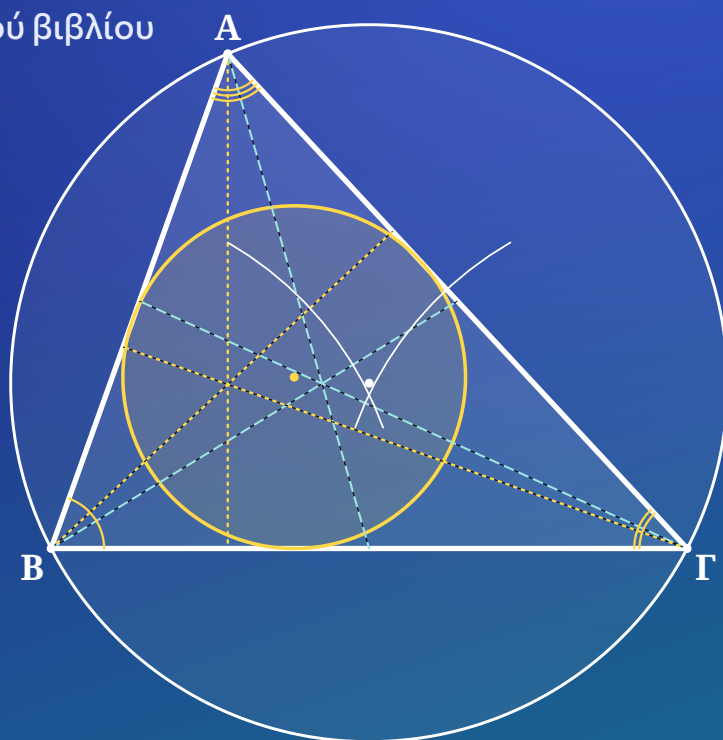


ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πλήρες εικονογραφημένο βοήθημα
για όλη την ύλη του σχολικού βιβλίου



Όλη η θεωρία

κεφάλαια 1–6, μάθημα προς
μάθημα

Λυμένα παραδείγματα

με αναλυτικές λύσεις

Προσοχή!

σημεία-παγίδες της ύλης

Συχνά λάθη

και πώς να τα αποφεύγεις

Ασκήσεις

διαβαθμισμένης δυσκολίας

Λύσεις

όλων των ασκήσεων στο τέλος



Τάσος Κοβατσίδης

Μαθηματικός · δημιουργός του mathgreece.com

mathgreece.com

Πώς να χρησιμοποιήσεις αυτό το βοήθημα

Αγαπητή μαθήτριά, αγαπητέ μαθητή,

το βιβλίο που κρατάς γράφτηκε για να σε συνοδεύει σε όλη τη χρονιά της Γεωμετρίας της Α' Λυκείου. Ακολουθεί πιστά τη σειρά της ύλης του σχολικού βιβλίου — κεφάλαιο προς κεφάλαιο και παράγραφο προς παράγραφο — ώστε να βρίσκεις αμέσως αυτό που διδάχτηκες στην τάξη. Κάθε **μάθημα** ξεκινά σε νέα σελίδα με μια χρωματιστή ταμπέλα που γράφει **σε ποιο κεφάλαιο** και **σε ποιο μάθημα** βρίσκεσαι, ενώ η ίδια πληροφορία επαναλαμβάνεται στο πάνω μέρος κάθε σελίδας. Στο δεξί περιθώριο, το χρωματιστό «αντάκι» με τον αριθμό του κεφαλαίου σε βοηθά να ξεφυλλίζεις γρήγορα.

Η θεωρία δίνεται ολοκληρωμένη, με απλή γλώσσα και πολλά σχήματα. Ακολουθούν **λυμένα παραδείγματα**, τα σημεία που θέλουν **προσοχή**, τα **συχνά λάθη** και, τέλος, **ασκήσεις για λύση** σε τρία επίπεδα δυσκολίας. Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται **στο τέλος του βιβλίου** — δίπλα σε κάθε άσκηση σημειώνεται η σελίδα της λύσης της. Προσπάθησε πρώτα μόνος σου και μετά κοίτα τη λύση. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου θα βρεις μια **ανακεφαλαίωση** και ένα **επαναληπτικό διαγώνισμα**.

► Τα «κουτιά» του βιβλίου

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ακριβής διατύπωση μιας νέας έννοιας. Τους ορισμούς τους μαθαίνουμε **λέξη προς λέξη**.

🏛️ ΑΞΙΩΜΑ

Πρόταση που **δεχόμαστε** ως αληθή χωρίς απόδειξη. Πάνω της «**χτίζεται**» όλη η θεωρία.

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Πρόταση που **αποδεικνύεται**. Δίνεται με την απόδειξή της, γραμμένη βήμα-βήμα.

➡️ ΠΟΡΙΣΜΑ

Άμεση συνέπεια ενός θεωρήματος, **συνήθως** με πολύ σύντομη απόδειξη.

⚠️ ΠΡΟΣΟΧΗ!

Λεπτά σημεία της θεωρίας που κρύβουν παγίδες στις εξετάσεις.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ

Τα πιο συνηθισμένα λάθη των μαθητών (×) δίπλα στη σωστή σκέψη (✓).

📖 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Οδηγός βημάτων για να αντιμετωπίζεις μια κατηγορία ασκήσεων.

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Σχόλια που φωτίζουν τη θεωρία ή συνδέουν έννοιες μεταξύ τους.

✍️ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Πλήρως λυμένη άσκηση: πρώτα η εκφώνηση και μετά η λύση.

🕒 ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Μικρές ιστορίες από τον κόσμο της Γεωμετρίας.

► Τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε

$\hat{A}OB$	γωνία με κορυφή το O	$\hat{A}$	η γωνία του τριγώνου στην κορυφή A
$\widehat{AB}$	τόξο με άκρα A, B	$\varepsilon_1 // \varepsilon_2$	παράλληλες ευθείες
$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$	κάθετες ευθείες	$1 \text{ ορθή} = 90^\circ$	ευθεία γωνία = 180°
(O, ρ)	κύκλος κέντρου O, ακτίνας ρ	α, β, γ	οι πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου
$\Leftrightarrow$	«αν και μόνο αν»	■	τέλος απόδειξης



Το βοήθημα συνεχίζεται online! Στο **mathgreece.com** θα βρεις ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο: βίντεο, σημειώσεις, κουίζ, διαγωνίσματα, podcasts.

Καλή μελέτη και καλή επιτυχία!
Τάσος Κοβατσίδης

Περιεχόμενα

Πώς να χρησιμοποιήσεις αυτό το βοήθημα	2
ΚΕΦ. 1 Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία	6
1.1 Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας	7
1.2 Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας	12
ΚΕΦ. 2 Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα	16
2.1–2.2 Σημεία, γραμμές, επιφάνειες και το επίπεδο	17
§2.1 Σημεία, γραμμές και επιφάνειες	17
§2.2 Το επίπεδο	17
2.3–2.5 Ευθεία, ημιευθεία και ευθύγραμμο τμήμα	19
§2.3 Η ευθεία	19
§2.4 Η ημιευθεία	20
§2.5 Το ευθύγραμμο τμήμα	20
2.6–2.8 Μετατοπίσεις, σύγκριση και πράξεις τμημάτων	23
§2.6 Μετατοπίσεις στο επίπεδο	23
§2.7 Σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων	23
§2.8 Πράξεις μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων	24
2.9–2.10 Μήκος, απόσταση και συμμετρία ως προς κέντρο	27
§2.9 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος - Απόσταση δύο σημείων	27
§2.10 Σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο	27
2.11–2.12 Ημιεπίπεδα και η έννοια της γωνίας	29
§2.11 Ημιεπίπεδα	29
§2.12 Η γωνία	29
2.13–2.14 Σύγκριση γωνιών, διχοτόμος, κάθετες ευθείες	32
§2.13 Σύγκριση γωνιών	32
§2.14 Ευθεία κάθετη από σημείο σε ευθεία	33
2.15–2.16 Πράξεις και απλές σχέσεις γωνιών	36
§2.15 Πράξεις μεταξύ γωνιών	36
§2.16 Απλές σχέσεις γωνιών	37
2.17 Έννοια και στοιχεία του κύκλου	41
2.18 Επίκεντρη γωνία και αντίστοιχο τόξο	45
2.19 Μέτρο τόξου και γωνίας	48
2.20 Τεθλασμένη γραμμή και πολύγωνο	51
★ Ανακεφαλαίωση κεφαλαίου	54
🔍 Επαναληπτικό διαγώνισμα	55
ΚΕΦ. 3 Τρίγωνα	56
3.1 Στοιχεία και είδη τριγώνων	57
3.2 Ισότητα τριγώνων - 1ο κριτήριο (ΠΓΠ)	61

3.3–3.4	2ο (ΓΠΓ) και 3ο (ΠΠΠ) κριτήριο ισότητας	66
§3.3	2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων	66
§3.4	3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων	67
3.5–3.6	Κάθετος από σημείο - Ισότητα ορθογώνιων τριγώνων	71
§3.5	Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου	71
§3.6	Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων	71
3.7	Βασικοί γεωμετρικοί τόποι: κύκλος, μεσοκάθετος, διχοτόμος	76
3.8–3.9	Κεντρική και αξονική συμμετρία	79
§3.8	Κεντρική συμμετρία	79
§3.9	Αξονική συμμετρία	80
3.10	Εξωτερική γωνία τριγώνου	83
3.11–3.12	Ανισοτικές σχέσεις και τριγωνική ανισότητα	86
§3.11	Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών	86
§3.12	Τριγωνική ανισότητα	87
3.13	Κάθετα και πλάγια τμήματα	90
3.14–3.15	Ευθεία και κύκλος - Εφαπτόμενα τμήματα	92
§3.14	Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου	92
§3.15	Εφαπτόμενα τμήματα	93
3.16	Σχετικές θέσεις δύο κύκλων	96
3.17	Βασικές γεωμετρικές κατασκευές	99
3.18	Βασικές κατασκευές τριγώνων	102
★	Ανακεφαλαίωση κεφαλαίου	104
🔪	Επαναληπτικό διαγώνισμα	105

ΚΕΦ. 4 Παράλληλες ευθείες **106**

4.1–4.2	Τέμνουσα δύο ευθειών και αίτημα παραλληλίας	107
§4.1	Εισαγωγή	107
§4.2	Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα	107
4.3–4.4	Κατασκευή παράλληλης - Γωνίες με παράλληλες πλευρές	112
§4.3	Κατασκευή παράλληλης ευθείας	112
§4.4	Γωνίες με πλευρές παράλληλες	112
4.5	Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου	115
4.6–4.7	Άθροισμα γωνιών τριγώνου - Γωνίες με κάθετες πλευρές	118
§4.6	Άθροισμα γωνιών τριγώνου	118
§4.7	Γωνίες με πλευρές κάθετες	119
4.8	Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου	122
★	Ανακεφαλαίωση κεφαλαίου	125
🔪	Επαναληπτικό διαγώνισμα	126

ΚΕΦ. 5 Παραλληλόγραμμα - Τραπεζίδια **127**

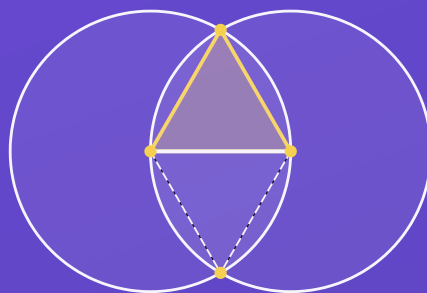
5.1–5.2	Τετράπλευρα - Το παραλληλόγραμμα	128
§5.1	Εισαγωγή	128
§5.2	Παραλληλόγραμμα	128

5.3	Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο	133
5.4–5.5	Ο ρόμβος και το τετράγωνο	135
§5.4	Ρόμβος	135
§5.5	Τετράγωνο	136
5.6	Εφαρμογές στα τρίγωνα: το θεώρημα των μέσων	139
5.7–5.8	Βαρύκεντρο και ορθόκεντρο τριγώνου	142
§5.7	Βαρύκεντρο τριγώνου	142
§5.8	Το ορθόκεντρο τριγώνου	143
5.9	Η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου	146
5.10–5.11	Τραπεζίο και ισοσκελές τραπέζιο	149
§5.10	Τραπεζίο	149
§5.11	Ισοσκελές τραπέζιο	150
5.12	Αξιοσημείωτα σημεία και κύκλοι τριγώνου (ανακεφαλαίωση)	153
★	Ανακεφαλαίωση κεφαλαίου	155
✎	Επαναληπτικό διαγώνισμα	156
ΚΕΦ. 6	Εγγεγραμμένα σχήματα	157
6.1–6.2	Εγγεγραμμένη γωνία	158
§6.1	Εισαγωγικά - Ορισμοί	158
§6.2	Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης	159
6.3	Γωνία χορδής και εφαπτομένης - Γωνία δύο τεμνουσών	162
6.4	Τόξο που δέχεται γνωστή γωνία	165
6.5	Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο	168
6.6	Το εγγράψιμο τετράπλευρο	170
6.7	Κατασκευές με γεωμετρικούς τόπους	174
★	Ανακεφαλαίωση κεφαλαίου	177
✎	Επαναληπτικό διαγώνισμα	178
	Λύσεις των ασκήσεων και των διαγωνισμάτων	179

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1

Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία



Πριν ξεκινήσουμε να αποδεικνύουμε θεωρήματα, αξίζει να καταλάβουμε **τι είδους επιστήμη είναι η Γεωμετρία**: ποια είναι τα «υλικά» της (πρωταρχικές έννοιες, ορισμοί, αξιώματα), πώς παράγει νέα γνώση (θεωρήματα και αποδείξεις) και πώς γεννήθηκε μέσα από την ιστορία των ανθρώπων. Το κεφάλαιο αυτό είναι ο «χάρτης» που θα μας προσανατολίζει σε όλη τη χρονιά.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1.1 Το αντικείμενο της Ευκλείδειας
Γεωμετρίας

7

1.2 Ιστορική αναδρομή στη γένεση και
ανάπτυξη της Γεωμετρίας

12

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ

1.1

Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι μελετά η Γεωμετρία
- να ξεχωρίζεις υπόθεση και συμπέρασμα
- τι είναι πρωταρχική έννοια, ορισμός, αξίωμα
- τι είναι αντίστροφη πρόταση
- τι είναι θεώρημα και τι απόδειξη
- τη μέθοδο της «απαγωγής σε άτοπο»

§1.1

Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

► Τι μελετά η Γεωμετρία;

Γύρω μας υπάρχουν παντού σχήματα: η κόψη ενός χάρακα μάς δίνει την εικόνα της ευθείας, το στεφάνι ενός ποδηλάτου την εικόνα του κύκλου, η επιφάνεια του θρανίου την εικόνα του επιπέδου. Η **Γεωμετρία** είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που μελετά τις **ιδιότητες των σχημάτων**: τη **μορφή** τους, το **μέγεθός** τους και τη **σχετική τους θέση**.

Η Γεωμετρία όμως δεν ασχολείται με τα πραγματικά αντικείμενα αλλά με τις **ιδεατές εικόνες** τους. Η «ευθεία» που σχεδιάζουμε στο τετράδιο έχει πάχος και τελειώνει στην άκρη της σελίδας· η ευθεία της Γεωμετρίας δεν έχει πάχος και εκτείνεται απεριόριστα. Το σχήμα στο χαρτί είναι απλώς ένα **βοήθημα για τη σκέψη μας** και όχι το ίδιο το αντικείμενο της μελέτης.

Η Γεωμετρία που διδασκόμαστε στο Λύκειο λέγεται **Ευκλείδεια**, γιατί τα θεμέλιά της τα συστηματοποίησε ο αρχαίος Έλληνας μαθηματικός **Ευκλείδης** (περίπου 300 π.Χ.) στο περίφημο έργο του, τα «**Στοιχεία**». Φέτος θα ασχοληθούμε με την **επιπεδομετρία**, δηλαδή με σχήματα που βρίσκονται ολόκληρα σε ένα επίπεδο.

