

Τετραγωνική ρίζα

ΟΡΙΣΜΟΣ · Τετραγωνική ρίζα

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός **μη αρνητικού** αριθμού a συμβολίζεται $\sqrt{a}$ και είναι ο **μη αρνητικός** αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει a :

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ και } x^2 = a \quad (a \geq 0).$$

εμβαδόν a

$\sqrt{a}$

Γεωμετρικά: η $\sqrt{a}$ είναι η **πλευρά** ενός τετραγώνου με εμβαδόν a . Π.χ. τετράγωνο εμβαδού 9 έχει πλευρά $\sqrt{9} = 3$ και τετράγωνο εμβαδού 2 έχει πλευρά $\sqrt{2} \approx 1,414$.

⚠ Προσοχή!

- ▶ Η $\sqrt{-4}$ **δεν ορίζεται** στους πραγματικούς: κανένα τετράγωνο δεν είναι αρνητικό.
- ▶ $\sqrt{9} = 3$ και **όχι** ± 3 . Η ρίζα είναι πάντα **μη αρνητική**. Η εξίσωση $x^2 = 9$ έχει λύσεις ± 3 , αλλά $\sqrt{9} = 3$.

➡ Η πιο «ύπουλη» ιδιότητα

Για **κάθε** $a \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

ενώ για $a \geq 0$: $(\sqrt{a})^2 = a$.

Για παράδειγμα $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$.

✖ Συχνό λάθος

✖ ΛΑΘΟΣ: $\sqrt{(x-3)^2} = x-3$.

✓ ΣΩΣΤΟ: $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$, που ισούται με $x-3$ μόνο αν $x \geq 3$.

✖ ΛΑΘΟΣ: $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$. Για $a = 3, b = 4$: $\sqrt{25} = 5 \neq 7$!

✖ ΛΑΘΟΣ: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Για $a = b = 8$: $\sqrt{16} = 4$, ενώ $\sqrt{8} + \sqrt{8} = 4\sqrt{2} \approx 5,66$.

➔ Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών

Για $\alpha, \beta \geq 0$:

$$\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \quad (\beta > 0)$$

Απόδειξη της πρώτης. Ο $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$ είναι μη αρνητικός και $(\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha})^2(\sqrt{\beta})^2 = \alpha\beta$. Άρα, από τον ορισμό, $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Απλοποίηση ριζών

Να απλοποιηθούν: α) $\sqrt{50}$ β) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$ γ) $\sqrt{\frac{18}{49}}$ δ) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$.

ΛΥΣΗ Η ιδέα: «βγάζουμε» από τη ρίζα τους παράγοντες που είναι τέλεια τετράγωνα.

α) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$.

β) $\sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{9 \cdot 3} - \sqrt{25 \cdot 3} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 0$.

γ) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{49}} = \frac{3\sqrt{2}}{7}$. δ) $\sqrt{16} = 4$.

Ρίζα ν-οστής τάξης

ΟΡΙΣΜΟΣ · ν-οστή ρίζα

Αν $\alpha \geq 0$ και n θετικός ακέραιος, η **ν-οστή ρίζα** του α συμβολίζεται $\sqrt[n]{\alpha}$ και είναι ο **μη αρνητικός** αριθμός που, όταν υψωθεί στη n , δίνει α :

$$\sqrt[n]{\alpha} = x \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ και } x^n = \alpha.$$

Για $n = 2$ γράφουμε απλώς $\sqrt{\alpha}$, ενώ για $n = 3$ μιλάμε για **κυβική ρίζα**. Επίσης $\sqrt[n]{\alpha} = \alpha$.

Παραδείγματα: $\sqrt[3]{8} = 2$ (γιατί $2^3 = 8$), $\sqrt[4]{81} = 3$, $\sqrt[5]{0} = 0$, $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$.

⚠ Ρίζες αρνητικών αριθμών

Στο σχολικό πρόγραμμα **ορίζουμε ρίζες μόνο για μη αρνητικούς** αριθμούς. Η εξίσωση $x^3 = -8$ έχει λύση το -2 , όμως **δεν** γράφουμε $\sqrt[3]{-8}$. Γράφουμε $x = -\sqrt[3]{8} = -2$. (Θα το δούμε στο Μάθημα 3.2.)

➔ Ιδιότητες ν-οστών ριζών

Για $\alpha, \beta \geq 0$ και μ, n, p θετικούς ακέραιους:

1. $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$
2. $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$
3. $\sqrt[n]{\alpha\beta} = \sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta}$
4. $\sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} \quad (\beta > 0)$
5. $\sqrt[n]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[n]{\alpha}$
6. $\sqrt[n]{\alpha^{\mu p}} = \sqrt[n]{\alpha}^{\mu}$

Επιπλέον: αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n]{\beta}$ (σύγκριση ριζών ίδιας τάξης).

Και αν n **άρτιος**, τότε $\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha|$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Η ιδιότητα 6 μάς επιτρέπει να **απλοποιούμε** τάξη και εκθέτη ή να φέρνουμε ρίζες στην **ίδια τάξη** για να τις πολλαπλασιάσουμε ή να τις συγκρίνουμε.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Πράξεις με ρίζες διαφορετικής τάξης

α) Να υπολογιστεί το $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$. β) Να συγκριθούν οι $\sqrt{3}$ και $\sqrt[3]{5}$.

ΛΥΣΗ α) Φέρνουμε τις ρίζες στην ίδια τάξη, το ΕΚΠ(2,3) = 6: $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3}$, $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2}$. Άρα

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}.$$

β) $\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$ και $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$. Αφού $27 > 25$, είναι $\sqrt{3} > \sqrt[3]{5}$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Απλοποίηση σύνθετων ριζών

Να απλοποιηθούν: α) $\sqrt[3]{54} - \sqrt{16}$ β) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ γ) $\sqrt[6]{x^4}$, $x \geq 0$.

ΛΥΣΗ α) $\sqrt[3]{27 \cdot 2} - \sqrt{8 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$. β) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$. γ) $\sqrt[6]{x^4} = \sqrt[3]{x^2}$.

Μετατροπή κλάσματος με άρρητο παρονομαστή

Είναι πρακτικό (και συνηθισμένη απαίτηση των ασκήσεων) να μην έχουμε ρίζα στον παρονομαστή.

Ρητοποίηση παρονομαστή

- ▶ Παρονομαστής $\sqrt{a}$: πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt{a}$. $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.
- ▶ Παρονομαστής $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ (ή $a \pm \sqrt{b}$): πολλαπλασιάζω με τη **συζυγή** παράσταση $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$, ώστε να εμφανιστεί διαφορά τετραγώνων.
- ▶ Παρονομαστής $\sqrt[3]{a}$: πολλαπλασιάζω με $\sqrt[3]{a^2}$, ώστε να προκύψει $\sqrt[3]{a^3} = a$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Συζυγής παράσταση

Να γραφούν χωρίς ρίζα στον παρονομαστή: α) $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$ β) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ γ) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

ΛΥΣΗ α) $\frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \sqrt{5}+1$.

β) $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{3+2\sqrt{6}+2}{1} = 5+2\sqrt{6}$.

γ) $\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Θέλουμε να δώσουμε νόημα σε δυνάμεις όπως $4^{\frac{1}{2}}$ ή $8^{\frac{2}{3}}$, ώστε να ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες. Αν δεχτούμε ότι $(4^{\frac{1}{2}})^2 = 4^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 4$, τότε το $4^{\frac{1}{2}}$ πρέπει να είναι το $\sqrt{4}$. Αυτό οδηγεί στον ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ · Δύναμη με ρητό εκθέτη

Αν $a > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, ορίζουμε

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$$

Επιπλέον, αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$.

Ο «παρονομαστής» του εκθέτη γίνεται **τάξη της ρίζας** και ο «αριθμητής» **εκθέτης μέσα στη ρίζα**. Όλες οι ιδιότητες των δυνάμεων ισχύουν και για ρητούς εκθέτες (με θετικές βάσεις).

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} \xrightarrow[\text{παρονομαστής} \rightarrow \text{τάξη ρίζας}]{\substack{\text{αριθμητής} \rightarrow \text{εκθέτης} \\ \text{ίσον}}} \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 · Υπολογισμοί με ρητούς εκθέτες

Να υπολογιστούν: α) $27^{\frac{1}{3}}$ β) $16^{\frac{3}{4}}$ γ) $8^{-\frac{2}{3}}$ δ) $(\frac{9}{4})^{\frac{3}{2}}$ ε) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}}$.

ΛΥΣΗ α) $\sqrt[3]{27} = 3$. β) $(\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$. γ) $\frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2} = \frac{1}{4}$.

δ) $(\sqrt{\frac{9}{4}})^3 = (\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8}$. ε) $2^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 2^2 = 4$.

💡 Κόλπο υπολογισμού

Όταν υπολογίζεις $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ «με το μυαλό», κάνε **πρώτα τη ρίζα** και μετά τη δύναμη: $16^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$. Οι αριθμοί μένουν μικροί!

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 · Απλοποίηση με ρητούς εκθέτες

Αν $a > 0$, να γραφεί ως μία δύναμη η παράσταση $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a}}$.

ΛΥΣΗ $\frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = a^{\frac{3+4-1}{6}} = a^1 = a$.

✗ Συχνό λάθος

✗ ΛΑΘΟΣ: $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$. Οι δυνάμεις με ρητό εκθέτη ορίζονται **μόνο για θετική βάση** (ή 0 με θετικό εκθέτη). Η παράσταση $(-8)^{\frac{1}{3}}$ **δεν ορίζεται** στο πλαίσιο του βιβλίου.

✗ ΛΑΘΟΣ: $4^{\frac{1}{2}} = 2$ ή -2 .

✓ ΣΩΣΤΟ: $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$.



Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις πίνακα μελέτης με όλες τις ιδιότητες ριζών και δυνάμεων σε μία σελίδα, ιδανικό για επανάληψη, καθώς και βίντεο με λυμένες ασκήσεις ρητοποίησης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 2.4

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

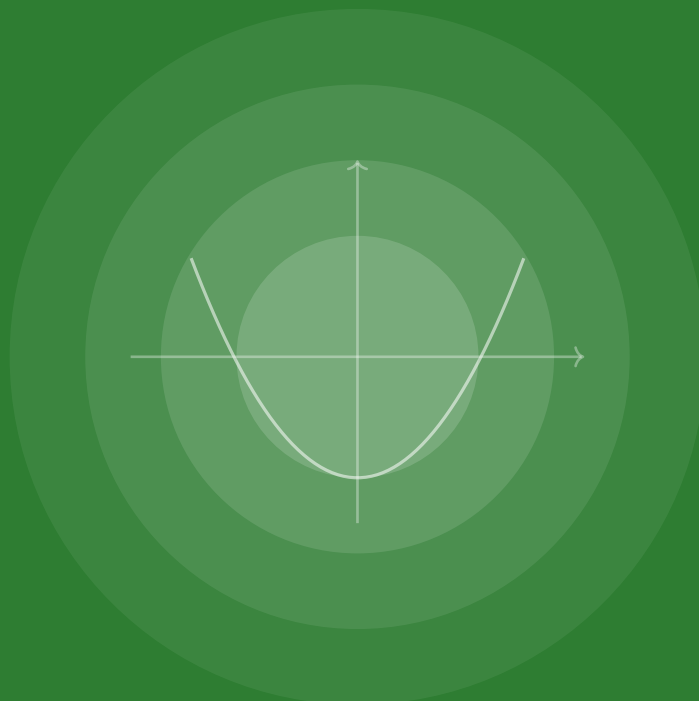
■ Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Να υπολογίσετε: α) $\sqrt{0,49}$ β) $\sqrt[3]{125}$ γ) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ δ) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$ ε) $\sqrt{3^2+4^2}$.
- 2 Να απλοποιήσετε: α) $\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{8}$ β) $2\sqrt{45}-\sqrt{20}$ γ) $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}$ δ) $(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3}+1)^2$.
- 3 Να μετατρέψετε σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητό παρονομαστή: α) $\frac{10}{\sqrt{5}}$ β) $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ γ) $\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$.
- 4 Να υπολογίσετε: α) $25^{\frac{1}{2}}$ β) $32^{\frac{2}{5}}$ γ) $81^{-\frac{1}{4}}$ δ) $(\frac{8}{27})^{-\frac{1}{3}}$.
- 5 Να γράψετε με μορφή δύναμης με ρητό εκθέτη ($a > 0$): α) $\sqrt[5]{a^3}$ β) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ γ) $a\sqrt{a}$ δ) $\sqrt{a\sqrt{a}}$.

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 6 Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$.
- 7 Να αποδείξετε ότι $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$.
- 8 Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{x^2+2x+1}$, αν $-1 < x < 3$.
- 9 Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 1$.

Εξισώσεις



Η επίλυση εξισώσεων είναι ίσως η πιο χαρακτηριστική δραστηριότητα της Άλγεβρας: ψάχνουμε τον «άγνωστο» αριθμό που ικανοποιεί μια συνθήκη. Σε αυτό το κεφάλαιο συστηματοποιούμε τις εξισώσεις πρώτου βαθμού (και μαθαίνουμε να τις «διερευνούμε» όταν έχουν παραμέτρους), λύνουμε εξισώσεις της μορφής $x^y = a$ και φτάνουμε στο κεντρικό θέμα: την εξίσωση δευτέρου βαθμού, τη διακρίνουσα, τους τύπους Vieta και τις εξισώσεις που ανάγονται σε αυτήν.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

3.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού

3.2 Η εξίσωση $x^y = a$

3.3 Εξισώσεις 2ου βαθμού

Συμπληρωματικό υλικό: Για βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις, κούιζ και παιχνίδια γνώσεων πάνω σε αυτό το κεφάλαιο, επισκέψου το mathgreece.com — ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

ΜΑΘΗΜΑ

3.1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Εξισώσεις

Εξισώσεις 1ου βαθμού

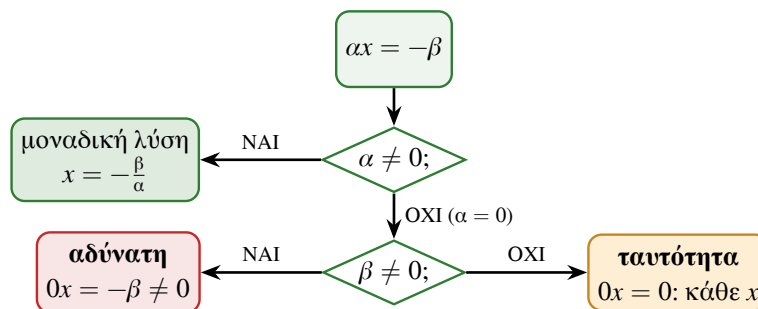
Τι θα μάθουμε: πώς λύνουμε την εξίσωση $ax + b = 0$ σε όλες τις περιπτώσεις, τι σημαίνει «αδύνατη» και «ταυτότητα», πώς διερευνούμε εξισώσεις με παράμετρο, πώς λύνουμε εξισώσεις με κλάσματα, εξισώσεις που ανάγονται σε 1ου βαθμού και εξισώσεις με απόλυτες τιμές, καθώς και πώς «στήνουμε» εξίσωση για να λύσουμε πρόβλημα.

Η εξίσωση $ax + b = 0$

Κάθε εξίσωση που, μετά από πράξεις, παίρνει τη μορφή $ax + b = 0$ ή ισοδύναμα $ax = -b$, λέγεται **εξίσωση πρώτου βαθμού** (όταν $a \neq 0$). Ο αριθμός που την επαληθεύει λέγεται **λύση** ή **ρίζα** της.

➔ Επίλυση της $ax = -b$ – Οι τρεις περιπτώσεις

1. Αν $a \neq 0$: η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** $x = -\frac{b}{a}$.
2. Αν $a = 0$ και $b \neq 0$: γίνεται $0x = -b$ με $-b \neq 0$ και **δεν έχει λύση (αδύνατη)**.
3. Αν $a = 0$ και $b = 0$: γίνεται $0x = 0$ και **επαληθεύεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (ταυτότητα ή αόριστη)**.



ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Απλές εξισώσεις

Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $3(x - 2) - 2(x + 1) = x - 8$ β) $2(x + 3) - x = x + 5$ γ) $4x - 2(x - 1) = 2x + 2$.

ΛΥΣΗ α) $3x - 6 - 2x - 2 = x - 8 \Leftrightarrow x - 8 = x - 8 \Leftrightarrow 0x = 0$: **ταυτότητα**, ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 β) $2x + 6 - x = x + 5 \Leftrightarrow x + 6 = x + 5 \Leftrightarrow 0x = -1$: **αδύνατη**.
 γ) $4x - 2x + 2 = 2x + 2 \Leftrightarrow 0x = 0$: **ταυτότητα**.

Ας δούμε και μια «κανονική» περίπτωση με κλάσματα:

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Εξίσωση με κλάσματα

Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x-1}{2} - \frac{2x+1}{3} = \frac{x}{6} - 1$.

ΛΥΣΗ Πολλαπλασιάζουμε **όλους** τους όρους με το ΕΚΠ(2,3,6) = 6:

$$3(x-1) - 2(2x+1) = x-6 \Leftrightarrow 3x-3-4x-2 = x-6 \Leftrightarrow -x-5 = x-6 \Leftrightarrow -2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

✗ Συχνά λάθη με κλάσματα

✗ ΛΑΘΟΣ: Ξεχνάω να πολλαπλασιάσω με το ΕΚΠ τους όρους **χωρίς παρονομαστή** (το -1 γίνεται -6 , όχι -1).

✗ ΛΑΘΟΣ: $-\frac{2x+1}{3} \cdot 6 = -4x + 2$.

✓ ΣΩΣΤΟ: $-2(2x+1) = -4x - 2$. Το μείον μπροστά από κλάσμα αλλάζει το πρόσημο **όλου** του αριθμητή: βάλε πάντα **παρένθεση**!

Παραμετρικές εξισώσεις και διερεύνηση

Σε μια εξίσωση όπως η $(\lambda-2)x = \lambda^2-4$, το λ είναι ένας **παράμετρος**: ένας σταθερός αλλά «άγνωστος» αριθμός. Για κάθε τιμή του λ έχουμε άλλη εξίσωση. **Διερεύνηση** σημαίνει να εξετάσουμε, για όλες τις τιμές του λ , πόσες λύσεις έχει η εξίσωση και ποιες είναι.

Διερεύνηση της $A(\lambda) \cdot x = B(\lambda)$

1. Φέρνω την εξίσωση στη μορφή **(συντελεστής)·x = (σταθερός όρος)**.
2. Παραγοντοποιώ **και τα δύο μέλη**.
3. Βρίσκω τότε ο συντελεστής του x είναι 0 και εξετάζω:
 - ▶ συντελεστής $\neq 0$: μοναδική λύση (την απλοποιώ!),
 - ▶ συντελεστής = 0: αντικαθιστώ **κάθε τέτοια τιμή χωριστά** στην εξίσωση και βλέπω αν βγαίνει αδύνατη ή ταυτότητα.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Διερεύνηση

Να λυθεί για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(\lambda^2-1)x = \lambda^2 + \lambda$.

ΛΥΣΗ Παραγοντοποιούμε: $(\lambda-1)(\lambda+1)x = \lambda(\lambda+1)$.

- ▶ Αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$: μοναδική λύση $x = \frac{\lambda(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{\lambda}{\lambda-1}$.
- ▶ Αν $\lambda = 1$: η εξίσωση γίνεται $0x = 2$: **αδύνατη**.
- ▶ Αν $\lambda = -1$: η εξίσωση γίνεται $0x = 0$: **ταυτότητα** (κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι λύση).

✗ Συχνό λάθος στη διερεύνηση

✗ ΛΑΘΟΣ: «Διαιρώ με λ^2-1 και βρίσκω $x = \frac{\lambda}{\lambda-1}$.» Έτσι χάνονται οι περιπτώσεις $\lambda = \pm 1$, που είναι ακριβώς το «ψαχνό» της άσκησης! Πριν διαιρέσεις με παράσταση που περιέχει παράμετρο, **πάντα** εξετάζεις τότε μηδενίζεται.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Αντίστροφο πρόβλημα

Για ποιες τιμές του μ η εξίσωση $(\mu-3)x = \mu^2-9$ έχει άπειρες λύσεις; Για ποιες είναι αδύνατη;

ΛΥΣΗ $(\mu-3)x = (\mu-3)(\mu+3)$. Για $\mu = 3$ γίνεται $0x = 0$: άπειρες λύσεις. Για $\mu \neq 3$ έχει τη μοναδική λύση $x = \mu+3$. Επομένως άπειρες λύσεις για $\mu = 3$, ενώ **για καμία** τιμή του μ δεν είναι αδύνατη.

Εξισώσεις που ανάγονται σε 1ου βαθμού

Εξισώσεις γινόμενο

Αν μια εξίσωση γράφεται ως **γινόμενο ίσο με μηδέν**, εφαρμόζουμε την ιδιότητα $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 · Με παραγοντοποίηση

Να λυθούν: α) $x^3 - 4x = 0$ β) $(2x - 1)^2 = (x + 3)^2$ γ) $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$.

ΛΥΣΗ α) $x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$ ή $x = -2$.

β) $(2x - 1)^2 - (x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1 - x - 3)(2x - 1 + x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -\frac{2}{3}$.

γ) $x^2(x - 1) - 4(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$ ή $x = -2$.

Κλασματικές εξισώσεις

Όταν ο άγνωστος εμφανίζεται σε παρονομαστή, **πρώτα** βρίσκουμε τους περιορισμούς (παρονομαστές $\neq 0$) και **στο τέλος** ελέγχουμε αν οι λύσεις τους ικανοποιούν.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 · Κλασματική εξίσωση

Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x} = \frac{4}{x^2 - 2x}$.

ΛΥΣΗ Είναι $x^2 - 2x = x(x - 2)$. **Περιορισμοί:** $x \neq 0$ και $x \neq 2$. Πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ $x(x - 2)$:

$$x^2 - 2(x - 2) = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2.$$

Και οι δύο τιμές **απορρίπτονται** λόγω των περιορισμών. Άρα η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

⚠ Προσοχή!

Στις κλασματικές εξισώσεις, οι περιορισμοί δεν είναι «τυπικότητα»: όπως είδες, μπορεί **όλες** οι λύσεις που βρήκαμε να απορρίπτονται. Γράφε τους περιορισμούς **στην αρχή** της λύσης και κάνε τον έλεγχο **στο τέλος**.

Εξισώσεις με απόλυτες τιμές

Οι βασικές μορφές

► $|f(x)| = \theta$ με $\theta > 0$: $f(x) = \theta$ ή $f(x) = -\theta$. (Αν $\theta < 0$: αδύνατη. Αν $\theta = 0$: $f(x) = 0$.)

► $|f(x)| = |g(x)|$: $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$.

► $|f(x)| = g(x)$: απαιτούμε $g(x) \geq 0$ και τότε $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 · Τα τρία είδη

Να λυθούν: α) $|3x - 1| = 5$ β) $|x - 4| = |2x + 1|$ γ) $|x - 3| = 2x$.

ΛΥΣΗ α) $3x - 1 = 5$ ή $3x - 1 = -5$, δηλαδή $x = 2$ ή $x = -\frac{4}{3}$.

β) $x - 4 = 2x + 1$ ή $x - 4 = -(2x + 1)$, δηλαδή $x = -5$ ή $3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

γ) Πρέπει $2x \geq 0$, δηλαδή $x \geq 0$. Τότε $x - 3 = 2x \Leftrightarrow x = -3$ (απορρίπτεται) ή $x - 3 = -2x \Leftrightarrow x = 1$ (δεκτή). Άρα $x = 1$.

✗ Συχνό λάθος στη μορφή $|f(x)| = g(x)$

Αν στο γ) ξεχάσουμε τον περιορισμό $x \geq 0$, θα δεχτούμε και το $x = -3$. Όμως: $|-3 - 3| = 6$, ενώ $2 \cdot (-3) = -6$. Το απόλυτο **δεν μπορεί** να ισούται με αρνητικό! Κάνε πάντα **επαλήθευση** ή βάλε περιορισμό.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 · Αλλαγή μεταβλητής με απόλυτο

Να λυθεί η εξίσωση $2|x| - 3 = \frac{|x| + 1}{2}$.

ΛΥΣΗ Θέτουμε $|x| = \omega \geq 0$: $4\omega - 6 = \omega + 1 \Leftrightarrow 3\omega = 7 \Leftrightarrow \omega = \frac{7}{3}$ (δεκτή, αφού ≥ 0). Άρα $|x| = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{7}{3}$.

Προβλήματα

↘ Πώς λύνω ένα πρόβλημα με εξίσωση

1. Διαβάζω προσεκτικά και **ονομάζω** τον άγνωστο ($x = \dots$) με τις μονάδες του.
2. Εκφράζω τα υπόλοιπα ποσά με τη βοήθεια του x .
3. «Μεταφράζω» τη συνθήκη του προβλήματος σε εξίσωση και τη λύνω.
4. **Ελέγχω** αν η λύση έχει νόημα (π.χ. δεν μπορεί να έχω -3 μαθητές) και απαντώ με λόγια.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 · Πρόβλημα κίνησης

Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Α με ταχύτητα 80 km/h. Μισή ώρα αργότερα ξεκινά από το ίδιο σημείο, στην ίδια κατεύθυνση, δεύτερο αυτοκίνητο με ταχύτητα 100 km/h. Σε πόσο χρόνο από την αναχώρησή του θα φτάσει το πρώτο;

ΛΥΣΗ



Έστω t ώρες ο χρόνος κίνησης του δεύτερου ως τη συνάντηση. Το πρώτο κινείται $t + \frac{1}{2}$ ώρες. Στη συνάντηση έχουν διανύσει την ίδια απόσταση:

$$100t = 80 \left(t + \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow 100t = 80t + 40 \Leftrightarrow 20t = 40 \Leftrightarrow t = 2.$$

Το δεύτερο αυτοκίνητο θα φτάσει το πρώτο σε **2 ώρες**, σε απόσταση 200 km από την Α.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 · Πρόβλημα μείγματος

Πόσα λίτρα νερού πρέπει να προσθέσουμε σε 12 λίτρα χυμού περιεκτικότητας 30% σε φρούτο, ώστε να γίνει 20%;

ΛΥΣΗ Η ποσότητα φρούτου δεν αλλάζει: $0,3 \cdot 12 = 3,6$ λίτρα. Αν προσθέσουμε x λίτρα νερό:

$$0,2(12 + x) = 3,6 \Leftrightarrow 12 + x = 18 \Leftrightarrow x = 6 \text{ λίτρα.}$$

Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com



Η διερεύνηση παραμετρικών εξισώσεων είναι μια από τις πιο «αγαπημένες» ασκήσεις των καθηγητών! Στο mathgreece.com θα βρεις αναλυτικό βίντεο με διερευνήσεις βήμα-βήμα και ένα σετ ασκήσεων αυτοαξιολόγησης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 3.1

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $5x - 3(x - 2) = 4x - 2$ β) $\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{4} = 1$ γ) $2(x-1) + 3 = 2x + 1$
δ) $3x - (x + 4) = 2(x - 1)$.

2 Να λύσετε: α) $x^2 - 5x = 0$ β) $(x-1)(x+2) = (x-1)(2x-3)$ γ) $x^3 - 9x = 0$ δ) $4x^2 - 1 = 0$.

3 Να λύσετε: α) $|x + 2| = 7$ β) $|2x - 5| = 0$ γ) $|x - 1| = |x + 3|$ δ) $|4 - x| = -2$.

4 Να λύσετε την εξίσωση $\frac{3}{x-1} = \frac{2}{x+1}$.

5 Να λύσετε για κάθε τιμή του λ την εξίσωση $(\lambda - 4)x = \lambda - 4$.

6 Ο πατέρας είναι σήμερα 42 ετών και ο γιος του 12. Σε πόσα χρόνια ο πατέρας θα έχει διπλάσια ηλικία από τον γιο;

■ Β' ΟΜΑΔΑ

7 Να λύσετε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ την εξίσωση $\lambda^2 x - 1 = x + \lambda$.

8 Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = x + 4$.

9 Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x+1}{x-3} - \frac{x-1}{x+3} = \frac{24}{x^2-9}$.

10 Να βρείτε το μ ώστε η εξίσωση $(\mu^2 - 4)x = \mu^2 + 2\mu$ να: α) έχει μοναδική λύση, β) είναι αδύνατη, γ) είναι ταυτότητα, δ) έχει λύση το $x = 2$.

ΜΑΘΗΜΑ

3.2

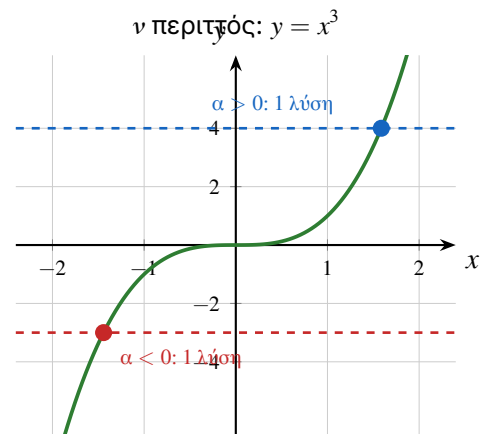
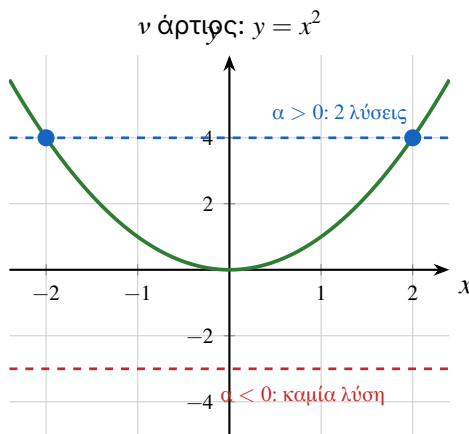
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Εξισώσεις

Η εξίσωση $x^v = a$

Τι θα μάθουμε: πώς λύνουμε εξισώσεις όπως $x^3 = 8$, $x^4 = 16$ ή $x^5 = -32$, γιατί η απάντηση εξαρτάται από το αν ο εκθέτης είναι άρτιος ή περιττός, και πώς λύνουμε εξισώσεις που ανάγονται σε αυτή τη μορφή.

Μια γραφική ματιά

Οι λύσεις της $x^v = a$ είναι οι τετμημένες των σημείων όπου η καμπύλη $y = x^v$ τέμνει την οριζόντια ευθεία $y = a$. Η μορφή της καμπύλης είναι διαφορετική για άρτιο και περιττό v :



Τα συμπεράσματα

➔ Επίλυση της $x^v = a$

	v περιττός	v άρτιος
$a > 0$	$x = \sqrt[v]{a}$ (μία λύση)	$x = \sqrt{a}$ ή $x = -\sqrt{a}$
$a = 0$	$x = 0$	$x = 0$
$a < 0$	$x = -\sqrt[v]{ a }$ (μία λύση)	αδύνατη

💡 Γιατί έτσι;

Αν ο v είναι άρτιος, η δύναμη x^v είναι πάντα ≥ 0 , άρα δεν μπορεί να ισούται με αρνητικό αριθμό, ενώ αντίθετοι αριθμοί δίνουν την ίδια δύναμη ($(-2)^4 = 2^4 = 16$), γι' αυτό έχουμε δύο λύσεις. Αν ο v είναι περιττός, η δύναμη «κρατάει» το πρόσημο της βάσης, οπότε υπάρχει πάντα ακριβώς μία λύση, ομόσημη του a .

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Βασικές εξισώσεις

Να λυθούν: α) $x^3 = 27$ β) $x^5 = -32$ γ) $x^4 = 81$ δ) $x^6 = -64$ ε) $x^2 = 5$.

ΛΥΣΗ α) $v = 3$ περιττός, $a > 0$: $x = \sqrt[3]{27} = 3$.

β) $v = 5$ περιττός, $a < 0$: $x = -\sqrt[5]{32} = -2$.

γ) $v = 4$ άρτιος, $a > 0$: $x = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3$.

δ) $v = 6$ άρτιος, $a < 0$: **αδύνατη**.

ε) $x = \pm\sqrt{5}$.

✖ Συχνό λάθος

✖ ΛΑΘΟΣ: $x^4 = 16 \Leftrightarrow x = 2$.

✓ ΣΩΣΤΟ: $x = 2$ ή $x = -2$ (άρτιος εκθέτης: δύο λύσεις).

✖ ΛΑΘΟΣ: $x^3 = -8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-8}$.

✓ ΣΩΣΤΟ: $x = -\sqrt[3]{8} = -2$ (ρίζες αρνητικών **δεν** ορίζουμε).

✖ ΛΑΘΟΣ: $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

✓ ΣΩΣΤΟ: μόνο $x = 2$, αφού $(-2)^3 = -8$.

Η εξίσωση $x^v = a^v$ 

▶ Αν v περιττός: $x^v = a^v \Leftrightarrow x = a$.

▶ Αν v άρτιος: $x^v = a^v \Leftrightarrow x = a$ ή $x = -a$ (ισοδύναμα $|x| = |a|$).

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Εξισώσεις με «ίδιους» εκθέτες

Να λυθούν: α) $(x-1)^3 = 8$ β) $(2x+1)^4 = (x-2)^4$ γ) $(x+3)^5 = -1$.

ΛΥΣΗ α) $(x-1)^3 = 2^3 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

β) Άρτιος εκθέτης: $2x+1 = x-2$ ή $2x+1 = -(x-2)$, δηλαδή $x = -3$ ή $3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

γ) $(x+3)^5 = (-1)^5 \Leftrightarrow x+3 = -1 \Leftrightarrow x = -4$.

Εξισώσεις που ανάγονται στη μορφή $x^v = a$

↘ Η στρατηγική

1. «Απομονώνω» τη δύναμη: φέρνω την εξίσωση στη μορφή $(κάτι)^v = \text{αριθμός}$.
2. Ελέγχω αν ο v είναι άρτιος ή περιττός και το πρόσημο του αριθμού.
3. Αν η εξίσωση έχει κοινό παράγοντα (π.χ. $x^5 = 4x^3$), **δεν διαιρώ**: παραγοντοποιώ.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Απομόνωση της δύναμης

Να λυθούν: α) $2x^3 + 54 = 0$ β) $\frac{x^4}{2} - 8 = 0$ γ) $x^5 = 4x^3$ δ) $x^7 - x^4 = 0$.

ΛΥΣΗ α) $x^3 = -27 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{27} = -3$.

β) $x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

γ) $x^5 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0$ ή $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \pm 2$.

$$\delta) x^4(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1.$$

❌ Συχνό λάθος: «χάνω» τη λύση $x = 0$

Στο γ) πολλοί διαιρούν με x^3 και γράφουν $x^2 = 4$, οπότε χάνουν το $x = 0$. Θυμήσου: **διαιρούμε μόνο με κάτι που ξέρουμε ότι δεν είναι μηδέν.**

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Εφαρμογή: κύβος

Ένας κύβος έχει όγκο 125 cm^3 . Αν αυξήσουμε κάθε ακμή του κατά $x \text{ cm}$, ο όγκος γίνεται 343 cm^3 . Να βρεθεί το x .

ΛΥΣΗ Ακμή αρχικά: $a^3 = 125 \Leftrightarrow a = 5 \text{ cm}$. Νέα ακμή: $(5 + x)^3 = 343 = 7^3 \Leftrightarrow 5 + x = 7 \Leftrightarrow x = 2 \text{ cm}$.

⚠ Προσοχή!

Όταν ο άγνωστος παριστάνει μήκος, ηλικία, πλήθος κ.λπ., **απορρίπτουμε τις αρνητικές λύσεις.**
Π.χ. αν ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν 49, από την $x^2 = 49$ κρατάμε μόνο το $x = 7$.