► Οι «δομικοί λίθοι» της Γεωμετρίας

Κάθε επιστήμη που θέλει να είναι αυστηρή χρειάζεται ένα σταθερό θεμέλιο. Η Γεωμετρία οικοδομείται σαν ένα κτίριο: κάτω οι θεμέλιοι λίθοι και πάνω τους, όροφος-όροφος, οι νέες γνώσεις. Τα συστατικά της είναι τέσσερα:

1. **Πρωταρχικές έννοιες.** Είναι έννοιες τόσο απλές και θεμελιώδεις, που **δεν ορίζονται**: το **σημείο**, η **ευθεία**, το **επίπεδο**. Τις κατανοούμε διαισθητικά και μέσα από τις ιδιότητες που τους αποδίδουμε.
2. **Ορισμοί.** Με τη βοήθεια των πρωταρχικών εννοιών περιγράφουμε με ακρίβεια κάθε νέα έννοια (π.χ. ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, κύκλος, τρίγωνο).
3. **Αξιώματα.** Είναι προτάσεις που **δεχόμαστε ως αληθείς χωρίς απόδειξη**, επειδή εκφράζουν απλές και «αυτονόητες» ιδιότητες, π.χ. «από δύο σημεία διέρχεται μία μόνο ευθεία».
4. **Θεωρήματα.** Είναι προτάσεις των οποίων την αλήθεια **αποδεικνύουμε** στηριζόμενοι σε ορισμούς, αξιώματα και θεωρήματα που έχουμε ήδη αποδείξει.



Η «πυραμίδα» της Γεωμετρίας

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ Πρωταρχικές έννοιες

Πρωταρχικές έννοιες λέγονται οι βασικές έννοιες που δεχόμαστε **χωρίς ορισμό**. Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία τέτοιες είναι το **σημείο**, η **ευθεία** και το **επίπεδο**.

🏛️ ΟΡΙΣΜΟΣ Τι είναι αξίωμα

Αξίωμα (ή αίτημα) λέγεται μια πρόταση που δεχόμαστε ως αληθή **χωρίς απόδειξη**. Τα αξιώματα πρέπει να μην έρχονται σε αντίφαση μεταξύ τους.

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ Θεώρημα και πόρισμα

Θεώρημα λέγεται κάθε πρόταση που η αλήθειά της αποδεικνύεται με λογικούς συλλογισμούς. **Πόρισμα** λέγεται ένα θεώρημα που προκύπτει άμεσα από ένα άλλο θεώρημα.

► Υπόθεση και συμπέρασμα

Τα περισσότερα θεωρήματα έχουν τη μορφή «**Αν ... , τότε ...**». Το κομμάτι μετά το «αν» λέγεται **υπόθεση** (αυτό που μας δίνεται) και το κομμάτι μετά το «τότε» λέγεται **συμπέρασμα** (αυτό που πρέπει να αποδείξουμε). Για παράδειγμα στην πρόταση

Αν δύο γωνίες είναι κατακορυφήν, τότε είναι ίσες.

η **υπόθεση** είναι «οι γωνίες είναι κατακορυφήν» και το **συμπέρασμα** «οι γωνίες είναι ίσες». Η **απόδειξη** είναι η σειρά από λογικά βήματα που ξεκινά από την υπόθεση και, χρησιμοποιώντας μόνο ορισμούς, αξιώματα και ήδη αποδεδειγμένα θεωρήματα, καταλήγει στο συμπέρασμα.

🔑 ΚΛΕΙΔΙ Ο χρυσός κανόνας

Σε κάθε άσκηση απόδειξης, πριν γράψεις οτιδήποτε, γράψε σε δύο στήλες: «**Δίνεται**» (υπόθεση) και «**Ζητείται**» (συμπέρασμα). Η μισή δουλειά έχει ήδη γίνει!

► Ευθεία και αντίστροφη πρόταση

Αν σε μια πρόταση «Αν Π, τότε Σ» ανταλλάξουμε την υπόθεση με το συμπέρασμα, παίρνουμε την πρόταση «Αν Σ, τότε Π», η οποία λέγεται **αντίστροφη** της αρχικής (ή **ευθείας**) πρότασης.

⚠️ ΠΡΟΣΟΧΗ!

⚠️ Η αλήθεια μιας πρότασης **δεν εξασφαλίζει** την αλήθεια της αντίστροφής της. «Αν δύο γωνίες είναι ορθές, τότε είναι ίσες» είναι αληθής· η αντίστροφη «Αν δύο γωνίες είναι ίσες, τότε είναι ορθές» είναι **ψευδής** (π.χ. δύο γωνίες των 40°).

⚠️ Όταν ισχύουν **και η ευθεία και η αντίστροφη**, γράφουμε τις δύο προτάσεις μαζί με τη φράση «**αν και μόνο αν**» ή με το σύμβολο $\Leftrightarrow$. Στις ασκήσεις τύπου « $\Rightarrow$ » πρέπει να αποδείξεις **δύο** κατευθύνσεις!

► Η μέθοδος της «απαγωγής σε άτοπο»

Μερικές φορές είναι δύσκολο να φτάσουμε κατευθείαν στο συμπέρασμα. Τότε χρησιμοποιούμε έναν έξυπνο τρόπο σκέψης: **υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει** και, με σωστούς συλλογισμούς, καταλήγουμε σε κάτι που είναι **αδύνατο** — σε κάτι που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση, με ένα αξίωμα ή με ένα γνωστό θεώρημα. Αυτό το «αδύνατο» λέγεται **άτοπο**. Αφού η παραδοχή μας οδήγησε σε άτοπο, ήταν λανθασμένη· άρα το συμπέρασμα ισχύει.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ Απαγωγή σε άτοπο, βήμα-βήμα

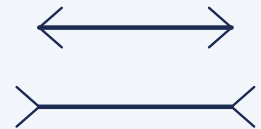
1. Γράφουμε: «Έστω ότι δεν ισχύει το ζητούμενο, δηλαδή ...» (διατυπώνουμε την άρνησή του).
2. Με λογικά βήματα οδηγούμαστε σε μια πρόταση που αντιφάσκει με κάτι γνωστό.
3. Γράφουμε: «... που είναι άτοπο, γιατί ...» και εξηγούμε με ποια γνωστή αλήθεια συγκρούεται.
4. Συμπεραίνουμε: «Άρα ισχύει το ζητούμενο».

► **Ο ρόλος του σχήματος**

Το σχήμα είναι πολύτιμος βοηθός: μας βοηθά να καταλάβουμε την εκφώνηση και να «δούμε» την ιδέα της λύσης. Ποτέ όμως δεν αποτελεί απόδειξη. Αν δύο τμήματα «φαίνονται» ίσα ή μια γωνία «φαίνεται» ορθή, αυτό **δεν** το χρησιμοποιούμε, εκτός αν προκύπτει από τα δεδομένα. Γι' αυτό συνηθίζουμε να σχεδιάζουμε **γενικά σχήματα** (π.χ. ένα τυχαίο, «στραβό» τρίγωνο και όχι ένα ισόπλευρο), για να μην μας «ξεγελάσει» μια ιδιότητα που δεν δόθηκε.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Μην εμπιστεύεσαι τα μάτια σου

Τα δύο οριζόντια τμήματα του σχήματος έχουν **ακριβώς το ίδιο μήκος**, όμως το μάτι μας «βλέπει» το κάτω μεγαλύτερο (οφθαλμαπάτη Müller-Lyer). Να γιατί στη Γεωμετρία εμπιστευόμαστε την απόδειξη και όχι την εικόνα!

**ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ** — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Το σχήμα δείχνει ότι $AB = AG$, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.»

✓ Χρησιμοποιούμε μόνο όσα δίνονται ή αποδεικνύονται. Αν η ισότητα δεν δίνεται, πρέπει να την αποδείξουμε.

✗ «Αποδείξαμε μια πρόταση, άρα ισχύει και η αντίστροφή της.»

✓ Η αντίστροφη είναι **άλλη** πρόταση και χρειάζεται τη δική της απόδειξη (μπορεί και να είναι ψευδής).

✗ Ξεκινάμε την απόδειξη από αυτό που ζητείται, σαν να το ξέρουμε ήδη.

✓ Ξεκινάμε πάντα από την **υπόθεση** και καταλήγουμε στο συμπέρασμα (ή κάνουμε απαγωγή σε άτοπο, δηλώνοντάς το ρητά).

✗ «Σημείο είναι μια πολύ μικρή τελεία.»

✓ Το σημείο είναι πρωταρχική έννοια: **δεν ορίζεται**. Η τελεία είναι μόνο ο τρόπος που το σχεδιάζουμε.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Υπόθεση και συμπέρασμα

Να βρείτε την υπόθεση και το συμπέρασμα της πρότασης: «Κάθε σημείο της μεσοκάθετου ενός τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του».

Λύση Ξαναγράφουμε την πρόταση στη μορφή «Αν ..., τότε ...»: «Αν ένα σημείο ανήκει στη μεσοκάθετο ενός τμήματος AB , τότε ισαπέχει από τα άκρα A και B ».

Υπόθεση: το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετο του AB . **Συμπέρασμα:** $MA = MB$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Αντίστροφη πρόταση και αντιπαράδειγμα

Να διατυπώσετε την αντίστροφη της πρότασης «Αν ένας φυσικός αριθμός λήγει σε 0, τότε διαιρείται με το 5» και να εξετάσετε αν είναι αληθής.

Λύση Αντίστροφη: «Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5, τότε λήγει σε 0». Η πρόταση αυτή είναι **ψευδής**: ο αριθμός 15 διαιρείται με το 5 αλλά λήγει σε 5. Ένα τέτοιο παράδειγμα που «γκρεμίζει» μια γενική πρόταση λέγεται **αντιπαράδειγμα**.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Πρώτη απαγωγή σε άτοπο

Δεχόμαστε ότι από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται μία μόνο ευθεία. Να αποδείξετε ότι δύο διαφορετικές ευθείες έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

Λύση Έστω ότι οι διαφορετικές ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν **δύο** διαφορετικά κοινά σημεία Α και Β. Τότε από τα Α, Β θα διέρχονταν δύο διαφορετικές ευθείες, η ε_1 και η ε_2 . Αυτό είναι **άτοπο**, γιατί από δύο σημεία διέρχεται μία μόνο ευθεία. Άρα οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

 Θέλεις να το δεις και σε βίντεο;

Στο **mathgreece.com** θα βρεις αυτό το μάθημα εξηγημένο βήμα-βήμα σε βιντεομάθημα, μαζί με σημειώσεις και κουίζ αυτοαξιολόγησης. Ένα **πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο**, στη διάθεσή σου όποτε το χρειαστείς.

www.mathgreece.com

 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 1.1 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Ποιες από τις παρακάτω έννοιες είναι πρωταρχικές: (α) σημείο, (β) τρίγωνο, (γ) επίπεδο, (δ) κύκλος, (ε) ευθεία, (στ) γωνία;

Λύση → σελ. 179

- 2** Να γράψετε σε μορφή «Αν ..., τότε ...» και να ξεχωρίσετε υπόθεση και συμπέρασμα: «Οι γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες».

Λύση → σελ. 179

- 3** Να διατυπώσετε την αντίστροφη καθεμιάς πρότασης και να εξετάσετε αν αληθεύει:
 α) «Αν ένας ακέραιος είναι πολλαπλάσιο του 4, τότε είναι άρτιος».
 β) «Αν δύο γωνίες είναι ορθές, τότε είναι ίσες».
 γ) «Αν ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, τότε έχει τέσσερις ίσες πλευρές».

Λύση → σελ. 179

- 4** Βρείτε μια πρόταση της καθημερινής ζωής ή των Μαθηματικών που να είναι αληθής και να έχει επίσης αληθή αντίστροφη. Γράψτε την με τη χρήση του «αν και μόνο αν».

Λύση → σελ. 179

- 5** Χρησιμοποιώντας απαγωγή σε άτοπο, να αποδείξετε ότι αν το τετράγωνο n^2 ενός φυσικού αριθμού n είναι περιττός, τότε και ο n είναι περιττός.

Λύση → σελ. 179

- 6 Ένας μαθητής «απέδειξε» ότι ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο μετρώντας με το μοιρογνωμόνιο τη γωνία του και βρίσκοντας 90° . Είναι σωστή η απόδειξή του; Να εξηγήσετε.

Λύση → σελ. 179

- 7 Δεχόμαστε ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει ένα μόνο μέσο. Να αποδείξετε με απαγωγή σε άτοπο ότι ένα τμήμα AB δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικά σημεία M, N με $AM = MB$ και $AN = NB$.

Λύση → σελ. 179

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ

1.2

Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας

🕒 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- πώς γεννήθηκε η Γεωμετρία στην Αίγυπτο και τη Μεσοποταμία
- τη μεγάλη τομή των αρχαίων Ελλήνων: την απόδειξη
- τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη και τα αιτήματά του
- πώς εξελίχθηκε η Γεωμετρία μέχρι σήμερα

§1.2 Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας

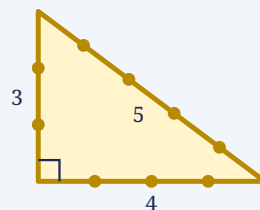
► Από τη μέτρηση της γης...

Η ίδια η λέξη **γεω-μετρία** μαρτυρά την καταγωγή της: σημαίνει «μέτρηση της γης». Ο ιστορικός **Ηρόδοτος** αναφέρει ότι στην αρχαία Αίγυπτο οι πλημμύρες του Νείλου έσβηναν κάθε χρόνο τα σύνορα των χωραφιών, και οι ειδικοί «σχοινοτεντωτές» (αρπεδονάπτες) έπρεπε να τα ξαναχαράξουν με τεντωμένα σκοινιά. Αιγύπτιοι και Βαβυλώνιοι γνώριζαν πολλούς πρακτικούς κανόνες: πώς να υπολογίζουν εμβαδά χωραφιών και όγκους σιταποθηκών, πώς να χαράζουν ορθές γωνίες, πώς να κατασκευάζουν πυραμίδες με εκπληκτική ακρίβεια.

Η γνώση τους όμως ήταν **εμπειρική**: ήταν συνταγές που «δούλευαν», χωρίς κάποιος να εξηγεί **γιατί** δουλεύουν. Μερικές μάλιστα ήταν λανθασμένες ή προσεγγιστικές.

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Το σκοινί των 12 κόμβων

Ένα σκοινί με 12 ίσα διαστήματα (13 κόμπους), τεντωμένο σε τρίγωνο με πλευρές 3, 4 και 5 διαστήματα, σχηματίζει **ορθή γωνία**. Λέγεται ότι με ένα τέτοιο «εργαλείο» οι αρχαίοι χάραζαν ορθές γωνίες στο έδαφος.

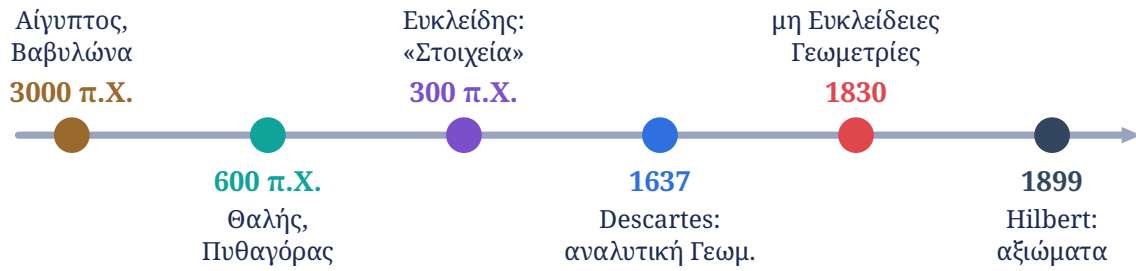


► ...στη Γεωμετρία ως επιστήμη: το «ελληνικό θαύμα»

Η μεγάλη αλλαγή έγινε στην αρχαία Ελλάδα, από τον 6ο αιώνα π.Χ. και μετά. Οι Έλληνες δεν αρκέστηκαν στο «πώς»· ρώτησαν «γιατί». Εισήγαγαν την **απόδειξη**: η αλήθεια μιας πρότασης έπρεπε να στηρίζεται σε λογικά επιχειρήματα και όχι σε μετρήσεις ή στην αυθεντία κάποιου.

- **Θαλής ο Μιλήσιος** (περ. 624–546 π.Χ.): θεωρείται ο πρώτος που απέδειξε γεωμετρικές προτάσεις (π.χ. ότι η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη, ότι οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες, ότι η εγγεγραμμένη γωνία σε ημικύκλιο είναι ορθή).
- **Πυθαγόρας** και οι **Πυθαγόρειοι** (6ος–5ος αι. π.Χ.): μελέτησαν συστηματικά τις ιδιότητες των αριθμών και των σχημάτων· ανακάλυψαν τα ασύμμετρα μεγέθη.
- **Πλάτων** (427–347 π.Χ.): στην είσοδο της Ακαδημίας του λέγεται ότι υπήρχε η επιγραφή «Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω».
- **Εύδοξος ο Κνίδιος** (4ος αι. π.Χ.): θεμελίωσε τη θεωρία των λόγων και τη «μέθοδο της εξάντλησης».
- **Ευκλείδης** (περ. 300 π.Χ.): δίδαξε στην Αλεξάνδρεια και έγραψε τα «Στοιχεία».