📺 Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις ένα διαδραστικό γράφημα όπου μετακινείς την ευθεία $y = a$ και βλέπεις «ζωντανά» πόσες λύσεις έχει η $x^y = a$!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 3.2

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Να λύσετε: α) $x^3 = 64$ β) $x^4 = 625$ γ) $x^3 = -125$ δ) $x^8 = -1$ ε) $x^5 = 0$ στ) $x^2 = 12$.
- 2 Να λύσετε: α) $3x^4 - 48 = 0$ β) $x^3 + \frac{1}{8} = 0$ γ) $2x^5 = 64$.
- 3 Να λύσετε: α) $(x + 1)^3 = -27$ β) $(x - 2)^4 = 16$ γ) $(3x - 1)^2 = (x + 5)^2$.
- 4 Να λύσετε: α) $x^4 = 9x^2$ β) $x^6 = x^3$ γ) $x^5 - 16x = 0$.

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 5 Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - x^3 + 8x - 8 = 0$.
- 6 Μια σφαίρα έχει όγκο $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Αν $V = 36\pi \text{ cm}^3$, να βρείτε την ακτίνα R .
- 7 Να λύσετε την εξίσωση $x^3 = |x|$. (Υπόδειξη: διακρίνετε τις περιπτώσεις $x \geq 0$ και $x < 0$.)

ΜΑΘΗΜΑ

3.3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Εξισώσεις

Εξισώσεις 2ου βαθμού

Τι θα μάθουμε: πώς λύνουμε κάθε εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$, από πού «βγαίνει» ο τύπος, τι μας λέει η διακρίνουσα Δ , πώς παραγοντοποιούμε τριώνυμο, τους τύπους Vieta για άθροισμα και γινόμενο ριζών, τη διερεύνηση με παράμετρο και τις εξισώσεις που ανάγονται σε 2ου βαθμού (διτετράγωνες, με απόλυτα, κλασματικές).

Η μορφή της εξίσωσης

ΟΡΙΣΜΟΣ · Εξίσωση 2ου βαθμού

Κάθε εξίσωση της μορφής

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{με } a \neq 0,$$

λέγεται **εξίσωση δευτέρου βαθμού**. Οι a, b, c λέγονται **συντελεστές** και ο c **σταθερός όρος**.

Οι «ελλιπείς» μορφές

Πριν από τον γενικό τύπο, ας δούμε τις δύο εύκολες περιπτώσεις, που λύνονται πιο γρήγορα **χωρίς** διακρίνουσα.

- $\gamma = 0$: $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -\frac{b}{a}$. Π.χ. $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$.
- $\beta = 0$: $ax^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{\gamma}{a}$. Αν $-\frac{\gamma}{a} > 0$ έχει δύο λύσεις $\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{a}}$, αλλιώς είναι αδύνατη (ή $x = 0$ αν $\gamma = 0$). Π.χ. $2x^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$, ενώ $x^2 + 4 = 0$ αδύνατη.

Η γενική περίπτωση: συμπλήρωση τετραγώνου

Θα μετατρέψουμε την $ax^2 + bx + c = 0$ στη μορφή $(\dots)^2 = \text{αριθμός}$, την οποία ξέρουμε να λύνουμε από το Μάθημα 3.2. Διαιρούμε με $a \neq 0$ και «συμπληρώνουμε το τετράγωνο»:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ · Διακρίνουσα

Ο αριθμός $\Delta = b^2 - 4ac$ λέγεται **διακρίνουσα** της εξίσωσης, γιατί από το πρόσημό του «διακρίνουμε» πόσες λύσεις έχει.

Αφού $4a^2 > 0$, η εξίσωση $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ οδηγεί στο εξής θεμελιώδες συμπέρασμα:

Οι λύσεις της $ax^2 + bx + \gamma = 0$

$\Delta > 0$

Δύο **άνισες** πραγματικές λύσεις:

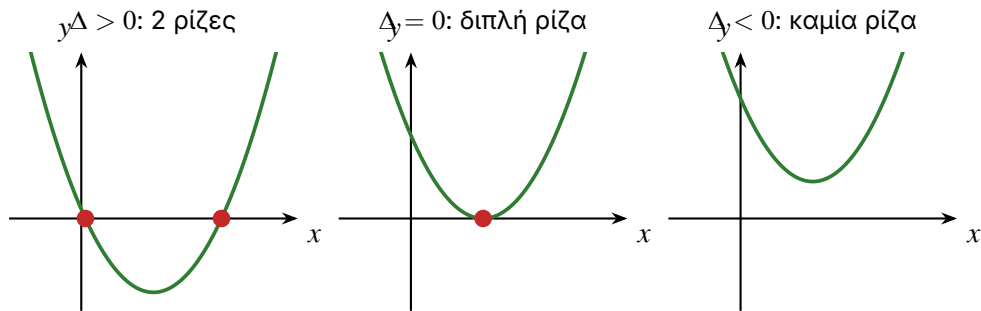
$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

$\Delta = 0$

Μία **διπλή** λύση:

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

$\Delta < 0$

Καμία πραγματική λύση (αδύνατη στο $\mathbb{R}$).

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι τα σημεία όπου η παραβολή $y = ax^2 + bx + \gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ (θα τη μελετήσουμε στο Μάθημα 7.3).

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Οι τρεις περιπτώσεις

Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ β) $x^2 - 6x + 9 = 0$ γ) $3x^2 + x + 1 = 0$.

ΛΥΣΗ α) $\alpha = 2, \beta = -5, \gamma = 2. \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

β) $\Delta = 36 - 36 = 0$, διπλή ρίζα $x = -\frac{-6}{2} = 3$. (Πιο γρήγορα: $(x - 3)^2 = 0$.)

γ) $\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$: η εξίσωση είναι **αδύνατη** στο $\mathbb{R}$.

✗ Συχνά λάθη στον τύπο

✗ ΛΑΘΟΣ: $\beta = 5$ αντί $\beta = -5$: ο συντελεστής παίρνεται **μαζί με το πρόσημό του**.

✗ ΛΑΘΟΣ: $\Delta = -5^2 - 16$.

✓ ΣΩΣΤΟ: $\Delta = (-5)^2 - 16 = 25 - 16$. Βάζε πάντα το β σε **παρένθεση!**

✗ ΛΑΘΟΣ: $x = -\beta \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

✓ ΣΩΣΤΟ: η κλασματική γραμμή «πιάνει» **όλο** τον αριθμητή $-\beta \pm \sqrt{\Delta}$.

✗ ΛΑΘΟΣ: Εφαρμόζω τον τύπο χωρίς να φέρω πρώτα την εξίσωση στη μορφή $ax^2 + bx + \gamma = 0$ (με όλους τους όρους στο ένα μέλος).

💡 Μικρά κόλπα που γλιτώνουν χρόνο

- ▶ Αν όλοι οι συντελεστές έχουν κοινό διαιρέτη, **διαίρεσε πρώτα**: $4x^2 - 8x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$.
- ▶ Αν $\alpha < 0$, πολλαπλασίασε με -1 : λιγότερα λάθη προσήμων.
- ▶ Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε μία ρίζα είναι το 1 (και η άλλη $-\frac{\gamma}{\alpha}$). Π.χ. $3x^2 - 5x + 2 = 0$: $x = 1$ ή

$$x = \frac{2}{3}.$$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Η παράσταση $ax^2 + bx + \gamma$ ($a \neq 0$) λέγεται **τριώνυμο**. Οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ λέγονται **ρίζες του τριωνύμου**.

Ο- Παραγοντοποίηση

- ▶ Αν $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- ▶ Αν $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + \gamma = a\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2$.
- ▶ Αν $\Delta < 0$: το τριώνυμο **δεν** παραγοντοποιείται (σε γινόμενο πρωτοβάθμιων).

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Απλοποίηση με παραγοντοποίηση τριωνύμου

Να απλοποιηθεί η παράσταση $K = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}$.

ΛΥΣΗ Από το προηγούμενο παράδειγμα, οι ρίζες του αριθμητή είναι 2 και $\frac{1}{2}$, άρα $2x^2 - 5x + 2 = 2(x - 2)(x - \frac{1}{2}) = (x - 2)(2x - 1)$. Για $x \neq \pm 2$:

$$K = \frac{(x - 2)(2x - 1)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{2x - 1}{x + 2}.$$

✗ Συχνό λάθος

✗ ΛΑΘΟΣ: $2x^2 - 5x + 2 = (x - 2)(x - \frac{1}{2})$. Ξεχάσαμε τον συντελεστή $a = 2$ μπροστά! Επαλήθευσε πάντα κάνοντας τις πράξεις.

Τύποι Vieta: άθροισμα και γινόμενο ριζών

Αν η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ έχει ρίζες x_1, x_2 (με $\Delta \geq 0$), τότε προσθέτοντας και πολλαπλασιάζοντας τους τύπους των ριζών βρίσκουμε:

Ο- Τύποι Vieta

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Απόδειξη. $x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $x_1 x_2 = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \beta^2 + 4a\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$.

Αντίστροφα, δύο αριθμοί με άθροισμα S και γινόμενο P είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - Sx + P = 0$$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Συμμετρικές παραστάσεις ριζών

Αν x_1, x_2 οι ρίζες της $x^2 - 3x - 5 = 0$, να υπολογιστούν χωρίς να λυθεί η εξίσωση: α) $x_1^2 + x_2^2$ β)

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad \gamma) x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2.$$

ΛΥΣΗ Πρώτα: $\Delta = 9 + 20 = 29 > 0$, άρα υπάρχουν ρίζες. $S = 3$, $P = -5$.

α) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P = 9 + 10 = 19$.

β) $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} = -\frac{3}{5}$.

γ) $x_1 x_2 (x_1 + x_2) = P \cdot S = -15$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Κατασκευή εξίσωσης

Να βρεθεί εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $2 + \sqrt{3}$ και $2 - \sqrt{3}$.

ΛΥΣΗ $S = 4$, $P = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$. Η ζητούμενη εξίσωση είναι $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Πρόσημα ριζών από τα S και P (όταν $\Delta \geq 0$):

$P < 0 \Rightarrow$ ρίζες **ετερόσημες** (και τότε σίγουρα $\Delta > 0$)

$P > 0, S > 0 \Rightarrow$ ρίζες **θετικές**

$P > 0, S < 0 \Rightarrow$ ρίζες **αρνητικές**

$P = 0 \Rightarrow$ μία ρίζα είναι το 0

$S = 0$ (και $\Delta > 0$) $\Rightarrow$ ρίζες **αντίθετες**

$P = 1 \Rightarrow$ ρίζες **αντίστροφες**

⚠ Προσοχή!

Πριν χρησιμοποιήσεις τους τύπους Vieta, **βεβαιώσου ότι η εξίσωση έχει ρίζες** ($\Delta \geq 0$)! Η $x^2 + x + 5 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, άρα δεν έχει νόημα να πούμε «το άθροισμα των ριζών είναι -1 ».

Παραμετρικές εξισώσεις 2ου βαθμού

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 · Συνθήκες για τη διακρίνουσα

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda + 6 = 0$. Να βρεθεί το λ ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, και να βρεθεί η ρίζα αυτή.

ΛΥΣΗ $\Delta = 4\lambda^2 - 4(\lambda + 6) = 4(\lambda^2 - \lambda - 6) = 4(\lambda - 3)(\lambda + 2)$. Διπλή ρίζα $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$ ή $\lambda = -2$.

Για $\lambda = 3$: $x^2 - 6x + 9 = 0$, ρίζα $x = 3$. Για $\lambda = -2$: $x^2 + 4x + 4 = 0$, ρίζα $x = -2$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 · Όταν ο a περιέχει παράμετρο

Να λυθεί για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(\mu - 1)x^2 - 2x + 1 = 0$.

ΛΥΣΗ Αν $\mu = 1$: η εξίσωση γίνεται $-2x + 1 = 0$ (1ου βαθμού!), με λύση $x = \frac{1}{2}$.

Αν $\mu \neq 1$: είναι 2ου βαθμού με $\Delta = 4 - 4(\mu - 1) = 4(2 - \mu)$.

► $\mu < 2$ ($\mu \neq 1$): $\Delta > 0$, δύο ρίζες $x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2-\mu}}{2(\mu-1)} = \frac{1 \pm \sqrt{2-\mu}}{\mu-1}$.

► $\mu = 2$: $\Delta = 0$, η εξίσωση $x^2 - 2x + 1 = 0$ έχει διπλή ρίζα $x = 1$.

► $\mu > 2$: $\Delta < 0$, αδύνατη.

✗ Το κλασικό λάθος των παραμετρικών

Όταν ο συντελεστής του x^2 περιέχει παράμετρο, η εξίσωση **δεν είναι πάντα 2ου βαθμού**. Πρώτα εξετάζουμε την περίπτωση που ο συντελεστής μηδενίζεται.

Εξισώσεις που ανάγονται σε 2ου βαθμού

Διτετράγωνες: $ax^4 + bx^2 + \gamma = 0$

Θέτουμε $x^2 = \omega$ (με $\omega \geq 0$) και λύνουμε την $a\omega^2 + b\omega + \gamma = 0$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 · Διτετράγωνη

Να λυθεί η εξίσωση $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

ΛΥΣΗ Με $x^2 = \omega \geq 0$: $\omega^2 - 5\omega + 4 = 0$, $\Delta = 9$, $\omega = \frac{5 \pm 3}{2}$, δηλαδή $\omega = 4$ ή $\omega = 1$ (και οι δύο δεκτές).

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2, \quad x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Η εξίσωση έχει τέσσερις λύσεις: $-2, -1, 1, 2$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 · Με απόλυτη τιμή

Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - |x| - 6 = 0$.

ΛΥΣΗ Αφού $x^2 = |x|^2$, θέτουμε $|x| = \omega \geq 0$: $\omega^2 - \omega - 6 = 0 \Leftrightarrow \omega = 3$ ή $\omega = -2$ (απορρίπτεται, αφού $\omega \geq 0$). Άρα $|x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 · Κλασματική

Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$.

ΛΥΣΗ Περιορισμοί: $x \neq \pm 1$. Πολλαπλασιάζουμε με $(x-1)(x+1)$:

$$x(x+1) + 2(x-1) = 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 6 = 0, \quad \Delta = 9 + 24 = 33, \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Καμία από τις δύο δεν είναι ± 1 , άρα και οι δύο είναι δεκτές.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 · Αλλαγή μεταβλητής

Να λυθεί η εξίσωση $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$.

ΛΥΣΗ Θέτουμε $x^2 - 2x = \omega$: $\omega^2 - 2\omega - 3 = 0 \Leftrightarrow \omega = 3$ ή $\omega = -1$.

$$x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -1.$$

$$x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Λύσεις: $-1, 1, 3$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11 · Πρόβλημα

Ένα ορθογώνιο οικόπεδο έχει περίμετρο 46 m και εμβαδόν 120 m^2 . Να βρεθούν οι διαστάσεις του.

ΛΥΣΗ Αν x, y οι διαστάσεις: $x + y = 23$ και $xy = 120$. Άρα οι x, y είναι ρίζες της $t^2 - 23t + 120 = 0$: $\Delta = 529 - 480 = 49$, $t = \frac{23 \pm 7}{2}$, δηλαδή 15 και 8. Οι διαστάσεις είναι **15 m και 8 m**.

Το ήξερες;

Ο Γάλλος μαθηματικός François Viète (Vieta, 16ος αιώνας) ήταν από τους πρώτους που χρησιμοποίησαν γράμματα για τους συντελεστές μιας εξίσωσης. Χάρη σε αυτό μπορούμε σήμερα να γράφουμε γενικούς τύπους όπως $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$!

Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com



Η εξίσωση 2ου βαθμού είναι το πιο «πολυχρησιμοποιημένο» εργαλείο της Άλγεβρας. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρη σειρά βίντεο: από τη συμπλήρωση τετραγώνου ως τους τύπους Vieta και τις παραμετρικές, με εκατοντάδες λυμένες ασκήσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 3.3

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Να λύσετε: α) $x^2 - 7x + 10 = 0$ β) $2x^2 + 3x - 2 = 0$ γ) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ δ) $x^2 + 2x + 5 = 0$
ε) $-x^2 + 4x + 5 = 0$.
- 2 Να λύσετε: α) $5x^2 - 20x = 0$ β) $4x^2 - 25 = 0$ γ) $x^2 + 16 = 0$ δ) $(x - 2)(x + 3) = 6$.
- 3 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα: α) $x^2 - x - 6$ β) $3x^2 - 10x + 3$ γ) $4x^2 + 4x + 1$.
- 4 Αν x_1, x_2 οι ρίζες της $2x^2 - 6x + 1 = 0$, να υπολογίσετε τα: α) $x_1 + x_2, x_1 x_2$ β) $x_1^2 + x_2^2$ γ) $(x_1 - x_2)^2$.
- 5 Να βρείτε δύο αριθμούς με άθροισμα 10 και γινόμενο 21.
- 6 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ β) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ γ) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$.

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 7 Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$ να έχει ρίζα το $x = 2$, και στη συνέχεια να βρείτε την άλλη ρίζα.
- 8 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να τις βρείτε.
- 9 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda^2 + 3 = 0$. α) Για ποιες τιμές του λ έχει δύο άνισες ρίζες; β) Για ποια τιμή του λ ισχύει $x_1^2 + x_2^2 = 10$;
- 10 Να λύσετε την εξίσωση $\frac{2}{x} + \frac{x}{x-2} = \frac{4}{x(x-2)}$.

- 11 Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα 13 cm και η μία κάθετη πλευρά είναι κατά 7 cm μεγαλύτερη από την άλλη. Να βρείτε τις κάθετες πλευρές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4

Ανισώσεις



Στην καθημερινή ζωή συχνά δεν μας ενδιαφέρει μια ακριβής τιμή, αλλά ένα «όριο»: πόσα προϊόντα πρέπει να πουλήσω τουλάχιστον για να έχω κέρδος; Τέτοια ερωτήματα οδηγούν σε ανισώσεις. Σε αυτό το κεφάλαιο λύνουμε ανισώσεις πρώτου βαθμού, μελετάμε το πρόσημο του τριωνύμου και λύνουμε ανισώσεις δευτέρου βαθμού, και τέλος μαθαίνουμε το πανίσχυρο εργαλείο του πίνακα προσήμων για ανισώσεις γινόμενο και πηλίκο.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 4.1** Ανισώσεις 1ου βαθμού
- 4.2** Ανισώσεις 2ου βαθμού
- 4.3** Ανισώσεις γινόμενο και ανισώσεις πηλίκο

Συμπληρωματικό υλικό: Για βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις, κουίζ και παιχνίδια γνώσεων πάνω σε αυτό το κεφάλαιο, επισκέψου το **mathgreece.com** — ένα πλήρες και ολοκληρωμένο **δωρεάν** φροντιστήριο.

ΜΑΘΗΜΑ

4.1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 · Ανισώσεις

Ανισώσεις 1ου βαθμού

Τι θα μάθουμε: πώς λύνουμε ανισώσεις της μορφής $ax + b > 0$ (και τότε αλλάζει η φορά), πώς γράφουμε τις λύσεις με διαστήματα, πώς βρίσκουμε τις κοινές λύσεις δύο ή περισσότερων ανισώσεων, πώς διερευνούμε ανισώσεις με παράμετρο και πώς λύνουμε ανισώσεις με απόλυτες τιμές.

Η ανίσωση $ax + b > 0$

Ανισώσεις όπως $3x - 6 > 0$ ή $ax + b \leq 0$ λέγονται **ανισώσεις πρώτου βαθμού**. Τις λύνουμε όπως τις εξισώσεις, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της διάταξης (Μάθημα 2.2), με **μία μεγάλη διαφορά**:

⚠ Ο χρυσός κανόνας των ανισώσεων

Όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε και τα δύο μέλη με **αρνητικό** αριθμό, **αλλάζει η φορά** της ανίσωσης.

$$-3x > 12 \Leftrightarrow x < -4$$

➡ Επίλυση της $ax > b$

- ▶ Αν $a > 0$: $ax > b \Leftrightarrow x > \frac{b}{a}$.
- ▶ Αν $a < 0$: $ax > b \Leftrightarrow x < \frac{b}{a}$ (αλλαγή φοράς).
- ▶ Αν $a = 0$: γίνεται $0x > b$, η οποία **αληθεύει για κάθε x αν $b < 0$ και είναι αδύνατη αν $b \geq 0$** .

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Ανίσωση με κλάσματα

Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-1}{3} - \frac{x+2}{2} < \frac{1}{6}$ και να παρασταθούν οι λύσεις στον άξονα.

ΛΥΣΗ Πολλαπλασιάζουμε με το θετικό ΕΚΠ 6 (η φορά **δεν** αλλάζει):

$$2(x-1) - 3(x+2) < 1 \Leftrightarrow 2x - 2 - 3x - 6 < 1 \Leftrightarrow -x < 9 \Leftrightarrow x > -9.$$

Οι λύσεις είναι όλοι οι αριθμοί του διαστήματος $(-9, +\infty)$.



ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Αδύνατη ή αληθής για κάθε x

Να λυθούν: α) $2(x-3) \geq 2x-1$ β) $3x - (x-1) > 2x-5$.

ΛΥΣΗ α) $2x - 6 \geq 2x - 1 \Leftrightarrow 0x \geq 5$: **αδύνατη**.

β) $2x + 1 > 2x - 5 \Leftrightarrow 0x > -6$: **αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$** .

✖ Συχνά λάθη

✖ **ΛΑΘΟΣ:** $-2x \leq 8 \Leftrightarrow x \leq -4$.

✓ **ΣΩΣΤΟ:** $x \geq -4$.

✖ **ΛΑΘΟΣ:** Η λύση της $x > -9$ γράφεται $[-9, +\infty)$.

✓ **ΣΩΣΤΟ:** $(-9, +\infty)$, αφού το -9 **δεν** επαληθεύει την ανίσωση.

✖ **ΛΑΘΟΣ:** «Η $0x > -6$ είναι αδύνατη επειδή το x χάθηκε.» Όχι: $0 > -6$ είναι αληθές για **κάθε** x .

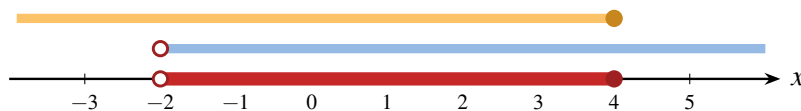
Κοινές λύσεις ανισώσεων

Όταν ζητούνται οι αριθμοί που ικανοποιούν **ταυτόχρονα** δύο ή περισσότερες ανισώσεις, λύνουμε την καθεμιά χωριστά και βρίσκουμε την **τομή** των συνόλων λύσεων (συνήθως με τη βοήθεια του άξονα).

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Σύστημα ανισώσεων

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων $3x - 2 > x - 6$ και $\frac{x}{2} + 1 \leq 3$.

ΛΥΣΗ Πρώτη: $2x > -4 \Leftrightarrow x > -2$. Δεύτερη: $\frac{x}{2} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 4$.



Κοινές λύσεις: $-2 < x \leq 4$, δηλαδή $x \in (-2, 4]$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Διπλή ανίσωση

Να λυθεί η ανίσωση $-1 \leq 2x + 3 < 7$.

ΛΥΣΗ Είναι ισοδύναμη με δύο ανισώσεις ταυτόχρονα, αλλά μπορούμε να δουλέψουμε και στα τρία «μέλη» μαζί:

$$-1 \leq 2x + 3 < 7 \Leftrightarrow -4 \leq 2x < 4 \Leftrightarrow -2 \leq x < 2.$$

⚠ Προσοχή!

Αν οι λύσεις των δύο ανισώσεων δεν έχουν κοινό τμήμα (π.χ. $x < 1$ και $x > 5$), τότε το σύστημα είναι **αδύνατο**. Ο άξονας θα σου το δείξει αμέσως!

Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

Χρησιμοποιούμε τις ισοδυναμίες του Μαθήματος 2.3 (για $\theta > 0$):

$$|f(x)| < \theta \Leftrightarrow -\theta < f(x) < \theta \quad |f(x)| > \theta \Leftrightarrow f(x) < -\theta \text{ ή } f(x) > \theta$$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 · Ανισώσεις με απόλυτο

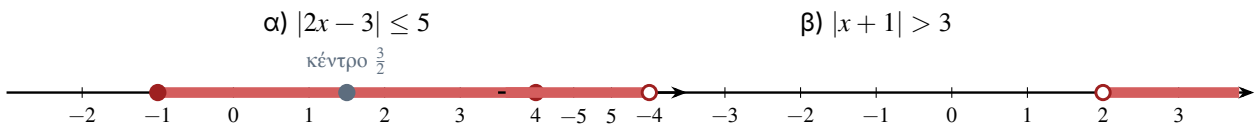
Να λυθούν: α) $|2x - 3| \leq 5$ β) $|x + 1| > 3$ γ) $|x - 2| < -1$ δ) $|3x - 1| \geq 0$.

ΛΥΣΗ α) $-5 \leq 2x - 3 \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$, δηλαδή $x \in [-1, 4]$.

β) $x + 1 < -3$ ή $x + 1 > 3$, δηλαδή $x < -4$ ή $x > 2$: $x \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$.

γ) Ένα απόλυτο δεν είναι ποτέ αρνητικό: **αδύνατη**.

δ) Ισχύει για **κάθε** $x \in \mathbb{R}$.



✖ Συχνό λάθος

✖ ΛΑΘΟΣ: $|x + 1| > 3 \Leftrightarrow -3 > x + 1 > 3$. Αυτό δεν έχει νόημα (κανένας αριθμός δεν είναι μικρότερος από -3 και μεγαλύτερος από 3)! Στο « $>$ » οι λύσεις είναι **δύο κομμάτια** και συνδέονται με «ή».

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 · Ανίσωση με δύο απόλυτα

Να λυθεί η ανίσωση $|x - 1| < |x + 3|$.

ΛΥΣΗ Και τα δύο μέλη είναι μη αρνητικά, άρα μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο (ισοδύναμη μετατροπή):

$$(x - 1)^2 < (x + 3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow -8x < 8 \Leftrightarrow x > -1.$$

Γεωμετρικά: ζητάμε τους x που είναι πιο κοντά στο 1 απ' ό,τι στο -3 . Το μέσο των -3 και 1 είναι το -1 , οπότε είναι οι $x > -1$.

Ανισώσεις με παράμετρο

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 · Διερεύνηση

Να λυθεί για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η ανίσωση $(\lambda - 2)x > \lambda^2 - 4$.

ΛΥΣΗ $(\lambda - 2)x > (\lambda - 2)(\lambda + 2)$.

- ▶ Αν $\lambda > 2$: διαιρούμε με θετικό: $x > \lambda + 2$.
- ▶ Αν $\lambda < 2$: διαιρούμε με αρνητικό, αλλάζει η φορά: $x < \lambda + 2$.
- ▶ Αν $\lambda = 2$: $0x > 0$, **αδύνατη**.

Προβλήματα με ανισώσεις

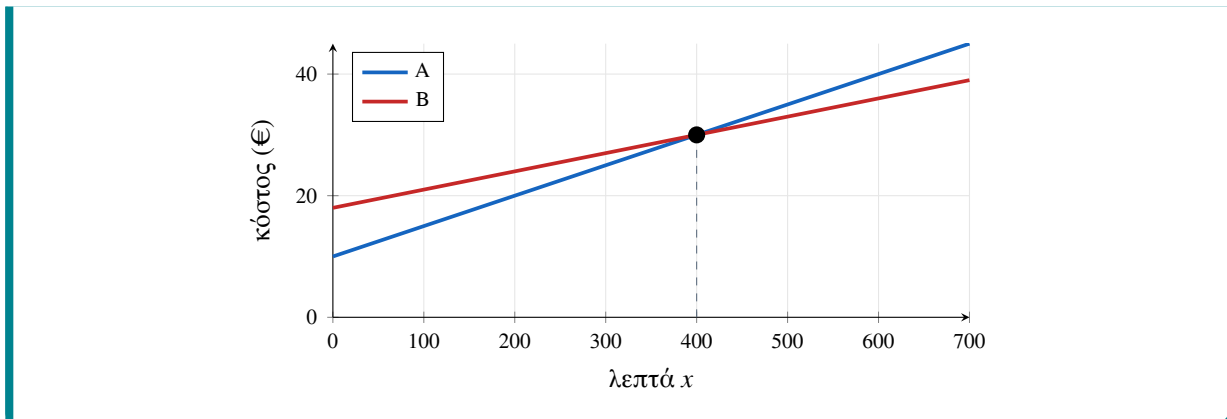
ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 · Συμφέρει ή όχι;

Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας προσφέρει δύο προγράμματα: Α) πάγιο 10 € τον μήνα και 0,05 € ανά λεπτό ομιλίας, Β) πάγιο 18 € και 0,03 € ανά λεπτό. Από πόσα λεπτά τον μήνα και πάνω συμφέρει το Β;

ΛΥΣΗ Για x λεπτά: κόστος Α = $10 + 0,05x$, κόστος Β = $18 + 0,03x$. Το Β συμφέρει όταν

$$18 + 0,03x < 10 + 0,05x \Leftrightarrow 8 < 0,02x \Leftrightarrow x > 400.$$

Συμφέρει το Β για **περισσότερα από 400 λεπτά** τον μήνα.



Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο με όλες τις κατηγορίες ανισώσεων 1ου βαθμού, πολλά παραδείγματα με απόλυτα και ένα κουίζ «Αλλάζει η φορά ή όχι!».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 4.1

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Να λύσετε τις ανισώσεις: α) $5x - 3 \leq 2x + 9$ β) $4 - 3x > x + 12$ γ) $\frac{x}{2} - \frac{x-3}{5} \geq 1$ δ) $2(x+1) < 2x-3$.
- 2 Να βρείτε τις κοινές λύσεις: α) $2x - 1 > 3$ και $x + 4 \leq 10$ β) $3 - x \geq 1$ και $2x > 8$.
- 3 Να λύσετε: α) $|x - 5| < 2$ β) $|2x + 1| \geq 3$ γ) $|4 - x| \leq 0$ δ) $|x| > -2$.
- 4 Να βρείτε τους ακέραιους που ικανοποιούν τη διπλή ανίσωση $-3 < \frac{2x-1}{3} \leq 2$.
- 5 Ένας μαθητής έχει βαθμούς 14, 17 και 15 σε τρία διαγωνίσματα. Τι βαθμό πρέπει να πάρει στο τέταρτο ώστε ο μέσος όρος να είναι τουλάχιστον 16;

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 6 Να λύσετε την ανίσωση $1 < |x - 2| \leq 4$.
- 7 Να λύσετε για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ την ανίσωση $\mu x + 1 > x + \mu^2$.
- 8 Να λύσετε την ανίσωση $|2x - 1| \leq |x + 4|$.

ΜΑΘΗΜΑ

4.2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 · Ανισώσεις

Ανισώσεις 2ου βαθμού

Τι θα μάθουμε: το πρόσημο του τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$ σε κάθε περίπτωση της διακρίνουσας, πώς το «διαβάζουμε» από την παραβολή, πώς λύνουμε ανισώσεις 2ου βαθμού, πώς βρίσκουμε πότε ένα τριώνυμο είναι θετικό για κάθε x και πώς συνδυάζουμε ανισώσεις 2ου βαθμού.

Το πρόσημο του τριωνύμου

Για να λύσουμε μια ανίσωση όπως $x^2 - 5x + 6 > 0$, χρειάζεται να ξέρουμε **για ποιες τιμές του x το τριώνυμο είναι θετικό και για ποιες αρνητικό**. Η απάντηση εξαρτάται από τη διακρίνουσα και από το πρόσημο του a .

Περίπτωση 1: $\Delta > 0$

Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες $x_1 < x_2$ και γράφεται $a(x - x_1)(x - x_2)$. Εξετάζοντας τα πρόσημα των παραγόντων βρίσκουμε:

➔ Κανόνας για $\Delta > 0$

Το τριώνυμο είναι **ομόσημο του a έξω από τις ρίζες και ετερόσημο του a ανάμεσα στις ρίζες**.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο α	0	ετερόσημο α	0	ομόσημο α

Περίπτωση 2: $\Delta = 0$

Το τριώνυμο γράφεται $a\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2$ και η παρένθεση στο τετράγωνο είναι ≥ 0 , οπότε:

➔ Κανόνας για $\Delta = 0$

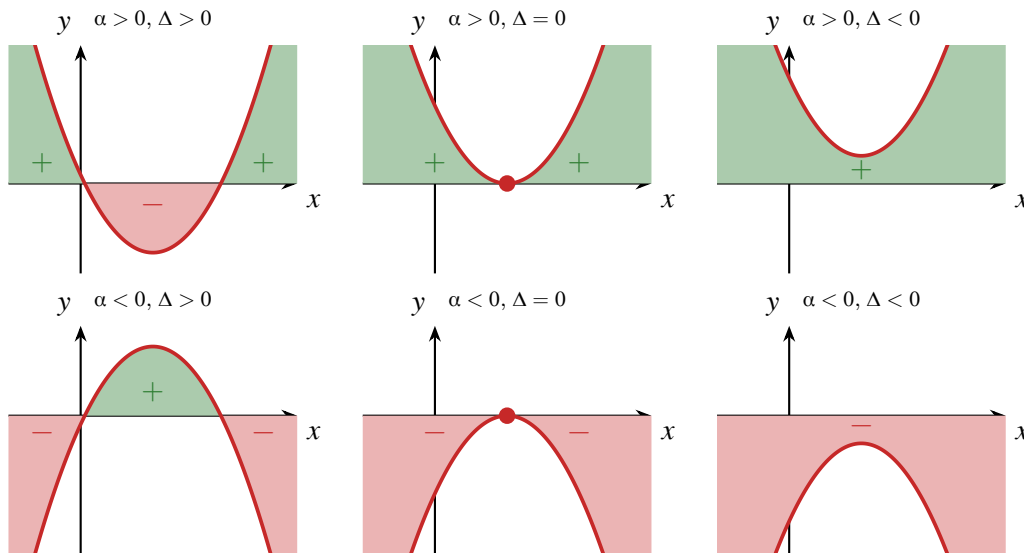
Το τριώνυμο είναι **ομόσημο του a για κάθε $x \neq -\frac{\beta}{2a}$ και μηδενίζεται στη διπλή ρίζα $x_0 = -\frac{\beta}{2a}$** .

Περίπτωση 3: $\Delta < 0$

Από τη συμπλήρωση τετραγώνου, $ax^2 + bx + \gamma = a \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4\alpha^2} \right]$, και η αγκύλη είναι **θετική** για κάθε x (άθροισμα μη αρνητικού και θετικού). Άρα:

Ο κανόνας για $\Delta < 0$

Το τριώνυμο είναι **ομόσημο του a** για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (δεν μηδενίζεται ποτέ).



Πράσινο: το τριώνυμο είναι θετικό (η παραβολή πάνω από τον άξονα). Κόκκινο: αρνητικό.

Ένας κανόνας για όλα

Το τριώνυμο είναι **πάντα ομόσημο του a** , εκτός από το διάστημα **ανάμεσα στις ρίζες** (όταν υπάρχουν δύο ρίζες) όπου είναι ετερόσημο, και φυσικά μηδενίζεται στις ρίζες. Αν θυμάσαι μόνο αυτή την πρόταση, θυμάσαι όλο το μάθημα!

Επίλυση ανισώσεων 2ου βαθμού**Βήματα**

1. Φέρνω την ανίσωση στη μορφή $ax^2 + bx + \gamma > 0$ (ή $<, \geq, \leq$).
2. Υπολογίζω τη Δ και τις ρίζες (αν υπάρχουν).
3. Φτιάχνω τον **πίνακα προσημών** με βάση τον κανόνα.
4. Διαβάζω από τον πίνακα τα διαστήματα που με ενδιαφέρουν. Στα $\geq, \leq$ **συμπεριλαμβάνω τις ρίζες**.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Με δύο ρίζες

Να λυθούν οι ανισώσεις: α) $x^2 - 5x + 6 > 0$ β) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

ΛΥΣΗ $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$, ρίζες $x_1 = 2, x_2 = 3, a = 1 > 0$.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 6$	$+$	0	$-$	0	$+$

α) $x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x < 2$ ή $x > 3$, δηλαδή $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

β) $x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$, δηλαδή $x \in [2, 3]$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Με αρνητικό α

Να λυθεί η ανίσωση $-2x^2 + x + 3 \geq 0$.

ΛΥΣΗ $\Delta = 1 + 24 = 25$, ρίζες $x = \frac{-1 \pm 5}{-4}$, δηλαδή $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{2}$. Αφού $\alpha = -2 < 0$:

x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$-2x^2 + x + 3$	$-$	0	$+$	0	$-$

Άρα $-2x^2 + x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{3}{2}$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Με $\Delta = 0$ και $\Delta < 0$

Να λυθούν: α) $x^2 - 4x + 4 > 0$ β) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$ γ) $x^2 + x + 1 > 0$ δ) $x^2 + x + 1 < 0$.

ΛΥΣΗ α), β) $\Delta = 0$, διπλή ρίζα $x = 2$. Είναι $(x - 2)^2$: θετικό για κάθε $x \neq 2$.

α) $x \neq 2$, δηλαδή $x \in \mathbb{R} - \{2\}$. β) Μόνο $x = 2$ (εκεί είναι ίσο με 0).

γ), δ) $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ και $\alpha > 0$: το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε x .

γ) Αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. δ) Αδύνατη.

✗ Συχνά λάθη

✗ **ΛΑΘΟΣ**: $x^2 > 9 \Leftrightarrow x > \pm 3$. Αυτό δεν σημαίνει τίποτα!

✓ **ΣΩΣΤΟ**: $x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow x < -3$ ή $x > 3$.

✗ **ΛΑΘΟΣ**: $x^2 < 4 \Leftrightarrow x < 2$.

✓ **ΣΩΣΤΟ**: $-2 < x < 2$ (το $x = -5$ ικανοποιεί το $x < 2$, αλλά $(-5)^2 = 25 > 4$).

✗ **ΛΑΘΟΣ**: Ξεχνάω να ελέγξω το πρόσημο του α και «αντιγράφω» τον πίνακα του $\alpha > 0$.

Τριώνυμο θετικό (ή αρνητικό) για κάθε x

Από τους κανόνες προκύπτει αμέσως ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο:

➡ Κριτήριο

$$ax^2 + bx + \gamma > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha > 0 \text{ και } \Delta < 0$$

$$ax^2 + bx + \gamma < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha < 0 \text{ και } \Delta < 0$$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Παραμετρική συνθήκη

Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες ισχύει $x^2 - 2\lambda x + \lambda + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ Είναι $a = 1 > 0$, άρα αρκεί $\Delta < 0$:

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4(\lambda + 2) = 4(\lambda^2 - \lambda - 2) < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 < 0.$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 - \lambda - 2$ έχει ρίζες -1 και 2 και είναι αρνητικό ανάμεσά τους. Άρα $-1 < \lambda < 2$.

⚠ Προσοχή!

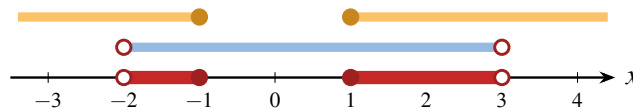
Αν ο συντελεστής του x^2 περιέχει παράμετρο, π.χ. $(\mu - 1)x^2 + \dots$, εξετάζουμε **χωριστά** την περίπτωση $\mu = 1$, όπου η παράσταση δεν είναι τριώνυμο!

Συναλήθευση ανισώσεων

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 · Δύο ανισώσεις 2ου βαθμού

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων $x^2 - x - 6 < 0$ και $x^2 - 1 \geq 0$.

ΛΥΣΗ Πρώτη: ρίζες $-2, 3$, άρα $-2 < x < 3$. Δεύτερη: ρίζες ± 1 , άρα $x \leq -1$ ή $x \geq 1$.



Κοινές λύσεις: $x \in (-2, -1] \cup [1, 3)$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 · Πεδίο ορισμού ρίζας

Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $A = \sqrt{6 + x - x^2}$;

ΛΥΣΗ Πρέπει $6 + x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leq 0$. Ρίζες -2 και 3 , άρα $-2 \leq x \leq 3$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 · Πρόβλημα: κέρδος επιχείρησης

Το ημερήσιο κέρδος (σε €) μιας μικρής επιχείρησης που παράγει x προϊόντα είναι $K(x) = -x^2 + 60x - 500$. Πόσα προϊόντα πρέπει να παράγει, ώστε να έχει κέρδος τουλάχιστον 300 €;

ΛΥΣΗ $-x^2 + 60x - 500 \geq 300 \Leftrightarrow x^2 - 60x + 800 \leq 0$. $\Delta = 3600 - 3200 = 400$, ρίζες $x = \frac{60 \pm 20}{2}$: 20 και 40. Άρα $20 \leq x \leq 40$ προϊόντα.

Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com



Ο πίνακας προσήμων είναι εργαλείο που θα χρησιμοποιείς σε όλη τη Β' και τη Γ' Λυκείου. Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο όπου ο πίνακας «στήνεται» βήμα-βήμα και συνδέεται με την παραβολή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 4.2

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων για τις διάφορες τιμές του x : α) $x^2 - 3x - 4$ β) $-x^2 + 6x - 9$
γ) $2x^2 - x + 3$.
- 2 Να λύσετε: α) $x^2 - 7x + 12 < 0$ β) $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$ γ) $-x^2 + 4 > 0$ δ) $x^2 \leq 3x$.
- 3 Να λύσετε: α) $x^2 + 6x + 9 > 0$ β) $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$ γ) $x^2 - 2x + 5 < 0$ δ) $-3x^2 + x - 1 < 0$.
- 4 Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $\sqrt{x^2 - 5x + 4}$;
- 5 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των $x^2 - 4x < 0$ και $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 6 Να βρείτε το λ ώστε το τριώνυμο $x^2 + (\lambda - 1)x + 1$ να είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 7 Να βρείτε το μ ώστε η εξίσωση $x^2 - 2\mu x + 3\mu - 2 = 0$ να έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.
- 8 Να βρείτε για ποιες τιμές του μ ισχύει $(\mu - 1)x^2 - 2(\mu - 1)x + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 9 Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 3|x| - 4 < 0$.
- 10 Μια μπάλα εκτοξεύεται κατακόρυφα και το ύψος της (σε m) μετά από t δευτερόλεπτα είναι $h(t) = 20t - 5t^2$. Σε ποιο χρονικό διάστημα η μπάλα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 15 m;

ΜΑΘΗΜΑ

4.3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 · Ανισώσεις

Ανισώσεις γινόμενο και ανισώσεις πηλίκου

Τι θα μάθουμε: πώς βρίσκουμε το πρόσημο ενός γινομένου ή πηλίκου παραγόντων με τον πίνακα προσήμων, πώς λύνουμε ανισώσεις όπως $(x-1)(x^2-4) > 0$ ή $\frac{x+3}{x-2} \leq 1$ και ποια λάθη πρέπει να αποφεύγουμε με τους παρονομαστές.

Η βασική ιδέα

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε την ανίσωση $(x-1)(x+3)(2-x) > 0$. Θα μπορούσαμε να κάνουμε τις πράξεις, αλλά θα παίρναμε μια παράσταση 3ου βαθμού που δεν ξέρουμε να λύσουμε. Είναι πολύ καλύτερα να αξιοποιήσουμε το γεγονός ότι **το πρόσημο ενός γινομένου εξαρτάται μόνο από τα πρόσημα των παραγόντων**:

- ▶ Αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **άρτιο**, το γινόμενο είναι **θετικό**.
- ▶ Αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **περιττό**, το γινόμενο είναι **αρνητικό**.

Το ίδιο ισχύει και για το πηλίκο, αφού το $\frac{A}{B}$ είναι ομόσημο του $A \cdot B$.

Ο πίνακας προσήμων

Ανίσωση γινόμενο $P(x) > 0$ (ή $<, \geq, \leq$)

1. Φέρνω όλους τους όρους στο **ένα** μέλος (στο άλλο να μένει **0**) και **παραγοντοποιώ** πλήρως σε παράγοντες 1ου βαθμού και τριώνυμα.
2. Βρίσκω τις ρίζες κάθε παράγοντα και τις γράφω **με αύξουσα σειρά** στην πρώτη γραμμή του πίνακα.
3. Σε κάθε γραμμή γράφω το πρόσημο ενός παράγοντα (κανόνας για $ax + \beta$: ομόσημο του a δεξιά της ρίζας· για τριώνυμα: ο κανόνας του 4.2).
4. Στην τελευταία γραμμή βρίσκω το πρόσημο του γινομένου «πολλαπλασιάζοντας» τα πρόσημα κάθε στήλης.
5. Διαβάζω τη λύση. Στα $\geq, \leq$ συμπεριλαμβάνω τις ρίζες.

💡 Το πρόσημο του $ax + \beta$

Ο πρωτοβάθμιος παράγοντας $ax + \beta$ μηδενίζεται στο $x = -\frac{\beta}{a}$ και είναι **ομόσημος του a δεξιά** της ρίζας, **ετερόσημος αριστερά**. Π.χ. το $2 - x$ (με $a = -1$) είναι αρνητικό για $x > 2$ και θετικό για $x < 2$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Γινόμενο τριών παραγόντων

Να λυθεί η ανίσωση $(x-1)(x+3)(2-x) > 0$.

ΛΥΣΗ Ρίζες: $x = 1, x = -3, x = 2$. Με αύξουσα σειρά: $-3, 1, 2$.

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$2 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

Το γινόμενο είναι θετικό για $x < -3$ ή $1 < x < 2$. Άρα $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2)$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Με τριώνυμο

Να λυθεί η ανίσωση $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 1)(x + 2) \leq 0$.

ΛΥΣΗ Το $x^2 + 1$ είναι **πάντα θετικό**, άρα δεν επηρεάζει το πρόσημο: μπορούμε να το «παράλειψουμε». Το $x^2 - 4x + 3$ έχει ρίζες 1, 3.

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 4x + 3$	$+$	$+$	0	$-$	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $1 \leq x \leq 3$, δηλαδή $x \in (-\infty, -2] \cup [1, 3]$.

⚠ Παράγοντες σε δύναμη

Αν ένας παράγοντας εμφανίζεται στο **τετράγωνο** (ή σε άρτια δύναμη), π.χ. $(x - 2)^2$, τότε είναι ≥ 0 και **δεν αλλάζει πρόσημο** στη ρίζα του. Στον πίνακα το πρόσημό του είναι «+» και στις δύο μεριές του 2. Αν είναι σε περιττή δύναμη, π.χ. $(x - 2)^3$, έχει το ίδιο πρόσημο με το $x - 2$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Με τετράγωνο

Να λυθεί η ανίσωση $x(x - 2)^2 < 0$.

ΛΥΣΗ Το $(x - 2)^2$ είναι θετικό για $x \neq 2$ και μηδέν για $x = 2$. Άρα το γινόμενο είναι αρνητικό όταν $x < 0$ (και $x \neq 2$, που ισχύει αυτόματα). Λύση: $x \in (-\infty, 0)$.

Ανισώσεις πηλίκου

↪ Η βασική ισοδυναμία

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0 \qquad \frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) \geq 0 \text{ και } B(x) \neq 0$$

Στον πίνακα προσήμων, στις ρίζες του **παρονομαστή** βάζουμε **διπλή γραμμή** ($\parallel$), που σημαίνει ότι εκεί η παράσταση **δεν ορίζεται**.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Απλό πηλίκο

Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$.

ΛΥΣΗ Περιορισμός: $x \neq -2$.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{x-1}{x+2}$	$+$	$-$	0	$+$

Λύση: $x < -2$ ή $x \geq 1$, δηλαδή $x \in (-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$. (Το -2 **εξαιρείται**, ενώ το 1 περιλαμβάνεται.)

✗ Το πιο συχνό λάθος στα πηλίκια

✗ ΛΑΘΟΣ: $\frac{x+3}{x-2} \leq 1 \Leftrightarrow x+3 \leq x-2$ («έκανα χιαστί»).

Δεν ξέρουμε αν ο παρονομαστής $x-2$ είναι θετικός ή αρνητικός, άρα δεν ξέρουμε αν πρέπει να αλλάξει η φορά! **Ποτέ δεν πολλαπλασιάζουμε μια ανίσωση με παράσταση άγνωστου προσήμου.**

✓ **ΣΩΣΤΟ:** Μεταφέρουμε όλα στο ένα μέλος και κάνουμε ομώνυμα (δες το επόμενο παράδειγμα).

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 · Μεταφέρω όλα στο ένα μέλος

Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x+3}{x-2} \leq 1$.

ΛΥΣΗ Περιορισμός $x \neq 2$.

$$\frac{x+3}{x-2} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+3-(x-2)}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{x-2} \leq 0.$$

Ο αριθμητής είναι θετικός, άρα το κλάσμα είναι αρνητικό όταν $x-2 < 0$. Επίσης δεν μηδενίζεται ποτέ. Λύση: $x < 2$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 · Πηλίκο με τριώνυμα

Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x^2-x-2}{x^2-9} < 0$.

ΛΥΣΗ Αριθμητής: ρίζες $-1, 2$. Παρονομαστής: ρίζες ± 3 (περιορισμοί $x \neq \pm 3$).

x	$-\infty$	-3	-1	2	3	$+\infty$
x^2-x-2	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
x^2-9	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
πηλίκο	$+$	$-$	0	$+$	$-$	$+$

Λύση: $-3 < x < -1$ ή $2 < x < 3$, δηλαδή $x \in (-3, -1) \cup (2, 3)$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 · Ανίσωση 3ου βαθμού

Να λυθεί η ανίσωση $x^3 - x^2 - 4x + 4 \geq 0$.

ΛΥΣΗ Παραγοντοποιούμε με ομαδοποίηση: $x^2(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x^2-4) = (x-1)(x-2)(x+2)$.

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x-2$	$-$	$-$		$-$	0
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Λύση: $x \in [-2, 1] \cup [2, +\infty)$.

💡 Έλεγχος σε δευτερόλεπτα

Όταν όλοι οι παράγοντες είναι της μορφής $(x-\rho)$ με θετικό συντελεστή, το γινόμενο είναι **θετικό στο δεξιότερο διάστημα** και μετά **εναλλάσσεται** το πρόσημο κάθε φορά που περνάμε από απλή ρίζα. Στο προηγούμενο παράδειγμα: $+, -, +, -$ από δεξιά προς αριστερά. Χρησιμοποίησέ το ως **έλεγχο**, όχι ως αντικατάσταση της αιτιολόγησης!



Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις φύλλα εργασίας με πίνακες προσήμων για εξάσκηση και βίντεο με όλες τις «παγίδες» των ανισώσεων πηλίκου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 4.3

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να λύσετε: α) $(x-2)(x+5) < 0$ β) $(3-x)(x+1) \geq 0$ γ) $x(x-1)(x+4) > 0$.

2 Να λύσετε: α) $\frac{x+4}{x-1} < 0$ β) $\frac{2x-6}{x+2} \geq 0$ γ) $\frac{x^2+3}{x-5} > 0$.

3 Να λύσετε: α) $x^3 - 9x \leq 0$ β) $(x^2-1)(x^2-5x+6) > 0$.

4 Να λύσετε την ανίσωση $\frac{2x+1}{x-3} \geq 1$.

■ Β' ΟΜΑΔΑ

5 Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x^2-4x+4}{x^2-x-6} \leq 0$.

6 Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{x} < \frac{1}{x-1}$.

7 Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $\sqrt{\frac{x-2}{4-x}}$;

8 Να λύσετε την ανίσωση $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5

Πρόοδοι



Η σειρά των καθισμάτων σε ένα θέατρο, οι αποταμιεύσεις με τόκο, ο πολλαπλασιασμός των βακτηρίων: παντού συναντάμε αριθμούς που ακολουθούν ένα «μοτίβο». Στο κεφάλαιο αυτό γνωρίζουμε την έννοια της ακολουθίας και μελετάμε δύο πολύ σημαντικά είδη της, την αριθμητική και τη γεωμετρική πρόοδο: τον γενικό τους όρο, το άθροισμα των όρων τους και πολλές εφαρμογές τους στην οικονομία και στη ζωή.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 5.1** Ακολουθίες
- 5.2** Αριθμητική πρόοδος
- 5.3** Γεωμετρική πρόοδος
- 5.4** Ανατοκισμός – Ίσες καταθέσεις

Συμπληρωματικό υλικό: Για βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις, κουίζ και παιχνίδια γνώσεων πάνω σε αυτό το κεφάλαιο, επισκέψου το **mathgreece.com** — ένα πλήρες και ολοκληρωμένο **δωρεάν** φροντιστήριο.

ΜΑΘΗΜΑ

5.1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 · Πρόοδοι

Ακολουθίες

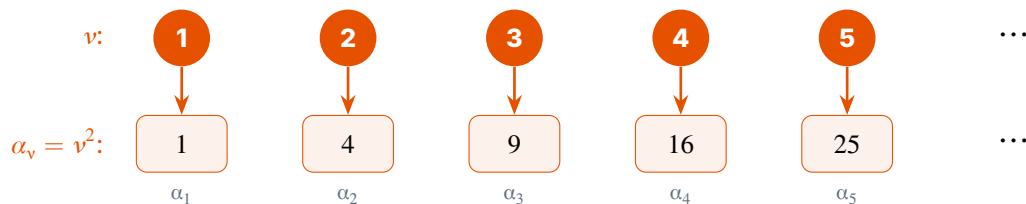
Τι θα μάθουμε: τι είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών, πώς τη δίνουμε με τον γενικό της όρο ή αναδρομικά, πώς υπολογίζουμε όρους, πώς βρίσκουμε τον γενικό όρο από ένα «μοτίβο» και πώς απεικονίζουμε μια ακολουθία.

Η έννοια της ακολουθίας

Σκέψου τους αριθμούς 1, 4, 9, 16, 25, ... Είναι τα τετράγωνα των θετικών ακεραίων: ο 1ος είναι 1^2 , ο 2ος 2^2 και γενικά ο n -οστός είναι n^2 . Σε **κάθε θετικό ακέραιο** n αντιστοιχίζεται ένας πραγματικός αριθμός. Αυτό ακριβώς είναι μια ακολουθία.

ΟΡΙΣΜΟΣ · Ακολουθία

Ακολουθία πραγματικών αριθμών λέγεται μια αντιστοίχιση των θετικών ακεραίων 1, 2, 3, ... στους πραγματικούς αριθμούς. Ο αριθμός που αντιστοιχίζεται στο n συμβολίζεται a_n και λέγεται **n -οστός όρος** ή **γενικός όρος** της ακολουθίας. Την ακολουθία τη συμβολίζουμε (a_n) .



Πώς ορίζεται μια ακολουθία

1. Με τύπο του γενικού όρου

Δίνεται ο a_n ως παράσταση του n , π.χ. $a_n = 2n + 1$ ή $\beta_n = \frac{n}{n+1}$. Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε **οποιοδήποτε** όρο κατευθείαν: π.χ. $a_{100} = 201$.

2. Αναδρομικά

Δίνονται ο πρώτος (ή οι πρώτοι) όρος και ένας κανόνας που υπολογίζει κάθε όρο από τον προηγούμενο (ή τους προηγούμενους). Για παράδειγμα:

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1.$$

Τότε $a_2 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$, $a_3 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$, $a_4 = 17$, κ.ο.κ. Για να βρούμε τον a_{100} πρέπει όμως να βρούμε πρώτα όλους τους προηγούμενους!

Η ακολουθία Fibonacci

Η πιο διάσημη αναδρομική ακολουθία είναι η $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Κάθε όρος είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων. Οι αριθμοί της εμφανίζονται στη φύση: στις σπείρες του ηλιοτρόπιου, στα κουκουνάρια, στα πέταλα των λουλουδιών.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Υπολογισμός όρων

Δίνεται η ακολουθία $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Να βρεθούν οι πέντε πρώτοι όροι και ο a_{20} .

ΛΥΣΗ $a_1 = -1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = -\frac{1}{5}, \quad a_{20} = \frac{1}{20}$.

Παρατήρησε ότι ο παράγοντας $(-1)^n$ κάνει τους όρους να **εναλλάσσουν πρόσημο**.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Ποιος όρος είναι;

Δίνεται η ακολουθία $a_n = 3n - 5$. α) Είναι ο 70 όρος της ακολουθίας; β) Είναι ο 100 όρος της;

ΛΥΣΗ α) $3n - 5 = 70 \Leftrightarrow 3n = 75 \Leftrightarrow n = 25$: **ναι**, ο 70 είναι ο 25ος όρος.

β) $3n - 5 = 100 \Leftrightarrow n = 35$: **ναι**, είναι ο 35ος όρος. (Αν είχαμε βρει π.χ. $n = \frac{104}{3}$, που δεν είναι θετικός ακέραιος, η απάντηση θα ήταν «όχι».)

⚠ Προσοχή!

Ο δείκτης n μιας ακολουθίας είναι πάντα **θετικός ακέραιος**. Αν από μια εξίσωση προκύψει $n = 0$, $n = -3$ ή $n = 2,5$, τότε ο αριθμός **δεν** είναι όρος της ακολουθίας.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Αναδρομικός ορισμός

Μια ακολουθία ορίζεται από $a_1 = 2$ και $a_{n+1} = a_n + 2n$. Να βρεθούν οι πέντε πρώτοι όροι.

ΛΥΣΗ $a_2 = a_1 + 2 \cdot 1 = 4, \quad a_3 = a_2 + 2 \cdot 2 = 8, \quad a_4 = 8 + 6 = 14, \quad a_5 = 14 + 8 = 22$.

Από το «μοτίβο» στον γενικό όρο**ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Μοτίβα με πλακάκια**

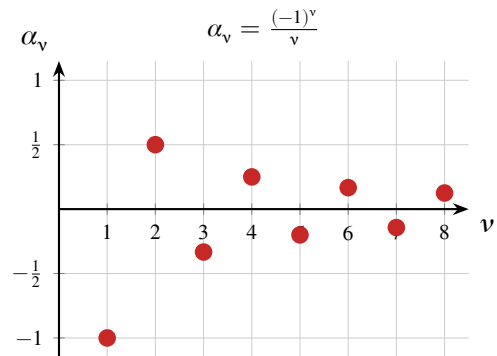
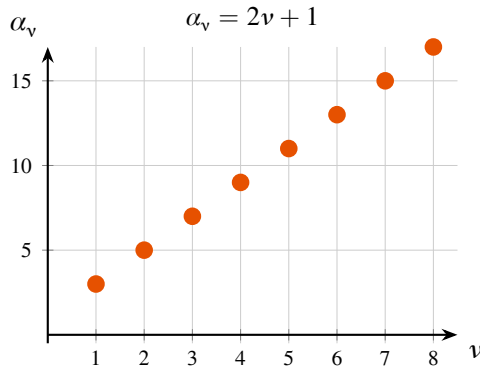
Με πλακάκια φτιάχνουμε τα παρακάτω σχήματα. Να βρεθεί πόσα πλακάκια χρειάζονται για το n -οστό σχήμα.



ΛΥΣΗ Τα πλήθη είναι 3, 5, 7, 9, ...: κάθε φορά προσθέτουμε 2 πλακάκια (ένα δεξιά και ένα πάνω). Στο σχήμα n υπάρχει μία «γωνία» και δύο σκέλη με n πλακάκια το καθένα: $a_n = 2n + 1$. Έλεγχος: $a_1 = 3, a_4 = 9$. ✓

Γραφική παράσταση ακολουθίας

Αφού κάθε όρος είναι ζεύγος (n, a_n) , μπορούμε να τον σημειώσουμε στο επίπεδο. Η γραφική παράσταση μιας ακολουθίας αποτελείται από **μεμονωμένα σημεία** (όχι συνεχή γραμμή).



✗ Συχνό λάθος

✗ ΛΑΘΟΣ: Συγχέω τον δείκτη n (τη «θέση») με την τιμή a_n του όρου. Στην $a_n = 3n - 5$, ο a_2 είναι το 1, όχι το 2!

✗ ΛΑΘΟΣ: $a_{n+1} = a_n + 1$. Ο a_{n+1} προκύπτει αντικαθιστώντας στον τύπο το n με $n + 1$: αν $a_n = n^2$, τότε $a_{n+1} = (n + 1)^2$, όχι $n^2 + 1$.



Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις ένα παιχνίδι γνώσεων «Βρες το μοτίβο» με ακολουθίες κάθε επιπέδου δυσκολίας!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 5.1

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να βρείτε τους τέσσερις πρώτους όρους των ακολουθιών: α) $a_n = 5 - 2n$ β) $\beta_n = \frac{n+1}{n}$ γ) $\gamma_n = 2^n - 1$ δ) $\delta_n = (-1)^n \cdot n$.

2 Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας με $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = 3a_n + 1$.

3 Δίνεται η ακολουθία $a_n = n^2 - 4n$. α) Να βρείτε τον a_{10} . β) Ποιος όρος ισούται με 45; γ) Είναι το -5 όρος της ακολουθίας;

4 Να βρείτε έναν τύπο για τον γενικό όρο: α) 2, 4, 6, 8, ... β) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ γ) 3, 9, 27, 81, ... δ) 0, 3, 8, 15, 24, ...

■ Β' ΟΜΑΔΑ

5 Δίνεται η ακολουθία $a_n = \frac{2n-1}{n+3}$. Να αποδείξετε ότι $a_n < 2$ για κάθε n και να βρείτε ποιοι όροι είναι μεγαλύτεροι από 1.

- 6 Μια ακολουθία έχει $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = a_n + (2n + 1)$. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους και να μαντέψετε έναν τύπο για τον a_n .

ΜΑΘΗΜΑ

5.2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 · Πρόοδοι

Αριθμητική πρόοδος

Τι θα μάθουμε: τι είναι αριθμητική πρόοδος και διαφορά της, τον τύπο του n -οστού όρου, τον αριθμητικό μέσο τριών αριθμών, τον τύπο για το άθροισμα των n πρώτων όρων (με την ιδέα του μικρού Gauss) και πώς λύνουμε προβλήματα με αριθμητικές προόδους.

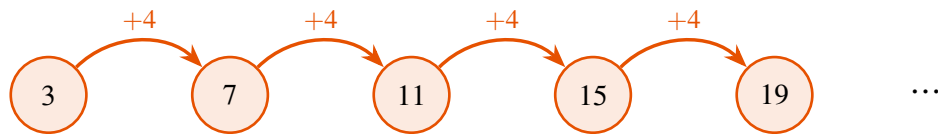
Ορισμός

ΟΡΙΣΜΟΣ · Αριθμητική πρόοδος

Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος** όταν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο **προσθέτοντας πάντα τον ίδιο αριθμό ω** :

$$a_{n+1} = a_n + \omega \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} - a_n = \omega \quad \text{για κάθε } n.$$

Ο σταθερός αριθμός ω λέγεται **διαφορά** της προόδου.



Αριθμητική πρόοδος με $a_1 = 3$ και $\omega = 4$

Παραδείγματα: $1, 2, 3, 4, \dots$ ($\omega = 1$), $10, 7, 4, 1, -2, \dots$ ($\omega = -3$), $5, 5, 5, \dots$ ($\omega = 0$).

Πώς αποδεικνύω ότι μια ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος

Υπολογίζω τη διαφορά $a_{n+1} - a_n$. Αν βγει **σταθερός αριθμός** (ανεξάρτητος του n), η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με αυτή τη διαφορά. Αν εξαρτάται από το n , δεν είναι.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Είναι αριθμητική πρόοδος;

Να εξεταστεί αν είναι αριθμητικές προόδους οι ακολουθίες: α) $a_n = 5n - 2$ β) $\beta_n = n^2 + 1$.

ΛΥΣΗ α) $a_{n+1} - a_n = 5(n+1) - 2 - (5n - 2) = 5$: σταθερή, άρα **είναι** αριθμητική πρόοδος με $\omega = 5$.

β) $\beta_{n+1} - \beta_n = (n+1)^2 + 1 - n^2 - 1 = 2n + 1$: εξαρτάται από το n , άρα **δεν** είναι.

Ο νιοστός όρος

Ξεκινώντας από τον a_1 , για να φτάσουμε στον a_n «κάνουμε» $n - 1$ βήματα, και σε κάθε βήμα προσθέτουμε ω :

$$a_2 = a_1 + \omega, \quad a_3 = a_1 + 2\omega, \quad a_4 = a_1 + 3\omega, \quad \dots$$

Ο Γενικός όρος αριθμητικής προόδου

$$a_n = a_1 + (n-1)\omega$$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Υπολογισμός όρου

Να βρεθεί ο 30ός όρος της αριθμητικής προόδου 7, 11, 15, ...

ΛΥΣΗ $a_1 = 7, \omega = 11 - 7 = 4$. Άρα $a_{30} = 7 + 29 \cdot 4 = 123$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Από δύο όρους

Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $a_5 = 17$ και $a_{12} = 45$. Να βρεθούν ο a_1 , η ω και ο a_{20} .

ΛΥΣΗ

$$\begin{cases} a_1 + 4\omega = 17 \\ a_1 + 11\omega = 45 \end{cases}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη: $7\omega = 28 \Leftrightarrow \omega = 4$. Τότε $a_1 = 17 - 16 = 1$ και $a_{20} = 1 + 19 \cdot 4 = 77$.

💡 Ένας γρήγορος τρόπος

Ανάμεσα σε δύο όρους a_κ και a_λ υπάρχουν $\lambda - \kappa$ «βήματα», άρα $a_\lambda = a_\kappa + (\lambda - \kappa)\omega$. Στο προηγούμενο: $45 = 17 + 7\omega \Rightarrow \omega = 4$, χωρίς σύστημα!

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Πόσοι όροι;

Πόσοι όροι έχει η αριθμητική πρόοδος 5, 8, 11, ..., 302;

ΛΥΣΗ $a_1 = 5, \omega = 3, a_n = 302$: $5 + (n-1)3 = 302 \Leftrightarrow (n-1)3 = 297 \Leftrightarrow n-1 = 99 \Leftrightarrow n = 100$ όροι.

✖ Συχνό λάθος

✖ ΛΑΘΟΣ: $a_n = a_1 + n\omega$.

✓ ΣΩΣΤΟ: $a_n = a_1 + (n-1)\omega$. Έλεγχος: για $n = 1$ πρέπει να πάρουμε τον a_1 , άρα ο πολλαπλασιαστής του ω πρέπει να είναι 0.

✖ ΛΑΘΟΣ: Στην πρόοδο 10, 7, 4, ... παίρνω $\omega = 3$.

✓ ΣΩΣΤΟ: $\omega = 7 - 10 = -3$ (επόμενος **μείον** προηγούμενος).

Αριθμητικός μέσος

Ο Αριθμητικός μέσος

Τρεις αριθμοί a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν

$$2\beta = a + \gamma \quad \text{δηλαδή} \quad \beta = \frac{a + \gamma}{2}.$$

Ο β λέγεται **αριθμητικός μέσος** των a και γ .

Απόδειξη. a, β, γ διαδοχικοί όροι $\Leftrightarrow \beta - a = \gamma - \beta \Leftrightarrow 2\beta = a + \gamma$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 · Τρεις διαδοχικοί όροι

Να βρεθεί ο x ώστε οι αριθμοί $x + 1$, $3x$, $4x + 2$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ΛΥΣΗ $2 \cdot 3x = (x + 1) + (4x + 2) \Leftrightarrow 6x = 5x + 3 \Leftrightarrow x = 3$. Οι αριθμοί είναι 4, 9, 14 ($\omega = 5$). ✓

Άθροισμα των n πρώτων όρων**Η ιστορία του μικρού Gauss**

Λέγεται ότι, όταν ο μεγάλος μαθηματικός Carl Friedrich Gauss ήταν μαθητής δημοτικού, ο δάσκαλος ζήτησε από την τάξη να προσθέσει όλους τους αριθμούς από το 1 ως το 100. Σε λίγα δευτερόλεπτα ο Gauss έδωσε την απάντηση: 5050!

Η ιδέα του Gauss: γράφουμε το άθροισμα δύο φορές, μία «κανονικά» και μία «ανάποδα», και προσθέτουμε:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \dots + 2 + 1$$

$$\text{άρα } S = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

$$2S = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 = 100 \cdot 101$$

Το ίδιο κόλπο δουλεύει σε κάθε αριθμητική πρόοδο, γιατί τα ζεύγη «πρώτος + τελευταίος», «δεύτερος + προτελευταίος» κ.λπ. έχουν πάντα το **ίδιο άθροισμα** $\alpha_1 + \alpha_n$.

Ο n -Άθροισμα n πρώτων όρων

$$S_n = \frac{n}{2} (\alpha_1 + \alpha_n)$$

ή, ισοδύναμα,

$$S_n = \frac{n}{2} [2\alpha_1 + (n - 1)\omega]$$

❗ Ποιον τύπο να χρησιμοποιήσω;

Αν ξέρεις τον **τελευταίο όρο** α_n , χρησιμοποίησε τον πρώτο τύπο. Αν ξέρεις τη **διαφορά** ω , τον δεύτερο.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 · Άθροισμα

Να βρεθεί το άθροισμα $S = 4 + 7 + 10 + \dots + 151$.

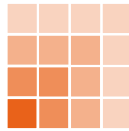
ΛΥΣΗ Αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 4$, $\omega = 3$. Πλήθος όρων: $4 + (n - 1)3 = 151 \Leftrightarrow n = 50$. Άρα

$$S_{50} = \frac{50}{2} (4 + 151) = 25 \cdot 155 = 3875.$$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 · Άθροισμα των πρώτων περιττών

Να υπολογιστεί το άθροισμα των n πρώτων περιττών αριθμών $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$.

ΛΥΣΗ $\alpha_1 = 1$, $\alpha_n = 2n - 1$: $S_n = \frac{n}{2} (1 + 2n - 1) = n^2$. Ωραίο αποτέλεσμα: $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, ...



$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 · Πόσους όρους χρειάζομαι;

Πόσους πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου $2, 6, 10, \dots$ πρέπει να προσθέσουμε για να πάρουμε άθροισμα 800;

ΛΥΣΗ $a_1 = 2, \omega = 4$: $\frac{n}{2}[4 + (n-1)4] = 800 \Leftrightarrow \frac{n}{2} \cdot 4n = 800 \Leftrightarrow 2n^2 = 800 \Leftrightarrow n^2 = 400 \Leftrightarrow n = 20$ (το $n = -20$ απορρίπτεται).

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 · Πρόβλημα: το θέατρο

Ένα ανοιχτό θέατρο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Η πρώτη σειρά έχει 18 θέσεις και κάθε επόμενη σειρά έχει 3 θέσεις περισσότερες από την προηγούμενη. Πόσες θέσεις έχει η τελευταία σειρά και πόσες όλο το θέατρο;

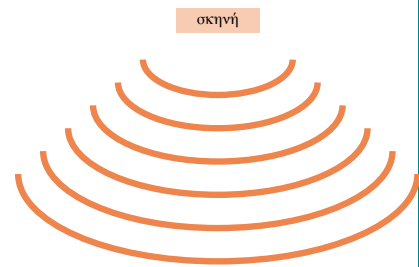
ΛΥΣΗ

Οι θέσεις ανά σειρά σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο

με $a_1 = 18, \omega = 3$.

Τελευταία σειρά: $a_{25} = 18 + 24 \cdot 3 = 90$ θέσεις.

Σύνολο: $S_{25} = \frac{25}{2}(18 + 90) = 25 \cdot 54 = 1350$ θέσεις.



⚠ Προσοχή!

Στα προβλήματα, ξεκαθάρισε **ποιο ποσό** είναι η πρόοδος (οι θέσεις κάθε σειράς) και **τι ζητείται**: ένας όρος (a_n) ή ένα άθροισμα (S_n); Το πιο συχνό λάθος είναι να υπολογίζεται a_n ενώ ζητείται S_n ή το αντίστροφο.

Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com



Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο-μάθημα για τις αριθμητικές προόδους, με πολλά προβλήματα από την καθημερινή ζωή, και podcast με την ιστορία του Gauss και άλλων μεγάλων μαθηματικών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 5.2

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Να βρείτε τον a_{15} και το S_{15} των αριθμητικών προόδων: α) 3, 8, 13, ... β) 20, 17, 14, ...
- 2 Σε αριθμητική πρόοδο είναι $a_3 = 10$ και $a_8 = 30$. Να βρείτε τον a_1 , την ω και τον a_{50} .
- 3 Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου $-7, -3, 1, \dots$ είναι ίσος με 89;
- 4 Να υπολογίσετε τα αθροίσματα: α) $1 + 2 + 3 + \dots + 200$ β) $2 + 4 + 6 + \dots + 100$ γ) $5 + 10 + 15 + \dots + 500$.
- 5 Να βρείτε το x ώστε οι αριθμοί $2x-1, x+5, 3x+1$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
- 6 Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $a_n = 7-3n$ είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 7 Να βρείτε το άθροισμα όλων των διψήφων αριθμών που είναι πολλαπλάσια του 7.
- 8 Σε αριθμητική πρόοδο το άθροισμα των 10 πρώτων όρων είναι 145 και το άθροισμα των 20 πρώτων είναι 490. Να βρείτε τον a_1 και την ω .
- 9 Ένας δρομέας προπονείται τρέχοντας την πρώτη μέρα 2 km και κάθε επόμενη μέρα 0,5 km περισσότερο. Σε πόσες μέρες θα έχει τρέξει συνολικά 57 km;
- 10 Τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, έχουν άθροισμα 21 και γινόμενο 231. Να βρείτε τους αριθμούς. (Υπόδειξη: ονομάστε τους $x - \omega, x, x + \omega$.)

ΜΑΘΗΜΑ

5.3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 · Πρόοδοι

Γεωμετρική πρόοδος

Τι θα μάθουμε: τι είναι γεωμετρική πρόοδος και λόγος της, τον τύπο του n -οστού όρου, τον γεωμετρικό μέσο, το άθροισμα των n πρώτων όρων, το άθροισμα απείρων όρων όταν $|\lambda| < 1$ και εφαρμογές σε φαινόμενα «εκθετικής» αύξησης ή μείωσης.

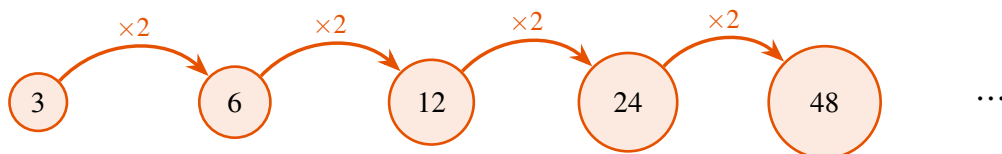
Ορισμός

ΟΡΙΣΜΟΣ · Γεωμετρική πρόοδος

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος** όταν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο **πολλαπλασιάζοντας πάντα με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό λ** :

$$a_{v+1} = a_v \cdot \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_{v+1}}{a_v} = \lambda \quad \text{για κάθε } v.$$

Ο λ λέγεται **λόγος** της προόδου. Δεχόμαστε πάντα $a_1 \neq 0$ και $\lambda \neq 0$, άρα **κανένας όρος δεν είναι μηδέν**.



Γεωμετρική πρόοδος με $a_1 = 3$ και $\lambda = 2$

Παραδείγματα: $1, 2, 4, 8, \dots$ ($\lambda = 2$), $81, 27, 9, 3, \dots$ ($\lambda = \frac{1}{3}$), $2, -6, 18, -54, \dots$ ($\lambda = -3$).

Αριθμητική ή γεωμετρική;

Στην **αριθμητική** πρόοδο ελέγχουμε τη **διαφορά** διαδοχικών όρων ($a_{v+1} - a_v$), ενώ στη **γεωμετρική** τον **λόγο** τους ($\frac{a_{v+1}}{a_v}$). «Αριθμητική = $+\omega$ », «Γεωμετρική = $\times \lambda$ ».

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Είναι γεωμετρική πρόοδος;

Να εξεταστεί αν είναι γεωμετρικές πρόοδοι: α) $a_v = 5 \cdot 3^v$ β) $\beta_v = 2^v + 1$.

ΛΥΣΗ α) $\frac{a_{v+1}}{a_v} = \frac{5 \cdot 3^{v+1}}{5 \cdot 3^v} = 3$: σταθερός, άρα **είναι** με $\lambda = 3$.

β) $\beta_1 = 3, \beta_2 = 5, \beta_3 = 9$: $\frac{5}{3} \neq \frac{9}{5}$, άρα **δεν είναι**.

Ο νιοστός όρος

$$a_2 = a_1\lambda, \quad a_3 = a_1\lambda^2, \quad a_4 = a_1\lambda^3, \quad \dots$$

➔ Γενικός όρος γεωμετρικής προόδου

$$a_v = a_1 \cdot \lambda^{v-1}$$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Υπολογισμός όρων

Να βρεθεί ο 8ος όρος της γεωμετρικής προόδου $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots$

ΛΥΣΗ $a_1 = \frac{1}{4}, \lambda = \frac{1/2}{1/4} = 2$. Άρα $a_8 = \frac{1}{4} \cdot 2^7 = \frac{128}{4} = 32$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Από δύο όρους

Σε γεωμετρική πρόοδο είναι $a_3 = 12$ και $a_6 = 96$. Να βρεθούν ο λ και ο a_1 .

ΛΥΣΗ $\frac{a_6}{a_3} = \frac{a_1\lambda^5}{a_1\lambda^2} = \lambda^3 = \frac{96}{12} = 8 \Leftrightarrow \lambda = 2$. Τότε $a_1 \cdot 4 = 12 \Leftrightarrow a_1 = 3$.

⚠ Προσοχή στον άρτιο εκθέτη!

Αν από τις πράξεις προκύψει π.χ. $\lambda^2 = 9$, τότε **υπάρχουν δύο** πρόοδοι: με $\lambda = 3$ και με $\lambda = -3$. Μην ξεχνάς τη λύση με το μείον (Μάθημα 3.2)!

✖ Συχνό λάθος

✖ ΛΑΘΟΣ: $a_v = a_1\lambda^v$.

✓ ΣΩΣΤΟ: $a_v = a_1\lambda^{v-1}$.

✖ ΛΑΘΟΣ: $a_v = (a_1\lambda)^{v-1}$. Η δύναμη αφορά **μόνο** τον λ .

Γεωμετρικός μέσος

➔ Γεωμετρικός μέσος

Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν

$$\beta^2 = a \cdot \gamma$$

Αν $a, \gamma > 0$, ο θετικός αριθμός $\beta = \sqrt{a\gamma}$ λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των a, γ .

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Τρεις διαδοχικοί όροι

Να βρεθεί ο x ώστε οι $x, x+3, x+9$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

ΛΥΣΗ $(x+3)^2 = x(x+9) \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 9x \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$. Οι αριθμοί είναι 3, 6, 12 ($\lambda = 2$).

Άθροισμα των n πρώτων όρων

Θέλουμε το $S_n = \alpha_1 + \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \dots + \alpha_1\lambda^{n-1}$. Το «κόλπο» εδώ είναι να πολλαπλασιάσουμε με λ και να αφαιρέσουμε:

$$\begin{array}{rcl} \lambda S_n & = & \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \dots + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_1\lambda^n \\ S_n & = & \alpha_1 + \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \dots + \alpha_1\lambda^{n-1} \\ \hline \lambda S_n - S_n & = & \alpha_1\lambda^n - \alpha_1 \end{array}$$

Όλοι οι «μεσαίοι» όροι διαγράφονται! Άρα $S_n(\lambda - 1) = \alpha_1(\lambda^n - 1)$.

Ο n -Άθροισμα n πρώτων όρων

$$S_n = \alpha_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \quad (\lambda \neq 1) \quad S_n = n\alpha_1 \quad (\lambda = 1).$$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 · Άθροισμα

Να υπολογιστεί το $S = 3 + 6 + 12 + \dots + 768$.

ΛΥΣΗ $\alpha_1 = 3, \lambda = 2$. Πλήθος όρων: $3 \cdot 2^{n-1} = 768 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 256 = 2^8 \Leftrightarrow n = 9$.

$$S_9 = 3 \cdot \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 3 \cdot 511 = 1533.$$

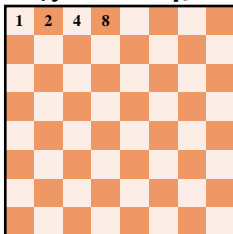
ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 · Ο θρύλος της σκακιέρας

Σύμφωνα με έναν θρύλο, ο εφευρέτης του σκακιού ζήτησε ως αμοιβή: 1 κόκκο σιτάρι στο 1ο τετράγωνο της σκακιέρας, 2 στο 2ο, 4 στο 3ο κ.ο.κ., διπλασιάζοντας κάθε φορά, ως το 64ο τετράγωνο. Πόσους κόκκους ζήτησε;

ΛΥΣΗ $\alpha_1 = 1, \lambda = 2, n = 64$:

$$S_{64} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 1,8 \cdot 10^{19}.$$

Δηλαδή περίπου 18 δισεκατομμύρια δισεκατομμύρια κόκκοι: πολύ περισσότερο σιτάρι απ' όσο έχει παραχθεί σε όλη την ιστορία της ανθρωπότητας! Αυτή είναι η δύναμη της εκθετικής αύξησης.



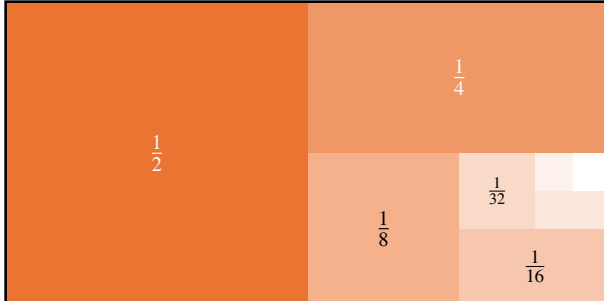
Άθροισμα απείρων όρων (όταν $|\lambda| < 1$)

Αν $|\lambda| < 1$, οι δυνάμεις λ^n γίνονται όλο και πιο μικρές και «πλησιάζουν» το 0 καθώς το n μεγαλώνει (π.χ. $(\frac{1}{2})^{10} \approx 0,001$). Τότε το $S_n = \alpha_1 \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda}$ πλησιάζει τον αριθμό $\frac{\alpha_1}{1 - \lambda}$. Αυτόν τον αριθμό τον ονομάζουμε **άθροισμα των απείρων όρων** της προόδου:

➔ Άθροισμα απείρων όρων

Αν $|\lambda| < 1$:

$$S = a_1 + a_1\lambda + a_1\lambda^2 + \dots = \frac{a_1}{1-\lambda}$$



Ένα ορθογώνιο εμβαδού 1 «γεμίζει» με κομμάτια $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$. Γι' αυτό

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1,$$

όπως δίνει και ο τύπος: $\frac{1/2}{1-1/2} = 1$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 · Περιοδικός δεκαδικός ως κλάσμα

Να γραφεί ο αριθμός $0,\overline{7} = 0,777\dots$ ως κλάσμα.

ΛΥΣΗ $0,777\dots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots$: γεωμετρική πρόοδος με $a_1 = \frac{7}{10}$, $\lambda = \frac{1}{10}$. Άρα

$$0,\overline{7} = \frac{7/10}{1-1/10} = \frac{7/10}{9/10} = \frac{7}{9}.$$

⚠ Προσοχή!

Ο τύπος $\frac{a_1}{1-\lambda}$ ισχύει **μόνο όταν** $|\lambda| < 1$. Για την $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ ($\lambda = 2$) ο τύπος θα έδινε $\frac{1}{1-2} = -1$, που είναι παράλογο: το άθροισμα αυτό «μεγαλώνει απεριόριστα».

Εφαρμογές

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 · Βακτήρια

Ένας πληθυσμός βακτηρίων διπλασιάζεται κάθε 20 λεπτά. Αν αρχικά υπάρχουν 500 βακτήρια, πόσα θα υπάρχουν μετά από 3 ώρες;

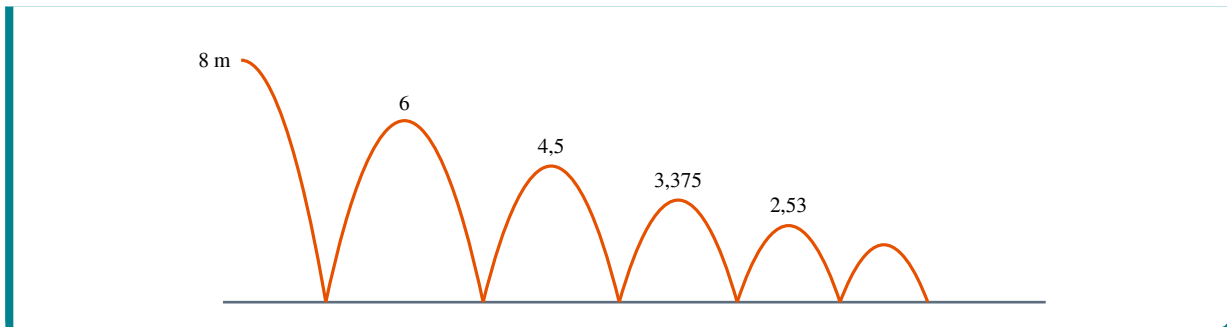
ΛΥΣΗ Σε 3 ώρες υπάρχουν 9 διαστήματα των 20 λεπτών. Οι πληθυσμοί 500, 1000, 2000, ... σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο με $a_1 = 500$ (αρχή) και $\lambda = 2$. Μετά από 9 διπλασιασμούς βρισκόμαστε στον a_{10} :

$$a_{10} = 500 \cdot 2^9 = 500 \cdot 512 = 256\,000 \text{ βακτήρια.}$$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 · Μπάλα που αναπηδά

Μια μπάλα αφήνεται από ύψος 8 m και μετά από κάθε αναπήδηση φτάνει στο $\frac{3}{4}$ του προηγούμενου ύψους. Σε ποιο ύψος φτάνει μετά την 4η αναπήδηση;

ΛΥΣΗ Τα ύψη μετά από κάθε αναπήδηση: $8 \cdot \frac{3}{4}$, $8 \cdot (\frac{3}{4})^2$, ... Μετά την 4η: $8 \cdot (\frac{3}{4})^4 = 8 \cdot \frac{81}{256} = \frac{81}{32} \approx 2,53 \text{ m.}$



Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com

Δες στο mathgreece.com το βίντεο «Αριθμητική ή γεωμετρική;» με σύγκριση των δύο προόδων και πολλά προβλήματα εκθετικής αύξησης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 5.3

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Να βρείτε τον 6ο όρο και το άθροισμα των 6 πρώτων όρων των γεωμετρικών προόδων: α) 2, 6, 18, ... β) 64, 32, 16, ... γ) 1, -2, 4, ...
- 2 Σε γεωμετρική πρόοδο είναι $a_2 = 6$ και $a_5 = 162$. Να βρείτε τον λ και τον a_1 .
- 3 Σε γεωμετρική πρόοδο είναι $a_1 = 5$ και $a_5 = 80$. Να βρείτε τον λόγο (όλες τις περιπτώσεις).
- 4 Να βρείτε τον x ώστε οι αριθμοί $x-1$, $x+1$, $x+7$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
- 5 Να γράψετε ως κλάσμα τους αριθμούς: α) $0,\overline{3}$ β) $0,\overline{45}$.

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 6 Πόσους όρους της γεωμετρικής προόδου 1, 3, 9, ... πρέπει να προσθέσουμε για να πάρουμε άθροισμα 1093;
- 7 Τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με γινόμενο 216 και άθροισμα 21. Να τους βρείτε. (Υπόδειξη: ονομάστε τους $\frac{x}{\lambda}$, x , $x\lambda$.)
- 8 Ένα αυτοκίνητο αξίας 20 000 € χάνει κάθε χρόνο το 15% της αξίας που είχε στην αρχή του έτους. Ποια θα είναι η αξία του μετά από 4 χρόνια;
- 9 Να βρείτε το άθροισμα $S = 12 + 6 + 3 + \frac{3}{2} + \dots$ (άπειροι όροι).

ΜΑΘΗΜΑ

5.4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 · Πρόοδοι

Ανατοκισμός – Ίσες καταθέσεις

Τι θα μάθουμε: πώς «μεγαλώνει» ένα κεφάλαιο όταν οι τόκοι προστίθενται στο κεφάλαιο (ανατοκισμός), τη διαφορά απλού τόκου και ανατοκισμού, και πώς υπολογίζουμε το ποσό που συγκεντρώνεται με ίσες περιοδικές καταθέσεις. Όλα αυτά είναι εφαρμογές της γεωμετρικής πρόοδου.

Απλός τόκος και ανατοκισμός

Ας υποθέσουμε ότι καταθέτουμε σε μια τράπεζα κεφάλαιο $K_0 = 1000 \text{ €}$ με επιτόκιο $\varepsilon = 5\% = 0,05$ τον χρόνο.

- ▶ Με **απλό τόκο**, κάθε χρόνο παίρνουμε τόκο μόνο πάνω στο αρχικό κεφάλαιο: 50 € τον χρόνο. Τα ποσά 1000, 1050, 1100, ... σχηματίζουν **αριθμητική** πρόοδο.
- ▶ Με **ανατοκισμό**, ο τόκος κάθε χρόνου **προστίθεται στο κεφάλαιο** και την επόμενη χρονιά τοκίζεται κι αυτός («τόκος του τόκου»).

Με ανατοκισμό, στο τέλος κάθε χρόνου το κεφάλαιο πολλαπλασιάζεται με $1 + \varepsilon$:

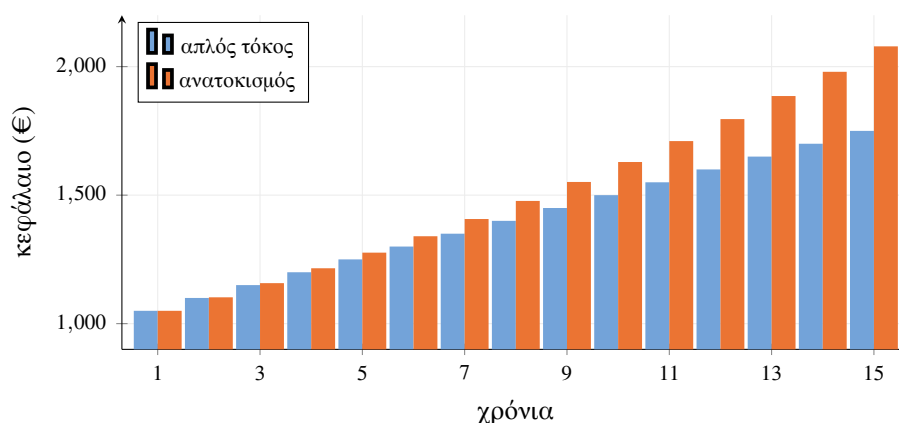
$$K_1 = K_0 + K_0\varepsilon = K_0(1 + \varepsilon), \quad K_2 = K_1(1 + \varepsilon) = K_0(1 + \varepsilon)^2, \quad \dots$$

Τα ποσά $K_1, K_2, \dots$ σχηματίζουν **γεωμετρική** πρόοδο με λόγο $1 + \varepsilon$.

Ο Τύπος του ανατοκισμού

Κεφάλαιο K_0 που ανατοκίζεται με επιτόκιο ε ανά περίοδο γίνεται, μετά από n περιόδους,

$$K_n = K_0 (1 + \varepsilon)^n$$



1000 € με επιτόκιο 5%: με τον ανατοκισμό η διαφορά «ανοίγει» όλο και περισσότερο.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Ανατοκισμός

Καταθέτουμε 2000 € με ετήσιο επιτόκιο 3% και ανατοκισμό. Πόσα χρήματα θα έχουμε μετά από 5 χρόνια;

ΛΥΣΗ $K_5 = 2000 \cdot (1,03)^5 \approx 2000 \cdot 1,15927 \approx 2318,55 \text{ €}.$

⚠ Προσοχή!

- ▶ Το επιτόκιο το γράφουμε πάντα ως **δεκαδικό**: $3\% = 0,03$, άρα $1 + \varepsilon = 1,03$ (όχι 1,3 ούτε 4!).
- ▶ Αν ο ανατοκισμός γίνεται π.χ. **ανά εξάμηνο** με ετήσιο επιτόκιο 4%, τότε το επιτόκιο ανά περίοδο είναι 2% και σε 3 χρόνια έχουμε $n = 6$ περιόδους.

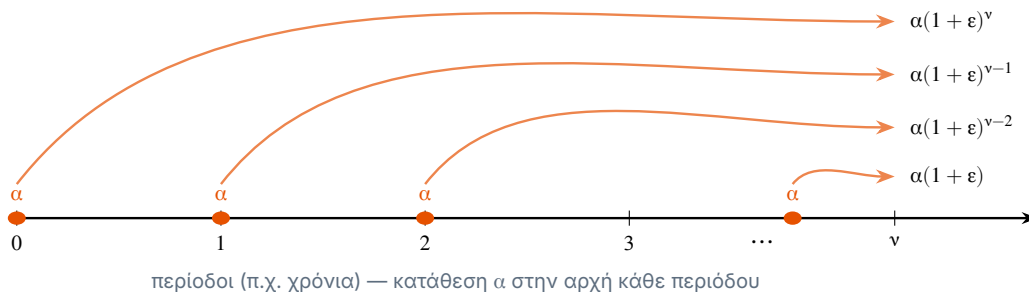
ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Πόσο πρέπει να καταθέσω;

Τι ποσό πρέπει να καταθέσουμε σήμερα με ετήσιο επιτόκιο 4% και ανατοκισμό, ώστε σε 10 χρόνια να έχουμε 15 000 €;

ΛΥΣΗ $K_0(1,04)^{10} = 15000 \Leftrightarrow K_0 = \frac{15000}{1,04^{10}} \approx \frac{15000}{1,48024} \approx 10\,133 \text{ €}.$

Ίσες καταθέσεις

Πολλές φορές δεν καταθέτουμε ένα ποσό μία φορά, αλλά **το ίδιο ποσό α στην αρχή κάθε περιόδου** (π.χ. κάθε χρόνο), με επιτόκιο ε και ανατοκισμό. Πόσα χρήματα θα έχουν μαζευτεί στο τέλος της n -οστής περιόδου;



Η πρώτη κατάθεση τοκίζεται n περιόδους, η δεύτερη $n - 1, \dots$, η τελευταία μία περίοδο. Το σύνολο είναι

$$S = \alpha(1 + \varepsilon) + \alpha(1 + \varepsilon)^2 + \dots + \alpha(1 + \varepsilon)^n,$$

δηλαδή άθροισμα n όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha(1 + \varepsilon)$ και λόγο $1 + \varepsilon$:

Ο→ Τύπος ίσων καταθέσεων

$$S = \alpha(1 + \varepsilon) \frac{(1 + \varepsilon)^n - 1}{\varepsilon}$$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Αποταμίευση για σπουδές

Μια οικογένεια καταθέτει στην αρχή κάθε χρόνου 1000 € σε λογαριασμό με ετήσιο επιτόκιο 2% και ανατοκισμό. Πόσα χρήματα θα υπάρχουν στον λογαριασμό στο τέλος του 6ου χρόνου;

ΛΥΣΗ $\alpha = 1000, \varepsilon = 0,02, \nu = 6$:

$$S = 1000 \cdot 1,02 \cdot \frac{1,02^6 - 1}{0,02} \approx 1020 \cdot \frac{1,12616 - 1}{0,02} \approx 1020 \cdot 6,308 \approx 6434 \text{ €}.$$

Από αυτά, τα 6000 € είναι καταθέσεις και περίπου 434 € τόκοι.

✖ Συχνό λάθος

× ΛΑΘΟΣ: «Ίσες καταθέσεις 6×1000 με ανατοκισμό: $6000 \cdot 1,02^6$.» Έτσι υποθέτουμε ότι όλα τα χρήματα τοκίζονται 6 χρόνια, ενώ η τελευταία κατάθεση τοκίζεται μόνο έναν χρόνο!

💡 Για τους υπολογισμούς

Στις ασκήσεις αυτές χρειάζεται **κομπιουτεράκι** (για δυνάμεις όπως $1,02^6$) ή δίνονται οι τιμές των δυνάμεων στην εκφώνηση. Κράτα 4-5 δεκαδικά στις ενδιάμεσες πράξεις και στρογγυλοποίησε μόνο στο τελικό αποτέλεσμα.

Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com



Στο mathgreece.com θα βρεις ένα διαδραστικό «αριθμομηχάνημα ανατοκισμού» όπου αλλάζεις επιτόκιο και χρόνια και βλέπεις την αύξηση του κεφαλαίου, καθώς και βίντεο με τα προβλήματα του μαθήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 5.4

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Καταθέτουμε 5000 € με ετήσιο επιτόκιο 2% και ανατοκισμό. Πόσα χρήματα θα έχουμε μετά από 3 χρόνια; Πόσα θα είχαμε με απλό τόκο;
- 2 Ένα κεφάλαιο ανατοκίστηκε για 2 χρόνια με ετήσιο επιτόκιο 10% και έγινε 3630 €. Ποιο ήταν το αρχικό κεφάλαιο;
- 3 Καταθέτουμε στην αρχή κάθε χρόνου 500 € με ετήσιο επιτόκιο 4% και ανατοκισμό. Πόσα χρήματα θα έχουμε στο τέλος του 3ου χρόνου;

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 4 Ποιο ετήσιο επιτόκιο (με ανατοκισμό) κάνει ένα κεφάλαιο 1,44 φορές μεγαλύτερο σε 2 χρόνια;
- 5 Ο πληθυσμός μιας πόλης είναι 50 000 κάτοικοι και αυξάνεται κατά 2% τον χρόνο. Ποιος θα είναι ο πληθυσμός σε 5 χρόνια; (Δίνεται $1,02^5 \approx 1,104$.)

Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων



Η έννοια της συνάρτησης είναι ίσως η σημαντικότερη ιδέα όλων των Μαθηματικών: περιγράφει πώς μια ποσότητα «εξαρτάται» από μια άλλη. Η θερμοκρασία ως συνάρτηση της ώρας, το κόστος ως συνάρτηση της ποσότητας, η απόσταση ως συνάρτηση του χρόνου. Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζουμε τη συνάρτηση, μαθαίνουμε να βρίσκουμε πεδίο ορισμού, να σχεδιάζουμε και να «διαβάζουμε» γραφικές παραστάσεις, μελετάμε την ευθεία $y = ax + \beta$, τις μετατοπίσεις καμπυλών και τις βασικές ιδιότητες: μονοτονία, ακρότατα, συμμετρίες.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 6.1** Η έννοια της συνάρτησης
- 6.2** Γραφική παράσταση συνάρτησης
- 6.3** Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$
- 6.4** Κατακόρυφη – οριζόντια μετατόπιση καμπύλης
- 6.5** Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες συνάρτησης

Συμπληρωματικό υλικό: Για βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις, κουίζ και παιχνίδια γνώσεων πάνω σε αυτό το κεφάλαιο, επισκέψου το **mathgreece.com** — ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

ΜΑΘΗΜΑ

6.1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 · Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

Η έννοια της συνάρτησης

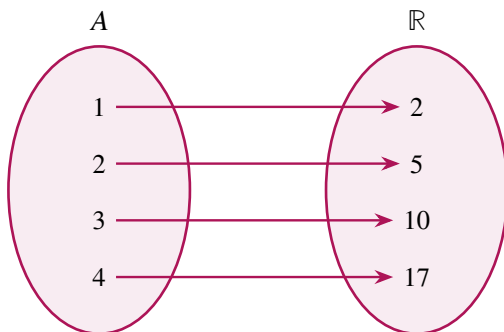
Τι θα μάθουμε: τι είναι συνάρτηση, πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών, πώς υπολογίζουμε τιμές, πώς βρίσκουμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης που δίνεται με τύπο, και πώς «στήνουμε» συναρτήσεις από προβλήματα της καθημερινής ζωής.

Τι είναι συνάρτηση

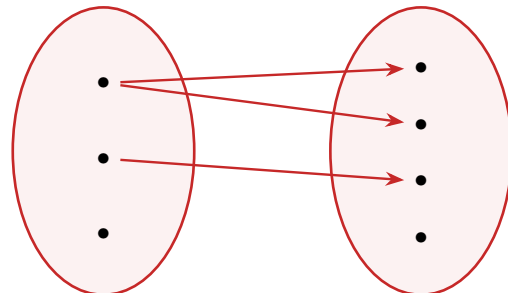
Όταν πληρώνουμε βενζίνη, το ποσό που πληρώνουμε **εξαρτάται** από τα λίτρα που βάλουμε: σε κάθε ποσότητα λίτρων αντιστοιχεί **ένα** συγκεκριμένο ποσό. Αυτή η «κανονική» αντιστοίχιση είναι η ουσία της συνάρτησης.

ΟΡΙΣΜΟΣ · Συνάρτηση

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. **Συνάρτηση** (πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής) με **πεδίο ορισμού** το A λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) f με την οποία **κάθε** στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε **ένα μόνο** πραγματικό αριθμό y . Ο y λέγεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται $f(x)$.



✓ συνάρτηση: $f(x) = x^2 + 1$



✗ ΟΧΙ συνάρτηση: ένα στοιχείο πάει σε δύο και ένα δεν αντιστοιχίζεται πουθενά

- Το x λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το $y = f(x)$ **εξαρτημένη μεταβλητή**.
- Το σύνολο όλων των τιμών $f(x)$, για $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται $f(A)$.

⚠ Δύο «χρυσοί» κανόνες

Για να έχουμε συνάρτηση πρέπει: (α) **κάθε** x του πεδίου ορισμού να έχει εικόνα και (β) η εικόνα να είναι **μοναδική**. Επιτρέπεται όμως διαφορετικά x να έχουν την **ίδια** εικόνα (π.χ. $f(-2) = f(2) = 4$ για $f(x) = x^2$).

Υπολογισμός τιμών

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Τιμές συνάρτησης

Δίνεται $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Να βρεθούν οι $f(0)$, $f(-2)$, $f(\sqrt{2})$, $f(\alpha + 1)$.

ΛΥΣΗ Αντικαθιστούμε το x σε παρένθεση:

$$f(0) = 1, \quad f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) + 1 = 4 + 6 + 1 = 11, \quad f(\sqrt{2}) = 2 - 3\sqrt{2} + 1 = 3 - 3\sqrt{2},$$

$$f(\alpha + 1) = (\alpha + 1)^2 - 3(\alpha + 1) + 1 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 - 3\alpha - 3 + 1 = \alpha^2 - \alpha - 1.$$

✗ Συχνό λάθος

✗ ΛΑΘΟΣ: $f(-2) = -2^2 - 3 \cdot -2 + 1$. Χωρίς παρενθέσεις τα πρόσημα «μπερδεύονται»: $-2^2 = -4$, όχι 4!

✗ ΛΑΘΟΣ: $f(\alpha + 1) = f(\alpha) + 1$ ή $f(\alpha + 1) = f(\alpha) + f(1)$. Πρέπει να αντικαταστήσουμε **όλο** το $\alpha + 1$ στη θέση του x .

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Εύρεση x από την τιμή

Για τη συνάρτηση $f(x) = 2x - 5$ να βρεθεί το x για το οποίο $f(x) = 9$.

ΛΥΣΗ $2x - 5 = 9 \Leftrightarrow x = 7$. Το 7 λέγεται *πρότυπο* του 9 (η τιμή 9 «προέρχεται» από το 7).

Εύρεση πεδίου ορισμού

Όταν μια συνάρτηση δίνεται μόνο με τον τύπο της (χωρίς να αναφέρεται το πεδίο ορισμού), **θεωρούμε** ότι πεδίο ορισμού είναι το **μεγαλύτερο** υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ο τύπος έχει νόημα.

✗ Οι «απαγορεύσεις»

Κλάσμα $\frac{A(x)}{B(x)}$: παρονομαστής $B(x) \neq 0$

Τετραγωνική ρίζα $\sqrt{A(x)}$ (ή n -οστή): υπόρριζο $A(x) \geq 0$

Ρίζα σε παρονομαστή $\frac{1}{\sqrt{A(x)}}$: $A(x) > 0$

Πολυώνυμο: δεν υπάρχει περιορισμός: $A = \mathbb{R}$
Όταν υπάρχουν πολλοί περιορισμοί, **συναληθεύουμε** (παίρνουμε την τομή).

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Πεδία ορισμού

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

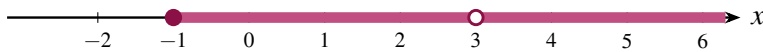
$$\alpha) f(x) = \frac{3x}{x^2 - 4} \quad \beta) g(x) = \sqrt{6 - 2x} \quad \gamma) h(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-3} \quad \delta) \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

ΛΥΣΗ α) $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$. $A = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

β) $6 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$. $A = (-\infty, 3]$.

γ) $x + 1 \geq 0$ και $x - 3 \neq 0$, δηλαδή $x \geq -1$ και $x \neq 3$. $A = [-1, 3) \cup (3, +\infty)$.

δ) $x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow x < -3$ ή $x > 3$. $A = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

Πεδίο ορισμού της h : $[-1, 3) \cup (3, +\infty)$ 

✗ Συχνά λάθη στο πεδίο ορισμού

✗ **ΛΑΘΟΣ:** Για τη $g(x) = \sqrt{6-2x}$: $6-2x > 0$.

✓ **ΣΩΣΤΟ:** ≥ 0 (η $\sqrt{0} = 0$ ορίζεται).

✗ **ΛΑΘΟΣ:** Απλοποιώ πρώτα τον τύπο και μετά βρίσκω πεδίο ορισμού: η $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ έχει $A = \mathbb{R} - \{1\}$, παρόλο που για $x \neq 1$ ισούται με $x+1$. **Πρώτα πεδίο ορισμού, μετά απλοποίηση!**

Συναρτήσεις από προβλήματα

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Ταξί

Ένα ταξί χρεώνει 3,50 € σημαία και 0,90 € ανά χιλιόμετρο. Να εκφραστεί το κόστος K μιας διαδρομής ως συνάρτηση των χιλιομέτρων x και να βρεθεί το κόστος για διαδρομή 12 km.

ΛΥΣΗ $K(x) = 3,5 + 0,9x$, με $x \geq 0$ (πεδίο ορισμού $[0, +\infty)$, αφού απόσταση δεν μπορεί να είναι αρνητική). $K(12) = 3,5 + 10,8 = 14,30$ €.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 · Εμβαδόν ορθογωνίου

Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 20 cm. Να εκφραστεί το εμβαδόν του ως συνάρτηση της μίας πλευράς x .

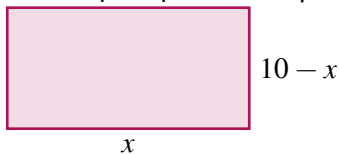
ΛΥΣΗ

Αν η μία πλευρά είναι x , τότε $2x + 2y = 20 \Rightarrow y = 10 - x$.

Άρα

$$E(x) = x(10 - x) = 10x - x^2.$$

Για να υπάρχει ορθογώνιο πρέπει $x > 0$ και $10 - x > 0$, δηλαδή το πεδίο ορισμού είναι $(0, 10)$.



⚠ Προσοχή!

Στα προβλήματα, το πεδίο ορισμού καθορίζεται **και από τη φύση του προβλήματος** (μήκη θετικά, πλήθη ακέραια κ.λπ.), όχι μόνο από τον τύπο.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 · Συνάρτηση «πολλαπλού τύπου»

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 2x + 3, & x \geq 1 \end{cases}$. Να βρεθούν οι $f(-3)$, $f(1)$, $f(4)$.

ΛΥΣΗ Για κάθε x ελέγχουμε πρώτα **σε ποιον «κλάδο»** ανήκει: $-3 < 1$, άρα $f(-3) = 9$. $1 \geq 1$, άρα $f(1) = 5$. $4 \geq 1$, άρα $f(4) = 11$.

**Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com**

Η έννοια της συνάρτησης θα σε συνοδεύει ως τις Πανελλαδικές. Στο **mathgreece.com** θα βρεις ολόκληρη σειρά βίντεο για τις συναρτήσεις, από τα πρώτα βήματα μέχρι επίπεδο Γ' Λυκείου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**Μάθημα 6.1**

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

1 Δίνεται $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$. Να βρείτε: α) το πεδίο ορισμού, β) τις $f(0)$, $f(-2)$, $f(3)$, γ) το x για το οποίο $f(x) = 2$.

2 Να βρείτε το πεδίο ορισμού: α) $f(x) = x^3 - 2x + 5$ β) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x}$ γ) $f(x) = \sqrt{x-4}$ δ) $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$ ε) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

3 Δίνεται $f(x) = 2x^2 - x$. Να υπολογίσετε τις $f(-1)$, $f(\frac{1}{2})$ και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

4 Ένα κινητό τηλέφωνο κοστίζει 600 € και χάνει 80 € από την αξία του κάθε χρόνο. Να εκφράσετε την αξία του ως συνάρτηση του χρόνου t (σε έτη) και να βρείτε πότε η αξία του θα γίνει 120 €.

■ Β' ΟΜΑΔΑ

5 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x}$.

6 Δίνεται $f(x) = x^2 + ax + b$ με $f(1) = 0$ και $f(2) = 3$. Να βρείτε τα a, b .

7 Από ένα τετράγωνο χαρτόνι πλευράς 20 cm κόβουμε στις τέσσερις γωνίες ίσα τετραγωνάκια πλευράς x και διπλώνουμε για να φτιάξουμε ανοιχτό κουτί. Να εκφράσετε τον όγκο του κουτιού ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού.

ΜΑΘΗΜΑ

6.2

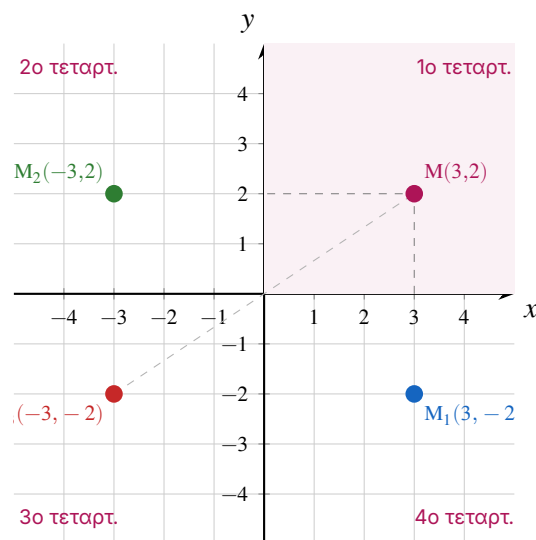
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 · Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Τι θα μάθουμε: το καρτεσιανό επίπεδο, τα συμμετρικά σημεία, την απόσταση δύο σημείων, τι είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, πώς αναγνωρίζουμε αν μια καμπύλη είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, και πώς «διαβάζουμε» από το γράφημα πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, ρίζες, πρόσημο και σχετική θέση δύο καμπυλών.

Καρτεσιανές συντεταγμένες

Δύο κάθετοι άξονες $x'x$ (οριζόντιος) και $y'y$ (κατακόρυφος) με κοινή αρχή O σχηματίζουν ένα **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων**. Κάθε σημείο M του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος αριθμών (x,y) : η **τετμημένη** x και η **τεταγμένη** y .

Ο→ Συμμετρικά σημεία του $M(x,y)$

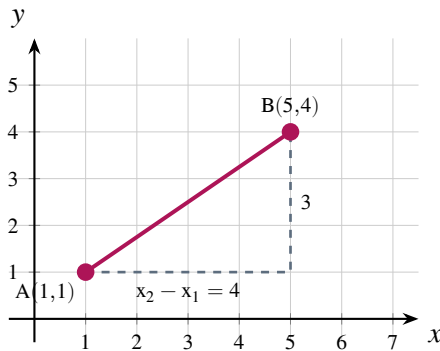
- ▶ ως προς τον άξονα $x'x$: $M_1(x, -y)$ (αλλάζει πρόσημο η τεταγμένη)
- ▶ ως προς τον άξονα $y'y$: $M_2(-x, y)$ (αλλάζει πρόσημο η τετμημένη)
- ▶ ως προς την αρχή O : $M_3(-x, -y)$ (αλλάζουν και οι δύο)
- ▶ ως προς τη διχοτόμο $y = x$: $M_4(y, x)$ (ανταλλάσσονται οι συντεταγμένες)

Απόσταση δύο σημείων

Ο→ Τύπος απόστασης

Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Η απόσταση είναι η **υποτείνουσα** ενός ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές $|x_2 - x_1|$ και $|y_2 - y_1|$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$(AB) = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Είδος τριγώνου

Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο με κορυφές $A(1,2)$, $B(4,6)$, $\Gamma(5,-1)$ είναι ισοσκελές.

ΛΥΣΗ $(AB) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $(A\Gamma) = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$, $(B\Gamma) = \sqrt{1^2 + (-7)^2} = \sqrt{50}$. Αφού $(AB) = (A\Gamma)$, το τρίγωνο είναι **ισοσκελές**. (Μάλιστα $5^2 + 5^2 = 50$, οπότε είναι και **ορθογώνιο** στο A .)

Γραφική παράσταση συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ · Γραφική παράσταση

Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία $x \in A$ και $y = f(x)$, δηλαδή όλα τα σημεία της μορφής $(x, f(x))$. Συμβολίζεται C_f , και η σχέση $y = f(x)$ λέγεται **εξίσωση** της C_f .

Οπότε ένα σημείο ανήκει στη C_f

$$M(x_0, y_0) \in C_f \Leftrightarrow x_0 \in A \text{ και } y_0 = f(x_0).$$

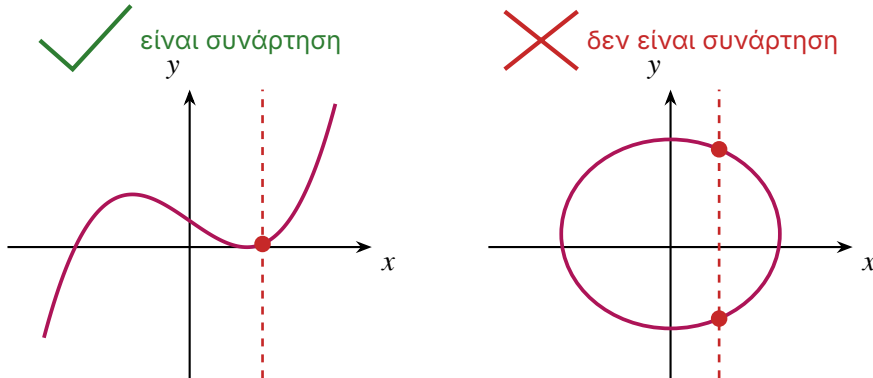
ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Σημείο της γραφικής παράστασης

Να εξεταστεί αν τα σημεία $A(2,3)$ και $B(-1,1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - 1$.

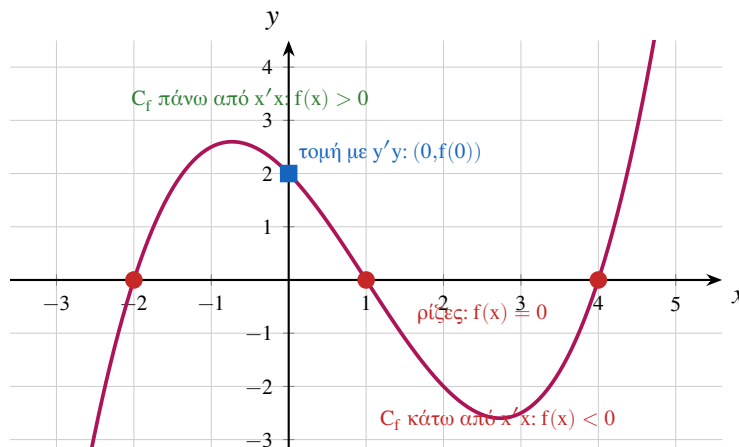
ΛΥΣΗ $f(2) = 3$, άρα $A \in C_f$. $f(-1) = 0 \neq 1$, άρα $B \notin C_f$.

Το κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας

Αφού κάθε x έχει **μία μόνο** τιμή $f(x)$, **κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει τη C_f σε ένα το πολύ σημείο**.
Αν βρούμε κατακόρυφη ευθεία που τέμνει μια καμπύλη σε δύο ή περισσότερα σημεία, η καμπύλη **δεν** είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.



Τι «διαβάζουμε» από μια γραφική παράσταση



- **Πεδίο ορισμού:** η «προβολή» της C_f στον άξονα $x'x$.
- **Σύνολο τιμών:** η «προβολή» της C_f στον άξονα $y'y$.
- **Τομή με τον $x'x$:** σημεία με $y = 0$, δηλαδή λύσεις της $f(x) = 0$.
- **Τομή με τον $y'y$:** το σημείο $(0, f(0))$, αν το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού.
- **Πρόσημο:** όπου η C_f είναι **πάνω** από τον $x'x$, ισχύει $f(x) > 0$ · όπου είναι **κάτω**, $f(x) < 0$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Σημεία τομής με τους άξονες

Να βρεθούν τα σημεία τομής της C_f της $f(x) = x^2 - x - 6$ με τους άξονες.

ΛΥΣΗ Με τον $x'x$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -2$. Σημεία $(3, 0)$, $(-2, 0)$.

Με τον $y'y$: $f(0) = -6$. Σημείο $(0, -6)$.

✖ Συχνό λάθος

✖ **ΛΑΘΟΣ:** Για την τομή με τον $y'y$ λύνω την $f(x) = 0$.

✓ **ΣΩΣΤΟ:** Τομή με τον $y'y$ σημαίνει $x = 0$, άρα υπολογίζω το $f(0)$. Τομή με τον $x'x$ σημαίνει $y = 0$, άρα λύνω την $f(x) = 0$.

Σχετική θέση δύο γραφικών παραστάσεων



- ▶ Οι C_f και C_g **τέμνονται** στα σημεία με τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.
- ▶ Η C_f είναι **πάνω** από τη C_g για τα x με $f(x) > g(x)$, και **κάτω** για τα x με $f(x) < g(x)$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Σχετική θέση

Δίνονται $f(x) = x^2$ και $g(x) = x + 2$. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f , C_g και τα διαστήματα όπου η C_f είναι κάτω από τη C_g .

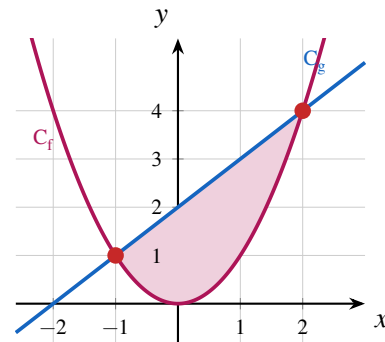
ΛΥΣΗ

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 2.$$

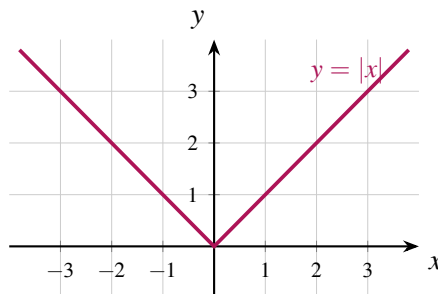
Κοινά σημεία: $(-1, 1)$ και $(2, 4)$.

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2.$$

Άρα η C_f είναι κάτω από τη C_g για $x \in (-1, 2)$.

Η γραφική παράσταση της $f(x) = |x|$

Αφού $|x| = x$ για $x \geq 0$ και $|x| = -x$ για $x < 0$, η C_f αποτελείται από δύο ημιευθείες: τη διχοτόμο του 1ου τεταρτημορίου και τη διχοτόμο του 2ου.



Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com



Στο mathgreece.com θα βρεις κουίζ «διάβασε το γράφημα», όπου από γραφικές παραστάσεις βρίσκεις πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, ρίζες και πρόσημο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 6.2

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Να βρείτε τα συμμετρικά του σημείου $A(-2,5)$ ως προς: α) τον x' , β) τον y' , γ) την αρχή O , δ) τη διχοτόμο $y = x$.
- 2 Να βρείτε την απόσταση των σημείων: α) $A(-1,3), B(5, -5)$ β) $\Gamma(2, -3), \Delta(2,4)$.
- 3 Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες της γραφικής παράστασης των συναρτήσεων: α) $f(x) = 2x - 6$ β) $g(x) = x^2 - 4x + 3$ γ) $h(x) = \frac{x-2}{x+1}$.
- 4 Να βρείτε τον a ώστε το σημείο $M(2,7)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της $f(x) = ax^2 - 1$.
- 5 Δίνονται $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = x$. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g και πού η C_f είναι πάνω από τη C_g .

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 6 Να βρείτε το σημείο του άξονα x' που ισαπέχει από τα σημεία $A(1,4)$ και $B(5,2)$.
- 7 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ΜΑΘΗΜΑ

6.3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 · Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$

Τι θα μάθουμε: ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = ax + \beta$ είναι ευθεία, τι σημαίνει κλίση και πώς συνδέεται με τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x' , πώς βρίσκουμε την εξίσωση ευθείας από δύο σημεία, πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες, και τις ειδικές περιπτώσεις (οριζόντια, κατακόρυφη, διέρχεται από την αρχή).

Η γραφική παράσταση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$ είναι **ευθεία**. Γι' αυτό, για να τη σχεδιάσουμε, αρκούν **δύο σημεία** της.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Σχεδίαση ευθείας

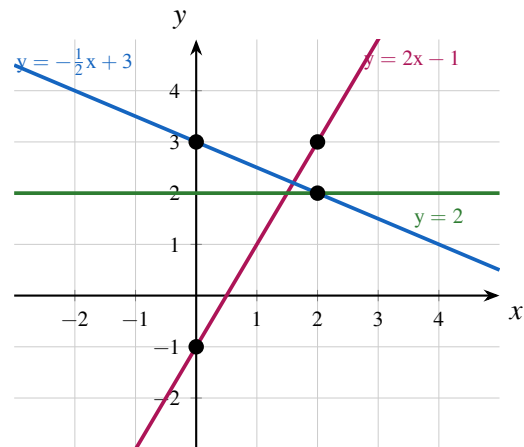
Να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ και $h(x) = 2$.

ΛΥΣΗ

Κάνουμε πίνακα τιμών με δύο τιμές του x :

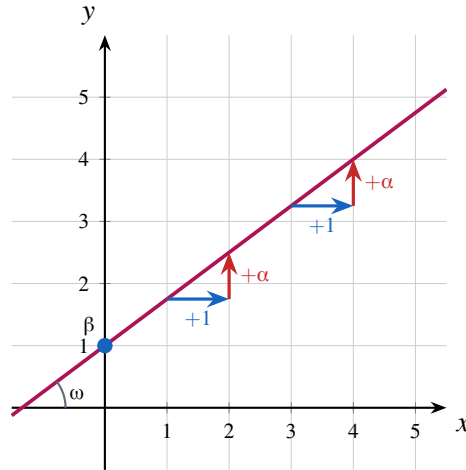
x	0	2
$f(x)$	-1	3
$g(x)$	3	2
$h(x)$	2	2

Η h είναι **σταθερή**: η γραφική της παράσταση είναι **οριζόντια** ευθεία.



Κλίση ευθείας

Ο συντελεστής a του x λέγεται **κλίση** (ή συντελεστής διεύθυνσης) της ευθείας $y = ax + \beta$. Δείχνει πόσο μεταβάλλεται το y όταν το x αυξάνεται κατά 1.

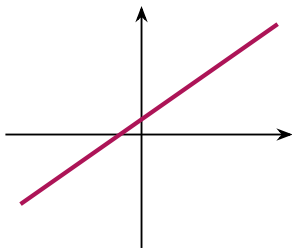


Κλίση και γωνία

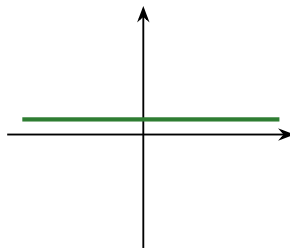
Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $y = ax + \beta$ με τον άξονα $x'x$ (μετρημένη από τον $x'x$ προς την ευθεία, αριστερόστροφα), τότε

$$a = \varepsilon\varphi \omega$$

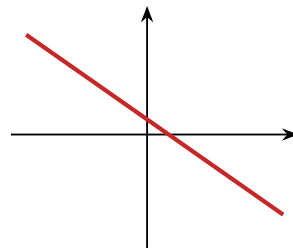
Ο αριθμός β είναι η **τεταγμένη του σημείου τομής** με τον $y'y$: η ευθεία περνάει από το $(0, \beta)$.



$\alpha > 0$: «ανεβαίνει», $0^\circ < \omega < 90^\circ$



$\alpha = 0$: οριζόντια, $\omega = 0^\circ$



$\alpha < 0$: «κατεβαίνει», $90^\circ < \omega < 180^\circ$

Κλίση από δύο σημεία



Η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$, είναι

$$\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \left(\frac{\text{μεταβολή του } y}{\text{μεταβολή του } x} \right)$$

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Εξίσωση ευθείας από δύο σημεία

Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 4)$ και $B(3, -2)$.

ΛΥΣΗ 1ος τρόπος (κλίση): $a = \frac{-2-4}{3-1} = -3$. Τότε $f(1) = 4 \Leftrightarrow -3 + \beta = 4 \Leftrightarrow \beta = 7$. Άρα $f(x) = -3x + 7$.

2ος τρόπος (σύστημα): $a + \beta = 4$ και $3a + \beta = -2$. Αφαιρώντας: $2a = -6$, άρα $a = -3$ και $\beta = 7$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Γωνία και κλίση

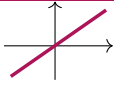
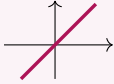
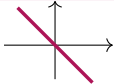
Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(2,1)$ και σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x' .

ΛΥΣΗ $\alpha = \tan 45^\circ = 1$. Άρα $y = x + \beta$ και, αφού περνά από το M : $1 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$. Η ευθεία είναι $y = x - 1$.

Χρήσιμες τιμές

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \tan 45^\circ = 1, \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \tan 120^\circ = -\sqrt{3}, \quad \tan 135^\circ = -1, \quad \tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

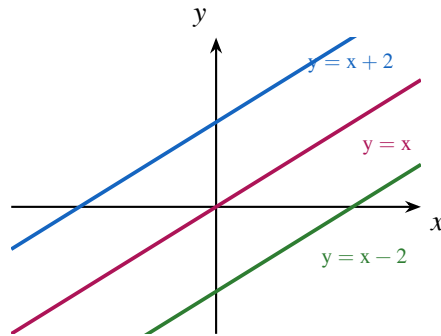
Ειδικές περιπτώσεις

Εξίσωση	Περιγραφή	Σχήμα
$y = ax$	διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$	
$y = x$	διχοτόμος 1ου και 3ου τεταρτημορίου	
$y = -x$	διχοτόμος 2ου και 4ου τεταρτημορίου	
$y = \beta$	οριζόντια ευθεία (σταθερή συνάρτηση), $\alpha = 0$	
$x = \kappa$	κατακόρυφη ευθεία· δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης!	

Παράλληλες ευθείες

Ο-Παράλληλία

Δύο ευθείες $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y = \alpha_2 x + \beta_2$ είναι **παράλληλες** (ή ταυτίζονται) αν και μόνο αν έχουν την **ίδια κλίση**: $\alpha_1 = \alpha_2$.



ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Παράλληλη ευθεία

Να βρεθεί η ευθεία που είναι παράλληλη στην $y = 3x - 5$ και διέρχεται από το $A(-1, 2)$.

ΛΥΣΗ Ίδια κλίση: $y = 3x + \beta$. Από το A : $2 = -3 + \beta \Leftrightarrow \beta = 5$. Άρα $y = 3x + 5$.

✗ Συχνό λάθος

✗ ΛΑΘΟΣ: «Η ευθεία $y = 5 - 2x$ έχει κλίση 5.»

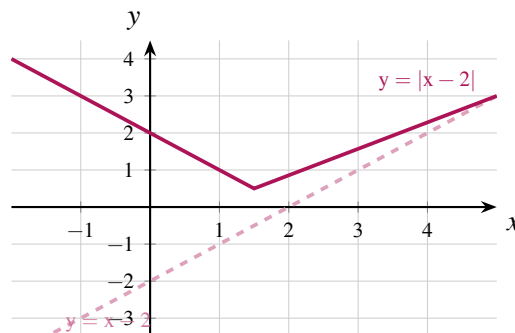
✓ ΣΩΣΤΟ: Η κλίση είναι ο συντελεστής του x : $\alpha = -2$ (και $\beta = 5$).

✗ ΛΑΘΟΣ: «Η $x = 3$ είναι η συνάρτηση $f(x) = 3$.»

✓ ΣΩΣΤΟ: Η $y = 3$ είναι οριζόντια (συνάρτηση), η $x = 3$ κατακόρυφη (όχι συνάρτηση).

Η συνάρτηση $f(x) = |ax + \beta|$

Η γραφική παράσταση της $y = |ax + \beta|$ προκύπτει από την ευθεία $y = ax + \beta$ αν «διπλώσουμε» προς τα πάνω το κομμάτι της που βρίσκεται κάτω από τον x' (συμμετρικό ως προς τον x').



Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com



Στο mathgreece.com υπάρχει διαδραστική εφαρμογή όπου αλλάξεις τα α και β και βλέπεις πώς «στρίβει» και πώς «ανεβοκατεβαίνει» η ευθεία!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 6.3

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Να βρείτε την κλίση και το σημείο τομής με τον y' των ευθειών: α) $y = 4x - 3$ β) $y = -x$ γ) $2x + y = 6$ δ) $y = 7$.
- 2 Να βρείτε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία: α) $A(0,2), B(3,8)$ β) $\Gamma(-2,5), \Delta(4,2)$.
- 3 Να βρείτε την ευθεία που διέρχεται από το $M(1, -2)$ και σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία: α) 135° β) 60° .
- 4 Να βρείτε τον λ ώστε οι ευθείες $y = (\lambda^2 - 1)x + 2$ και $y = 3x - 1$ να είναι παράλληλες.
- 5 Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(1,1), B(3,5), \Gamma(4,7)$ είναι συνευθειακά.

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 6 Η θερμοκρασία σε βαθμούς Fahrenheit (F) είναι γραμμική συνάρτηση της θερμοκρασίας σε Κελσίου (C). Το νερό παγώνει στους $0^\circ C = 32^\circ F$ και βράζει στους $100^\circ C = 212^\circ F$. Να βρείτε τον τύπο $F(C)$ και να μετατρέψετε τους $25^\circ C$ σε Fahrenheit.
- 7 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = |2x + 4|$ και να βρείτε τα σημεία τομής της με την ευθεία $y = 6$.
- 8 Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία $y = -\frac{2}{3}x + 4$ με τους άξονες.

ΜΑΘΗΜΑ

6.4

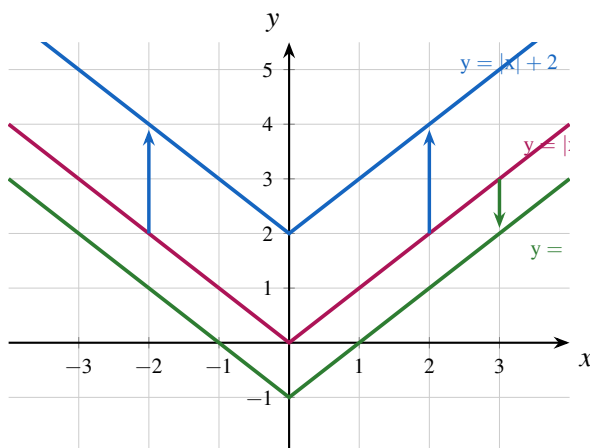
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 · Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

Κατακόρυφη – οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

Τι θα μάθουμε: πώς, από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , παίρνουμε χωρίς πράξεις τις γραφικές παραστάσεις των $f(x) + c$, $f(x) - c$, $f(x - c)$, $f(x + c)$ και των συνδυασμών τους, και πώς «αναγνωρίζουμε» μια μετατόπιση από τον τύπο.

Κατακόρυφη μετατόπιση

Ας συγκρίνουμε τις συναρτήσεις $f(x) = |x|$, $g(x) = |x| + 2$ και $h(x) = |x| - 1$. Για κάθε x , η τιμή της g είναι κατά 2 μεγαλύτερη από την τιμή της f . Άρα κάθε σημείο της C_g βρίσκεται **2 μονάδες ψηλότερα** από το αντίστοιχο σημείο της C_f .



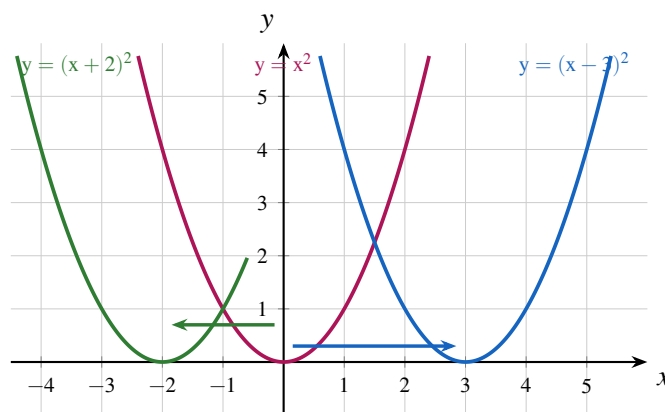
Ο→ Κατακόρυφη μετατόπιση

Αν $c > 0$:

- ▶ η C της $y = f(x) + c$ προκύπτει από τη C_f με μετατόπιση κατά c μονάδες **προς τα πάνω**,
- ▶ η C της $y = f(x) - c$ προκύπτει από τη C_f με μετατόπιση κατά c μονάδες **προς τα κάτω**.

Οριζόντια μετατόπιση

Τώρα ας συγκρίνουμε τις $f(x) = x^2$ και $g(x) = (x-3)^2$. Η g παίρνει στο $x = 3$ την τιμή που παίρνει η f στο 0, στο $x = 4$ την τιμή της f στο 1, κ.ο.κ. Γενικά, η g παίρνει στο $x+3$ ό,τι η f στο x : η καμπύλη μετακινήθηκε **3 μονάδες δεξιά**.



Οριζόντια μετατόπιση

Αν $c > 0$:

- ▶ η C της $y = f(x-c)$ προκύπτει από τη C_f με μετατόπιση κατά c μονάδες **προς τα δεξιά**,
- ▶ η C της $y = f(x+c)$ προκύπτει από τη C_f με μετατόπιση κατά c μονάδες **προς τα αριστερά**.

✗ Το πιο συχνό λάθος του μαθήματος

✗ ΛΑΘΟΣ: «Η $y = (x-3)^2$ είναι η $y = x^2$ μετατοπισμένη 3 μονάδες *αριστερά*, επειδή έχει μείον.»

✓ ΣΩΣΤΟ: **Δεξιά!** Σκέψου πού γίνεται 0 η παρένθεση: $x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Η κορυφή μετακινείται στο $x = 3$, δηλαδή δεξιά. Στην **οριζόντια** μετατόπιση τα πρόσημα «λειτουργούν ανάποδα», στην κατακόρυφη όχι.

💡 Μνημονικός κανόνας

Έξω από τη συνάρτηση ($f(x) \pm c$): κινούμαι **πάνω-κάτω**, «όπως λέει» το πρόσημο.

Μέσα στη συνάρτηση ($f(x \pm c)$): κινούμαι **δεξιά-αριστερά**, **αντίθετα** από το πρόσημο.

Συνδυασμός μετατοπίσεων

Οριζόντια και κατακόρυφη μαζί

Αν $c, d > 0$, η γραφική παράσταση της $y = f(x-c) + d$ προκύπτει από τη C_f με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις: κατά c μονάδες **δεξιά** και κατά d μονάδες **πάνω**. (Ανάλογα για τα άλλα πρόσημα.)

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Διπλή μετατόπιση

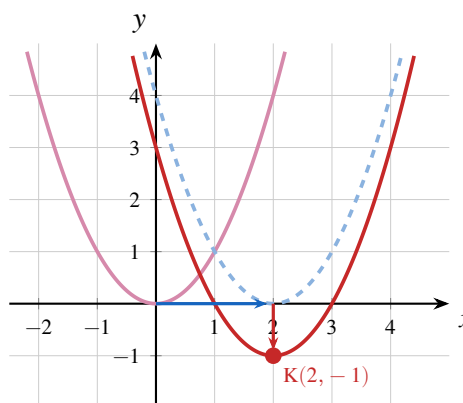
Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $g(x) = (x-2)^2 - 1$ με τη βοήθεια της $f(x) = x^2$.

ΛΥΣΗ

Η C_g προκύπτει από την παραβολή $y = x^2$ με:

- ▶ μετατόπιση κατά **2 μονάδες δεξιά** (αφού $x - 2$),
- ▶ και στη συνέχεια κατά **1 μονάδα κάτω** (αφού -1).

Η κορυφή της παραβολής μετακινείται από το $O(0,0)$ στο $K(2, -1)$.



ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Αναγνώριση της μετατόπισης

Η γραφική παράσταση της $f(x) = |x|$ μετατοπίζεται 3 μονάδες αριστερά και 2 μονάδες πάνω. Ποια συνάρτηση έχει τη νέα καμπύλη ως γραφική παράσταση;

ΛΥΣΗ Αριστερά κατά 3: $|x + 3|$. Πάνω κατά 2: $g(x) = |x + 3| + 2$. Η «κορυφή» της είναι το σημείο $(-3, 2)$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Χρήση της μετατόπισης για να λύσουμε

Η C_f μιας συνάρτησης f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία -1 και 4 . Σε ποια σημεία τέμνει τον $x'x$ η γραφική παράσταση της $g(x) = f(x - 2)$;

ΛΥΣΗ Η C_g είναι η C_f μετατοπισμένη 2 μονάδες δεξιά. Άρα τέμνει τον $x'x$ στα $-1 + 2 = 1$ και $4 + 2 = 6$. (Έλεγχος: $g(1) = f(-1) = 0$ και $g(6) = f(4) = 0$.)

⚠ Προσοχή!

Για να «δεις» μια μετατόπιση, ο τύπος πρέπει να είναι **ακριβώς** στη μορφή $f(x - c) + d$. Για παράδειγμα, η $y = x^2 - 4x + 3$ δεν «φαίνεται» αμέσως ως μετατόπιση, αλλά με συμπλήρωση τετραγώνου γίνεται $y = (x - 2)^2 - 1$: είναι η προηγούμενη παραβολή! Αυτή την ιδέα θα τη χρησιμοποιήσουμε στο Μάθημα 7.3.

Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com



Στο mathgreece.com θα βρεις κινούμενα γραφήματα όπου βλέπεις τις καμπύλες να «γλιστράνε» πάνω-κάτω και δεξιά-αριστερά, καθώς και κουίζ αναγνώρισης μετατοπίσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 6.4

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

1 Πώς προκύπτουν από τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ οι γραφικές παραστάσεις των: α) $y = x^2 + 3$ β) $y = (x + 1)^2$ γ) $y = (x - 4)^2 - 2$ δ) $y = (x + 3)^2 + 1$;

- 2 Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης που προκύπτει αν η C_f της $f(x) = |x|$ μετατοπιστεί: α) 4 μονάδες κάτω β) 2 μονάδες δεξιά γ) 1 αριστερά και 3 πάνω.
- 3 Να βρείτε την κορυφή των παραβολών: α) $y = (x - 5)^2$ β) $y = x^2 - 7$ γ) $y = (x + 2)^2 + 4$.

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 4 Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 6x + 5$ στη μορφή $(x - c)^2 + d$ και να εξηγήσετε πώς προκύπτει η γραφική της παράσταση από την $y = x^2$.
- 5 Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,5)$, από ποιο σημείο διέρχεται η γραφική παράσταση της $g(x) = f(x + 3) - 2$;

ΜΑΘΗΜΑ

6.5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 · Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες συνάρτησης

Τι θα μάθουμε: πότε μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα και πώς το αποδεικνύουμε, τι είναι μέγιστο και ελάχιστο, τι σημαίνει άρτια και περιττή συνάρτηση και πώς αυτές οι ιδιότητες «φαινούνται» στη γραφική παράσταση.

Μονοτονία

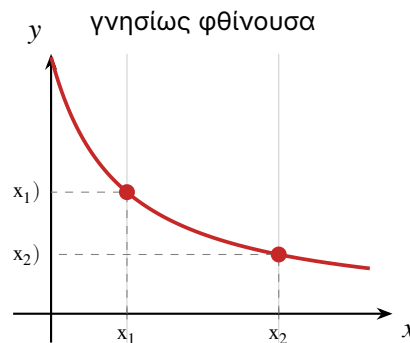
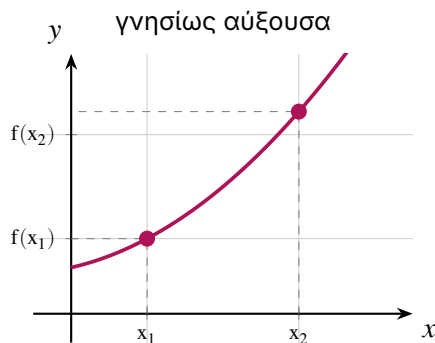
Αν «περπατάμε» πάνω σε μια γραφική παράσταση από αριστερά προς τα δεξιά, σε κάποια διαστήματα **ανεβαίνουμε** και σε κάποια **κατεβαίνουμε**.

ΟΡΙΣΜΟΣ · Γνησίως αύξουσα – γνησίως φθίνουσα

Μια συνάρτηση f λέγεται:

- **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$,
- **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα, λέμε ότι είναι **γνησίως μονότονη** σε αυτό. Συμβολισμοί: $f \nearrow$ και $f \searrow$.



Με απλά λόγια

Αύξουσα: «όσο μεγαλώνει το x , μεγαλώνει και το $f(x)$ » (η διάταξη διατηρείται).

Φθίνουσα: «όσο μεγαλώνει το x , μικραίνει το $f(x)$ » (η διάταξη αντιστρέφεται).

Πώς αποδεικνύω μονοτονία (με τον ορισμό)

1. Παίρνω τυχαία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.
2. Ξεκινώντας από την $x_1 < x_2$, με τις ιδιότητες των ανισοτήτων «χτίζω» τον τύπο της f βήμα-βήμα.
3. Καταλήγω σε $f(x_1) < f(x_2)$ (αύξουσα) ή $f(x_1) > f(x_2)$ (φθίνουσα).

Εναλλακτικά: εξετάζω το πρόσημο της διαφοράς $f(x_2) - f(x_1)$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Μονοτονία με τον ορισμό

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις: α) $f(x) = 3 - 2x$ β) $g(x) = x^2$ στο $[0, +\infty)$ γ) $h(x) = \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$.

ΛΥΣΗ α) Έστω $x_1 < x_2$. Τότε $-2x_1 > -2x_2$ (αλλάζει η φορά) και $3 - 2x_1 > 3 - 2x_2$, δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$: η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

β) Έστω $0 \leq x_1 < x_2$. Αφού είναι μη αρνητικοί, $x_1^2 < x_2^2$, δηλαδή $g(x_1) < g(x_2)$: **γνησίως αύξουσα** στο $[0, +\infty)$.

γ) Έστω $0 < x_1 < x_2$. Θετικοί, άρα $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$: **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, +\infty)$.

Ο· Η μονοτονία της $f(x) = ax + \beta$

- ▶ Αν $a > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- ▶ Αν $a < 0$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- ▶ Αν $a = 0$, η f είναι σταθερή.