- **Αρχιμήδης** (287–212 π.Χ.), **Απολλώνιος** (κωνικές τομές), **Ήρων**, **Πάππος**: συνέχισαν το έργο, φτάνοντας σε θαυμαστά αποτελέσματα.



Μια σύντομη χρονογραμμή της Γεωμετρίας

► Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη

Τα «Στοιχεία» αποτελούνται από **13 βιβλία** και είναι, μετά τη Βίβλο, ίσως το βιβλίο με τις περισσότερες εκδόσεις στην ιστορία: διδάσκονταν σχεδόν αυτούσια επί δύο χιλιάδες χρόνια. Η μεγαλοφυΐα του Ευκλείδη δεν βρίσκεται τόσο στην ανακάλυψη νέων θεωρημάτων όσο στην **οργάνωση** όλης της γνώσης της εποχής σε ένα ενιαίο **αξιωματικό σύστημα**: ξεκινά από **23 ορισμούς**, **5 αιτήματα** και **5 κοινές έννοιες** και από αυτά αποδεικνύει, το ένα μετά το άλλο, εκατοντάδες θεωρήματα.

🏛️ ΑΙΤΗΜΑΤΑ Τα πέντε αιτήματα του Ευκλείδη (σε ελεύθερη απόδοση)

1. Από κάθε σημείο προς κάθε άλλο σημείο μπορεί να αχθεί ευθεία γραμμή.
2. Κάθε πεπερασμένη ευθεία μπορεί να προεκταθεί συνεχώς.
3. Με κάθε κέντρο και κάθε ακτίνα μπορεί να γραφεί κύκλος.
4. Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.
5. Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες και σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες, αν προεκταθούν, τέμνονται προς το μέρος αυτών των γωνιών.

► Από το 5ο αίτημα στις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες

Το **5ο αίτημα** (που θα το συναντήσουμε στο Κεφάλαιο 4 ως **αίτημα παραλληλίας**) φαινόταν στους μαθηματικούς λιγότερο «αυτονόητο» από τα υπόλοιπα. Επί αιώνες προσπαθούσαν να το αποδείξουν από τα άλλα τέσσερα — χωρίς επιτυχία. Τον 19ο αιώνα οι **Lobachevsky**, **Bolyai** και **Gauss** και αργότερα ο **Riemann** έδειξαν ότι, αν το αντικαταστήσουμε με διαφορετικό αξίωμα, προκύπτουν νέες, εξίσου συνεπείς Γεωμετρίες: οι **μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες**. Μία από αυτές χρησιμοποίησε ο Einstein στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας!

Στο μεταξύ, ο **Descartes** (1637) ένωσε τη Γεωμετρία με την Άλγεβρα (αναλυτική Γεωμετρία, τις συντεταγμένες που θα μάθεις στη Β' Λυκείου), ενώ το 1899 ο **David Hilbert** στο έργο του «Θεμέλια της Γεωμετρίας» έδωσε ένα πλήρες και αυστηρό σύστημα αξιωμάτων, συμπληρώνοντας τα κενά του Ευκλείδη.

🕒 ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ «Δεν υπάρχει βασιλικός δρόμος»

Λέγεται ότι ο βασιλιάς Πτολεμαίος ρώτησε κάποτε τον Ευκλείδη αν υπάρχει πιο σύντομος δρόμος για να μάθει Γεωμετρία από τη μελέτη των «Στοιχείων». Ο Ευκλείδης απάντησε: «*Ουκ έστι βασιλική ατραπός επί γεωμετρίαν*» — δεν υπάρχει βασιλικός δρόμος για τη Γεωμετρία. Η κατανόηση κερδίζεται μόνο με προσωπική προσπάθεια!

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Δεν χρειάζεται να αποστηθίσεις ημερομηνίες. Χρειάζεται όμως να καταλάβεις την **ιδέα**: η Γεωμετρία πέρασε από την **εμπειρική** γνώση (συνταγές) στην **αποδεικτική** επιστήμη (θεωρήματα με απόδειξη), χάρη στους αρχαίους Έλληνες.
- ⚠ Το «αίτημα» του Ευκλείδη είναι ό,τι σήμερα λέμε **αξίωμα**.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Η Γεωμετρία είναι ελληνική εφεύρεση· πριν από τους Έλληνες δεν υπήρχε.»

✓ Γεωμετρικές γνώσεις υπήρχαν στην Αίγυπτο και τη Μεσοποταμία. Οι Έλληνες πρόσθεσαν την **απόδειξη** και την αξιωματική οργάνωση.

✗ «Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία σημαίνει λάθος Γεωμετρία.»

✓ Είναι Γεωμετρίες με διαφορετικό αξίωμα παραλληλίας, εξίσου λογικά συνεπείς, απλώς περιγράφουν «καμπύλους» χώρους.

🔗 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Εμπειρία και απόδειξη

Γιατί λέμε ότι οι γνώσεις των Αιγυπτίων ήταν «εμπειρικές», ενώ η Γεωμετρία των αρχαίων Ελλήνων ήταν «αποδεικτική»;

Λύση Οι Αιγύπτιοι είχαν **κανόνες** που είχαν προκύψει από την πείρα και τη δοκιμή (π.χ. πώς να χαράξουν ορθή γωνία), χωρίς να τους αιτιολογούν. Οι αρχαίοι Έλληνες απαιτούσαν κάθε ισχυρισμός να **αποδεικνύεται** λογικά από απλούστερες, αποδεκτές προτάσεις (αξιώματα). Έτσι η Γεωμετρία έγινε επιστήμη με γενικά και βέβαια συμπεράσματα.

🔗 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Η αξιωματική μέθοδος

Ποια είναι η δομή των «Στοιχείων» του Ευκλείδη και γιατί θεωρείται πρότυπο για όλη την επιστήμη;

Λύση Τα «Στοιχεία» ξεκινούν από λίγους **ορισμούς**, **αιτήματα** και **κοινές έννοιες** και, χρησιμοποιώντας μόνο λογική, αποδεικνύουν διαδοχικά όλα τα θεωρήματα. Αυτή η **αξιωματική μέθοδος** —λίγες βασικές παραδοχές και όλα τα υπόλοιπα με απόδειξη— αποτέλεσε πρότυπο για κάθε αυστηρή επιστήμη.



Στο **mathgreece.com** θα βρεις podcasts και βίντεο με ιστορίες από τον κόσμο των Μαθηματικών — ένα πλήρες δωρεάν φροντιστήριο που κάνει τη μελέτη πιο ζωντανή.

📋 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 1.2 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

• βασική • μέτρια ••• απαιτητική

1

Τι σημαίνει ετυμολογικά η λέξη «Γεωμετρία» και πώς συνδέεται με την καταγωγή της;

Λύση → σελ. 179

2

Να αναφέρετε τρία από τα αποτελέσματα που αποδίδονται στον Θαλή τον Μιλήσιο.

Λύση → σελ. 180

- 3 Από πόσα βιβλία αποτελούνται τα «Στοιχεία» και από πόσους ορισμούς, αιτήματα και κοινές έννοιες ξεκινά ο Ευκλείδης;

Λύση → σελ. 180

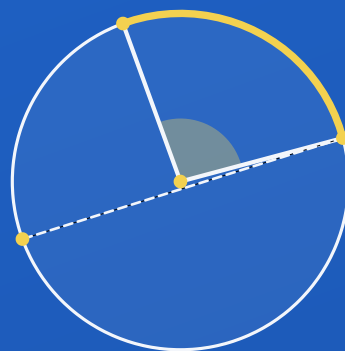
- 4 Τι είναι οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες και ποιο αίτημα του Ευκλείδη σχετίζεται με τη γέννησή τους;

Λύση → σελ. 180

- 5 Ένα σκοινί με 13 κόμπους σε ίσες αποστάσεις (12 ίσα διαστήματα) τεντώνεται σε τρίγωνο. Με ποιον τρόπο πρέπει να το τεντώσουμε ώστε να σχηματιστεί ορθή γωνία; Γιατί κατά τη γνώμη σας οι αρχαίοι Αιγύπτιοι δεν θεωρούσαν ότι χρειάζεται απόδειξη αυτής της κατασκευής;

Λύση → σελ. 180

Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα



Σημείο, ευθεία, τμήμα, γωνία, κύκλος: αυτά είναι τα «γράμματα» με τα οποία θα «γράφουμε» όλη τη Γεωμετρία. Στο κεφάλαιο αυτό θα τα ορίσουμε με ακρίβεια, θα μάθουμε να τα συγκρίνουμε και να κάνουμε πράξεις με αυτά, θα γνωρίσουμε τις σχέσεις των γωνιών και τα στοιχεία του κύκλου και, τέλος, θα συναντήσουμε την τεθλασμένη γραμμή και το πολύγωνο.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

2.1	Σημεία, γραμμές και επιφάνειες	17	2.11	Ημιεπίπεδα	29
2.2	Το επίπεδο	17	2.12	Η γωνία	29
2.3	Η ευθεία	19	2.13	Σύγκριση γωνιών	32
2.4	Η ημιευθεία	20	2.14	Ευθεία κάθετη από σημείο σε ευθεία	33
2.5	Το ευθύγραμμο τμήμα	20	2.15	Πράξεις μεταξύ γωνιών	36
2.6	Μετατοπίσεις στο επίπεδο	23	2.16	Απλές σχέσεις γωνιών	37
2.7	Σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων	23	2.17	Έννοια και στοιχεία του κύκλου	41
2.8	Πράξεις μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων	24	2.18	Επίκεντρη γωνία - Σχέση επίκεντρης γωνίας και τόξου	45
2.9	Μήκος ευθύγραμμου τμήματος - Απόσταση δύο σημείων	27	2.19	Μέτρο τόξου και γωνίας	48
2.10	Σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο	27	2.20	Τεθλασμένη γραμμή - Πολύγωνο - Στοιχεία πολυγώνου	51

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ

2.1–2.2

Σημεία, γραμμές, επιφάνειες και το επίπεδο

§2.1 Σημεία, γραμμές και επιφάνειες · §2.2 Το επίπεδο

🕒 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- πώς παριστάνουμε και ονομάζουμε ένα σημείο
- τι είναι το επίπεδο και τα επίπεδα σχήματα
- τι είναι γραμμή και τι επιφάνεια
- τι μελετά η επιπεδομετρία

§2.1 Σημεία, γραμμές και επιφάνειες

Το **σημείο** δεν έχει διαστάσεις: δεν έχει μήκος, πλάτος ή πάχος. Το παριστάνουμε με μια μικρή τελεία και το ονομάζουμε με ένα **κεφαλαίο γράμμα**: σημείο A, σημείο B κ.λπ.



Σημεία και μια γραμμή

Αν μετακινήσουμε τη μύτη του μολυβιού πάνω στο χαρτί **χωρίς να το σκώσουμε**, το ίχνος που αφήνει είναι μια **γραμμή**. Σε κάθε στιγμή η μύτη βρίσκεται σε ένα σημείο, οπότε μπορούμε να φανταζόμαστε τη γραμμή ως μια **συνεχή σειρά θέσεων** που παίρνει ένα κινούμενο σημείο.

Τη μορφή κάθε στερεού σώματος (ενός κύβου, μιας μπάλας) την αντιλαμβανόμαστε από το «περίβλημά» του. Το σύνολο των σημείων που χωρίζουν ένα σώμα από το περιβάλλον του λέγεται **επιφάνεια** του σώματος.

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Διαστάσεις

Μια χρήσιμη εικόνα: ένα στερεό έχει **τρεις** διαστάσεις, μια επιφάνεια **δύο**, μια γραμμή **μία** και ένα σημείο **καμία**. Το σημείο «κινούμενο» γράφει γραμμή, η γραμμή «κινούμενη» γράφει επιφάνεια.

§2.2 Το επίπεδο

Η απλούστερη απ' όλες τις επιφάνειες είναι η **επίπεδη επιφάνεια** ή απλά το **επίπεδο**. Την εικόνα του μας τη δίνουν η επιφάνεια του πίνακα, ενός γυαλιστερού πατώματος, μιας ήρεμης λίμνης. Το επίπεδο το φανταζόμαστε να εκτείνεται **απεριόριστα** προς όλες τις κατευθύνσεις και το συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαίο γράμμα (Π , Π_1 , ...).

Το πρώτο μέρος της Γεωμετρίας που θα μελετήσουμε λέγεται **επιπεδομετρία**. Σε αυτήν δεν θα ορίσουμε το επίπεδο ούτε θα απαριθμήσουμε τα αξιώματά του· θα το μελετήσουμε μέσα από τις ιδιότητες των σχημάτων που **όλα τα σημεία τους βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο**. Τα σχήματα αυτά λέγονται **επίπεδα σχήματα**.

Επίπεδα σχήματα στο επίπεδο Π

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Επίπεδο σχήμα λέγεται κάθε σχήμα του οποίου όλα τα σημεία ανήκουν στο ίδιο επίπεδο. Ο κλάδος της Γεωμετρίας που μελετά τα επίπεδα σχήματα λέγεται **επιπεδομετρία**.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Σημείο, ευθεία και επίπεδο είναι **πρωταρχικές έννοιες**· δεν τους δίνουμε ορισμό. Οι περιγραφές της ενότητας (τελεία, ίχνος μολυβιού, πίνακας) είναι εικόνες για να τις φανταστούμε, όχι ορισμοί.
- ⚠ Το σχεδιασμένο επίπεδο (ένα παραλληλόγραμμο στο χαρτί) είναι μόνο ένα κομμάτι του· το επίπεδο εκτείνεται απεριόριστα.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Το σημείο είναι μια πολύ μικρή κουκκίδα.»

✓ Το σημείο δεν έχει καθόλου διαστάσεις· η κουκκίδα είναι απλώς η παράστασή του.

✗ «Ένα κουτί παπουτσιών είναι επίπεδο σχήμα.»

✓ Το κουτί είναι στερεό· τα σημεία του δεν βρίσκονται όλα στο ίδιο επίπεδο. Επίπεδο σχήμα είναι π.χ. μία έδρα του.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ποια από τα παρακάτω είναι επίπεδα σχήματα: (α) ένα τρίγωνο ζωγραφισμένο στον πίνακα, (β) μια μπάλα, (γ) ένας κύκλος, (δ) ένα κουτάκι αναψυκτικού;

Λύση Επίπεδα σχήματα είναι το (α) και το (γ), γιατί όλα τα σημεία τους βρίσκονται σε ένα επίπεδο. Η μπάλα και το κουτάκι είναι στερεά σώματα (τρεις διαστάσεις)· οι επιφάνειές τους δεν είναι επίπεδες.



Για βίντεο, κουίζ και επιπλέον λυμένες ασκήσεις σε αυτό το μάθημα, επισκέψου το **mathgreece.com** — πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.

📖 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 2.1–2.2 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ● μέτρια ●● απαιτητική

1 Να συμπληρώσετε τα κενά: «Το σημείο έχει ... διαστάσεις, η γραμμή ..., η επιφάνεια ... και το στερεό ...».

Λύση → σελ. 180

2 Να αναφέρετε τρία αντικείμενα της τάξης σας που δίνουν την εικόνα επιπέδου και ένα που δίνει την εικόνα καμπύλης επιφάνειας.

Λύση → σελ. 180

3 Γιατί λέμε ότι στην επιπεδομετρία «δεν ορίζουμε» το επίπεδο; Πώς τότε το μελετάμε;

Λύση → σελ. 180

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ

2.3–2.5

Ευθεία, ημιευθεία και ευθύγραμμο τμήμα

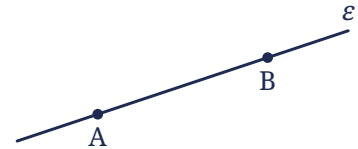
§2.3 Η ευθεία · §2.4 Η ημιευθεία · §2.5 Το ευθύγραμμο τμήμα

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- ότι από δύο σημεία περνά μία μόνο ευθεία
- ημιευθεία, φορέας, αντικείμενες ημιευθείες
- τεμνόμενες και παράλληλες ευθείες
- ευθύγραμμο τμήμα, άκρα, εσωτερικά σημεία, διαδοχικά τμήματα

§2.3 Η ευθεία

Η **ευθεία** είναι πρωταρχική έννοια. Την εικόνα της μας τη δίνει ένα τεντωμένο νήμα ή η κόψη του χάρακα. Κάθε ευθεία έχει **άπειρα σημεία** και εκτείνεται **απεριόριστα** και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.