✗ Συχνό λάθος

✗ ΛΑΘΟΣ: «Η $f(x) = x^2$ είναι γνησίως αύξουσα, γιατί $f(1) < f(2) < f(3)$.» Κάποια παραδείγματα **δεν αποδεικνύουν** μονοτονία. Μάλιστα, η x^2 **δεν** είναι μονότονη στο $\mathbb{R}$: $f(-2) = 4 > f(0) = 0 < f(2) = 4$. Είναι φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

✗ ΛΑΘΟΣ: «Η $\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.» Είναι γνησίως φθίνουσα σε **καθένα** από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ χωριστά, όχι στην ένωσή τους: $-1 < 1$ αλλά $\frac{1}{-1} < \frac{1}{1}$.

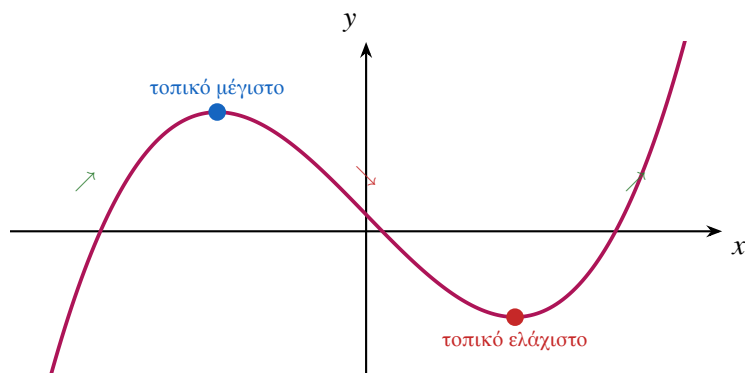
Ακρότατα

ΟΡΙΣΜΟΣ · Μέγιστο – Ελάχιστο

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A :

- παρουσιάζει **(ολικό) μέγιστο** στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$. Ο αριθμός $f(x_0)$ λέγεται **μέγιστη τιμή** της f .
- παρουσιάζει **(ολικό) ελάχιστο** στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$. Ο $f(x_0)$ λέγεται **ελάχιστη τιμή**.

Το μέγιστο και το ελάχιστο λέγονται **ακρότατα** της f .



Όπου η συνάρτηση αλλάζει από αύξουσα σε φθίνουσα έχουμε μέγιστο (τουλάχιστον «τοπικά»), και όπου αλλάζει από φθίνουσα σε αύξουσα ελάχιστο.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Ακρότατα με ανισότητα

Να αποδειχθεί ότι η $f(x) = x^2 - 6x + 10$ έχει ελάχιστο και να βρεθεί.

ΛΥΣΗ Με συμπλήρωση τετραγώνων: $f(x) = (x - 3)^2 + 1 \geq 1 = f(3)$ για κάθε x . Άρα η f παρουσιάζει **ελάχιστο στο** $x_0 = 3$, με ελάχιστη τιμή $f(3) = 1$. Μέγιστο δεν έχει (το $(x - 3)^2$ γίνεται όσο μεγάλο θέλουμε).

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Μέγιστο

Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της $g(x) = \frac{4}{x^2 + 2}$.

ΛΥΣΗ Αφού $x^2 + 2 \geq 2$, είναι $\frac{4}{x^2 + 2} \leq \frac{4}{2} = 2 = g(0)$. Άρα η g έχει **μέγιστο στο** 0 , με μέγιστη τιμή 2 .

⚠ Προσοχή!

Η θέση του ακροτάτου είναι το x_0 (στον άξονα x'), ενώ η τιμή του είναι το $f(x_0)$. Στις απαντήσεις γράφε **και τα δύο**: «παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 3$, το $f(3) = 1$ ».

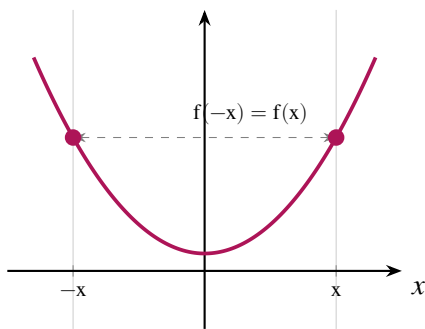
Συμμετρίες: άρτιες και περιττές συναρτήσεις

ΟΡΙΣΜΟΣ · Άρτια – Περιττή συνάρτηση

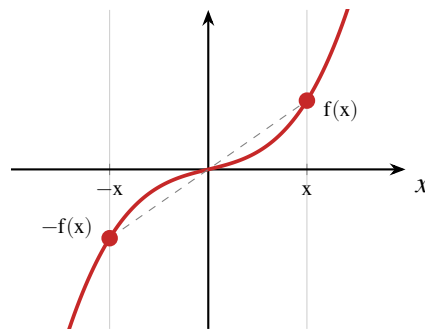
Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού A τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει και $-x \in A$ (συμμετρικό ως προς το 0).

- ▶ Η f λέγεται **άρτια** όταν $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.
- ▶ Η f λέγεται **περιττή** όταν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$.

άρτια: συμμετρική ως προς τον y



περιττή: συμμετρική ως προς το O



Ο· Γεωμετρική ερμηνεία

- ▶ Η γραφική παράσταση μιας **άρτιας** συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας** τον y .
- ▶ Η γραφική παράσταση μιας **περιττής** συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή O .

Ελεγχος αρτιότητας

1. Βρίσκω το πεδίο ορισμού A και ελέγχω αν είναι **συμμετρικό** (αν $x \in A \Rightarrow -x \in A$). Αν **δεν** είναι, η f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.
2. Υπολογίζω το $f(-x)$ (αντικαθιστώ το x με $(-x)$ σε παρένθεση).
3. Συγκρίνω με τα $f(x)$ και $-f(x)$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Άρτια ή περιττή;

Να εξεταστεί αν είναι άρτιες ή περιττές οι συναρτήσεις: α) $f(x) = x^4 - 3x^2$ β) $g(x) = x^3 - \frac{1}{x}$
 γ) $h(x) = x^2 + x$ δ) $\varphi(x) = \sqrt{x}$.

ΛΥΣΗ α) $A = \mathbb{R}$ συμμετρικό. $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$: **άρτια**.

β) $A = \mathbb{R}^*$ συμμετρικό. $g(-x) = -x^3 + \frac{1}{x} = -(x^3 - \frac{1}{x}) = -g(x)$: **περιττή**.

γ) $h(-x) = x^2 - x$. Είναι $h(-1) = 0$ ενώ $h(1) = 2$ και $-h(1) = -2$: **ούτε άρτια ούτε περιττή**.

δ) $A = [0, +\infty)$ **δεν** είναι συμμετρικό (π.χ. $1 \in A$ αλλά $-1 \notin A$): **ούτε άρτια ούτε περιττή**.

Ένα χρήσιμο «ένστικτο»

Πολυνόμια με **μόνο άρτιες δυνάμεις** του x (και σταθερό όρο) είναι **άρτια**· με **μόνο περιττές δυνάμεις** είναι **περιττά**. Από εκεί πήραν και το όνομά τους! Επίσης: η $|x|$ είναι **άρτια**.

✖ Συχνό λάθος

✖ ΛΑΘΟΣ: «Ελέγχω μόνο αν $f(-1) = f(1)$ και συμπεραίνω ότι η f είναι άρτια.» Ένα ζεύγος τιμών δεν αρκεί για να αποδείξουμε αρτιότητα (χρειάζεται για κάθε x), αρκεί όμως για να την απορρίψουμε (αντιπαράδειγμα).

✖ ΛΑΘΟΣ: Ξεχνάω να ελέγξω αν το πεδίο ορισμού είναι συμμετρικό.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 · Συμπλήρωση γραφικής παράστασης

Μια περιττή συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ έχει $f(2) = 5$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Να βρεθεί το $f(-2)$ και το $f(0)$.

ΛΥΣΗ $f(-2) = -f(2) = -5$. Για $x = 0$: $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$. (Κάθε περιττή συνάρτηση που ορίζεται στο 0 διέρχεται από την αρχή.)

Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com

Μονοτονία, ακρότατα και συμμετρίες: οι τρεις ιδιότητες που θα μελετάς σε κάθε συνάρτηση ως τη Γ' Λυκείου. Στο mathgreece.com θα βρεις αναλυτικά βίντεο και τεστ αυτοαξιολόγησης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 6.5

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

1 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία με τον ορισμό: α) $f(x) = 5x - 2$ β) $g(x) = -x^3$ γ) $h(x) = \sqrt{x}$.

2 Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές: α) $f(x) = 3x^2 - |x|$ β) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ γ) $f(x) = x^3 + 1$
δ) $f(x) = \frac{1}{x - 2}$.

3 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων: α) $f(x) = (x + 1)^2 - 3$ β) $g(x) = 5 - |x - 2|$.

4 Μια άρτια συνάρτηση έχει $f(3) = -1$ και είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. α) Να βρείτε το $f(-3)$. β) Τι μονοτονία έχει στο $(-\infty, 0]$;

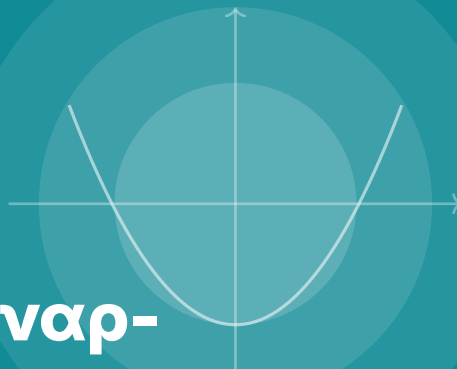
■ Β' ΟΜΑΔΑ

5 Να αποδείξετε ότι η $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$. (Υπόδειξη: γράψτε $f(x) = 2 - \frac{3}{x+1}$.)

6 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 7$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$ και να βρείτε το ελάχιστό της.

7 Αν η f είναι περιττή και η g άρτια, με κοινό πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ είναι περιττή.

Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων



Με όλα τα εργαλεία που αποκτήσαμε (μονοτονία, ακρότατα, συμμετρίες, μετατοπίσεις) μελετάμε τώρα αναλυτικά τρεις συναρτήσεις που εμφανίζονται συνεχώς στα Μαθηματικά και στις επιστήμες: την παραβολή $y = ax^2$, την υπερβολή $y = \frac{a}{x}$ και, τέλος, την πιο σημαντική συνάρτηση της χρονιάς, το τριώνυμο $y = ax^2 + bx + \gamma$, με την κορυφή, τον άξονα συμμετρίας και τα ακρότατά του.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

7.1 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2$

7.2 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \frac{a}{x}$

7.3 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$

Συμπληρωματικό υλικό: Για βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις, κουίζ και παιχνίδια γνώσεων πάνω σε αυτό το κεφάλαιο, επισκέψου το mathgreece.com — ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

ΜΑΘΗΜΑ

7.1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 · Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων

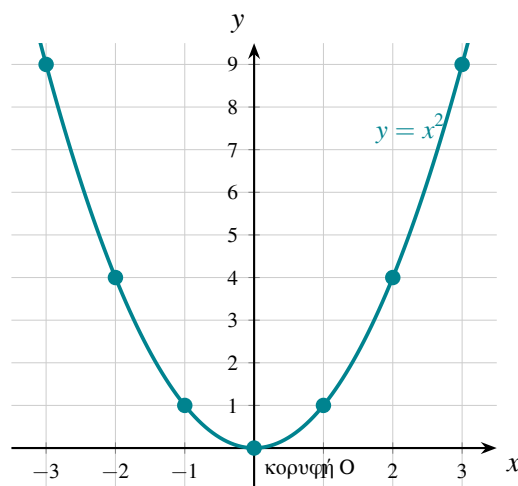
Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2$

Τι θα μάθουμε: τη γραφική παράσταση της $y = x^2$ και γενικότερα της $y = ax^2$ (παραβολή), τη μονοτονία, τα ακρότατα και τη συμμετρία της, και πώς ο συντελεστής a «ανοίγει», «κλείνει» ή «αναποδογυρίζει» την παραβολή.

Η συνάρτηση $f(x) = x^2$

Ξεκινάμε από την πιο απλή περίπτωση, $a = 1$. Φτιάχνουμε πίνακα τιμών:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9



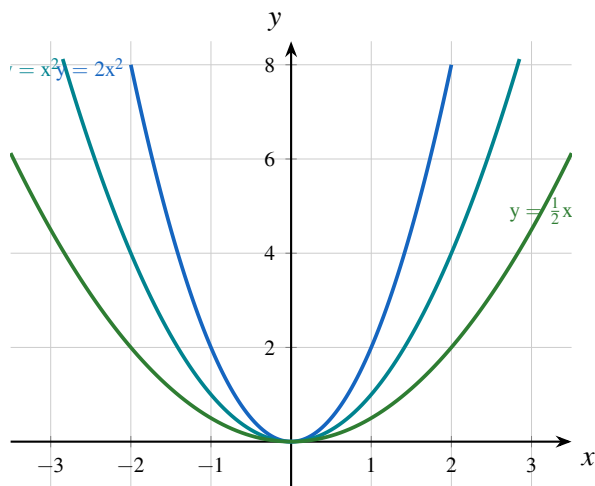
Η καμπύλη αυτή λέγεται **παραβολή**. Από τη μελέτη (και τα Μαθήματα 6.5, 2.2) προκύπτουν:

Οι ιδιότητες της $f(x) = x^2$

- ▶ Είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty, 0]$ και **γνησίως αύξουσα** στο $[0, +\infty)$.
- ▶ Παρουσιάζει **ελάχιστο** για $x = 0$, το $f(0) = 0$. Δεν έχει μέγιστο.
- ▶ Είναι **άρτια**: η παραβολή έχει **άξονα συμμετρίας** τον $y'y$.
- ▶ Το σημείο $O(0,0)$ λέγεται **κορυφή** της παραβολής. Η καμπύλη βρίσκεται **πάνω** από τον $x'x$ (εκτός από την κορυφή).

Η συνάρτηση $f(x) = ax^2$ με $a > 0$

Η $y = ax^2$ με $a > 0$ έχει τις **ίδιες ιδιότητες** με την $y = x^2$. Η διαφορά είναι στο «άνοιγμα»: κάθε τιμή της x^2 πολλαπλασιάζεται με a .

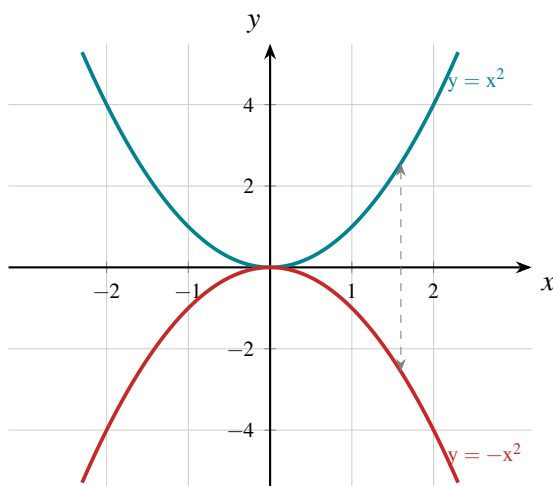


💡 Σχόλιο του καθηγητή

Όσο **μεγαλύτερο** είναι το $|a|$, τόσο πιο «**κλειστή**» (στενή) είναι η παραβολή. Όσο πιο κοντά στο 0 είναι το $|a|$, τόσο πιο «**ανοιχτή**».

Η συνάρτηση $f(x) = ax^2$ με $a < 0$

Η γραφική παράσταση της $g(x) = -ax^2$ είναι **συμμετρική** της $f(x) = ax^2$ ως προς τον άξονα $x'x$ (αφού $g(x) = -f(x)$). Έτσι, για $a < 0$ η παραβολή είναι «**αναποδογυρισμένη**».



➡️ Ιδιότητες της $f(x) = ax^2$ με $a < 0$

- ▶ Είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty, 0]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $[0, +\infty)$.
- ▶ Παρουσιάζει **μέγιστο** για $x = 0$, το $f(0) = 0$. Δεν έχει ελάχιστο.
- ▶ Είναι άρτια (άξονας συμμετρίας ο $y'y$) και βρίσκεται **κάτω** από τον $x'x$ (εκτός από την

κορυφή).

	$a > 0$	$a < 0$
Σχήμα	«χαμογελαστή» $\cup$	«σκυθρωπή» $\cap$
Μονοτονία	$\searrow$ στο $(-\infty, 0]$, $\nearrow$ στο $[0, +\infty)$	$\nearrow$ στο $(-\infty, 0]$, $\searrow$ στο $[0, +\infty)$
Ακρότατο	ελάχιστο $f(0) = 0$	μέγιστο $f(0) = 0$
Σύνολο τιμών	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0]$
Συμμετρία	άξονας συμμετρίας ο y' (άρτια)	

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Εύρεση του a

Η παραβολή $y = ax^2$ διέρχεται από το σημείο $A(2, -12)$. Να βρεθεί το a και να μελετηθεί η συνάρτηση.

ΛΥΣΗ $-12 = a \cdot 4 \Leftrightarrow a = -3$. Άρα $f(x) = -3x^2$: αφού $a < 0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$, με μέγιστο $f(0) = 0$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Τομή παραβολής και ευθείας

Να βρεθούν τα κοινά σημεία της παραβολής $y = \frac{1}{2}x^2$ και της ευθείας $y = x + 4$.

ΛΥΣΗ $\frac{1}{2}x^2 = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -2$. Κοινά σημεία: $(4, 8)$ και $(-2, 2)$.

✖ Συχνό λάθος

✖ ΛΑΘΟΣ: «Η $y = ax^2$ είναι πάντα πάνω από τον άξονα $x'x$.» Μόνο όταν $a > 0$!

✖ ΛΑΘΟΣ: Σχεδιάζω την παραβολή με «μύτη» (σαν το $|x|$) στην κορυφή. Η παραβολή είναι **στρογγυλεμένη** στην κορυφή της, ενώ η $y = |x|$ έχει γωνία.

Το ήξερες;

Αν περιστρέψουμε μια παραβολή γύρω από τον άξονά της, παίρνουμε ένα «παραβολικό κάτοπτρο». Όλες οι ακτίνες που έρχονται παράλληλα στον άξονα ανακλώνται και συγκεντρώνονται σε ένα σημείο, την εστία. Γι' αυτό οι δορυφορικές κεραίες και οι προβολείς των αυτοκινήτων έχουν παραβολικό σχήμα!



Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις διαδραστική εφαρμογή όπου αλλάζεις τον συντελεστή a και βλέπεις την παραβολή να ανοίγει, να κλείνει και να αναποδογυρίζει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 7.1

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις $y = 3x^2$ και $y = -\frac{1}{3}x^2$ και να γράψετε τη μονοτονία και τα ακρότατά τους.
- 2 Να βρείτε τον a αν η παραβολή $y = ax^2$ διέρχεται από το σημείο: α) $(1,5)$ β) $(-3, -3)$.
- 3 Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής $y = x^2$ με τις ευθείες: α) $y = 4$ β) $y = -x + 2$ γ) $y = 2x - 1$.

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 4 Να βρείτε τον λ ώστε η ευθεία $y = \lambda$ να τέμνει την παραβολή $y = -2x^2$ σε δύο σημεία.
- 5 Να αποδείξετε με τον ορισμό ότι η $f(x) = -2x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

ΜΑΘΗΜΑ

7.2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 · Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων

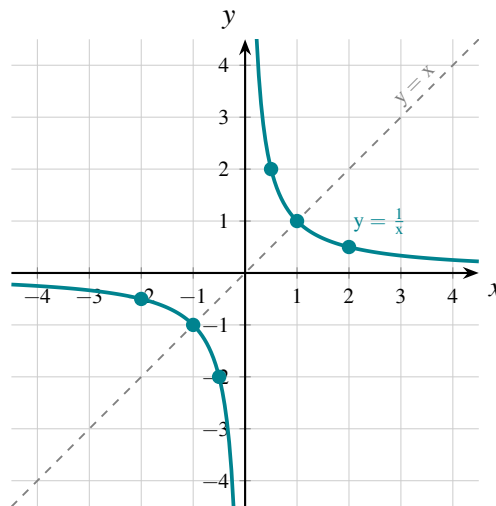
Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \frac{a}{x}$

Τι θα μάθουμε: τη γραφική παράσταση της $y = \frac{1}{x}$ και γενικότερα της $y = \frac{a}{x}$ (υπερβολή), τη μονοτονία της, τη συμμετρία της, τις ασύμπτωτες, και τη σύνδεσή της με τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$

Το πεδίο ορισμού είναι $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, αφού δεν διαιρούμε με το μηδέν. Ας δούμε έναν πίνακα τιμών:

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

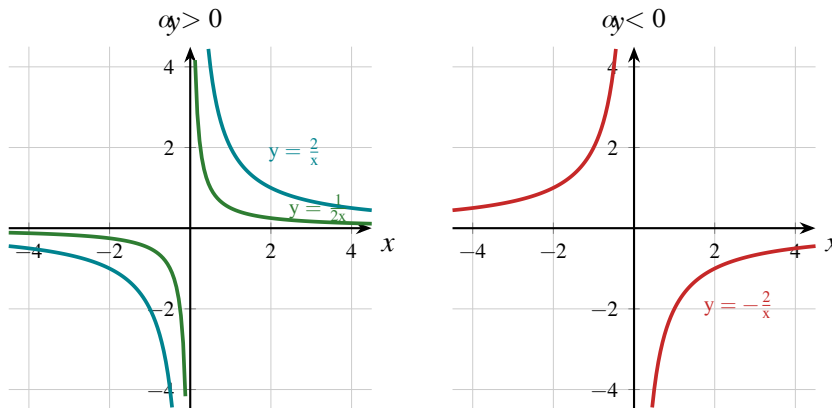


Η καμπύλη αυτή λέγεται **υπερβολή** και αποτελείται από **δύο κλάδους**, έναν στο 1ο και έναν στο 3ο τεταρτημόριο.

➤ Ιδιότητες της $f(x) = \frac{1}{x}$

- ▶ Είναι **γνησίως φθίνουσα** σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.
- ▶ **Δεν** έχει ακρότατα.
- ▶ Είναι **περιττή**: η υπερβολή έχει **κέντρο συμμετρίας την αρχή O**. Έχει επίσης **άξονες συμμετρίας** τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$.
- ▶ Καθώς το x μεγαλώνει, η καμπύλη πλησιάζει όλο και περισσότερο τον άξονα $x'x$, χωρίς να τον συναντά ποτέ. Όσο το x πλησιάζει το 0, η καμπύλη πλησιάζει τον άξονα $y'y$. Λέμε ότι οι άξονες είναι **ασύμπτωτες** της υπερβολής.

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0$



Οι Ιδιότητες της $f(x) = \frac{a}{x}$

	$a > 0$	$a < 0$
Κλάδοι	1ο και 3ο τεταρτημόριο	2ο και 4ο τεταρτημόριο
Μονοτονία	γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα $(-\infty, 0), (0, +\infty)$	γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα $(-\infty, 0), (0, +\infty)$

Και στις δύο περιπτώσεις: περιττή, χωρίς ακρότατα, ασύμπτωτες οι άξονες.

Απόδειξη (μονοτονία για $a > 0$ στο $(0, +\infty)$). Αν $0 < x_1 < x_2$, τότε $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ και, πολλαπλασιάζοντας με $a > 0$, $\frac{a}{x_1} > \frac{a}{x_2}$.

✗ Συχνό λάθος

✗ ΛΑΘΟΣ: «Η $\frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα, άρα αφού $-1 < 1$ θα είναι $\frac{1}{-1} > \frac{1}{1}$.» Όμως $-1 < 1$! Η μονοτονία ισχύει **χωριστά** σε κάθε κλάδο, **όχι** στο $\mathbb{R}^*$.

✗ ΛΑΘΟΣ: Σχεδιάζω την υπερβολή να «ακουμπάει» τους άξονες. Οι κλάδοι πλησιάζουν τους άξονες, αλλά **δεν τους συναντούν ποτέ**.

Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Δύο ποσά x, y (θετικά) λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα** όταν το γινόμενο τους είναι σταθερό: $x \cdot y = a$, δηλαδή $y = \frac{a}{x}$. Η γραφική παράσταση της σχέσης τους είναι ο κλάδος της υπερβολής στο 1ο τεταρτημόριο.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Ταχύτητα και χρόνος

Μια διαδρομή 120 km μπορεί να γίνει με διάφορες ταχύτητες. Να εκφραστεί ο χρόνος t ως συνάρτηση της ταχύτητας v και να υπολογιστεί ο χρόνος για $v = 80$ km/h.

ΛΥΣΗ $v \cdot t = 120 \Leftrightarrow t(v) = \frac{120}{v}, v > 0$. Για $v = 80$: $t = 1,5$ ώρες. Η t είναι γνησίως φθίνουσα: όσο αυξάνεται η ταχύτητα, τόσο μειώνεται ο χρόνος.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Εύρεση του α

Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{a}{x}$ διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$. Να βρεθεί ο α και η μονοτονία της f .

ΛΥΣΗ $3 = \frac{a}{-2} \Leftrightarrow a = -6$. Αφού $a < 0$, η $f(x) = -\frac{6}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Υπερβολή και ευθεία

Να βρεθούν τα κοινά σημεία της υπερβολής $y = \frac{4}{x}$ και της ευθείας $y = x$.

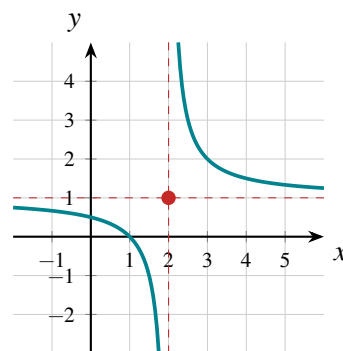
ΛΥΣΗ $\frac{4}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = 4 (x \neq 0) \Leftrightarrow x = \pm 2$. Κοινά σημεία: $(2,2)$ και $(-2,-2)$. Είναι οι «κορυφές» της υπερβολής πάνω στον άξονα συμμετρίας $y = x$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Μετατόπιση υπερβολής

Πώς προκύπτει η γραφική παράσταση της $g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ από την $y = \frac{1}{x}$; Ποιες είναι οι ασύμπτωτές της;

ΛΥΣΗ

Με μετατόπιση **2 μονάδες δεξιά** και **1 μονάδα πάνω** (Μάθημα 6.4). Μαζί με την καμπύλη μετατοπίζονται και οι ασύμπτωτες: γίνονται οι ευθείες $x = 2$ (κατακόρυφη) και $y = 1$ (οριζόντια). Το κέντρο συμμετρίας είναι το σημείο $(2,1)$.



Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο με τη σύγκριση των βασικών συναρτήσεων ax , ax^2 και $\frac{a}{x}$ και πίνακα μελέτης που τις συνοψίζει σε μία σελίδα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 7.2

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Να σχεδιάσετε τις $y = \frac{3}{x}$ και $y = -\frac{1}{x}$ και να γράψετε τη μονοτονία τους.
- 2 Να βρείτε τον α ώστε η υπερβολή $y = \frac{a}{x}$ να διέρχεται από το σημείο: α) $(4,2)$ β) $(-1,5)$.
- 3 Να βρείτε τα κοινά σημεία της $y = \frac{6}{x}$ και της ευθείας $y = x + 1$.
- 4 Μια ποσότητα 24 λίτρων μοιράζεται εξίσου σε n δοχεία. Να εκφράσετε την ποσότητα y κάθε δοχείου ως συνάρτηση του n . Τι είδους ποσά είναι τα n και y ;

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 5 Να εξηγήσετε πώς προκύπτει η γραφική παράσταση της $g(x) = \frac{2}{x+1} - 3$ από την $y = \frac{2}{x}$ και να βρείτε τις ασύμπτωτές της.
- 6 Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = -x + 4$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την υπερβολή $y = \frac{4}{x}$.

ΜΑΘΗΜΑ

7.3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 · Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων

Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$

Τι θα μάθουμε: ότι η γραφική παράσταση κάθε τριωνύμου είναι παραβολή, πώς βρίσκουμε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της, τη μονοτονία και τα ακρότατα, πώς τη σχεδιάζουμε σωστά βήμα-βήμα και πώς λύνουμε προβλήματα μεγίστου και ελαχίστου.

Από το τριώνυμο στη μετατόπιση

Στο Μάθημα 6.4 είδαμε ότι $x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$, άρα η γραφική παράσταση της $y = x^2 - 4x + 3$ είναι η παραβολή $y = x^2$ μετατοπισμένη. Αυτό ισχύει για **κάθε** τριώνυμο. Με συμπλήρωση τετραγώνου (όπως στο Μάθημα 3.3):

$$ax^2 + bx + \gamma = a \left(x + \frac{\beta}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \quad \Delta = \beta^2 - 4a\gamma.$$

Η γραφική παράσταση του τριωνύμου

Η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ($a \neq 0$) είναι **παραβολή**, ίδια με την $y = ax^2$, μετατοπισμένη ώστε η κορυφή της να είναι το σημείο

$$K \left(-\frac{\beta}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

Άξονας συμμετρίας της είναι η κατακόρυφη ευθεία $x = -\frac{\beta}{2a}$.

Πρακτικός υπολογισμός της κορυφής

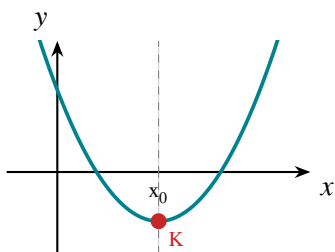
Βρες πρώτα την τετμημένη $x_0 = -\frac{\beta}{2a}$ και μετά την τεταγμένη ως $f(x_0)$: συνήθως είναι πιο εύκολο από τον τύπο $-\frac{\Delta}{4a}$. Π.χ. για $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$: $x_0 = \frac{8}{4} = 2$, $f(2) = 8 - 16 + 5 = -3$, άρα $K(2, -3)$.

Μονοτονία και ακρότατα

Η μονοτονία και τα ακρότατα «κληρονομούνται» από την $y = ax^2$, απλώς με κέντρο το $x_0 = -\frac{\beta}{2a}$:

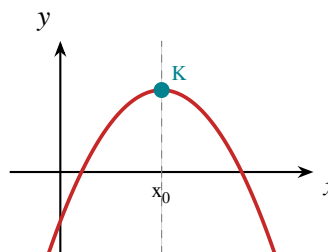
$\alpha > 0$: ελάχιστο στην κορυφή

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$		$-\frac{\Delta}{4a}$	



$\alpha < 0$: μέγιστο στην κορυφή

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$		$-\frac{\Delta}{4a}$	



➔ Μονοτονία – ακρότατα του τριωνύμου

- ▶ Αν $\alpha > 0$: f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{\beta}{2a}]$, γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{\beta}{2a}, +\infty)$, με **ελάχιστο** στο $x_0 = -\frac{\beta}{2a}$, το $f(x_0) = -\frac{\Delta}{4a}$.
- ▶ Αν $\alpha < 0$: f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -\frac{\beta}{2a}]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-\frac{\beta}{2a}, +\infty)$, με **μέγιστο** στο $x_0 = -\frac{\beta}{2a}$, το $f(x_0) = -\frac{\Delta}{4a}$.

Σχεδίαση παραβολής βήμα-βήμα

Τα 5 βήματα

1. **Πρόσημο του α** : «ανοίγει» προς τα πάνω ($\alpha > 0$) ή προς τα κάτω ($\alpha < 0$);
2. **Κορυφή K** $(-\frac{\beta}{2a}, f(-\frac{\beta}{2a}))$ και **άξονας συμμετρίας**.
3. **Τομή με τον y'** : το σημείο $(0, \gamma)$.
4. **Τομή με τον x'** : οι ρίζες (αν $\Delta \geq 0$).
5. Ένα-δύο ακόμη σημεία και τα **συμμετρικά τους** ως προς τον άξονα. Ενώνουμε με ομαλή καμπύλη.

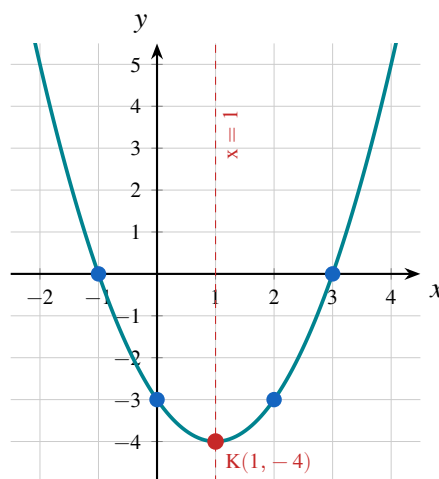
ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 · Πλήρης μελέτη και σχεδίαση

Να μελετηθεί και να σχεδιαστεί η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

ΛΥΣΗ

1. $a = 1 > 0$: παραβολή «προς τα πάνω».
2. $x_0 = -\frac{-2}{2} = 1$, $f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$. Κορυφή $K(1, -4)$, άξονας $x = 1$.
3. Τομή με y' : $(0, -3)$.
4. $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -1$: σημεία $(-1, 0)$, $(3, 0)$.
5. Το συμμετρικό του $(0, -3)$ ως προς $x = 1$ είναι το $(2, -3)$.

Μονοτονία: φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$, αύξουσα στο $[1, +\infty)$. **Ελάχιστο** $f(1) = -4$. **Σύνολο τιμών:** $[-4, +\infty)$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 · Με $a < 0$

Να βρεθούν η μονοτονία, το ακρότατο και το σύνολο τιμών της $g(x) = -2x^2 + 4x + 1$.

ΛΥΣΗ $a = -2 < 0$. $x_0 = -\frac{4}{-4} = 1$, $g(1) = -2 + 4 + 1 = 3$. Κορυφή $K(1, 3)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	3 		

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και έχει **μέγιστο** $g(1) = 3$. Σύνολο τιμών $(-\infty, 3]$.

✗ Συχνό λάθος

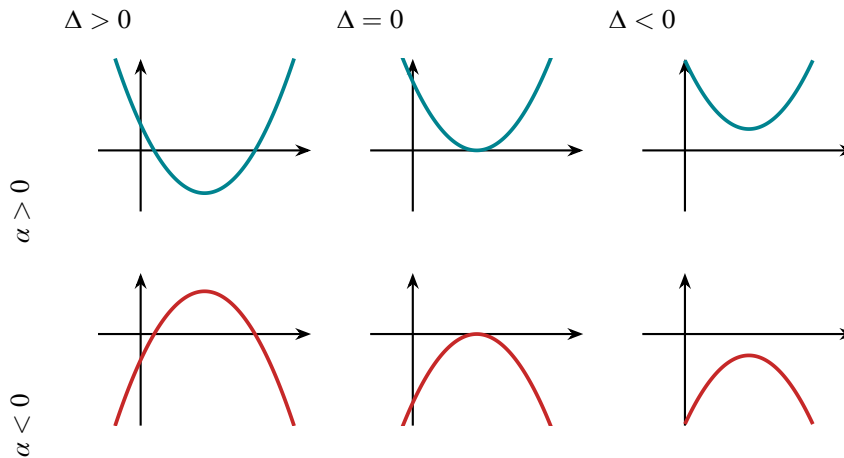
✗ **ΛΑΘΟΣ:** $x_0 = \frac{\beta}{2\alpha}$ (ξεχνάω το μείον).

✓ **ΣΩΣΤΟ:** $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Για $f(x) = x^2 - 2x - 3$: $x_0 = -\frac{-2}{2} = +1$.

✗ **ΛΑΘΟΣ:** «Η κορυφή είναι το $(1, 0)$.» Η τεταγμένη της κορυφής είναι $f(x_0)$, όχι 0! Μόνο αν $\Delta = 0$ η κορυφή είναι πάνω στον x' .

✗ **ΛΑΘΟΣ:** Στο σύνολο τιμών γράφω $(-4, +\infty)$. Η ελάχιστη τιμή **πιάνεται** (στην κορυφή): $[-4, +\infty)$.

Παραβολή, διακρίνουσα και πρόσημο: όλα μαζί



Το πρόσημο του a καθορίζει το «άνοιγμα», η διακρίνουσα πόσες φορές η παραβολή συναντά τον άξονα $x'x$. Τώρα «βλέπεις» γιατί ισχύουν οι κανόνες προσήμου του Μαθήματος 4.2!

Προβλήματα μεγίστου – ελαχίστου

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 · Μέγιστο εμβαδόν

Με συρματόπλεγμα μήκους 40 m θέλουμε να περιφράξουμε ορθογώνιο κήπο, του οποίου η μία πλευρά είναι ένας τοίχος (δεν χρειάζεται περίφραξη). Ποιες διαστάσεις δίνουν το μέγιστο εμβαδόν;

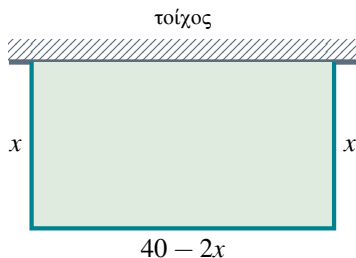
ΛΥΣΗ

Έστω x οι δύο πλευρές που είναι κάθετες στον τοίχο. Η τρίτη πλευρά είναι $40 - 2x$ (με $0 < x < 20$). Εμβαδόν:

$$E(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x.$$

Τριώνυμο με $a = -2 < 0$: μέγιστο στο $x_0 = -\frac{40}{-4} = 10$, με $E(10) = 10 \cdot 20 = 200 \text{ m}^2$.

Διαστάσεις: **10 m και 20 m**.



ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 · Βολή

Μια μπάλα κινείται έτσι ώστε το ύψος της (σε m) μετά από t δευτερόλεπτα να είναι $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$. Ποιο είναι το μέγιστο ύψος και πότε το φτάνει;

ΛΥΣΗ $a = -5 < 0$: μέγιστο στο $t_0 = -\frac{20}{-10} = 2 \text{ s}$, με $h(2) = -20 + 40 + 1 = 21 \text{ m}$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 · Ελάχιστο αθροίσματος

Δύο αριθμοί έχουν άθροισμα 10. Ποιοι είναι αυτοί, ώστε το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ελάχιστο;

ΛΥΣΗ Αν x ο ένας, ο άλλος είναι $10 - x$. $S(x) = x^2 + (10 - x)^2 = 2x^2 - 20x + 100$, με ελάχιστο στο $x_0 = \frac{20}{4} = 5$. Οι αριθμοί είναι **5 και 5** και το ελάχιστο άθροισμα τετραγώνων 50.

⚠ Προσοχή!

Στα προβλήματα, **ελέγχουμε** ότι η θέση του ακροτάτου ανήκει στο πεδίο ορισμού που καθορίζει το πρόβλημα (π.χ. $0 < x < 20$). Αν δεν ανήκει, το ακρότατο του τριωνύμου δεν είναι λύση του προβλήματος!

Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com



Η μελέτη του τριωνύμου είναι η «κορωνίδα» της Άλγεβρας της Α' Λυκείου. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες βίντεο-μάθημα, δεκάδες ασκήσεις τύπου εξετάσεων με λύσεις και διαδραστικό εργαλείο σχεδίασης παραβολών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**Μάθημα 7.3**

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

■ Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Να βρείτε την κορυφή, τον άξονα συμμετρίας και τα σημεία τομής με τους άξονες των παραβολών: α) $y = x^2 - 6x + 8$ β) $y = -x^2 + 4x$ γ) $y = 2x^2 + 4x + 5$.
- 2 Να βρείτε τη μονοτονία, το ακρότατο και το σύνολο τιμών: α) $f(x) = x^2 + 2x - 8$ β) $g(x) = -3x^2 + 6x$.
- 3 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ και με τη βοήθειά της να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.
- 4 Να βρείτε τους β, γ ώστε η παραβολή $y = x^2 + \beta x + \gamma$ να έχει κορυφή το σημείο $K(2, -1)$.

■ Β' ΟΜΑΔΑ

- 5 Ένας έμπορος πουλάει 100 τεμάχια την ημέρα με τιμή 10 € το τεμάχιο. Έχει διαπιστώσει ότι για κάθε 1 € αύξηση της τιμής πουλάει 5 τεμάχια λιγότερα. Ποια τιμή πώλησης μεγιστοποιεί τα έσοδά του;
- 6 Να βρείτε τον λ ώστε η ελάχιστη τιμή της $f(x) = x^2 - 2\lambda x + \lambda + 6$ να είναι ίση με 0.
- 7 Ένα σύρμα μήκους 24 cm κόβεται σε δύο κομμάτια και με καθένα από αυτά φτιάχνουμε ένα τετράγωνο. Πώς πρέπει να κοπεί το σύρμα ώστε το άθροισμα των εμβαδών να είναι ελάχιστο;

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

ΕΘ

Επαναληπτικά Θέματα



Έφτασε η ώρα να τα «δέσουμε» όλα μαζί! Τα θέματα αυτής της ενότητας συνδυάζουν έννοιες από πολλά κεφάλαια, όπως ακριβώς τα θέματα των εξετάσεων. Ξεκίνα με το τεστ «Σωστό – Λάθος», που ελέγχει αν έχεις κατανοήσει τη θεωρία, και συνέχισε με τα σύνθετα θέματα. Λύσε τα με χρονόμετρο και σαν να γράφεις διαγώνισμα: καθαρή γραφή, αιτιολόγηση σε κάθε βήμα.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΕΘ.1 Τεστ θεωρίας «Σωστό – Λάθος»

ΕΘ.2 Επαναληπτικά θέματα: Κεφάλαια 1–4

ΕΘ.3 Επαναληπτικά θέματα: Κεφάλαια 5–7

Συμπληρωματικό υλικό: Για βίντεο-μαθήματα, σημειώσεις, κούιζ και παιχνίδια γνώσεων πάνω σε αυτό το κεφάλαιο, επισκέψου το mathgreece.com — ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

ΜΑΘΗΜΑ

ΕΘ.1

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ · Επαναληπτικά Θέματα

Τεστ θεωρίας «Σωστό – Λάθος»

Τι θα μάθουμε: να ελέγξεις γρήγορα αν θυμάσαι σωστά τους ορισμούς και τις ιδιότητες όλου του βιβλίου. Χαρακτήρισε κάθε πρόταση ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ). Οι απαντήσεις, με σύντομη αιτιολόγηση, βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

 Πώς να το χρησιμοποιήσεις

Γράψε σε ένα χαρτί τις απαντήσεις σου και μετά έλεγξε στις λύσεις. Για κάθε λάθος σου, γύρνα στο αντίστοιχο μάθημα και ξαναδιάβασε το πλαίσιο «Προσοχή!» ή «Συχνό λάθος»: εκεί σχεδόν σίγουρα βρίσκεται η εξήγηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα ΕΘ.1

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

- 1 Αν A, B ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- 2 Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα ισχύει $P(A - B) = P(A) - P(B)$.
- 3 Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$.
- 4 Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\alpha\gamma < \beta\gamma$.
- 5 Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$.
- 6 Η εξίσωση $x^4 = -16$ έχει δύο πραγματικές λύσεις.
- 7 Αν $\Delta < 0$, το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ είναι ομόσημο του a για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 8 Αν x_1, x_2 οι ρίζες της $ax^2 + bx + \gamma = 0$, τότε $x_1 + x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$.
- 9 Η ανίσωση $\frac{x-1}{x+2} \leq 0$ είναι ισοδύναμη με την $(x-1)(x+2) \leq 0$.
- 10 Σε αριθμητική πρόοδο ισχύει $a_n = a_1 + n\omega$.
- 11 Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $\beta^2 = \alpha\gamma$.
- 12 Η ευθεία $x = 3$ είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3$.
- 13 Η γραφική παράσταση της $y = f(x+2)$ προκύπτει από τη C_f με μετατόπιση 2 μονάδες δεξιά.
- 14 Η $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}^*$.

- 15 Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
- 16 Αν $\alpha < 0$, η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

ΜΑΘΗΜΑ

ΕΘ.2

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ · Επαναληπτικά θέματα

Επαναληπτικά θέματα (Κεφ. 1–4)

Τι θα μάθουμε: θέματα που συνδυάζουν πιθανότητες, πραγματικούς αριθμούς, εξισώσεις και ανισώσεις, στη μορφή που συναντάς στα διαγωνίσματα και στις εξετάσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα ΕΘ.2

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

- 1 ★★ Δίνεται η παράσταση $A = |x - 1| + |x - 5|$.
α) Αν $1 < x < 5$, να αποδείξετε ότι $A = 4$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $A = 6$.
γ) Να αποδείξετε ότι $A \geq 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 2 ★★ Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 2)x + 2\lambda = 0$.
α) Να αποδείξετε ότι έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
β) Να βρείτε τις ρίζες της.
γ) Να βρείτε το λ ώστε οι ρίζες να είναι ίσες.
δ) Για ποιες τιμές του λ ισχύει $x_1^2 + x_2^2 < 8$;
- 3 ★★ Σε μια τάξη 30 μαθητών, 18 έχουν περάσει τις εξετάσεις Αγγλικών, 12 τις εξετάσεις Γαλλικών και 5 και τις δύο. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή.
α) Ποια η πιθανότητα να έχει περάσει μία τουλάχιστον από τις δύο εξετάσεις;
β) Ποια η πιθανότητα να έχει περάσει ακριβώς μία;
γ) Ποια η πιθανότητα να μην έχει περάσει καμία;
- 4 ★★★ Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.
β) Αν α είναι λύση της ανίσωσης του α), να αποδείξετε ότι $|\alpha - 2| \leq 1$.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{f(x)}{x - 2} \geq 0$.
- 5 ★★ α) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{5} + 2$.
β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{1}{\sqrt{5} - 2}$ και 4,2.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $(\sqrt{5} - 2)x + 1 = \sqrt{5}$.
- 6 ★★★ Δίνεται η εξίσωση $(\mu - 1)x^2 - 2\mu x + \mu + 3 = 0, \mu \in \mathbb{R}$.
α) Να τη λύσετε για $\mu = 1$.
β) Για $\mu \neq 1$, να βρείτε για ποιες τιμές του μ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.
γ) Αν $\mu = 0$, να βρείτε τις ρίζες και να επαληθεύσετε τους τύπους Vieta.

ΜΑΘΗΜΑ

ΕΘ.3

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ · Επαναληπτικά Θέματα

Επαναληπτικά θέματα (Κεφ. 5–7)

Τι θα μάθουμε: θέματα που συνδυάζουν προόδους, γενικές έννοιες συναρτήσεων και μελέτη βασικών συναρτήσεων, όπως στις τελικές εξετάσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα ΕΘ.3

Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου (ενότητα «Λύσεις των ασκήσεων»). Πρώτα προσπάθησε μόνος σου!

- 1 ★★ Σε αριθμητική πρόοδο ο 3ος όρος είναι 11 και ο 10ος είναι 39.
α) Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά.
β) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων.
γ) Πόσους πρώτους όρους πρέπει να προσθέσουμε για να πάρουμε άθροισμα 465;
- 2 ★★ Οι αριθμοί $x - 2$, $x + 1$, $3x + 3$ είναι, με αυτή τη σειρά, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
α) Να βρείτε το x (θετικό).
β) Να βρείτε τον λόγο της προόδου και τον επόμενο όρο.
- 3 ★★★ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 5$.
α) Να βρείτε την κορυφή της παραβολής και τα σημεία τομής της με τους άξονες.
β) Να γράψετε τη μονοτονία και το ακρότατο της f .
γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = x - 5$.
δ) Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία του γ);
- 4 ★★ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και να απλοποιήσετε τον τύπο.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
γ) Είναι η f γνησίως μονότονη;
- 5 ★★★ Η συνάρτηση f είναι περιττή, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, και για $x \geq 0$ έχει τύπο $f(x) = x^2 - 2x$.
α) Να βρείτε το $f(-3)$.
β) Να βρείτε τον τύπο της f για $x < 0$.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- 6 ★★ Μια εταιρεία έχει ημερήσιο κόστος παραγωγής $K(x) = x^2 + 20x + 400$ ευρώ για x προϊόντα και πουλάει κάθε προϊόν 100 €.
α) Να εκφράσετε το κέρδος $K_\epsilon(x)$ ως συνάρτηση του x .
β) Πόσα προϊόντα πρέπει να παράγει για μέγιστο κέρδος; Ποιο είναι αυτό;
γ) Για πόσα προϊόντα η εταιρεία δεν έχει ζημιά;

**Θέλεις περισσότερα; → mathgreece.com**

Για περισσότερα επαναληπτικά θέματα, διαγωνίσματα με λύσεις και βίντεο-λύσεις θεμάτων εξετάσεων, επισκέψου το **mathgreece.com**. Εκεί θα βρεις ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο για όλη την ύλη της Α' Λυκείου. Καλή επιτυχία!

Λύσεις των ασκήσεων

Πλήρεις λύσεις και απαντήσεις για όλες τις ασκήσεις του βιβλίου, ανά κεφάλαιο και μάθημα

🔦 Πριν κοιτάξεις τη λύση

Η λύση μιας άσκησης έχει αξία μόνο αφού έχεις παλέψει μαζί της. Αν κόλλησες, διάβασε μόνο τις πρώτες γραμμές της λύσης και ξαναπροσπάθησε. Αν το αποτέλεσμα σου διαφέρει, βρες σε ποιο βήμα έγινε η απόκλιση· εκεί κρύβεται το πραγματικό μάθημα. Για βίντεο-λύσεις και επιπλέον εξηγήσεις: mathgreece.com.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ · Λογική & Σύνολα

I Μάθημα Ε.1 · Το λεξιλόγιο της Λογικής

1. α) **Ψευδής.** Αντιπαράδειγμα: $\alpha = 1, \beta = -3$: είναι $1 > -3$ αλλά $1^2 = 1 < 9 = (-3)^2$.
β) **Αληθής.** Αν $x = 2\kappa$, τότε $x^2 = 4\kappa^2 = 2(2\kappa^2)$, που είναι άρτιος.
γ) **Αληθής.** Το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικό.
2. α) $\Rightarrow$ (για $x = -5$ είναι $x^2 = 25$ αλλά $x \neq 5$). β) $\Leftrightarrow$. γ) $\Rightarrow$ (για $x = 1$ ισχύει $x > 0$ αλλά όχι $x > 3$).
δ) $\Leftrightarrow$, αφού ένα τετράγωνο μηδενίζεται μόνο όταν μηδενίζεται η βάση του.
3. α) $x - 4 = 0$ ή $2x + 6 = 0$, δηλαδή $x = 4$ ή $x = -3$.
β) $x = 0$ ή $x + 7 = 0$ ή $3 - x = 0$, δηλαδή $x = 0$ ή $x = -7$ ή $x = 3$.
γ) Άθροισμα τετραγώνων είναι 0 αν και μόνο αν $x - 2 = 0$ και $y + 1 = 0$, δηλαδή $x = 2$ και $y = -1$.
4. α) $x < 4$. β) $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ (δηλαδή $\alpha\beta \neq 0$). γ) $x \leq 1$ ή $x \geq 5$.
5. α) Είναι τα x με $-2 \leq x < 3$: ευθύγραμμο τμήμα από το -2 (κλειστό άκρο) ως το 3 (ανοικτό άκρο).
β) Δύο κομμάτια: όλοι οι αριθμοί αριστερά του 0 (χωρίς το 0) και όλοι δεξιά του 4 (χωρίς το 4).
γ) Ζητάμε όσους ικανοποιούν και τις δύο. Κάθε $x > 3$ είναι και > 1 , άρα η συνθήκη ισοδυναμεί με $x > 3$: ημιευθεία δεξιά του 3 .
6. Αν $\nu = 6\kappa$, τότε $\nu = 3(2\kappa)$, άρα $P \Rightarrow Q$. Επομένως η P είναι ικανή συνθήκη για την Q και η Q αναγκαία για την P . Δεν ισχύει $Q \Rightarrow P$: ο 9 διαιρείται με το 3 αλλά όχι με το 6 . Άρα **όχι** ισοδυναμία.
7. $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$ και $y + 1 = 0$, δηλαδή $x = 3$, $y = -1$.
8. Ο Νίκος **κάνει λάθος**: για $\alpha = \beta = -2$ είναι $\alpha\beta = 4 > 0$. Η Μαρία **έχει δίκιο**: αφού $\alpha\beta > 0$, οι α, β είναι ομόσημοι. Αν ήταν και οι δύο αρνητικοί, θα ήταν $\alpha + \beta < 0$, άτοπο. Άρα είναι και οι δύο θετικοί.

I Μάθημα Ε.2 · Σύνολα

1. α) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. β) Ακέραιοι με τετράγωνο μικρότερο του 5 : $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. γ) $x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 4$, άρα $\Gamma = \{0, 4\}$. δ) Κανένας πραγματικός δεν έχει αρνητικό τετράγωνο: $\Delta = \emptyset$.
2. α) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (άρρητος). β) $\{0\} \subseteq \mathbb{N}$. γ) $-3 \in \mathbb{Z}$. δ) $\emptyset \subseteq \{1, 2\}$. ε) $\frac{4}{2} = 2 \in \mathbb{N}$.

3. Κοινά στοιχεία: 2,4. $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8,10\}$, $A \cap B = \{2,4\}$, $A' = \{1,3,5,7,9\}$, $B - A = \{1,3,5\}$, $A' \cap B' = \{7,9\}$ (που είναι το συμπλήρωμα της ένωσης).

4. $\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}$: συνολικά $8 = 2^3$ υποσύνολα. (Γενικά ένα σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα.)

5. $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\}$, $A \cup B = \mathbb{R}$ (κάθε αριθμός είναι ή μικρότερος του 2 ή μεγαλύτερος ή ίσος του -1), $A' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$.

6. α) $A' \cap B$: το μέρος του κύκλου B που είναι έξω από τον A (ίδιο με το $B - A$).

β) $(A \cap B)'$: όλο το Ω εκτός από το κοινό κομμάτι των κύκλων.

γ) Τα δύο «μυσοφέγγαρα»: ό,τι ανήκει σε ακριβώς ένα από τα A, B (τα δύο κομμάτια των κύκλων χωρίς την τομή).

7. Μόνο βιβλία: $60 - 20 = 40$, μόνο σειρές: $45 - 20 = 25$. α) Μόνο το ένα: $40 + 25 = 65$. β) Τουλάχιστον ένα: $40 + 20 + 25 = 85$, άρα κανένα: $100 - 85 = 15$.

8. Αφού κάθε στοιχείο του A είναι και στο B : α) $A \cup B = B$, β) $A \cap B = A$, γ) $A - B = \emptyset$, δ) $B' \cap A = \emptyset$ (κανένα στοιχείο του A δεν είναι έξω από το B).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Πιθανότητες

Μάθημα 1.1 · Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

1. α) $\Omega = \{K1, K2, K3, K4, K5, K6, \Gamma1, \Gamma2, \Gamma3, \Gamma4, \Gamma5, \Gamma6\}$, με $2 \cdot 6 = 12$ στοιχεία.

β) $\Omega = \{AA, AK, KA, KK\}$.

2. $A = \{2,3,5\}$, $B = \{1,3,5\}$. $A \cup B = \{1,2,3,5\}$, $A \cap B = \{3,5\}$, $A' = \{1,4,6\}$, $A - B = \{2\}$.

3. $\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$. $A = \{K\Gamma, \Gamma K\}$, $B = \{KK, K\Gamma, \Gamma K\}$, $\Gamma = \{\Gamma\Gamma\}$. Ασυμβίβαστα είναι τα A, Γ και τα B, Γ (μάλιστα $\Gamma = B'$). Τα A, B δεν είναι ($A \subseteq B$).

4. α) $B - A$, β) $A \cap B$, γ) $(A \cup B)' = A' \cap B'$, δ) $(A - B) \cup (B - A)$.

5. $A = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$, $N(A) = 3$. $B = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$, $N(B) = 3$. $\Gamma = \{(2,6), (3,4), (4,3), (6,2)\}$, $N(\Gamma) = 4$.

6. α) $\Omega = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$ ($3 \cdot 3 = 9$ στοιχεία). Άρτιοι: $\{12, 22, 32\}$.

β) $\Omega = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$ ($3 \cdot 2 = 6$ στοιχεία). Άρτιοι: $\{12, 32\}$.

7. Έστω ότι υπάρχει $\omega \in A \cap B'$. Τότε $\omega \in A \subseteq B$, άρα $\omega \in B$, αλλά και $\omega \in B'$, δηλαδή $\omega \notin B$: άτοπο. Άρα $A \cap B' = \emptyset$.

8. $\Omega = \{\Sigma\Sigma\Sigma, \Sigma\Sigma\Lambda, \Sigma\Lambda\Sigma, \Sigma\Lambda\Lambda, \Lambda\Sigma\Sigma, \Lambda\Sigma\Lambda, \Lambda\Lambda\Sigma, \Lambda\Lambda\Lambda\}$. Ζητούμενο: $\{\Sigma\Sigma\Sigma, \Sigma\Sigma\Lambda, \Sigma\Lambda\Sigma, \Lambda\Sigma\Sigma\}$.

Μάθημα 1.2 · Η έννοια της πιθανότητας

1. Σύνολο 10 ισοπίθανες επιλογές. α) $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. β) $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$. γ) Ασυμβίβαστα: $\frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$.

2. $N(\Omega) = 36$. α) $(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)$: $P = \frac{5}{36}$. β) Άθροισμα 2 ή 3: $(1,1), (1,2), (2,1)$: $P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. γ) Αντίθετο: κανένα 6, δηλαδή $5 \cdot 5 = 25$ ζεύγη. $P = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

3. $P(A \cap B) = 0,45 + 0,3 - 0,6 = 0,15$. $P(A') = 0,55$. $P(A - B) = 0,45 - 0,15 = 0,3$. $P((A \cup B)') = 0,4$.

4. $P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$. $P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = \frac{5}{12}$. Αφού $A \cap B = \emptyset$: $P(A - B) = P(A) = \frac{1}{3}$.

5. α) $\frac{15+8-5}{25} = \frac{18}{25}$. β) $1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$. γ) $\frac{8-5}{25} = \frac{3}{25}$.

6. $N(\Omega) = 8$. α) ΚΚΑ, ΚΑΚ, ΑΚΚ: $P = \frac{3}{8}$. β) $1 - P(\text{ΚΚΚ}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

7. $\lambda(1+2+3+4+5+6) = 1 \Leftrightarrow 21\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{21}$. $P(\{2,4,6\}) = \frac{2+4+6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$.

8. α) $P(A \cup B) \leq 1 \Rightarrow 0,6 + 0,7 - P(A \cap B) \leq 1 \Rightarrow P(A \cap B) \geq 0,3$.

β) $B \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A \cup B) \geq P(B) = 0,7$.

γ) Από το α), $P(A \cap B) \geq 0,3 > 0$, άρα $A \cap B \neq \emptyset$.

9. α) $2P(B) + P(B) - 0,1 = 0,8 \Leftrightarrow 3P(B) = 0,9 \Leftrightarrow P(B) = 0,3$, άρα $P(A) = 0,6$.

β) $P(A-B) + P(B-A) = (0,6-0,1) + (0,3-0,1) = 0,5+0,2 = 0,7$. (Ισοδύναμα: $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,8 - 0,1 = 0,7$.)

10. A : πολλαπλάσια του 2 (15), B : πολλαπλάσια του 3 (10), $A \cap B$: πολλαπλάσια του 6 (5). $P(A \cup B) = \frac{15+10-5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Οι Πραγματικοί Αριθμοί

Μάθημα 2.1 · Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

1. α) $8 + 4 - 1 = 11$. β) $\frac{3^{-2} \cdot 3^4}{3^3} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$. γ) $-1 + 1 = 0$.

2. α) $9x^2 + 12x + 4$. β) $1 - 6\alpha + 12\alpha^2 - 8\alpha^3$. γ) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = x^4 - y^4$. δ) $\alpha^2 + \beta^2 + 1 + 2\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta$.

3. α) $5(x-2)(x+2)$. β) $(x-5)^2$. γ) $(\alpha-2)(\alpha^2 + 2\alpha + 4)$. δ) $(x-3)(x-4)$. ε) $x^2(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^2 - 1) = (x+1)^2(x-1)$.

4. Ορίζεται για $x^2 \neq 16$, δηλαδή $x \neq 4$ και $x \neq -4$. Τότε $\frac{x(x-4)}{(x-4)(x+4)} = \frac{x}{x+4}$.

5. $\alpha = 3\lambda$, $\beta = 4\lambda$, $7\lambda = 21$, $\lambda = 3$. Άρα $\alpha = 9$, $\beta = 12$.

6. $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$. Άρα $\alpha^2 + \beta^2 = 25 - 6 = 19$.

7. $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, άρα $x^2 + \frac{1}{x^2} = 9 - 2 = 7$.

$(x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(x + \frac{1}{x})$, άρα $x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 9 = 18$.

8. $\gamma = -(\alpha + \beta)$, άρα $\gamma^3 = -(\alpha + \beta)^3 = -\alpha^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - \beta^3$. Τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = -3\alpha\beta(\alpha + \beta) = -3\alpha\beta(-\gamma) = 3\alpha\beta\gamma$.

9. $v^3 - v = (v-1)v(v+1)$: γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων. Ανάμεσά τους υπάρχει πάντα ένας άρτιος και ένα πολλαπλάσιο του 3, άρα το γινόμενο διαιρείται με το $2 \cdot 3 = 6$.

10. Έστω $\sqrt{3} = \frac{\kappa}{\lambda}$ ανάγωγο. Τότε $\kappa^2 = 3\lambda^2$, άρα ο κ^2 και επομένως ο κ είναι πολλαπλάσιο του 3: $\kappa = 3\mu$. Τότε $9\mu^2 = 3\lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 = 3\mu^2$, οπότε και ο λ είναι πολλαπλάσιο του 3. Το κλάσμα απλοποιείται με το 3: άτοπο.

Μάθημα 2.2 · Διάταξη πραγματικών αριθμών

1. α) $\frac{5}{7} - \frac{7}{10} = \frac{50-49}{70} = \frac{1}{70} > 0$, άρα $\frac{5}{7} > \frac{7}{10}$.

β) $\alpha^2 + 9 - 6\alpha = (\alpha - 3)^2 \geq 0$, άρα $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$ (ισότητα για $\alpha = 3$).

γ) $(\alpha + 1)^2 - 4\alpha = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2 \geq 0$, άρα $(\alpha + 1)^2 \geq 4\alpha$.

2. α) $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0$.

β) $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0$.

3. α) $-1 < x + y < 2$. β) $2 < 2x < 6$ και $1 < -y < 2$, άρα $3 < 2x - y < 8$. γ) $x > 0$, $-y > 0$, άρα $1 < -xy < 6$. δ) $1 < -y < 2 \Rightarrow 1 < y^2 < 4$ (θετικοί, υψώνουμε στο τετράγωνο).

4. α) $(-2, 5]$, β) $[3, +\infty)$, γ) $(-\infty, -1)$. Τομή α) και β): $[3, 5]$.

5. $\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha = \frac{\beta-\alpha}{2} > 0$ και $\beta - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2} > 0$. Άρα $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$ (ο μέσος όρος βρίσκεται ανάμεσα).

6. Ισοδύναμα $2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 \geq 0$, που ισχύει. Ισότητα για $\alpha = \beta = \gamma$.

7. Πολλαπλασιάζουμε με $\alpha\beta > 0$: $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, που ισχύει.

8. Περίμετρος $\Pi = 2x + 2y$: $8 \leq 2x \leq 12$, $4 \leq 2y \leq 6$, άρα $12 \leq \Pi \leq 18$ cm. Εμβαδόν (θετικοί): $8 \leq xy \leq 18$ cm².

9. $\alpha^3 - \alpha^2 = \alpha^2(\alpha - 1) > 0$. Επίσης $\alpha^3 + 1 - \alpha^2 - \alpha = \alpha^2(\alpha - 1) - (\alpha - 1) = (\alpha - 1)(\alpha^2 - 1) = (\alpha - 1)^2(\alpha + 1) > 0$, αφού $\alpha - 1 > 0$ και $\alpha + 1 > 0$.

Μάθημα 2.3 · Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

1. α) $\sqrt{5} > 2$, άρα $\sqrt{5} - 2$. β) $2(\pi - 3) = 2\pi - 6$. γ) $-x^2 - 4 < 0$, άρα $x^2 + 4$. δ) $|x - 5| = |5 - x|$, άρα 0.

2. $x + 2 > 0$, $x - 1 < 0$, $x - 3 < 0$. $A = (x + 2) + (1 - x) - (3 - x) = x$.

3. α) $x = 7$ ή $x = 1$. β) $-7 < x < 3$. γ) $x \leq -1$ ή $x \geq 3$. δ) Αδύνατη.

4. α) $|x - 5| < 3$. β) $|x + 3| \leq 3$. γ) $|x + 1| \geq 3$.

5. α) $|-4 - 6| = 10$. β) $|\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$. γ) $|x - (-x)| = |2x| = 2|x|$.

6. Κρίσιμες τιμές -1 και 3 . Αν $x < -1$: $A = -(x + 1) + (x - 3) = -4$. Αν $-1 \leq x < 3$: $A = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$. Αν $x \geq 3$: $A = x + 1 - x + 3 = 4$.

7. $|\alpha + \beta - 3| = |(\alpha - 1) + (\beta - 2)| \leq |\alpha - 1| + |\beta - 2| < 0,3$.
 $|2\alpha - \beta| = |2(\alpha - 1) - (\beta - 2)| \leq 2|\alpha - 1| + |\beta - 2| < 0,2 + 0,2 = 0,4$.

8. Και τα δύο μέλη είναι μη αρνητικά, αρκεί να συγκρίνουμε τετράγωνα: $\alpha^2 - 2|\alpha||\beta| + \beta^2 \leq \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta|$, που ισχύει.

9. $-5 < 2x - 3 < 5 \Leftrightarrow -2 < 2x < 8 \Leftrightarrow -1 < x < 4$. Ακέραιοι: 0, 1, 2, 3.

Μάθημα 2.4 · Ρίζες πραγματικών αριθμών

1. α) 0, 7. β) 5. γ) $\frac{2}{3}$. δ) $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$. ε) $\sqrt{25} = 5$.

2. α) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. β) $6\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$. γ) $2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3}$. δ) $12 - (4 + 2\sqrt{3}) = 8 - 2\sqrt{3}$.

3. α) $2\sqrt{5}$. β) $\frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \sqrt{3} - 1$. γ) $\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{4-2} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2} = \sqrt{2} + 1$.

4. α) 5. β) $(\sqrt[3]{32})^2 = 4$. γ) $\frac{1}{3}$. δ) $(\frac{27}{8})^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

5. α) $\alpha^{\frac{3}{5}}$. β) $\alpha^{-\frac{1}{2}}$. γ) $\alpha^{\frac{3}{2}}$. δ) $(\alpha^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{3}{4}}$.

6. Στην τάξη 6: $\sqrt{2} = \sqrt[6]{8}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}$, $\sqrt[6]{6}$. Άρα $\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

7. Ο $2 + \sqrt{3}$ είναι θετικός και $(2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$. Άρα, από τον ορισμό, $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$.

8. $A = \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = |x-3| + |x+1| = (3-x) + (x+1) = 4$.

9. Ρητοποιούμε κάθε κλάσμα: $\sqrt{2} - 1, \sqrt{3} - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3}$ (οι παρονομαστές γίνονται 1). Το άθροισμα «τηλεσκοπεί»: $\sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2 - \sqrt{3} = 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Εξισώσεις

Μάθημα 3.1 · Εξισώσεις 1ου βαθμού

1. α) $2x + 6 = 4x - 2 \Leftrightarrow x = 4$. β) $4(x+2) - 3(x-1) = 12 \Leftrightarrow x + 11 = 12 \Leftrightarrow x = 1$. γ) $2x + 1 = 2x + 1$: ταυτότητα. δ) $2x - 4 = 2x - 2$: αδύνατη.

2. α) $x(x-5) = 0$: $x = 0$ ή $x = 5$. β) $(x-1)[(x+2) - (2x-3)] = 0 \Leftrightarrow (x-1)(5-x) = 0$: $x = 1$ ή $x = 5$. γ) $x(x-3)(x+3) = 0$: $x \in \{0, 3, -3\}$. δ) $(2x-1)(2x+1) = 0$: $x = \pm \frac{1}{2}$.

3. α) $x = 5$ ή $x = -9$. β) $x = \frac{5}{2}$. γ) $x - 1 = x + 3$ (αδύνατη) ή $x - 1 = -x - 3 \Leftrightarrow x = -1$. Άρα $x = -1$. δ) Αδύνατη.

4. Περιορισμοί: $x \neq \pm 1$. $3(x+1) = 2(x-1) \Leftrightarrow x = -5$ (δεκτή).

5. Αν $\lambda \neq 4$: $x = 1$. Αν $\lambda = 4$: $0x = 0$, ταυτότητα.

6. Σε x χρόνια: $42 + x = 2(12 + x) \Leftrightarrow 42 + x = 24 + 2x \Leftrightarrow x = 18$ χρόνια (πατέρας 60, γιος 30).

7. $(\lambda^2 - 1)x = \lambda + 1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1)x = \lambda + 1$. Αν $\lambda \neq \pm 1$: $x = \frac{1}{\lambda - 1}$. Αν $\lambda = 1$: $0x = 2$, αδύνατη. Αν $\lambda = -1$: $0x = 0$, ταυτότητα.

8. Πρέπει $x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$. $2x - 1 = x + 4 \Leftrightarrow x = 5$ (δεκτή) ή $2x - 1 = -x - 4 \Leftrightarrow x = -1$ (δεκτή). Λύσεις: $x = 5, x = -1$.

9. Περιορισμοί $x \neq \pm 3$. Πολλαπλασιάζουμε με $(x-3)(x+3)$: $(x+1)(x+3) - (x-1)(x-3) = 24 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 3) - (x^2 - 4x + 3) = 24 \Leftrightarrow 8x = 24 \Leftrightarrow x = 3$, που **απορρίπτεται**. Η εξίσωση είναι αδύνατη.

10. $(\mu - 2)(\mu + 2)x = \mu(\mu + 2)$. α) $\mu \neq \pm 2$ (λύση $x = \frac{\mu}{\mu - 2}$). β) $\mu = 2$ ($0x = 8$). γ) $\mu = -2$ ($0x = 0$). δ) Για $\mu \neq \pm 2$: $\frac{\mu}{\mu - 2} = 2 \Leftrightarrow \mu = 2\mu - 4 \Leftrightarrow \mu = 4$. Για $\mu = -2$ κάθε x είναι λύση, άρα και το 2. Τελικά $\mu = 4$ ή $\mu = -2$.

Μάθημα 3.2 · Η εξίσωση $x^v = a$

1. α) $x = 4$. β) $x = \pm 5$. γ) $x = -5$. δ) Αδύνατη. ε) $x = 0$. στ) $x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$.

2. α) $x^4 = 16, x = \pm 2$. β) $x^3 = -\frac{1}{8}, x = -\frac{1}{2}$. γ) $x^5 = 32, x = 2$.

3. α) $x + 1 = -3 \Leftrightarrow x = -4$. β) $x - 2 = \pm 2 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = 0$. γ) $3x - 1 = x + 5 \Leftrightarrow x = 3$ ή $3x - 1 = -x - 5 \Leftrightarrow x = -1$.

4. α) $x^2(x^2 - 9) = 0$: $x = 0$ ή $x = \pm 3$. β) $x^3(x^3 - 1) = 0$: $x = 0$ ή $x = 1$. γ) $x(x^4 - 16) = 0$: $x = 0$ ή $x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

5. $x^3(x-1) + 8(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3 + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$.

6. $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Leftrightarrow R^3 = 27 \Leftrightarrow R = 3$ cm.

7. Αν $x \geq 0$: $x^3 = x \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ (το -1 απορρίπτεται). Αν $x < 0$: $x^3 = -x \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, απορρίπτεται. Λύσεις: $x = 0, x = 1$. (Και γενικά, $x^3 = |x| \geq 0$ δίνει $x \geq 0$.)