Η ευθεία AB (ή ε)

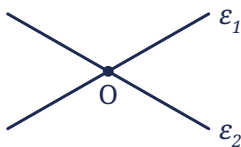
🏛️ ΑΞΙΩΜΑ Η ευθεία που ορίζουν δύο σημεία

Από δύο διαφορετικά σημεία A και B διέρχεται **μία και μόνο** ευθεία.

Την ευθεία αυτή την ονομάζουμε **ευθεία AB** (ή BA). Μια ευθεία τη συμβολίζουμε επίσης με ένα μικρό ελληνικό γράμμα (ϵ , ζ , η , ...) ή με δύο μικρά γράμματα στα «άκρα» της, π.χ. $x'x$, $y'y$. Σημεία που ανήκουν στην ίδια ευθεία λέγονται **συνευθειακά**.

➤ Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

Από το αξίωμα προκύπτει αμέσως ότι **δύο διαφορετικές ευθείες δεν μπορούν να έχουν δύο κοινά σημεία** (αλλιώς από τα δύο αυτά σημεία θα περνούσαν δύο ευθείες). Επομένως δύο διαφορετικές ευθείες έχουν **ένα μόνο κοινό σημείο ή κανένα**.



τεμνόμενες: ένα κοινό σημείο



παράλληλες: κανένα κοινό σημείο

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο ευθείες που έχουν **ένα μόνο κοινό σημείο** λέγονται **τεμνόμενες** και το κοινό σημείο τους λέγεται **σημείο τομής**. Δύο ευθείες (του ίδιου επιπέδου) που **δεν έχουν κανένα κοινό σημείο** λέγονται **παράλληλες** και γράφουμε $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$.

§2.4 Η ημιευθεία

Ας πάρουμε μια ευθεία $x'x$ και ένα σημείο της A . Το σημείο A χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη. Καθένα από αυτά, μαζί με το A , λέγεται **ημιευθεία με αρχή το A** . Τις συμβολίζουμε Ax και Ax' .



Οι αντικείμενες ημιευθείες Ax και Ax'

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ευθεία $x'x$ πάνω στην οποία βρίσκεται η ημιευθεία Ax λέγεται **φορέας** της. Δύο ημιευθείες Ax , Ay που έχουν τον **ίδιο φορέα** και **μόνο κοινό σημείο την αρχή τους** λέγονται **αντικείμενες**.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Δύο ημιευθείες με κοινή αρχή που βρίσκονται στην ίδια ευθεία **και «κοιτάζουν» προς την ίδια μεριά** **δεν** είναι αντικείμενες· ταυτίζονται! Για να είναι αντικείμενες πρέπει να έχουν **αντίθετη φορά**, δηλαδή μόνο κοινό σημείο την αρχή τους.

§2.5 Το ευθύγραμμο τμήμα

Πάνω σε μια ευθεία ε παίρνουμε δύο διαφορετικά σημεία A και B .



Το τμήμα AB και ένα εσωτερικό του σημείο Γ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ευθύγραμμο τμήμα AB (ή BA) λέγεται το σχήμα που αποτελείται από τα σημεία A , B και από όλα τα σημεία της ευθείας ε που βρίσκονται **μεταξύ** των A και B .

Τα A και B λέγονται **άκρα** του τμήματος, η ευθεία ε λέγεται **φορέας** του, ενώ τα σημεία του τμήματος εκτός από τα άκρα λέγονται **εσωτερικά σημεία**. Αν το Γ είναι εσωτερικό σημείο του AB , λέμε ότι τα A , B βρίσκονται **εκατέρωθεν** του Γ , ενώ τα B , Γ βρίσκονται **προς το ίδιο μέρος** του A .

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο τμήματα που έχουν **ένα κοινό άκρο** και **κανένα κοινό εσωτερικό σημείο** λέγονται **διαδοχικά**.



Διαδοχικά τμήματα (στην ίδια ή σε διαφορετικές ευθείες)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Σύμβαση για τις προεκτάσεις

Όταν λέμε «**προεκτείνουμε το τμήμα AB** » εννοούμε προς το μέρος του **B** (του δεύτερου γράμματος), ενώ «**προεκτείνουμε το BA** » σημαίνει προς το μέρος του **A** .

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα: η ευθεία δεν έχει άκρα, η ημιευθεία έχει **ένα** άκρο (την αρχή), το τμήμα έχει **δύο**.
- ⚠ Το συμβολισμό τον διαβάζουμε προσεκτικά: η ημιευθεία Αχ ξεκινά από το Α· η «ημιευθεία ΑΒ» ξεκινά από το Α και περνά από το Β, ενώ η «ημιευθεία ΒΑ» είναι **άλλη** ημιευθεία (ξεκινά από το Β).
- ⚠ Διαδοχικά τμήματα **δεν** σημαίνει απαραίτητα ότι βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Δύο ευθείες μπορεί να έχουν δύο κοινά σημεία.»

✓ Αν δύο ευθείες έχουν δύο κοινά σημεία, **ταυτίζονται** (από δύο σημεία περνά μία μόνο ευθεία).

✗ «Τα τμήματα ΑΓ και ΑΒ (με Γ μεταξύ Α, Β) είναι διαδοχικά.»

✓ Όχι· έχουν κοινά εσωτερικά σημεία (όλο το ΑΓ). Διαδοχικά είναι τα ΑΓ και ΓΒ.

✗ «Οι ημιευθείες ΑΒ και ΒΑ είναι αντικείμενες.»

✓ Έχουν διαφορετικές αρχές (Α και Β)· αντικείμενες είναι ημιευθείες με την ίδια αρχή και αντίθετη φορά.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Μετράμε τμήματα και ημιευθείες

Πάνω σε μια ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ. Πόσα και ποια ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται; Πόσες ημιευθείες με αρχή ένα από αυτά τα σημεία ορίζονται;



Λύση Κάθε τμήμα ορίζεται από ένα ζευγάρι σημείων: ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ, ΓΔ, δηλαδή **6 τμήματα** (γενικά για ν σημεία είναι $\frac{n(n-1)}{2}$). Κάθε σημείο ορίζει πάνω στην ε **δύο** αντικείμενες ημιευθείες, άρα έχουμε $4 \cdot 2 = 8$ ημιευθείες.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Ευθείες από τρία σημεία

Τρία σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά. Πόσες ευθείες ορίζουν; Αν ήταν συνευθειακά;

Λύση Αν δεν είναι συνευθειακά, κάθε ζευγάρι ορίζει διαφορετική ευθεία: ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, δηλαδή **3 ευθείες**. Αν είναι συνευθειακά, όλα ανήκουν στην ίδια ευθεία, οπότε ορίζουν **μία** μόνο ευθεία.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Τέσσερα σημεία

Δίνονται τέσσερα σημεία του επιπέδου, ανά τρία μη συνευθειακά. Πόσες ευθείες ορίζουν;

Λύση Κάθε ευθεία ορίζεται από δύο σημεία και, επειδή κανένα τρίτο σημείο δεν βρίσκεται πάνω της, κάθε ζευγάρι δίνει διαφορετική ευθεία. Τα ζευγάρια είναι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ, ΓΔ, άρα **6 ευθείες**.



Περισσότερη εξάσκηση;

Αν θέλεις κι άλλες ασκήσεις πάνω σε αυτή την ενότητα, μπες στο **mathgreece.com**: εκεί υπάρχει πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με λυμένες ασκήσεις, διαγωνίσματα και βίντεο για όλη τη Γεωμετρία.

www.mathgreece.com

Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 2.3–2.5 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Να εξηγήσετε γιατί δύο διαφορετικές ευθείες δεν μπορεί να έχουν δύο κοινά σημεία. Ποιες είναι οι δυνατές περιπτώσεις για το πλήθος των κοινών τους σημείων;
● Λύση → σελ. 180
- 2 Στην ευθεία x' παίρνουμε τα σημεία A, B με το B προς το μέρος του x . Να γράψετε όλες τις ημιευθείες με αρχή το A ή το B που ορίζονται και να βρείτε ποιες είναι αντικείμενες.
● Λύση → σελ. 180
- 3 Τα σημεία A, B, Γ, Δ είναι συνευθειακά. Αν το B είναι μεταξύ των A, Γ και το Γ μεταξύ των A, Δ, να εξηγήσετε γιατί το Γ είναι μεταξύ των B, Δ.
●● Λύση → σελ. 180
- 4 Σχεδιάστε τρεις ευθείες που τέμνονται ανά δύο, χωρίς να διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο. Να βρείτε: (i) πόσα είναι τα σημεία τομής, (ii) πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν τα σημεία τομής.
●● Λύση → σελ. 181
- 5 Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν 5 σημεία μιας ευθείας; Και 10 σημεία;
●● Λύση → σελ. 181
- 6 Από μια περιοχή περνούν 4 ευθύγραμμοι δρόμοι, ώστε κάθε δύο να διασταυρώνονται και κανένας τρεις να μην περνούν από το ίδιο σημείο. Πόσους τροχονόμους χρειάζεται η Τροχαία, αν θέλει έναν σε κάθε διασταύρωση; Γενικεύστε για n δρόμους.
●●● Λύση → σελ. 181

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ

2.6–2.8

Μετατοπίσεις, σύγκριση και πράξεις τμημάτων

§2.6 Μετατοπίσεις στο επίπεδο · §2.7 Σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων · §2.8 Πράξεις μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι σημαίνει μετατόπιση σχήματος
- πότε δύο τμήματα είναι ίσα ή άνισα
- την κατασκευή τμήματος ίσου με δοσμένο
- το μέσο ενός τμήματος
- άθροισμα, διαφορά και πολλαπλάσιο τμημάτων

§2.6 Μετατοπίσεις στο επίπεδο

Δεχόμαστε ότι κάθε επίπεδο σχήμα μπορεί να **μετατοπιστεί** μέσα στο επίπεδο, από την αρχική του θέση σε οποιαδήποτε άλλη, **χωρίς να αλλάξει μορφή και μέγεθος** — όπως ένα χαρτονένιο τρίγωνο που το σέρνουμε και το περιστρέφουμε πάνω στο θρανίο. Το σχήμα που προκύπτει στη νέα θέση λέγεται **ομόλογο** ή **εικόνα** του αρχικού.

§2.7 Σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων

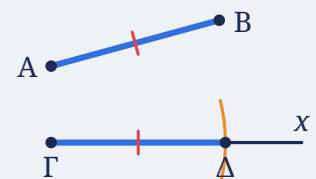
▶ Ίσα τμήματα

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται **ίσα** όταν, με κατάλληλη μετατόπιση, **συμπίπτουν**.

🏛️ ΑΞΙΩΜΑ Μεταφορά τμήματος

Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB και για κάθε ημιευθεία Gx υπάρχει **μοναδικό** σημείο Δ της Gx τέτοιο, ώστε $G\Delta = AB$.



Άμεση συνέπεια είναι η **κατασκευή τμήματος ίσου με δοσμένο**: ανοίγουμε το διαβήτη ώστε οι ακίδες του να πατούν στα A και B · κρατώντας σταθερό το άνοιγμα, τοποθετούμε τη μία ακίδα στο Γ και με την άλλη σημαδεύουμε το σημείο Δ πάνω στη Gx . Τότε $G\Delta = AB$.

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ Γεωμετρική κατασκευή

Ένα σχήμα λέμε ότι **κατασκευάζεται γεωμετρικά** όταν μπορούμε να το σχεδιάσουμε χρησιμοποιώντας **αποκλειστικά** τον **κανόνα** (χάρακα χωρίς υποδιαίρέσεις) και τον **διαβήτη**.

► Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

□ ΟΡΙΣΜΟΣ

Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος AB λέγεται το **εσωτερικό** του σημείο M για το οποίο ισχύει $AM = MB$. Δεχόμαστε ότι **κάθε τμήμα έχει ένα μοναδικό μέσο**.



Αν M είναι το μέσο του AB , τότε προφανώς $AM = MB = \frac{AB}{2}$ και $AB = 2AM$.

► Άνισα τμήματα

Για να συγκρίνουμε δύο τμήματα AB και $\Gamma\Delta$, προεκτείνουμε το $\Gamma\Delta$, οπότε σχηματίζεται η ημιευθεία Γx , και μεταφέρουμε το AB πάνω της, ώστε το A να συμπίπτει με το Γ . Τότε υπάρχει μοναδικό σημείο E της Γx με $\Gamma E = AB$ και:

- αν το E είναι **εσωτερικό** σημείο του $\Gamma\Delta$, λέμε ότι $AB < \Gamma\Delta$,
- αν το E **ταντίζεται** με το Δ , τότε $AB = \Gamma\Delta$,
- αν το E **δεν** είναι σημείο του τμήματος $\Gamma\Delta$, λέμε ότι $AB > \Gamma\Delta$.



$AB < \Gamma\Delta$



$AB = \Gamma\Delta$

Το E είναι το σημείο της Γx με $\Gamma E = AB$



$AB > \Gamma\Delta$

§2.8 Πράξεις μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων

Έστω δύο τμήματα AB και $\Gamma\Delta$.

□ ΟΡΙΣΜΟΣ Πρόσθεση τμημάτων

Πάνω σε μια ευθεία ε παίρνουμε με το διαβήτη τα **διαδοχικά** τμήματα $EZ = AB$ και $ZH = \Gamma\Delta$. Το τμήμα EH λέγεται **άθροισμα** των AB και $\Gamma\Delta$ και γράφουμε $EH = AB + \Gamma\Delta$.



Για την πρόσθεση τμημάτων ισχύουν ιδιότητες ανάλογες με αυτές των αριθμών: η **αντιμεταθετική** $AB + \Gamma\Delta = \Gamma\Delta + AB$ και η **προσεταιριστική** $(AB + \Gamma\Delta) + EZ = AB + (\Gamma\Delta + EZ)$.

□ ΟΡΙΣΜΟΣ Αφαίρεση τμημάτων

Αν $AB < \Gamma\Delta$, τότε υπάρχει εσωτερικό σημείο E του $\Gamma\Delta$ με $\Gamma E = AB$. Το τμήμα $E\Delta$ λέγεται **διαφορά** του AB από το $\Gamma\Delta$ και γράφουμε $E\Delta = \Gamma\Delta - AB$.



i ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν $AB = \Gamma\Delta$, η διαφορά $\Gamma\Delta - AB$ είναι ένα «τμήμα» του οποίου τα άκρα συμπίπτουν· το λέμε **μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα**.

ΟΡΙΣΜΟΣ Γινόμενο τμήματος επί φυσικό

Αν n φυσικός αριθμός, **γινόμενο** του τμήματος AB επί n λέγεται το τμήμα EZ που είναι άθροισμα n διαδοχικών τμημάτων ίσων με το AB . Γράφουμε $EZ = n \cdot AB$ ή ισοδύναμα $AB = \frac{EZ}{n}$.

ΚΛΕΙΔΙ

Στις ασκήσεις με **συνευθειακά σημεία** το βασικό «εργαλείο» είναι: αν το B βρίσκεται μεταξύ των A και Γ , τότε $AG = AB + B\Gamma$. Από αυτή τη σχέση βγαίνουν σχεδόν όλες οι ασκήσεις της ενότητας!

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ Ασκήσεις με σημεία πάνω σε ευθεία

1. Κάνε **προσεκτικό σχήμα** με τη σωστή σειρά των σημείων πάνω στην ευθεία.
2. Γράψε κάθε τμήμα που σε ενδιαφέρει ως **άθροισμα ή διαφορά** «μικρότερων» τμημάτων ($AG = AB + B\Gamma$).
3. Αν υπάρχουν **μέσα**, αντικατέστησε: $AM = MB = \frac{AB}{2}$.
4. Κάνε τις αλγεβρικές πράξεις όπως με αριθμούς και κατέληξε στο ζητούμενο.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Το μέσο M ενός τμήματος πρέπει να είναι **εσωτερικό** σημείο. Ένα σημείο εκτός του AB με $MA = MB$ δεν υπάρχει πάνω στην ευθεία AB , αλλά υπάρχουν τέτοια σημεία εκτός της ευθείας (θα τα δούμε στη μεσοκάθετο).
- ⚠ Η διαφορά $\Gamma\Delta - AB$ ορίζεται μόνο όταν $AB \leq \Gamma\Delta$.

ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ « $AG = AB + B\Gamma$ » για οποιαδήποτε τρία σημεία.

✓ Ισχύει μόνο όταν το B είναι **μεταξύ** των A και Γ (και τα τρία συνευθειακά).

✗ Γράφουμε $AM = 2AB$, όταν M μέσο του AB .

✓ Το σωστό είναι $AB = 2AM$, δηλαδή $AM = \frac{AB}{2}$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

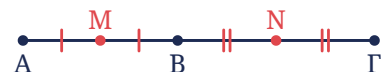
Πάνω σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ, Δ , ώστε $AB = \Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι $AG = B\Delta$.



Λύση Επειδή το B είναι μεταξύ των A, Γ , ισχύει $AG = AB + B\Gamma$. Επειδή το Γ είναι μεταξύ των B, Δ , ισχύει $B\Delta = B\Gamma + \Gamma\Delta$. Αφού $AB = \Gamma\Delta$, τα δεύτερα μέλη είναι ίσα, άρα **$AG = B\Delta$** .

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Μέσα διαδοχικών τμημάτων

Πάνω σε ευθεία παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ . Αν M, N είναι τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $AG = 2MN$.



Λύση Το B βρίσκεται μεταξύ των M και N, άρα $MN = MB + BN = \frac{AB}{2} + \frac{BG}{2} = \frac{AB + BG}{2} = \frac{AG}{2}$. Επομένως $AG = 2MN$.

 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Σημείο ανάμεσα στο μέσο και στο άκρο

Δίνεται τμήμα AB, το μέσο του M και ένα εσωτερικό σημείο Γ του τμήματος MB. Να αποδείξετε ότι $GM = \frac{GA - GB}{2}$.



Λύση Έχουμε $GA = GM + MA$ και $GB = MB - MG$. Αφαιρώντας κατά μέλη και επειδή $MA = MB$: $GA - GB = GM + MA - MB + MG = 2GM$. Άρα $GM = \frac{GA - GB}{2}$.



 Κόλλησες κάπου;

Μην το αφήνεις! Στο **mathgreece.com** κάθε θεωρία έχει το δικό της βιντεομάθημα και κάθε κεφάλαιο τα δικά του κουίζ. Είναι ένα ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών, φτιαγμένο για σένα.

www.mathgreece.com

 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 2.6–2.8 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ● μέτρια ●● απαιτητική

- 1 Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ, Δ ώστε $AG = BD$. Να αποδείξετε ότι $AB = ΓΔ$.
● Λύση → σελ. 181
- 2 Σε ευθεία παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ με $AB = 6 \text{ cm}$ και $BG = 10 \text{ cm}$. Αν M, N τα μέσα των AB, BG, να βρείτε το μήκος του MN και την απόσταση του μέσου K του AG από το B.
● Λύση → σελ. 181
- 3 Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά τμήματα AB, BG, ΓΔ. Αν E, Z είναι τα μέσα των AB και ΓΔ, να αποδείξετε ότι: (i) $EZ = \frac{AD + BG}{2}$, (ii) $AG + BD = AD + BG$.
●● Λύση → σελ. 181
- 4 Δίνεται τμήμα AB με μέσο M και σημείο Δ της προέκτασης του AB (προς το B). Να αποδείξετε ότι $DM = \frac{DA + DB}{2}$.
●● Λύση → σελ. 181
- 5 Αν A, B, Γ είναι τρία συνευθειακά σημεία και Δ, E τα μέσα των AB, AG αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $DE = \frac{BG}{2}$. (Να εξετάσετε όλες τις δυνατές θέσεις των σημείων.)
●●● Λύση → σελ. 181
- 6 Να αποδείξετε ότι για τρία συνευθειακά σημεία A, B, Γ ισχύει πάντα $AB \leq AG + GB$. Πότε ισχύει η ισότητα;
●●● Λύση → σελ. 181

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ

2.9–2.10

Μήκος, απόσταση και συμμετρία ως προς κέντρο

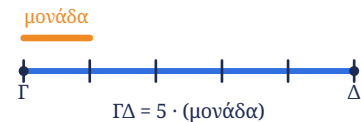
§2.9 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος - Απόσταση δύο σημείων · §2.10 Σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι είναι μονάδα μήκους και μήκος τμήματος
- πώς βρίσκουμε το συμμετρικό σημείου ως προς κέντρο
- τι λέγεται απόσταση δύο σημείων

§2.9 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος - Απόσταση δύο σημείων

Είδαμε ότι κάθε τμήμα μπορεί να συγκριθεί με οποιοδήποτε άλλο. Αν επιλέξουμε ένα σταθερό τμήμα με το οποίο συγκρίνουμε όλα τα υπόλοιπα, το τμήμα αυτό λέγεται **μονάδα μήκους**. Αποδεικνύεται ότι για κάθε τμήμα $\Gamma\Delta$ υπάρχει ένας **θετικός αριθμός** ρ (όχι απαραίτητα φυσικός) τέτοιος, ώστε $\Gamma\Delta = \rho \cdot (\text{μονάδα})$. Ο αριθμός ρ λέγεται **μήκος** του $\Gamma\Delta$.



📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

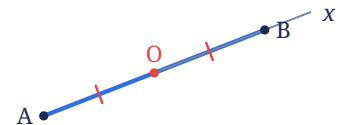
Απόσταση δύο σημείων A και B λέγεται το **μήκος** του ευθύγραμμου τμήματος AB .

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Συμβολισμός

Το μήκος του AB συμβολίζεται με (AB) ή απλά με AB , όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης. Έτσι, όταν γράφουμε $AB = 5 \text{ cm}$, εννοούμε ότι το μήκος του τμήματος AB είναι 5 cm . Δύο τμήματα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν το ίδιο μήκος.

§2.10 Σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο

Ας πάρουμε ένα σημείο O του επιπέδου και ένα οποιοδήποτε σημείο A . Υπάρχει **μοναδικό** σημείο B , ώστε το O να είναι **μέσο** του AB : αρκεί να προεκτείνουμε το AO και πάνω στην ημιευθεία Ox να πάρουμε $OB = OA$.



📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Το σημείο B λέγεται **συμμετρικό** του A **ως προς το** O , αν το O είναι μέσο του AB . Τα A και B λέγονται **συμμετρικά ως προς κέντρο** το O , και το O λέγεται **κέντρο συμμετρίας**.

Προφανώς και το A είναι συμμετρικό του B ως προς O . Παρατηρούμε επίσης ότι **τα άκρα κάθε ευθύγραμμου τμήματος είναι συμμετρικά ως προς το μέσο του**. Το συμμετρικό του ίδιου του O ως προς O είναι το O .

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Για να βρεις το συμμετρικό του A ως προς O, η προέκταση γίνεται **από το O**, προς την αντίθετη μεριά από το A — όχι από το A!
- ⚠ Η απόσταση είναι πάντα **θετικός** αριθμός (ή μηδέν, όταν τα σημεία ταυτίζονται).

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Το συμμετρικό του A ως προς O είναι ένα σημείο B με $OB = OA$.»

✓ Χρειάζεται επιπλέον τα A, O, B να είναι **συνευθειακά με το O μεταξύ τους**, δηλαδή το O να είναι μέσο του AB.

✗ «Μήκος ενός τμήματος είναι πάντα ακέραιος.»

✓ Το μήκος μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός πραγματικός αριθμός (π.χ. 2,5 ή $\sqrt{2}$).

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Σε ευθεία παίρνουμε τα σημεία A, O με $AO = 3$ cm. Αν B είναι το συμμετρικό του A ως προς O και Γ το συμμετρικό του O ως προς B, να βρείτε το μήκος ΑΓ.

Λύση Αφού O μέσο του AB: $OB = OA = 3$ cm, άρα $AB = 6$ cm. Αφού B μέσο του OG: $BG = OB = 3$ cm. Η σειρά των σημείων είναι A, O, B, Γ, άρα $AG = AB + BG = 6 + 3 = 9$ cm.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Η συμμετρία διατηρεί τις αποστάσεις

Δίνονται τα σημεία A, B, O. Αν A', B' είναι τα συμμετρικά των A, B ως προς O και τα A, B, O είναι συνευθειακά με το O μεταξύ A και B, να αποδείξετε ότι $A'B' = AB$.

Λύση Αφού το O είναι μεταξύ A και B, το A' βρίσκεται προς τη μεριά του B και το B' προς τη μεριά του A· άρα και το O είναι μεταξύ A' και B'. Τότε $A'B' = OA' + OB' = OA + OB = AB$.

🎓 Για βίντεο, κουίζ και επιπλέον λυμένες ασκήσεις σε αυτό το μάθημα, επισκέψου το mathgreece.com — πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.

📖 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 2.9–2.10 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Σημείο O απέχει από το σημείο A 4 cm. Να βρείτε την απόσταση του A από το συμμετρικό του ως προς O.
Λύση → σελ. 181
- 2 Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ με $AB = 5$ και $BΓ = 3$. Να βρείτε την απόσταση ανάμεσα στο συμμετρικό του A ως προς B και στο συμμετρικό του Γ ως προς B.
Λύση → σελ. 182
- 3 Τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς O και τα B, Γ συμμετρικά ως προς K, όπου όλα τα σημεία βρίσκονται στην ίδια ευθεία και το K στην ημιευθεία OB με $OK > OB$. Να αποδείξετε ότι $AG = 2OK$.
Λύση → σελ. 182

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ

2.11–2.12

Ημιεπίπεδα και η έννοια της γωνίας

§2.11 Ημιεπίπεδα · §2.12 Η γωνία

🕒 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

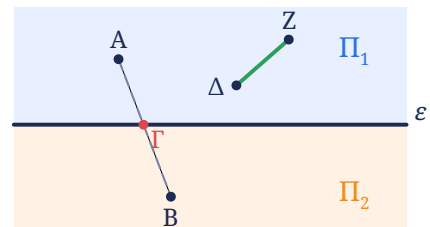
- τι είναι ημιεπίπεδο και πώς συμβολίζεται
- τον ορισμό της κυρτής και της μη κυρτής γωνίας
- εσωτερικά και εξωτερικά σημεία γωνίας
- μηδενική, ευθεία και πλήρης γωνία

§2.11 Ημιεπίπεδα

🏠 ΑΞΙΩΜΑ Η ευθεία χωρίζει το επίπεδο

Κάθε ευθεία ε ενός επιπέδου το χωρίζει σε δύο μέρη Π_1 και Π_2 , που βρίσκονται **εκατέρωθεν** της ε .

Τα σημεία του Π_1 , μαζί με τα σημεία της ε , αποτελούν ένα σχήμα που λέγεται **ημιεπίπεδο**. Η ε λέγεται **ακμή** (ή όριο) του ημιεπιπέδου. Για να καθορίσουμε ένα ημιεπίπεδο αρκεί να ξέρουμε την ευθεία ε και ένα ακόμη σημείο του, π.χ. το A · τότε το συμβολίζουμε **(ε, A)** . Όμοια το Π_2 συμβολίζεται **(ε, B)** .

Τα ημιεπίπεδα (ε, A) και (ε, B)

🏠 ΑΞΙΩΜΑ Σημεία εκατέρωθεν ευθείας

Αν δύο σημεία του επιπέδου βρίσκονται **εκατέρωθεν** μιας ευθείας ε , τότε η ε **τέμνει** το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν.

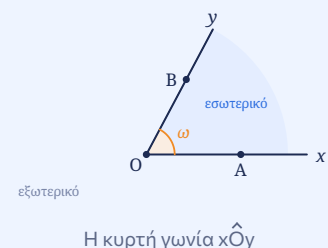
Έτσι, στο σχήμα, η ε τέμνει το AB σε ένα σημείο Γ μεταξύ των A και B , ενώ **δεν** τέμνει το ΔZ , αφού τα Δ, Z βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο.

§2.12 Η γωνία

Από ένα σημείο O φέρνουμε δύο ημιευθείες Ox και Oy που **δεν** έχουν τον ίδιο φορέα, και παίρνουμε σημεία A της Ox και B της Oy .

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

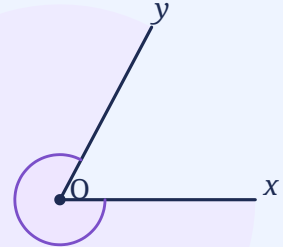
Κυρτή γωνία με κορυφή O και πλευρές Ox, Oy λέγεται το σχήμα που αποτελείται από τα **κοινά σημεία** των ημιεπιπέδων (Ox, B) και (Oy, A) . Συμβολίζεται $\widehat{xOy}$ ή $\widehat{yOx}$ ή $\hat{O}$ ή $\widehat{AOB}$ ή $\widehat{BOA}$.



Η γωνία καθορίζεται πλήρως από τις πλευρές της. Τα σημεία της γωνίας που δεν ανήκουν στις πλευρές λέγονται **εσωτερικά** σημεία της (αποτελούν το **εσωτερικό** της), ενώ τα σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν στη γωνία λέγονται **εξωτερικά**.

ΟΡΙΣΜΟΣ Μη κυρτή γωνία

Τα σημεία του επιπέδου που **δεν** ανήκουν στην κυρτή γωνία $\hat{xOy}$, μαζί με τα σημεία των πλευρών της Ox και Oy , αποτελούν τη **μη κυρτή γωνία** $\hat{xOy}$.



► Ειδικές περιπτώσεις: οι πλευρές έχουν τον ίδιο φορέα

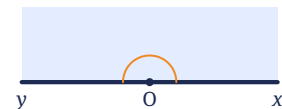
- Αν οι Ox και Oy **ταυτίζονται**, η κυρτή γωνία $\hat{xOy}$ λέγεται **μηδενική γωνία**, ενώ η μη κυρτή ταυτίζεται με όλο το επίπεδο και λέγεται **πλήρης γωνία**.
- Αν οι Ox και Oy είναι **αντικείμενες**, καθένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία xy λέγεται **ευθεία γωνία**.



μηδενική γωνία



πλήρης γωνία (όλο το επίπεδο)



ευθεία γωνία

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Σύμβαση

Στη συνέχεια, όταν λέμε απλώς «γωνία», θα εννοούμε **κυρτή γωνία**.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Στο σύμβολο $\hat{AOB}$ η κορυφή γράφεται **πάντα στη μέση**. Η $\hat{OAB}$ είναι εντελώς άλλη γωνία (με κορυφή το A)!
- Το απλό σύμβολο $\hat{O}$ το χρησιμοποιούμε μόνο όταν στην κορυφή O υπάρχει **μία** γωνία· αλλιώς δημιουργείται σύγχυση.
- Η γωνία δεν είναι «το τοξάκι» που σχεδιάζουμε· είναι ολόκληρο το σύνολο σημείων ανάμεσα στις πλευρές. Το μέγεθός της **δεν** εξαρτάται από το μήκος των πλευρών που σχεδιάσαμε.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ Γράφουμε $\hat{ABO}$ για τη γωνία με κορυφή το O.

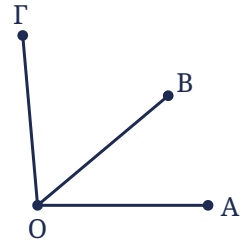
✓ Η κορυφή στη μέση: $\hat{AOB}$.

✗ «Αν μακρύνω τις πλευρές, η γωνία μεγαλώνει.»

✓ Οι πλευρές είναι ημιευθείες (άπειρες)· η γωνία εξαρτάται μόνο από το «άνοιγμά» τους.

 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Τρεις ημιευθείες OA , OB , OG έχουν κοινή αρχή O (όπως στο σχήμα). Πόσες κυρτές γωνίες σχηματίζονται και ποιες είναι;



Λύση Κάθε ζευγάρι ημιευθειών ορίζει μία κυρτή γωνία: $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOG}$ και $\widehat{AOG}$, δηλαδή **3 γωνίες**. Προσοχή: δεν μπορούμε να γράψουμε απλώς $\widehat{O}$, γιατί στο O υπάρχουν τρεις γωνίες.

 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Εσωτερικά σημεία γωνίας

Δίνεται κυρτή γωνία $\widehat{xOy}$, σημείο A της Ox και σημείο B της Oy . Να εξηγήσετε γιατί κάθε εσωτερικό σημείο M του τμήματος AB είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας.

Λύση Τα A και M βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ευθείας Oy (το τμήμα AM δεν τέμνει την Oy , αφού η ευθεία AB τέμνει τον φορέα της Oy μόνο στο B), άρα το M ανήκει στο ημιεπίπεδο (Oy, A) . Όμοια το M ανήκει στο (Ox, B) . Επομένως το M είναι κοινό σημείο των δύο ημιεπιπέδων, δηλαδή σημείο της γωνίας, και αφού δεν βρίσκεται στις πλευρές, είναι εσωτερικό.