Ι Μάθημα 3.3 · Εξισώσεις 2ου βαθμού

1. α) $\Delta = 9, x = 5$ ή $x = 2$. β) $\Delta = 25, x = \frac{-3 \pm 5}{4}$: $x = \frac{1}{2}$ ή $x = -2$. γ) $(3x - 2)^2 = 0$: $x = \frac{2}{3}$ (διπλή). δ) $\Delta = -16 < 0$: αδύνατη. ε) $x^2 - 4x - 5 = 0, \Delta = 36$: $x = 5$ ή $x = -1$.

2. α) $5x(x - 4) = 0$: $x = 0$ ή $x = 4$. β) $x^2 = \frac{25}{4}$: $x = \pm \frac{5}{2}$. γ) Αδύνατη. δ) $x^2 + x - 12 = 0$: $x = 3$ ή $x = -4$.

3. α) Ρίζες $3, -2$: $(x - 3)(x + 2)$. β) Ρίζες $3, \frac{1}{3}$: $3(x - 3)(x - \frac{1}{3}) = (x - 3)(3x - 1)$. γ) $(2x + 1)^2$.

4. $\Delta = 36 - 8 = 28 > 0$. α) $S = 3, P = \frac{1}{2}$. β) $S^2 - 2P = 9 - 1 = 8$. γ) $S^2 - 4P = 9 - 2 = 7$.

5. Ρίζες της $x^2 - 10x + 21 = 0$: $x = 3$ και $x = 7$.

6. α) $\omega^2 - 10\omega + 9 = 0$: $\omega = 9$ ή $\omega = 1$, άρα $x = \pm 3, x = \pm 1$. β) $\omega^2 + 3\omega - 4 = 0$: $\omega = 1$ ή $\omega = -4$ (απορρ.). $x = \pm 1$. γ) $\omega^2 - 5\omega + 6 = 0$: $\omega = 2$ ή $\omega = 3$, άρα $x = \pm 2, x = \pm 3$.

7. $4 + 2(\lambda - 1) + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$. Η εξίσωση γίνεται $x^2 - x - 2 = 0$ με ρίζες 2 και -1 . (Η: $P = \lambda - 2 = -2$, άρα η άλλη ρίζα είναι $-2/2 = -1$.)

8. $\Delta = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \geq 0$. $x = \frac{\lambda \pm |\lambda - 2|}{2}$, δηλαδή $x = \lambda - 1$ ή $x = 1$ (το $\pm$ καλύπτει και το πρόσημο του απολύτου). Πράγματι $\alpha + \beta + \gamma = 1 - \lambda + \lambda - 1 = 0$, άρα ρίζα το 1 .

9. α) $\Delta = 4(\lambda + 1)^2 - 4(\lambda^2 + 3) = 4(2\lambda - 2) = 8(\lambda - 1) > 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$.

β) $S = 2(\lambda + 1), P = \lambda^2 + 3$. $S^2 - 2P = 4(\lambda + 1)^2 - 2\lambda^2 - 6 = 2\lambda^2 + 8\lambda - 2 = 10 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{10}$. Πρέπει $\lambda \geq 1$ (για να υπάρχουν ρίζες): δεκτή μόνο η $\lambda = -2 + \sqrt{10} \approx 1,16$.

10. Περιορισμοί $x \neq 0, 2$. $2(x - 2) + x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (απορρίπτεται) ή $x = -4$ (δεκτή). Λύση $x = -4$.

11. $x^2 + (x + 7)^2 = 169 \Leftrightarrow 2x^2 + 14x - 120 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 60 = 0, \Delta = 289, x = 5$ ή $x = -12$ (απορρ.). Πλευρές: 5 cm και 12 cm.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 · Ανισώσεις

Ι Μάθημα 4.1 · Ανισώσεις 1ου βαθμού

1. α) $3x \leq 12 \Leftrightarrow x \leq 4$. β) $-4x > 8 \Leftrightarrow x < -2$. γ) $5x - 2(x - 3) \geq 10 \Leftrightarrow 3x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$. δ) $0x < -5$: αδύνατη.

2. α) $x > 2$ και $x \leq 6$: $x \in (2, 6]$. β) $x \leq 2$ και $x > 4$: δεν υπάρχουν κοινές λύσεις (αδύνατο).

3. α) $3 < x < 7$. β) $2x + 1 \leq -3$ ή $2x + 1 \geq 3$: $x \leq -2$ ή $x \geq 1$. γ) Μόνο όταν $|4 - x| = 0$: $x = 4$. δ) Κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. $-9 < 2x - 1 \leq 6 \Leftrightarrow -8 < 2x \leq 7 \Leftrightarrow -4 < x \leq 3,5$. Ακέραιοι: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

5. $\frac{14+17+15+x}{4} \geq 16 \Leftrightarrow 46 + x \geq 64 \Leftrightarrow x \geq 18$. Πρέπει τουλάχιστον 18 .

6. $|x - 2| > 1$: $x < 1$ ή $x > 3$. $|x - 2| \leq 4$: $-2 \leq x \leq 6$. Κοινές: $x \in [-2, 1) \cup (3, 6]$.

7. $(\mu - 1)x > \mu^2 - 1 = (\mu - 1)(\mu + 1)$. Αν $\mu > 1$: $x > \mu + 1$. Αν $\mu < 1$: $x < \mu + 1$. Αν $\mu = 1$: $0x > 0$, αδύνατη.

8. Τετράγωνο: $4x^2 - 4x + 1 \leq x^2 + 8x + 16 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x - 15 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 \leq 0$. Οι ρίζες είναι -1 και 5 , και (όπως θα δούμε στο 4.2) το τριώνυμο είναι ≤ 0 ανάμεσά τους: $-1 \leq x \leq 5$.

Μάθημα 4.2 · Ανισώσεις 2ου βαθμού

1. α) Ρίζες $-1, 4$: θετικό για $x < -1$ ή $x > 4$, αρνητικό για $-1 < x < 4$. β) $-(x-3)^2$: αρνητικό για $x \neq 3$, μηδέν για $x = 3$. γ) $\Delta = 1 - 24 < 0$, $\alpha > 0$: θετικό για κάθε x .

2. α) Ρίζες $3, 4$: $3 < x < 4$. β) Ρίζες $-3, \frac{1}{2}$: $x \leq -3$ ή $x \geq \frac{1}{2}$. γ) $x^2 < 4$: $-2 < x < 2$. δ) $x^2 - 3x \leq 0$: $0 \leq x \leq 3$.

3. α) $(x+3)^2 > 0$: $x \neq -3$. β) $(2x-1)^2 \leq 0$: μόνο $x = \frac{1}{2}$. γ) $\Delta < 0$, $\alpha > 0$: αδύνατη. δ) $\Delta = 1 - 12 < 0$, $\alpha < 0$: ισχύει για κάθε x .

4. $x^2 - 5x + 4 \geq 0$, ρίζες $1, 4$: $x \leq 1$ ή $x \geq 4$.

5. Πρώτη: $0 < x < 4$. Δεύτερη: $x \leq 1$ ή $x \geq 3$. Κοινές: $x \in (0, 1] \cup [3, 4)$.

6. $\alpha = 1 > 0$, αρκεί $\Delta = (\lambda - 1)^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow |\lambda - 1| < 2 \Leftrightarrow -1 < \lambda < 3$.

7. $\Delta = 4\mu^2 - 4(3\mu - 2) = 4(\mu^2 - 3\mu + 2) > 0 \Leftrightarrow (\mu - 1)(\mu - 2) > 0 \Leftrightarrow \mu < 1$ ή $\mu > 2$.

8. Αν $\mu = 1$: $3 > 0$, ισχύει. Αν $\mu \neq 1$: θέλουμε $\mu - 1 > 0$ και $\Delta = 4(\mu - 1)^2 - 12(\mu - 1) = 4(\mu - 1)(\mu - 4) < 0 \Leftrightarrow 1 < \mu < 4$. Συνολικά $1 \leq \mu < 4$.

9. Με $|x| = \omega \geq 0$: $\omega^2 - 3\omega - 4 < 0 \Leftrightarrow -1 < \omega < 4$. Με $\omega \geq 0$: $0 \leq \omega < 4$, δηλαδή $|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$.

10. $20t - 5t^2 > 15 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 3$ δευτερόλεπτα.

Μάθημα 4.3 · Ανισώσεις γινόμενο και ανισώσεις πηλίκου

1. α) $-5 < x < 2$. β) Ρίζες $-1, 3$, το γινόμενο είναι $-(x-3)(x+1) \geq 0$ για $-1 \leq x \leq 3$. γ) Ρίζες $-4, 0, 1$, πρόσημα από αριστερά: $-, +, -, +$. Λύση: $x \in (-4, 0) \cup (1, +\infty)$.

2. α) $-4 < x < 1$. β) $x < -2$ ή $x \geq 3$. γ) Ο αριθμητής είναι πάντα θετικός, άρα $x - 5 > 0$: $x > 5$.

3. α) $x(x-3)(x+3) \leq 0$: ρίζες $-3, 0, 3$, πρόσημα $-, +, -, +$. Λύση: $x \leq -3$ ή $0 \leq x \leq 3$.

β) $(x-1)(x+1)(x-2)(x-3) > 0$: ρίζες $-1, 1, 2, 3$, πρόσημα $+, -, +, -$. Λύση: $x < -1$ ή $1 < x < 2$ ή $x > 3$.

4. $\frac{2x+1-(x-3)}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-3} \geq 0$: $x \leq -4$ ή $x > 3$.

5. Αριθμητής $(x-2)^2 \geq 0$ (μηδέν στο 2). Παρονομαστής $(x-3)(x+2)$, αρνητικός για $-2 < x < 3$. Το κλάσμα είναι ≤ 0 όταν ο παρονομαστής είναι αρνητικός ή ο αριθμητής μηδέν (με παρονομαστή $\neq 0$): $-2 < x < 3$ (το $x = 2$ περιλαμβάνεται ήδη). Λύση: $x \in (-2, 3)$.

6. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1-x}{x(x-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{x(x-1)} < 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x > 1$.

7. Πρέπει $\frac{x-2}{4-x} \geq 0$ και $x \neq 4$. Ρίζες $2, 4$: το πηλίκο είναι θετικό ανάμεσά τους (ετερόσημοι συντελεστές). Λύση: $2 \leq x < 4$.

8. $(x^2-1)(x^2-4) < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) < 0$. Ρίζες $-2, -1, 1, 2$, πρόσημα $+, -, +, -, +$. Λύση: $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$.

Μάθημα 5.1 · Ακολουθίες

- α) $3, 1, -1, -3$. β) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$. γ) $1, 3, 7, 15$. δ) $-1, 2, -3, 4$.
- $1, 4, 13, 40, 121$.
- α) $a_{10} = 60$. β) $v^2 - 4v - 45 = 0 \Leftrightarrow v = 9 \text{ ή } v = -5$ (απορρ.): ο 9ος. γ) $v^2 - 4v + 5 = 0, \Delta = -4 < 0$: όχι.
- α) $a_v = 2v$. β) $a_v = \frac{1}{v}$. γ) $a_v = 3^v$. δ) $a_v = v^2 - 1$.
- $2 - a_v = \frac{2v+6-2v+1}{v+3} = \frac{7}{v+3} > 0$. $a_v > 1 \Leftrightarrow 2v - 1 > v + 3 \Leftrightarrow v > 4$: οι όροι από τον a_5 και μετά.
- $1, 4, 9, 16, 25$. Προφανώς $a_v = v^2$ (πράγματι $(v+1)^2 = v^2 + 2v + 1$).

Μάθημα 5.2 · Αριθμητική πρόοδος

- α) $\omega = 5$: $a_{15} = 3 + 70 = 73, S_{15} = \frac{15}{2}(3 + 73) = 570$. β) $\omega = -3$: $a_{15} = 20 - 42 = -22, S_{15} = \frac{15}{2}(20 - 22) = -15$.
- $5\omega = 20 \Rightarrow \omega = 4, a_1 = 10 - 8 = 2, a_{50} = 2 + 49 \cdot 4 = 198$.
- $\omega = 4$: $-7 + (v-1)4 = 89 \Leftrightarrow v-1 = 24 \Leftrightarrow v = 25$.
- α) $\frac{200 \cdot 201}{2} = 20100$. β) 50 όροι: $\frac{50}{2}(2 + 100) = 2550$. γ) 100 όροι: $\frac{100}{2}(5 + 500) = 25250$.
- $2(x+5) = 2x - 1 + 3x + 1 \Leftrightarrow 2x + 10 = 5x \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$.
- $a_{v+1} - a_v = -3$, σταθερό. $a_1 = 4, a_{20} = -53, S_{20} = 10(4 - 53) = -490$.
- $14, 21, \dots, 98$: $a_1 = 14, \omega = 7, 98 = 14 + (v-1)7 \Rightarrow v = 13. S = \frac{13}{2}(14 + 98) = 728$.
- $5(2a_1 + 9\omega) = 145 \Rightarrow 2a_1 + 9\omega = 29. 10(2a_1 + 19\omega) = 490 \Rightarrow 2a_1 + 19\omega = 49$. Αφαιρώντας: $10\omega = 20, \omega = 2, a_1 = \frac{29-18}{2} = \frac{11}{2}$.
- $a_1 = 2, \omega = 0,5$: $\frac{v}{2}[4 + (v-1)0,5] = 57 \Leftrightarrow v(3,5 + 0,5v) = 114 \Leftrightarrow v^2 + 7v - 228 = 0. \Delta = 49 + 912 = 961 = 31^2, v = \frac{-7+31}{2} = 12$ (η αρνητική ρίζα απορρίπτεται). Σε 12 μέρες.
- $3x = 21 \Rightarrow x = 7. (7-\omega) \cdot 7 \cdot (7+\omega) = 231 \Rightarrow 49 - \omega^2 = 33 \Rightarrow \omega = \pm 4$. Οι αριθμοί είναι 3, 7, 11 (ή με την αντίστροφη σειρά).

Μάθημα 5.3 · Γεωμετρική πρόοδος

- α) $\lambda = 3$: $a_6 = 2 \cdot 243 = 486, S_6 = 2 \cdot \frac{3^6-1}{2} = 728$. β) $\lambda = \frac{1}{2}$: $a_6 = 64 \cdot \frac{1}{32} = 2, S_6 = 64 \cdot \frac{1-1/64}{1-1/2} = 126$. γ) $\lambda = -2$: $a_6 = -32, S_6 = \frac{(-2)^6-1}{-3} = -21$.
- $\lambda^3 = 27 \Rightarrow \lambda = 3, a_1 = 2$.
- $5\lambda^4 = 80 \Rightarrow \lambda^4 = 16 \Rightarrow \lambda = \pm 2$. Δύο πρόοδοι: $5, 10, 20, \dots$ και $5, -10, 20, \dots$
- $(x+1)^2 = (x-1)(x+7) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + 6x - 7 \Leftrightarrow x = 2$. Αριθμοί: 1, 3, 9.
- α) $\frac{0,3}{0,9} = \frac{1}{3}$. β) $\frac{45/100}{1-1/100} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$.
- $\frac{3^v-1}{2} = 1093 \Leftrightarrow 3^v = 2187 = 3^7 \Leftrightarrow v = 7$.
- Γινόμενο $x^3 = 216 \Rightarrow x = 6. \frac{6}{\lambda} + 6 + 6\lambda = 21 \Leftrightarrow 6\lambda^2 - 15\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = \frac{1}{2}$. Αριθμοί: 3, 6, 12.

8. Κάθε χρόνο η αξία πολλαπλασιάζεται με 0,85: $20000 \cdot 0,85^4 \approx 20000 \cdot 0,522 = 10\,440$ € περίπου.
9. $\alpha_1 = 12, \lambda = \frac{1}{2}, |\lambda| < 1: S = \frac{12}{1/2} = 24$.

Μάθημα 5.4 · Ανατοκισμός – Ίσες καταθέσεις

1. Ανατοκισμός: $5000 \cdot 1,02^3 = 5000 \cdot 1,061208 = 5306,04$ €. Απλός τόκος: $5000 + 3 \cdot 100 = 5300$ €.
2. $K_0 \cdot 1,1^2 = 3630 \Leftrightarrow K_0 = \frac{3630}{1,21} = 3000$ €.
3. $S = 500 \cdot 1,04 \cdot \frac{1,04^3 - 1}{0,04} = 520 \cdot \frac{0,124864}{0,04} = 520 \cdot 3,1216 = 1623,23$ €. (Έλεγχος: $500 \cdot 1,04^3 + 500 \cdot 1,04^2 + 500 \cdot 1,04 = 562,43 + 540,80 + 520 = 1623,23$.)
4. $(1 + \varepsilon)^2 = 1,44 \Rightarrow 1 + \varepsilon = 1,2 \Rightarrow \varepsilon = 0,2 = 20\%$ (η αρνητική λύση απορρίπτεται).
5. Ίδιο μοντέλο με τον ανατοκισμό: $50000 \cdot 1,02^5 \approx 55\,200$ κάτοικοι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 · Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

Μάθημα 6.1 · Η έννοια της συνάρτησης

1. α) $\mathbb{R} - \{1\}$. β) $f(0) = -2, f(-2) = 0, f(3) = \frac{5}{2}$. γ) $x + 2 = 2x - 2 \Leftrightarrow x = 4$ (δεκτό).
2. α) $\mathbb{R}$. β) $x(x-5) \neq 0: \mathbb{R} - \{0,5\}$. γ) $[4, +\infty)$. δ) $x^2 + 1 > 0$ πάντα: $\mathbb{R}$. ε) $x^2 \geq 1: (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
3. $f(-1) = 3, f(\frac{1}{2}) = 0. 2x^2 - x - 1 = 0: x = 1$ ή $x = -\frac{1}{2}$.
4. $V(t) = 600 - 80t, 0 \leq t \leq 7,5. 600 - 80t = 120 \Leftrightarrow t = 6$ χρόνια.
5. $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$ και $x \neq 0: A = [-2, 0) \cup (0, 2]$.
6. $1 + \alpha + \beta = 0$ και $4 + 2\alpha + \beta = 3$. Αφαιρώντας: $3 + \alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 0, \beta = -1$. Άρα $f(x) = x^2 - 1$.
7. Η βάση είναι τετράγωνο πλευράς $20 - 2x$ και το ύψος $x: V(x) = x(20 - 2x)^2$. Πρέπει $x > 0$ και $20 - 2x > 0: A = (0, 10)$.

Μάθημα 6.2 · Γραφική παράσταση συνάρτησης

1. α) $(-2, -5)$. β) $(2, 5)$. γ) $(2, -5)$. δ) $(5, -2)$.
2. α) $\sqrt{36 + 64} = 10$. β) $\sqrt{0 + 49} = 7$.
3. α) $(3, 0), (0, -6)$. β) $(1, 0), (3, 0), (0, 3)$. γ) $(2, 0), (0, -2)$.
4. $4\alpha - 1 = 7 \Leftrightarrow \alpha = 2$.
5. $x^2 - 2x = x \Leftrightarrow x(x-3) = 0$: σημεία $(0, 0), (3, 3)$. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x(x-3) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x > 3$.
6. $M(x, 0): (x-1)^2 + 16 = (x-5)^2 + 4 \Leftrightarrow -2x + 17 = -10x + 29 \Leftrightarrow 8x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. $M(\frac{3}{2}, 0)$.
7. Για $x < 0$ είναι η ημιευθεία $y = -x$ (στο 2ο τεταρτημόριο, παίρνει τιμές > 0), για $x \geq 0$ το δεξί μισό της παραβολής $y = x^2$ (τιμές ≥ 0). Σύνολο τιμών: $[0, +\infty)$.

Μάθημα 6.3 · Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$

1. α) $\alpha = 4, (0, -3)$. β) $\alpha = -1, (0, 0)$. γ) $y = -2x + 6: \alpha = -2, (0, 6)$. δ) $\alpha = 0, (0, 7)$.

2. α) $\alpha = 2, \beta = 2: y = 2x + 2$. β) $\alpha = \frac{2-5}{6} = -\frac{1}{2}, 5 = 1 + \beta \Rightarrow \beta = 4: y = -\frac{1}{2}x + 4$.
3. α) $\alpha = -1: y = -x - 1$. β) $\alpha = \sqrt{3}: y = \sqrt{3}x - 2 - \sqrt{3}$.
4. $\lambda^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$.
5. Κλίση $AB = \frac{4}{2} = 2$, κλίση $B\Gamma = \frac{2}{1} = 2$. Ίσες κλίσεις και κοινό σημείο B , άρα είναι συνευθειακά.
6. $\alpha = \frac{212-32}{100} = 1,8, \beta = 32: F = 1,8C + 32. F(25) = 77^\circ\text{F}$.
7. Είναι η $y = 2x + 4$ «διπλωμένη» προς τα πάνω γύρω από το $(-2,0)$. $|2x + 4| = 6 \Leftrightarrow 2x + 4 = \pm 6 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -5$. Σημεία $(1,6), (-5,6)$.
8. Τομή με $y'y: (0,4)$. Τομή με $x'x: -\frac{2}{3}x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 6$. Ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες 4 και 6: $E = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$.

Ι Μάθημα 6.4 · Κατακόρυφη – οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

1. α) 3 πάνω. β) 1 αριστερά. γ) 4 δεξιά και 2 κάτω. δ) 3 αριστερά και 1 πάνω.
2. α) $|x| - 4$. β) $|x - 2|$. γ) $|x + 1| + 3$.
3. α) $(5,0)$. β) $(0, -7)$. γ) $(-2,4)$.
4. $x^2 + 6x + 9 - 4 = (x + 3)^2 - 4$. Μετατόπιση 3 αριστερά και 4 κάτω· κορυφή $(-3, -4)$.
5. Μετατόπιση 3 αριστερά και 2 κάτω: $(1 - 3, 5 - 2) = (-2, 3)$. Έλεγχος: $g(-2) = f(1) - 2 = 3$.

Ι Μάθημα 6.5 · Μονotonία – Ακρότατα – Συμμετρίες συνάρτησης

1. α) $x_1 < x_2 \Rightarrow 5x_1 - 2 < 5x_2 - 2$: αύξουσα. β) $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -x_1^3 > -x_2^3$: φθίνουσα. γ) $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$: αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
2. α) Άρτια. β) $f(-x) = \frac{-x}{x^2+1} = -f(x)$: περιττή. γ) $f(-1) = 0, f(1) = 2$: ούτε άρτια ούτε περιττή. δ) $A = \mathbb{R} - \{2\}$ μη συμμετρικό: ούτε άρτια ούτε περιττή.
3. α) Ελάχιστο στο -1 , το -3 . β) Αφού $|x - 2| \geq 0, g(x) \leq 5 = g(2)$: μέγιστο στο 2, το 5.
4. α) $f(-3) = f(3) = -1$. β) Λόγω συμμετρίας ως προς τον $y'y$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$.
5. $f(x) = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$. Για $-1 < x_1 < x_2: 0 < x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow \frac{3}{x_1+1} > \frac{3}{x_2+1} \Rightarrow 2 - \frac{3}{x_1+1} < 2 - \frac{3}{x_2+1}$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$.
6. $f(x) = (x-2)^2 + 3$. Για $x_1 < x_2 \leq 2: x_1 - 2 < x_2 - 2 \leq 0 \Rightarrow (x_1 - 2)^2 > (x_2 - 2)^2$ (αρνητικοί: αλλάζει η φορά στα τετράγωνα), άρα $f(x_1) > f(x_2)$. Για $2 \leq x_1 < x_2: 0 \leq x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Ελάχιστο στο 2, το $f(2) = 3$.
7. $h(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))g(x) = -h(x)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 · Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων

Ι Μάθημα 7.1 · Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2$

1. $y = 3x^2$: στενή παραβολή προς τα πάνω· $\searrow$ στο $(-\infty, 0]$, $\nearrow$ στο $[0, +\infty)$, ελάχιστο 0 στο 0.
 $y = -\frac{1}{3}x^2$: ανοιχτή παραβολή προς τα κάτω· $\nearrow$ στο $(-\infty, 0]$, $\searrow$ στο $[0, +\infty)$, μέγιστο 0 στο 0.

2. α) $a = 5$. β) $9a = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$.
3. α) $(\pm 2, 4)$. β) $x^2 + x - 2 = 0$: $(1, 1)$, $(-2, 4)$. γ) $(x - 1)^2 = 0$: ένα κοινό σημείο $(1, 1)$ (η ευθεία εφάπτεται).
4. $-2x^2 = \lambda \Leftrightarrow x^2 = -\frac{\lambda}{2}$: δύο λύσεις όταν $-\frac{\lambda}{2} > 0 \Leftrightarrow \lambda < 0$.
5. $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow -2x_1^2 > -2x_2^2$, δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$.

Μάθημα 7.2 · Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \frac{a}{x}$

1. $y = \frac{3}{x}$: κλάδοι στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο, γνησίως φθίνουσα σε κάθε διάστημα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.
 $y = -\frac{1}{x}$: κλάδοι στο 2ο και 4ο, γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα.
2. α) $a = 8$. β) $a = -5$.
3. $\frac{6}{x} = x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$ ($x \neq 0$): $x = 2$ ή $x = -3$. Σημεία $(2, 3)$, $(-3, -2)$.
4. $y = \frac{24}{v}$, v θετικός ακέραιος. Αντιστρόφως ανάλογα ($v \cdot y = 24$).
5. 1 μονάδα αριστερά και 3 κάτω. Ασύμπτωτες: $x = -1$ και $y = -3$.
6. $\frac{4}{x} = -x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Μοναδικό κοινό σημείο $(2, 2)$.

Μάθημα 7.3 · Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$

1. α) $K(3, -1)$, άξονας $x = 3$, τομές $(2, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 8)$.
 β) $K(2, 4)$, άξονας $x = 2$, τομές $(0, 0)$, $(4, 0)$.
 γ) $K(-1, 3)$, άξονας $x = -1$, $\Delta = 16 - 40 < 0$: δεν τέμνει τον $x'x$: τομή με $y'y$: $(0, 5)$.
2. α) $x_0 = -1$, $f(-1) = -9$: $\searrow$ στο $(-\infty, -1]$, $\nearrow$ στο $[-1, +\infty)$, ελάχιστο -9 , σύνολο τιμών $[-9, +\infty)$.
 β) $x_0 = 1$, $g(1) = 3$: $\nearrow$ στο $(-\infty, 1]$, $\searrow$ στο $[1, +\infty)$, μέγιστο 3 , σύνολο τιμών $(-\infty, 3]$.
3. Κορυφή $K(1, 4)$, $a < 0$, ρίζες -1 και 3 , τομή με $y'y$ το $(0, 3)$. Η παραβολή είναι πάνω από τον $x'x$ ανάμεσα στις ρίζες: $-1 < x < 3$.
4. $-\frac{\beta}{2} = 2 \Rightarrow \beta = -4$. $f(2) = 4 - 8 + \gamma = -1 \Rightarrow \gamma = 3$. Άρα $y = x^2 - 4x + 3$.
5. Με αύξηση $x \in \mathbb{R}$: έσοδα $E(x) = (10 + x)(100 - 5x) = -5x^2 + 50x + 1000$. Μέγιστο στο $x_0 = \frac{-50}{-10} = 5$: τιμή 15 € και έσοδα $E(5) = 15 \cdot 75 = 1125 \text{ €}$.
6. Ελάχιστη τιμή $-\frac{\Delta}{4} = -\frac{4\lambda^2 - 4\lambda - 24}{4} = -(\lambda^2 - \lambda - 6)$. Θέλουμε $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$: $\lambda = 3$ ή $\lambda = -2$.
7. Αν το ένα κομμάτι είναι x , τα τετράγωνα έχουν πλευρές $\frac{x}{4}$ και $\frac{24-x}{4}$. $E(x) = \frac{x^2 + (24-x)^2}{16} = \frac{2x^2 - 48x + 576}{16}$, ελάχιστο στο $x_0 = 12$. Κόβουμε το σύρμα στη μέση ($12 \text{ cm} + 12 \text{ cm}$), με $E = 9 + 9 = 18 \text{ cm}^2$.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ · Επαναληπτικά Θέματα

Μάθημα ΕΘ.1 · Τεστ θεωρίας «Σωστό – Λάθος»

1. Σ. Απλός προσθετικός νόμος (Μάθημα 1.2).
2. Λ. Ισχύει $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
3. Λ. Ισχύει $\sqrt{a^2} = |a|$. Π.χ. $\sqrt{(-3)^2} = 3$.

4. Σ. Πολλαπλασιασμός με αρνητικό αλλάζει τη φορά.
5. Λ. Ισχύει μόνο $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, με ισότητα όταν $\alpha\beta \geq 0$.
6. Λ. Άρτιος εκθέτης και αρνητικό δεύτερο μέλος: αδύνατη.
7. Σ. Μάθημα 4.2.
8. Λ. $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$.
9. Λ. Η δεύτερη αληθεύει και για $x = -2$, όπου η πρώτη δεν ορίζεται. Η σωστή ισοδυναμία είναι με $(x-1)(x+2) \leq 0$ και $x \neq -2$.
10. Λ. $a_v = a_1 + (v-1)\omega$.
11. Σ. Μάθημα 5.3.
12. Λ. Η $f(x) = 3$ έχει γραφική παράσταση την οριζόντια ευθεία $y = 3$. Η $x = 3$ είναι κατακόρυφη και δεν παριστάνει συνάρτηση.
13. Λ. 2 μονάδες αριστερά.
14. Λ. Είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ χωριστά, όχι στην ένωσή τους.
15. Σ. Μάθημα 6.5.
16. Λ. Για $\alpha < 0$ παρουσιάζει μέγιστο εκεί.

Μάθημα ΕΘ.2 · Επαναληπτικά θέματα (Κεφ. 1-4)

1. α) $x-1 > 0, x-5 < 0$: $A = x-1+5-x = 4$.
 β) Για $x < 1$: $A = 1-x+5-x = 6-2x = 6 \Leftrightarrow x = 0$ (δεκτή). Για $1 \leq x \leq 5$: $A = 4 \neq 6$. Για $x > 5$: $A = 2x-6 = 6 \Leftrightarrow x = 6$ (δεκτή). Λύσεις: $x = 0, x = 6$.
 γ) Τριγωνική: $A = |x-1| + |5-x| \geq |x-1+5-x| = 4$. (Γεωμετρικά: το άθροισμα των αποστάσεων του x από το 1 και το 5 είναι τουλάχιστον η απόσταση 1-5.)
2. α) $\Delta = (\lambda+2)^2 - 8\lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 \geq 0$.
 β) $x = \frac{\lambda+2 \pm |\lambda-2|}{2}$: $x_1 = \lambda, x_2 = 2$ (επαλήθευση: $S = \lambda+2, P = 2\lambda$).
 γ) $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$.
 δ) $\lambda^2 + 4 < 8 \Leftrightarrow \lambda^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < \lambda < 2$.
3. $P(A) = \frac{18}{30}, P(\Gamma) = \frac{12}{30}, P(A \cap \Gamma) = \frac{5}{30}$.
 α) $\frac{18+12-5}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$. β) $\frac{(18-5)+(12-5)}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$. γ) $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.
4. α) Ρίξεις 1, 3: $1 \leq x \leq 3$.
 β) $1 \leq \alpha \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq \alpha-2 \leq 1 \Leftrightarrow |\alpha-2| \leq 1$.
 γ) $\frac{(x-1)(x-3)}{x-2} \geq 0, x \neq 2$. Ρίξεις 1, 2, 3: πρόσημα (από αριστερά) $-, +, -, +$. Λύση: $1 \leq x < 2$ ή $x \geq 3$.
5. α) $\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2$.
 β) $\sqrt{5}+2 > 4,2 \Leftrightarrow \sqrt{5} > 2,2 \Leftrightarrow 5 > 4,84$, που ισχύει. Άρα $\frac{1}{\sqrt{5}-2} > 4,2$.
 γ) $(\sqrt{5}-2)x = \sqrt{5}-1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-2} = (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+2) = 5+2\sqrt{5}-\sqrt{5}-2 = 3+\sqrt{5}$.

6. α) $-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

β) $\Delta = 4\mu^2 - 4(\mu - 1)(\mu + 3) = 4\mu^2 - 4(\mu^2 + 2\mu - 3) = -8\mu + 12 > 0 \Leftrightarrow \mu < \frac{3}{2}$. Άρα $\mu < \frac{3}{2}$ και $\mu \neq 1$.

γ) $\mu = 0$: $-x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$ (σύμφωνα με το β, αφού $0 < \frac{3}{2}$). $S = 0 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{0}{-1}$ και $P = -3 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{3}{-1}$. ✓

Ι Μάθημα ΕΘ.3 · Επαναληπτικά θέματα (Κεφ. 5–7)

1. α) $7\omega = 28, \omega = 4, \alpha_1 = 3$.

β) $S_{20} = 10(6 + 19 \cdot 4) = 10 \cdot 82 = 820$.

γ) $\frac{v}{2}(6 + 4(v - 1)) = 465 \Leftrightarrow v(2v + 1) = 465 \Leftrightarrow 2v^2 + v - 465 = 0, \Delta = 1 + 3720 = 3721 = 61^2$,
 $v = \frac{-1+61}{4} = 15$.

2. α) $(x + 1)^2 = (x - 2)(3x + 3) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 3x^2 - 3x - 6 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$ ή $x = -1$.
 Θετικό: $x = \frac{7}{2}$.

β) Όροι $\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{2}$: $\lambda = 3$, επόμενος $\frac{81}{2}$. (Για $x = -1$ θα ήταν $x + 1 = 0$, που δεν επιτρέπεται.)

3. α) $x_0 = 3, f(3) = -4$: $K(3, -4)$. Τομές: $(1, 0), (5, 0), (0, 5)$.

β) $\searrow$ στο $(-\infty, 3]$, $\nearrow$ στο $[3, +\infty)$, ελάχιστο $f(3) = -4$.

γ) $x^2 - 6x + 5 = x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 5$: σημεία $(2, -3), (5, 0)$.

δ) $x^2 - 7x + 10 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 5$.

4. α) $A = \mathbb{R} - \{2\}, f(x) = x + 2$ για $x \neq 2$.

β) Η ευθεία $y = x + 2$ **χωρίς** το σημείο $(2, 4)$ (το σημειώνουμε με κενό κυκλάκι).

γ) Ναι: για $x_1 < x_2$ στο A , $x_1 + 2 < x_2 + 2$. Είναι γνησίως αύξουσα (σε καθένα από τα $(-\infty, 2), (2, +\infty)$, αλλά και σε όλο το A , αφού η ευθεία «ανεβαίνει»).

5. α) $f(-3) = -f(3) = -(9 - 6) = -3$.

β) Για $x < 0$ είναι $-x > 0$: $f(x) = -f(-x) = -((-x)^2 - 2(-x)) = -x^2 - 2x$.

γ) Για $x \geq 0$: $x(x - 2) = 0$: $x = 0$ ή $x = 2$. Για $x < 0$: $-x(x + 2) = 0$: $x = -2$. Λύσεις: $-2, 0, 2$.

6. α) $K_\varepsilon(x) = 100x - (x^2 + 20x + 400) = -x^2 + 80x - 400$.

β) Μέγιστο στο $x_0 = 40$: $K_\varepsilon(40) = -1600 + 3200 - 400 = 1200$ €.

γ) $-x^2 + 80x - 400 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 80x + 400 \leq 0$, ρίζες $40 \pm \sqrt{1200} = 40 \pm 20\sqrt{3} \approx 5,36$ και $74,64$. Άρα για $6 \leq x \leq 74$ προϊόντα.

mathgreece.com

Πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο

Βίντεο-μαθήματα · Σημειώσεις · Κουίζ
Podcasts · Παιχνίδια γνώσεων · Πίνακες μελέτης

Για μαθητές Γυμνασίου, Λυκείου και Πανεπιστημίου



Δες το κανάλι **mathgreece** στο YouTube

Τάσος Κοβατσίδης · Άλγεβρα Α' Λυκείου · Εικονογραφημένο βοήθημα