 Για βίντεο, κουίζ και επιπλέον λυμένες ασκήσεις σε αυτό το μάθημα, επισκεψύ το mathgreece.com – πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.

 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 2.11–2.12 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Σχεδιάστε μια ευθεία ε και τρία σημεία A , B , Γ ώστε τα A , B να είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο και το Γ στο άλλο. Ποια από τα τμήματα AB , $A\Gamma$, $B\Gamma$ τέμνει η ε ;
Λύση → σελ. 182
- 2 Τέσσερις ημιευθείες με κοινή αρχή O σχηματίζουν γωνίες. Πόσες κυρτές γωνίες (μη μηδενικές) ορίζονται, αν δεν υπάρχουν δύο από αυτές με τον ίδιο φορέα;
Λύση → σελ. 182
- 3 Να εξηγήσετε ποια είναι η διαφορά ανάμεσα στην ευθεία γωνία και στην ευθεία. Ποια είναι η πλήρης γωνία;
Λύση → σελ. 182

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ

2.13–2.14

Σύγκριση γωνιών, διχοτόμος, κάθετες ευθείες

§2.13 Σύγκριση γωνιών · §2.14 Ευθεία κάθετη από σημείο σε ευθεία

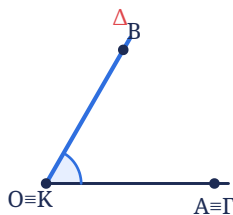
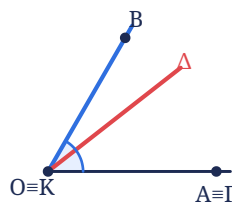
🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- πότε δύο γωνίες είναι ίσες ή άνισες
- τη μοναδικότητα της καθέτου
- τη διχοτόμο γωνίας
- μεσοκάθετο τμήματος και συμμετρία ως προς άξονα
- ορθή, οξεία, αμβλεία γωνία και κάθετες ευθείες

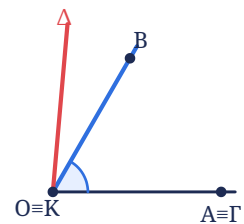
§2.13 Σύγκριση γωνιών

Ας πάρουμε δύο γωνίες $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ και $\hat{G}\hat{K}\hat{\Delta}$. Για να τις συγκρίνουμε, μετατοπίζουμε τη $\hat{G}\hat{K}\hat{\Delta}$ ώστε η κορυφή K να συμπίπτει με το O , η πλευρά $K\Gamma$ με την OA και η $K\Delta$ να βρεθεί στο ίδιο ημιεπίπεδο με την OB (ως προς τον φορέα της OA). Τότε:

- αν η $K\Delta$ συμπίπτει με την OB , οι γωνίες είναι **ίσες**: $\hat{G}\hat{K}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{O}\hat{B}$,
- αν η $K\Delta$ βρεθεί στο **εσωτερικό** της $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$, τότε $\hat{G}\hat{K}\hat{\Delta} < \hat{A}\hat{O}\hat{B}$,
- αν η $K\Delta$ βρεθεί στο **εξωτερικό** της $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$, τότε $\hat{G}\hat{K}\hat{\Delta} > \hat{A}\hat{O}\hat{B}$.

 $\hat{G}\hat{K}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{O}\hat{B}$  $\hat{G}\hat{K}\hat{\Delta} < \hat{A}\hat{O}\hat{B}$

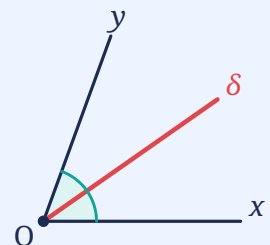
Σύγκριση γωνιών με μετατόπιση

 $\hat{G}\hat{K}\hat{\Delta} > \hat{A}\hat{O}\hat{B}$

► Διχοτόμος γωνίας

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

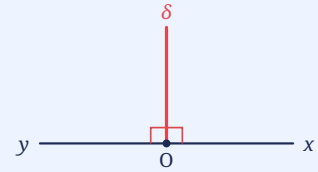
Διχοτόμος μιας γωνίας $\hat{x}\hat{O}\hat{y}$ λέγεται η ημιευθεία Od που βρίσκεται στο **εσωτερικό** της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο **ίσες** γωνίες: $\hat{x}\hat{O}\hat{d} = \hat{d}\hat{O}\hat{y}$.
Δεχόμαστε ότι **κάθε γωνία έχει μία μόνο διχοτόμο**.



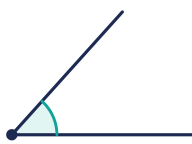
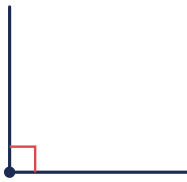
► Ορθή γωνία, κάθετες ευθείες, οξεία και αμβλεία γωνία

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $\widehat{xOy}$ είναι μια **ευθεία γωνία** και $O\delta$ η διχοτόμος της, καθεμία από τις ίσες γωνίες $\widehat{xO\delta}$, $\widehat{\delta Oy}$ λέγεται **ορθή γωνία**. Οι φορείς των πλευρών μιας ορθής γωνίας λέγονται **κάθετες ευθείες**: γράφουμε $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.



Μια (κυρτή) γωνία λέγεται **οξεία** αν είναι **μικρότερη** από μια ορθή και **αμβλεία** αν είναι **μεγαλύτερη** από μια ορθή. Την ορθή γωνία συμβολίζουμε συχνά με 1L («μία ορθή»): η ευθεία γωνία είναι 2L και η πλήρης 4L .

οξεία: < 1 ορθή

ορθή

αμβλεία: > 1 ορθή

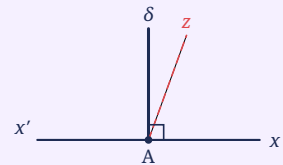
§2.14 Ευθεία κάθετη από σημείο σε ευθεία

Ας πάρουμε μια ευθεία $x'x$ και ένα σημείο A της. Αν $A\delta$ είναι η διχοτόμος της ευθείας γωνίας $\widehat{xAx'}$, τότε από τον ορισμό της ορθής γωνίας ισχύει $A\delta \perp x'x$. Μπορεί να υπάρξει και δεύτερη κάθετη; Η απάντηση είναι όχι:

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Από ένα σημείο μιας ευθείας άγεται **μία μόνο κάθετη** προς αυτή.

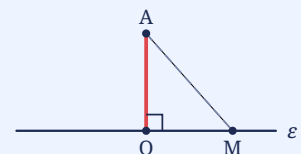
Απόδειξη. Έστω ότι, εκτός από την $A\delta$, και μια άλλη ημιευθεία Az είναι κάθετη στην $x'x$. Τότε $\widehat{xAz} = \widehat{zAx'} = 1\text{L}$, δηλαδή η Az θα ήταν **διχοτόμος** της ευθείας γωνίας $\widehat{xAx'}$. Τότε όμως η γωνία αυτή θα είχε δύο διχοτόμους, την $A\delta$ και την Az , που είναι **άτοπο**, αφού η διχοτόμος μιας γωνίας είναι μοναδική.



Το ίδιο ισχύει και όταν το σημείο A **δεν** ανήκει στην ευθεία: από ένα σημείο εκτός ευθείας άγεται **μοναδική** κάθετη προς αυτή (η απόδειξη και η κατασκευή της με κανόνα και διαβήτη θα δοθούν στις §3.5 και §3.17).

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ Απόσταση σημείου από ευθεία

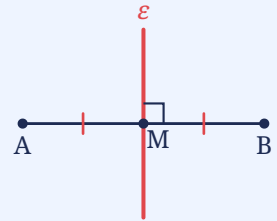
Αν AO είναι το (μοναδικό) κάθετο τμήμα από ένα σημείο A προς μια ευθεία ε , το μήκος του AO λέγεται **απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε** . Το σημείο O λέγεται **ίχνος** της κάθετου (ή **προβολή** του A στην ε).



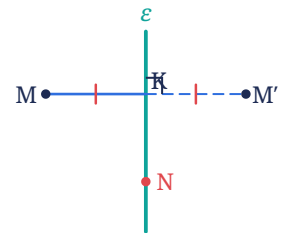
► Μεσοκάθετος τμήματος - Συμμετρικά σημεία ως προς άξονα

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ευθεία ε που είναι **κάθετη** σε ένα τμήμα AB και διέρχεται από το **μέσο** του λέγεται **μεσοκάθετος** του AB . Τότε τα σημεία A, B λέγονται **συμμετρικά ως προς την ευθεία ε** και η ε λέγεται **άξονας συμμετρίας**.



Για να βρούμε το **συμμετρικό ενός σημείου M ως προς μια ευθεία ε** , φέρνουμε το κάθετο τμήμα MK από το M προς την ε και το προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα $KM' = MK$. Το M' είναι το ζητούμενο συμμετρικό. Το συμμετρικό κάθε σημείου N της ε ορίζεται να είναι το ίδιο το N .



🕒 ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η «μέθοδος της απαγωγής σε άτοπο» που χρησιμοποιήσαμε για τη μοναδικότητα της καθέτου ήταν από τα αγαπημένα εργαλεία των αρχαίων Ελλήνων. Ο Ευκλείδης τη χρησιμοποιεί συνεχώς στα «Στοιχεία», ενώ με αυτήν αποδείχτηκε και η περίφημη ασυμμετρία της πλευράς και της διαγωνίου του τετραγώνου.

⚠️ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠️ «Κάθετες» λέγονται οι **ευθείες** που σχηματίζουν ορθή γωνία. Για τμήματα ή ημιευθείες λέμε ότι είναι κάθετα όταν οι **φορείς** τους είναι κάθετοι.
- ⚠️ Η απόσταση σημείου από ευθεία μετρίεται **πάντα κάθετα**. Το τμήμα AM του σχήματος (πλάγιο) δεν είναι η απόσταση του A από την ε .
- ⚠️ Η μεσοκάθετος πρέπει να ικανοποιεί **δύο** συνθήκες: να είναι κάθετη στο AB **και** να περνά από το μέσο του.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Η διχοτόμος χωρίζει τη γωνία σε δύο γωνίες.»

✓ Σε δύο **ίσες** γωνίες, και βρίσκεται στο **εσωτερικό** της γωνίας.

✗ «Κάθε ευθεία κάθετη στο AB είναι μεσοκάθετός του.»

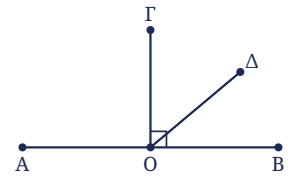
✓ Υπάρχουν άπειρες κάθετες στο AB · μεσοκάθετος είναι μόνο εκείνη που περνά από το μέσο του.

✗ «Οξεία είναι κάθε γωνία μικρότερη από ευθεία γωνία.»

✓ Οξεία είναι η γωνία που είναι μικρότερη από **ορθή**· μια γωνία ανάμεσα σε ορθή και ευθεία είναι αμβλεία.

 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Στο σχήμα, η ΟΓ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ στο Ο και η ΟΔ βρίσκεται στο εσωτερικό της ΓΟΒ. Να χαρακτηρίσετε τις γωνίες ΑΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΒ, ΑΟΔ.



Λύση $\widehat{ΑΟΓ} = 1\perp$ (ορθή, αφού $ΟΓ \perp ΑΒ$). Η $\widehat{ΓΟΔ}$ είναι μέρος της ορθής $\widehat{ΓΟΒ}$, άρα **οξεία**. Όμοια η $\widehat{ΔΟΒ}$ είναι **οξεία**. Η $\widehat{ΑΟΔ} = \widehat{ΑΟΓ} + \widehat{ΓΟΔ}$ είναι μεγαλύτερη από ορθή και μικρότερη από ευθεία, άρα **αμβλεία**.

 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Παρατήρηση και εικασία

Να βρείτε το συμμετρικό ενός σημείου Α ως προς δύο κάθετες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που τέμνονται στο Ο, και να εξετάσετε αν τα δύο συμμετρικά A_1, A_2 είναι συμμετρικά ως προς το Ο.

Λύση Φέρνουμε $ΑΚ \perp \varepsilon_1$ και $ΑΛ \perp \varepsilon_2$ και προεκτείνουμε κατά ίσα τμήματα: παίρνουμε τα A_1 (συμμετρικό ως προς ε_1) και A_2 (ως προς ε_2). Όπως θα αποδείξουμε στο Κεφάλαιο 3 (με ίσα τρίγωνα), ισχύει $ΟΑ_1 = ΟΑ = ΟΑ_2$ και τα $A_1, Ο, A_2$ είναι συνευθειακά· άρα τα A_1, A_2 είναι συμμετρικά ως προς το Ο. Εδώ αρκεί να το διαπιστώσετε με ακρίβεια στο σχέδιο — ένα πρώτο παράδειγμα του πώς η παρατήρηση γεννά εικασίες που μετά αποδεικνύουμε!



 Μελέτησε έξυπνα

Συνδύασε αυτό το βοήθημα με τα βιντεομαθήματα, τα podcasts και τα παιχνίδια γνώσεων του **mathgreece.com**. Θα βρεις εκεί **πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο** για Γυμνάσιο και Λύκειο.

www.mathgreece.com

 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 2.13–2.14 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1  Σχεδιάστε μια γωνία $\widehat{xOy} = 70^\circ$ και τη διχοτόμο της Οδ. Πόσες μοίρες είναι η $\widehat{xO\delta}$; Τι είδους γωνία είναι; Λύση → σελ. 182
- 2  Ένα σημείο Α απέχει από μια ευθεία ε 3 cm. Αν Α' είναι το συμμετρικό του ως προς την ε , πόσο απέχει το Α' από την ε και πόσο από το Α; Λύση → σελ. 182
- 3  Η ημιευθεία Οδ είναι διχοτόμος της $\widehat{xOy}$ και η Οε είναι διχοτόμος της $\widehat{xO\delta}$. Αν $\widehat{xOy} = 4 \cdot \widehat{xO\epsilon}$, να εξηγήσετε γιατί ισχύει αυτή η σχέση πάντα. Λύση → σελ. 182
- 4  Να εξηγήσετε γιατί από ένα σημείο Α μιας ευθείας ε δεν μπορούμε να φέρουμε δύο διαφορετικές ευθείες κάθετες στην ε . Λύση → σελ. 182
- 5  Δίνεται τμήμα $ΑΒ = 8$ cm και η μεσοκάθετός του ε , που το τέμνει στο Μ. Αν Γ είναι σημείο της ε με $ΜΓ = 3$ cm, να βρείτε το συμμετρικό του Α ως προς την ε και την απόσταση του Γ από την ευθεία ΑΒ. Λύση → σελ. 182

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ

2.15–2.16

Πράξεις και απλές σχέσεις γωνιών

§2.15 Πράξεις μεταξύ γωνιών · §2.16 Απλές σχέσεις γωνιών

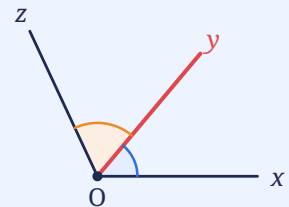
🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- εφεξής και διαδοχικές γωνίες
- συμπληρωματικές και παραπληρωματικές γωνίες
- άθροισμα, διαφορά και πολλαπλάσιο γωνίας
- τις κατακορυφήν γωνίες και τα θεωρήματά τους

§2.15 Πράξεις μεταξύ γωνιών

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο γωνίες λέγονται **εφεξής** αν έχουν την **ίδια κορυφή**, μια **κοινή πλευρά** και τις μη κοινές πλευρές τους **εκατέρωθεν** της κοινής.

Οι $\widehat{xOy}$ και $\widehat{yOz}$ είναι εφεξής

Τρεις ή περισσότερες γωνίες λέγονται **διαδοχικές** αν, με τη σειρά που δίνονται, κάθε μία είναι εφεξής με την επόμενη (π.χ. $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOG}$, $\widehat{GOD}$).

► Πρόσθεση και αφαίρεση γωνιών

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ Άθροισμα γωνιών

Άθροισμα δύο εφεξής γωνιών $\widehat{AOB}$ και $\widehat{BOG}$ λέγεται η γωνία $\widehat{AOG}$ που έχει πλευρές τις **μη κοινές** πλευρές τους: $\widehat{AOB} + \widehat{BOG} = \widehat{AOG}$. Αν οι γωνίες δεν είναι εφεξής, τις μετατοπίζουμε ώστε να γίνουν.

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ Διαφορά γωνιών

Αν $\widehat{AOB} > \widehat{G\hat{E}D}$, μετατοπίζουμε τη $\widehat{G\hat{E}D}$ ώστε η ΕΓ να συμπίσει με την ΟΑ και η ΕΔ να γίνει μια ημιευθεία ΟΖ στο εσωτερικό της $\widehat{AOB}$. Η γωνία $\widehat{ZOB}$ λέγεται **διαφορά** $\widehat{AOB} - \widehat{G\hat{E}D}$. Προφανώς $\widehat{G\hat{E}D} + \widehat{ZOB} = \widehat{AOB}$. Η διαφορά δύο ίσων γωνιών είναι η **μηδενική** γωνία.

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ Γινόμενο γωνίας με φυσικό

Γινόμενο μιας γωνίας $\widehat{AOB}$ επί φυσικό n λέγεται το άθροισμα n διαδοχικών γωνιών ίσων με $\widehat{AOB}$. Π.χ. αν $\widehat{AOD} = 3\widehat{AOB}$, τότε $\widehat{AOB} = \frac{\widehat{AOD}}{3}$.

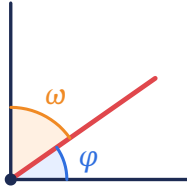
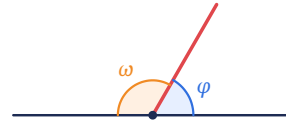
📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το άθροισμα γωνιών ή το γινόμενο γωνίας με φυσικό αριθμό μπορεί να **ξεπεράσει την πλήρη γωνία** (π.χ. $5 \cdot 100^\circ = 500^\circ$). Στην καθημερινή ζωή το συναντάμε στις περιστροφές: ένας τροχός που κάνει 1,5 στροφή έχει διαγράψει γωνία 540° .

§2.16 Απλές σχέσεις γωνιών

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο γωνίες λέγονται **συμπληρωματικές** αν έχουν άθροισμα **μία ορθή**, και **παραπληρωματικές** αν έχουν άθροισμα **μία ευθεία γωνία** (δύο ορθές). Καθεμία λέγεται **συμπλήρωμα** ή **παραπλήρωμα** αντίστοιχα της άλλης.

συμπληρωματικές: $\varphi + \omega = 90^\circ$ παραπληρωματικές: $\varphi + \omega = 180^\circ$

Είναι φανερό ότι **τα συμπληρώματα (ή τα παραπληρώματα) της ίδιας γωνίας ή ίσων γωνιών είναι ίσες γωνίες**. Η απλή αυτή πρόταση είναι από τα πιο συχνά «εργαλεία» στις αποδείξεις.

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο **εφεξής** και **παραπληρωματικές** γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές τους **αντικείμενες** ημιευθείες, και **αντίστροφα**.

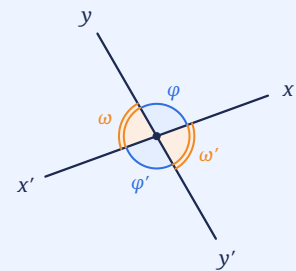
Απόδειξη. Ευθύ: αν οι εφεξής γωνίες $\widehat{A\hat{O}B}$, $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$ είναι παραπληρωματικές, το άθροισμά τους $\widehat{A\hat{O}\Gamma}$ είναι ευθεία γωνία, άρα (από τον ορισμό της ευθείας γωνίας) οι OA και OΓ είναι αντικείμενες.

Αντίστροφο: αν οι OA, OΓ είναι αντικείμενες, τότε το άθροισμα $\widehat{A\hat{O}B} + \widehat{B\hat{O}\Gamma} = \widehat{A\hat{O}\Gamma}$ είναι ευθεία γωνία, άρα οι γωνίες είναι παραπληρωματικές. ■

► Κατακορυφήν γωνίες

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο γωνίες λέγονται **κατακορυφήν** αν έχουν την ίδια κορυφή και οι πλευρές της μιας είναι **προεκτάσεις** (αντικείμενες ημιευθείες) των πλευρών της άλλης.

 φ, φ' κατακορυφήν· ω, ω' κατακορυφήν

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ I

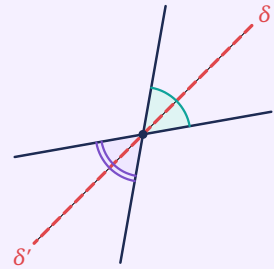
Οι κατακορυφήν γωνίες είναι **ίσες**.

Απόδειξη. Οι κατακορυφήν γωνίες $\widehat{x\hat{O}y} = \varphi$ και $\widehat{x'\hat{O}y'} = \varphi'$ είναι και οι δύο παραπληρωματικές της ίδιας γωνίας $\widehat{y\hat{O}x'} = \omega$ (γιατί είναι εφεξής με αυτήν και οι μη κοινές πλευρές τους είναι αντικείμενες). Ως **παραπληρώματα της ίδιας γωνίας** είναι ίσες: $\varphi = \varphi'$. ■

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ II

Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας είναι διχοτόμος της κατακορυφής της γωνίας.

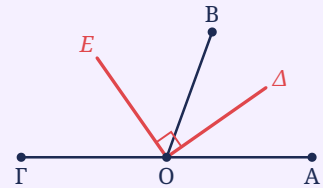
Απόδειξη. Έστω OD η διχοτόμος της $\angle XOY$ και OD' η προέκτασή της. Οι γωνίες που σχηματίζει η OD' με τις OX' , OY' είναι κατακορυφές με τις $\angle DOX$, $\angle DOY$ αντίστοιχα, άρα ίσες με αυτές. Αφού $\angle DOX = \angle DOY$, θα είναι ίσες και οι δύο γωνίες που σχηματίζει η OD' , δηλαδή η OD' διχοτομεί την $\angle XOY'$.



☆ ΘΕΩΡΗΜΑ III

Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.

Απόδειξη. Έστω $\angle AOB$, $\angle BO\Gamma$ εφεξής και παραπληρωματικές και OD , OE οι διχοτόμοι τους. Τότε $\angle AOB + \angle BO\Gamma = 2\angle$, δηλαδή $2\angle DOB + 2\angle BOE = 2\angle$, άρα $\angle DOB + \angle BOE = 1\angle$, δηλαδή $\angle DOE = 1\angle$. Επομένως $OD \perp OE$.



i ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Θυμήσου

Αντίστροφα θεωρήματα λέγονται δύο θεωρήματα στα οποία η υπόθεση του ενός είναι συμπέρασμα του άλλου. Το αντίστροφο του Θεωρήματος I («αν δύο γωνίες είναι ίσες, είναι κατακορυφές») **δεν** ισχύει!

≡ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ Προβλήματα με συμπληρωματικές/παραπληρωματικές

1. Ονόμασε την άγνωστη γωνία x (σε μοίρες).
2. Εκφράσε τις άλλες με τη βοήθεια του x : συμπλήρωμα $= 90^\circ - x$, παραπλήρωμα $= 180^\circ - x$.
3. Μετάφρασε την εκφώνηση σε εξίσωση («τριπλάσια» $\rightarrow \cdot 3$, «κατά 20° μικρότερη» $\rightarrow -20^\circ$).
4. Λύσε την εξίσωση και **έλεγξε** ότι το αποτέλεσμα έχει νόημα (π.χ. μια γωνία με συμπλήρωμα πρέπει να είναι $< 90^\circ$).

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Συμπληρωματικές = άθροισμα 90° , παραπληρωματικές = άθροισμα 180° . Ένα κόλπο: «Σ» πριν από «Π» στην αλφάβητο, όπως 90 πριν από 180.
- ⚠ Δύο συμπληρωματικές ή παραπληρωματικές γωνίες **δεν** χρειάζεται να είναι εφεξής. Αρκεί το άθροισμά τους.
- ⚠ Μόνο οξεία γωνία έχει συμπλήρωμα. Μια ορθή ή αμβλεία γωνία δεν έχει συμπληρωματική.
- ⚠ Για να συμπεράνεις ότι τρία σημεία είναι συνευθειακά (π.χ. A, O, Γ), συχνά αποδεικνύεις ότι δύο εφεξής γωνίες έχουν άθροισμα 180° .

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Οι γωνίες 40° και 50° είναι παραπληρωματικές.»

✓ Έχουν άθροισμα 90° , άρα είναι **συμπληρωματικές**.

✗ «Δύο ίσες γωνίες με κοινή κορυφή είναι κατακορυφήν.»

✓ Πρέπει οι πλευρές της μιας να είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης.

✗ «Αφού $\hat{A}\hat{O}B + \hat{B}\hat{O}\Gamma = 180^\circ$, τα Α, Ο, Γ είναι συνευθειακά» — χωρίς να ελέγξουμε αν οι γωνίες είναι εφεξής.

✓ Το θεώρημα απαιτεί οι γωνίες να είναι **εφεξής** (μη κοινές πλευρές εκατέρωθεν της κοινής).

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Εξίσωση με γωνίες

Η παραπληρωματική μιας γωνίας ω είναι τριπλάσια από τη συμπληρωματική της. Να βρείτε την ω .

Λύση Η συμπληρωματική είναι $90^\circ - \omega$ και η παραπληρωματική $180^\circ - \omega$. Από την υπόθεση: $180^\circ - \omega = 3(90^\circ - \omega) \Leftrightarrow 180^\circ - \omega = 270^\circ - 3\omega \Leftrightarrow 2\omega = 90^\circ \Leftrightarrow \omega = 45^\circ$. Έλεγχος: παραπλήρωμα 135° , συμπλήρωμα 45° , και $135^\circ = 3 \cdot 45^\circ$ ✓.

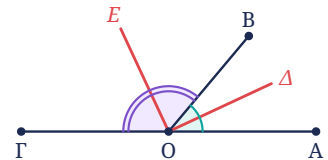
✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Γωνίες γύρω από σημείο

Τέσσερις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ σχηματίζουν τις διαδοχικές γωνίες $\hat{A}\hat{O}B$, $\hat{B}\hat{O}\Gamma$, $\hat{\Gamma}\hat{O}\Delta$, $\hat{\Delta}\hat{O}A$, που καλύπτουν όλη τη γωνία γύρω από το Ο και είναι ανάλογες των αριθμών 1, 2, 3, 4. Να βρείτε τις γωνίες.

Λύση Θέτουμε $\hat{A}\hat{O}B = x$, $\hat{B}\hat{O}\Gamma = 2x$, $\hat{\Gamma}\hat{O}\Delta = 3x$, $\hat{\Delta}\hat{O}A = 4x$. Το άθροισμά τους είναι η πλήρης γωνία: $10x = 360^\circ$, άρα $x = 36^\circ$. Οι γωνίες είναι **36° , 72° , 108° , 144°** .

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Αν οι γωνίες $\hat{A}\hat{O}B$ και $\hat{B}\hat{O}\Gamma$ είναι εφεξής με $\hat{A}\hat{O}B = 50^\circ$ και $\hat{B}\hat{O}\Gamma = 130^\circ$, και ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι τους, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Delta}\hat{O}E$ και να εξηγήσετε γιατί τα Α, Ο, Γ είναι συνευθειακά.



Λύση $\hat{\Delta}\hat{O}B = 25^\circ$ και $\hat{B}\hat{O}E = 65^\circ$, άρα $\hat{\Delta}\hat{O}E = 25^\circ + 65^\circ = 90^\circ$. Επειδή οι εφεξής γωνίες έχουν άθροισμα $50^\circ + 130^\circ = 180^\circ$, είναι εφεξής και παραπληρωματικές· άρα οι ΟΑ, ΟΓ είναι αντικείμενες ημιευθείες, δηλαδή τα Α, Ο, Γ είναι **συνευθειακά**. (Το αποτέλεσμα $\hat{\Delta}\hat{O}E = 90^\circ$ επιβεβαιώνει το Θεώρημα ΙΙΙ.)



🎓 Έλεγξε τον εαυτό σου

Λύσε τα ηλεκτρονικά κουίζ του μαθήματος στο **mathgreece.com** και δες αμέσως πού στέκεσαι. Όλο το υλικό είναι **δωρεάν**: ένα πραγματικό φροντιστήριο στην οθόνη σου.

www.mathgreece.com

Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 2.15–2.16 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Να βρείτε τη συμπληρωματική και την παραπληρωματική της γωνίας 34° .

● Λύση → σελ. 182
- 2** Δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές και η μία είναι διπλάσια της άλλης. Να βρείτε τις γωνίες.

● Λύση → σελ. 182
- 3** Μια γωνία φ είναι μικρότερη από τη συμπληρωματική της κατά 20° . Να βρείτε τις δύο γωνίες.

● Λύση → σελ. 182
- 4** Μια γωνία ω είναι τα $\frac{6}{5}$ μιας ορθής. Να βρείτε την παραπληρωματική της. Έχει η ω συμπληρωματική;

● Λύση → σελ. 183
- 5** Δύο ευθείες τέμνονται στο O και σχηματίζουν τέσσερις γωνίες. Αν η μία είναι 38° , να βρείτε τις άλλες τρεις.

● Λύση → σελ. 183
- 6** Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$, $\widehat{zOt}$ με άθροισμα 180° , όπου $\widehat{xOy} = \widehat{zOt}$. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της $\widehat{yOz}$ είναι κάθετη στην $x'x$, όπου Ot είναι αντικείμενη της Ox .

●● Λύση → σελ. 183
- 7** Η παραπληρωματική μιας γωνίας είναι κατά 100° μεγαλύτερη από την ίδια τη γωνία. Να βρείτε τη γωνία και τη συμπληρωματική της.

●● Λύση → σελ. 183
- 8** Οι γωνίες $\widehat{AOB}$ και $\widehat{BO\Gamma}$ είναι εφεξής. Αν OD , OE είναι οι διχοτόμοι τους, να αποδείξετε ότι $\widehat{DOE} = \frac{\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma}}{2}$. Τι συμπεραίνετε αν οι γωνίες είναι και παραπληρωματικές;

●● Λύση → σελ. 183
- 9** Δίνεται κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$, η διχοτόμος της OD και ημιευθεία OG στο εσωτερικό της $\widehat{AOB}$. Να αποδείξετε ότι $\widehat{DOG} = \frac{\widehat{AOG} - \widehat{GOB}}{2}$.

●●● Λύση → σελ. 183

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ

2.17

Έννοια και στοιχεία του κύκλου

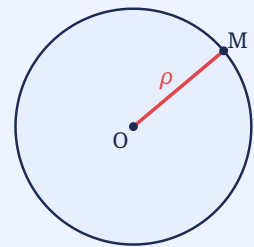
🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τον ορισμό του κύκλου (O, ρ)
- τι είναι γεωμετρικός τόπος
- τόξο, χορδή, διάμετρος, απόστημα
- εσωτερικά/εξωτερικά σημεία κύκλου
- πότε δύο κύκλοι είναι ίσοι

§2.17 Έννοια και στοιχεία του κύκλου

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ λέγεται το επίπεδο σχήμα του οποίου **όλα** τα σημεία απέχουν από το O απόσταση ίση με ρ . Συμβολίζεται **(O, ρ)** ή απλά **(O)** .



Δεχόμαστε ότι ο κύκλος είναι μια **κλειστή γραμμή** χωρίς διακοπές και κενά· τον σχεδιάζουμε με τον διαβήτη. Κάθε τμήμα OM , όπου M σημείο του κύκλου, λέγεται επίσης **ακτίνα**.

Για τα σημεία M του κύκλου (O, ρ) , **και μόνο για αυτά**, ισχύει $OM = \rho$. Η ιδιότητα αυτή είναι «χαρακτηριστική» ιδιότητα των σημείων του κύκλου.

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ Γεωμετρικός τόπος

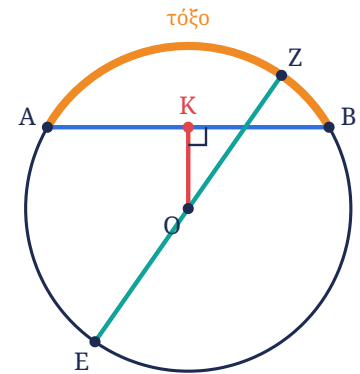
Γεωμετρικός τόπος λέγεται το σύνολο **όλων** των σημείων του επιπέδου που έχουν μια κοινή **χαρακτηριστική ιδιότητα**. Έτσι, ο κύκλος (O, ρ) είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν από το O απόσταση ρ .

⚠️ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠️ Για να είναι ένα σχήμα γεωμετρικός τόπος μιας ιδιότητας πρέπει να ισχύουν **δύο** πράγματα: (α) **κάθε** σημείο του σχήματος έχει την ιδιότητα και (β) **κάθε** σημείο με την ιδιότητα ανήκει στο σχήμα. Αυτό θα το χρειαστούμε πολύ στα επόμενα κεφάλαια.

► Τόξο, χορδή, διάμετρος, απόστημα

Δύο σημεία A, B ενός κύκλου τον χωρίζουν σε δύο μέρη· καθένα λέγεται **τόξο** με άκρα A και B και συμβολίζεται $\widehat{AB}$. Για να ξεχωρίσουμε τα δύο τόξα χρησιμοποιούμε κι ένα εσωτερικό τους σημείο, π.χ. $\widehat{ATB}$ και $\widehat{ADB}$.



Τόξο, χορδή AB, απόστημα OK, διάμετρος EZ

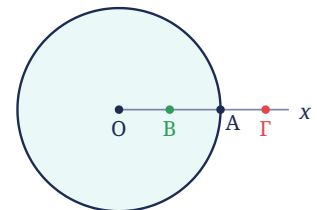
□ ΟΡΙΣΜΟΣ Στοιχεία του κύκλου

- **Χορδή** ενός τόξου $\widehat{AB}$ λέγεται το τμήμα AB που ενώνει τα άκρα του· λέγεται και χορδή του κύκλου.
- **Απόστημα** μιας χορδής AB λέγεται το (μοναδικό) κάθετο τμήμα OK από το κέντρο προς τη χορδή.
- **Διάμετρος** λέγεται κάθε χορδή που περνά από το κέντρο. Τα άκρα της λέγονται **αντιδιαμετρικά** σημεία.

Η διάμετρος είναι **διπλάσια** της ακτίνας ($\delta = 2\rho$) και το κέντρο είναι το **μέσο** της. Επειδή το μέσο ενός τμήματος είναι μοναδικό, προκύπτει ότι **το κέντρο κάθε κύκλου είναι μοναδικό**.

► Θέση σημείου ως προς κύκλο

Έστω κύκλος (O, ρ) και ένα σημείο M του επιπέδου:



- αν $OM < \rho$, το M λέγεται **εσωτερικό** σημείο του κύκλου,
- αν $OM = \rho$, το M είναι σημείο του κύκλου,
- αν $OM > \rho$, το M λέγεται **εξωτερικό** σημείο του κύκλου.

Τα εσωτερικά σημεία μαζί με τα σημεία του κύκλου αποτελούν τον **κυκλικό δίσκο**.

□ ΟΡΙΣΜΟΣ Ίσοι και ομόκεντροι κύκλοι

Δύο κύκλοι λέγονται **ίσοι** όταν, με κατάλληλη μετατόπιση, ο ένας ταυτίζεται με τον άλλον. Δύο κύκλοι είναι **ίσοι αν και μόνο αν έχουν ίσες ακτίνες**. Κύκλοι με το ίδιο κέντρο λέγονται **ομόκεντροι**.

✗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Ο κύκλος είναι όλη η περιοχή μέσα στη γραμμή.»

✓ Ο κύκλος είναι η **γραμμή**· η περιοχή που περικλείει (μαζί με τη γραμμή) είναι ο κυκλικός δίσκος.

✗ «Κάθε χορδή είναι διάμετρος.»

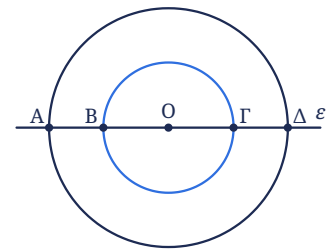
✓ Διάμετρος είναι μόνο η χορδή που περνά από το κέντρο. Κάθε διάμετρος όμως είναι χορδή.

✗ «Απόστημα είναι η απόσταση του κέντρου από ένα σημείο του κύκλου.»

✓ Αυτή είναι η ακτίνα. Απόστημα είναι το κάθετο τμήμα από το κέντρο προς μια **χορδή**.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, R) και (O, ρ) με $R > \rho$. Μια ευθεία ε περνά από το O και τέμνει τους κύκλους στα διαδοχικά σημεία A, B, Γ, Δ . Να αποδείξετε ότι $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Gamma = B\Delta$.



Λύση Τα A, Δ ανήκουν στον μεγάλο κύκλο και τα B, Γ στον μικρό, με το O μεταξύ B και Γ . Άρα $OA = OD = R$ και $OB = OG = \rho$. Τότε $AB = OA - OB = R - \rho$ και $\Gamma\Delta = OD - OG = R - \rho$, οπότε **$AB = \Gamma\Delta$** . Επίσης $A\Gamma = AO + OG = R + \rho$ και $B\Delta = BO + OD = \rho + R$, άρα **$A\Gamma = B\Delta$** .

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Ένας πρώτος γεωμετρικός τόπος

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων με ακτίνα 2 cm που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο K .

Λύση Αν ένας κύκλος $(M, 2 \text{ cm})$ περνά από το K , τότε $MK = 2 \text{ cm}$, δηλαδή το κέντρο M απέχει 2 cm από το K · άρα το M ανήκει στον κύκλο $(K, 2 \text{ cm})$. Αντίστροφα, για κάθε σημείο M του κύκλου $(K, 2 \text{ cm})$ ισχύει $MK = 2 \text{ cm}$, άρα ο κύκλος $(M, 2 \text{ cm})$ περνά από το K . Ο ζητούμενος τόπος είναι **ο κύκλος $(K, 2 \text{ cm})$** . Υπάρχουν λοιπόν **άπειροι** τέτοιοι κύκλοι.

✎ Για βίντεο, κουίζ και επιπλέον λυμένες ασκήσεις σε αυτό το μάθημα, επισκεψου το **mathgreece.com** — πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.

📖 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 2.17 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ● μέτρια ●● απαιτητική

1 Σε κύκλο ακτίνας 5 cm να βρείτε το μήκος μιας διαμέτρου. Μπορεί μια χορδή του να έχει μήκος 12 cm;

Λύση → σελ. 183

2 Δίνεται κύκλος $(O, 3 \text{ cm})$ και σημεία A, B, Γ με $OA = 2 \text{ cm}$, $OB = 3 \text{ cm}$, $OG = 4,5 \text{ cm}$. Να βρείτε τη θέση καθενός ως προς τον κύκλο.

Λύση → σελ. 183

- 3 Σχεδιάστε δύο ομόκεντρους κύκλους (O, ρ) και (O, R) με $R > \rho$. Ποια σημεία του επιπέδου είναι εσωτερικά του (O, R) και εξωτερικά του (O, ρ) ;

Λύση → σελ. 183

- 4 Σε κύκλο (O, ρ) η AB είναι διάμετρος και Γ το συμμετρικό του O ως προς το B . Να βρείτε το $A\Gamma$ ως συνάρτηση του ρ και τη θέση του Γ ως προς τον κύκλο.

Λύση → σελ. 183

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ

2.18

Επίκεντρη γωνία και αντίστοιχο τόξο

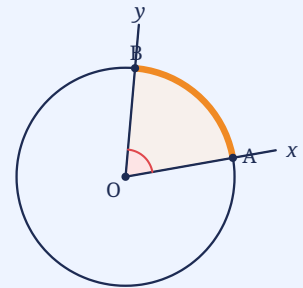
📌 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι είναι επίκεντρη γωνία και το αντίστοιχο τόξο της
- τη σχέση ισότητας επίκεντρων γωνιών και τόξων
- πώς συγκρίνουμε τόξα
- ημικύκλιο, τεταρτοκύκλιο και μέσο τόξου

§2.18 Επίκεντρη γωνία - Σχέση επίκεντρης γωνίας και τόξου

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια γωνία λέγεται **επίκεντρη** όταν η κορυφή της είναι το **κέντρο** ενός κύκλου. Αν οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο στα A και B, το τόξο $\widehat{AB}$ που βρίσκεται **στο εσωτερικό** της γωνίας λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της· λέμε ότι η $\angle AOB$ **βαίνει** στο τόξο $\widehat{AB}$.



► Σύγκριση τόξων

Η σύγκριση τόξων γίνεται όπως η σύγκριση τμημάτων. Δύο τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων λέγονται **ίσα** όταν με κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζονται. Το $\widehat{AB}$ λέγεται **μεγαλύτερο** από το $\widehat{\Gamma\Delta}$ όταν, μετά από μετατόπιση, το $\widehat{\Gamma\Delta}$ ταυτίζεται με μέρος του $\widehat{AB}$.

⚠️ ΠΡΟΣΟΧΗ!

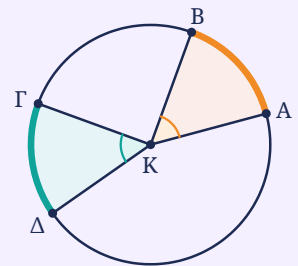
⚠️ Τόξα **άνισων** κύκλων **δεν συγκρίνονται!** Ένα τόξο 60° σε μεγάλο κύκλο και ένα τόξο 60° σε μικρό κύκλο έχουν το ίδιο μέτρο αλλά **δεν είναι ίσα** (δεν ταυτίζονται).

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο τόξα ενός κύκλου είναι **ίσα αν και μόνο αν** οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι **ίσες**.

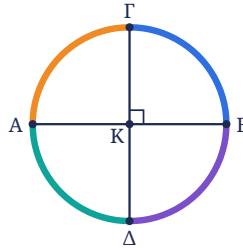
Απόδειξη. Ευθύ: Έστω $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$ στον κύκλο (K). Με κατάλληλη μετατόπιση τα τόξα συμπίπτουν: το Γ με το Α και το Δ με το Β. Τότε η ΚΓ συμπίπτει με την ΚΑ και η ΚΔ με την ΚΒ, δηλαδή $\angle AKB = \angle K\Delta$.

Αντίστροφο: Έστω $\angle AKB = \angle K\Delta$. Μετατοπίζουμε τη $\widehat{\Gamma\Delta}$ ώστε να ταυτιστεί με την $\widehat{AKB}$. Επειδή τα Α, Β, Γ, Δ είναι σημεία του ίδιου κύκλου (ίσες ακτίνες), το Γ θα πέσει στο Α και το Δ στο Β· τα τόξα έχουν τα ίδια άκρα και βρίσκονται στο εσωτερικό γωνιών που ταυτίζονται, άρα $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$. ■



➔ ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. Κάθε **διάμετρος** χωρίζει τον κύκλο σε **δύο ίσα τόξα**, που λέγονται **ημικύκλια**.
2. Δύο **κάθετες διαμέτροι** χωρίζουν τον κύκλο σε **τέσσερα ίσα τόξα**, που λέγονται **τεταρτοκύκλια**.
3. Δύο τόξα ενός κύκλου είναι **άνισα** όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες είναι **ομοιοτρόπως άνισες** (στο μεγαλύτερο τόξο αντιστοιχεί μεγαλύτερη επίκεντρη).

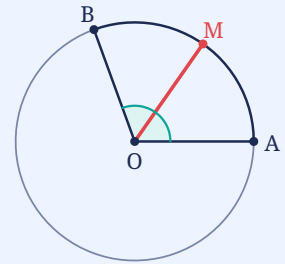


Δύο κάθετες διαμέτροι: τέσσερα τεταρτοκύκλια

► Μέσο τόξου

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα εσωτερικό σημείο M ενός τόξου $\widehat{AB}$ λέγεται **μέσο** του, όταν $\widehat{AM} = \widehat{MB}$.



☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Το μέσο ενός τόξου είναι **μοναδικό**.

Απόδειξη. Έστω M το μέσο του $\widehat{AB}$ σε κύκλο κέντρου O . Επειδή $\widehat{MA} = \widehat{MB}$, οι επίκεντρες $\widehat{AOM}$ και $\widehat{MOB}$ είναι ίσες, δηλαδή η OM είναι **διχοτόμος** της $\widehat{AOB}$. Αν το τόξο είχε και δεύτερο μέσο M' , τότε και η OM' θα ήταν διχοτόμος της $\widehat{AOB}$, που είναι άτοπο, αφού η διχοτόμος μιας γωνίας είναι μοναδική. ■

🔑 ΚΛΕΙΔΙ

Η «γέφυρα» της ενότητας: **ίσα τόξα $\Leftrightarrow$ ίσες επίκεντρες γωνίες**. Όποτε θέλεις να αποδείξεις ισότητα τόξων, δείξε ισότητα επίκεντρων γωνιών, και αντίστροφα.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Το αντίστοιχο τόξο της $\widehat{AOB}$ είναι οποιοδήποτε από τα δύο τόξα AB .»

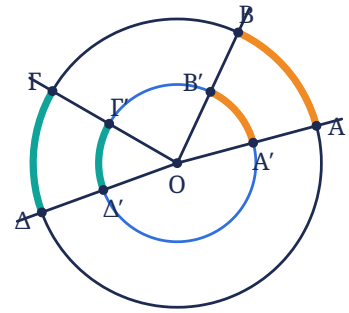
✓ Είναι το τόξο που βρίσκεται **στο εσωτερικό** της γωνίας.

✗ «Τόξα 40° σε δύο διαφορετικούς κύκλους είναι ίσα.»

✓ Ίσα μπορεί να είναι μόνο τόξα του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Οι γωνίες $\hat{xOy}$ και $\hat{zOt}$ είναι επίκεντρες σε δύο ομόκεντρους κύκλους (O, R) και (O, R'), $R' < R$, και τέμνουν τον μεγάλο κύκλο στα A, B και Γ, Δ, ενώ τον μικρό στα A', B' και Γ', Δ'. Αν $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$, να αποδείξετε ότι και $\widehat{A'B'} = \widehat{\Gamma'\Delta'}$.



Λύση Στον κύκλο (O, R): $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta} \Rightarrow \hat{AOB} = \hat{GO\Delta}$, δηλαδή $\hat{xOy} = \hat{zOt}$. Οι ίδιες γωνίες είναι επίκεντρες και στον κύκλο (O, R') και βαίνουν στα τόξα $\widehat{A'B'}$ και $\widehat{\Gamma'\Delta'}$. Αφού είναι ίσες, και τα τόξα είναι ίσα: $\widehat{A'B'} = \widehat{\Gamma'\Delta'}$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Δύο διάμετροι ΑΓ και ΒΔ ενός κύκλου σχηματίζουν δύο εφεξής γωνίες ίσες ($\hat{AOB} = \hat{BO\Gamma}$). Να αποδείξετε ότι χωρίζουν τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα.

Λύση Οι $\hat{AOB}$, $\hat{BO\Gamma}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές (οι OA, OΓ είναι αντικείμενες), και ίσες, άρα καθεμία είναι 1° . Τότε και οι κατακορυφήν τους $\hat{GO\Delta}$, $\hat{DOA}$ είναι ορθές. Οι τέσσερις επίκεντρες γωνίες είναι ίσες, άρα και τα αντίστοιχα τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$, $\widehat{\Delta A}$ είναι ίσα (τεταρτοκύκλια).

Θέλεις να το δεις και σε βίντεο;



Στο mathgreece.com θα βρεις αυτό το μάθημα εξηγημένο βήμα-βήμα σε βιντεομάθημα, μαζί με σημειώσεις και κουίζ αυτοαξιολόγησης. Ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο, στη διάθεσή σου όποτε το χρειαστείς.

www.mathgreece.com

Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 2.18 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Σε κύκλο κέντρου O οι επίκεντρες γωνίες $\hat{AOB}$ και $\hat{GO\Delta}$ είναι κατακορυφήν. Να αποδείξετε ότι $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$.
Λύση → σελ. 183
- 2 Σε ένα σχήμα είναι $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$, όπου $\hat{K}_1$, $\hat{K}_2$ επίκεντρες γωνίες σε δύο διαφορετικούς κύκλους με κοινό κέντρο K αλλά διαφορετικές ακτίνες. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα;
Λύση → σελ. 183
- 3 Αν τα σημεία M και N είναι και τα δύο μέσα του ίδιου τόξου $\widehat{AB}$, τι συμπεραίνετε;
Λύση → σελ. 183
- 4 Σε κύκλο κέντρου O φέρνουμε τη διάμετρο AB και τη διχοτόμο OM της $\hat{AO\Gamma}$, όπου Γ σημείο του κύκλου. Αν N είναι το σημείο τομής του κύκλου με την προέκταση της MO, να αποδείξετε ότι το N είναι μέσο του τόξου $\widehat{B\Gamma}$, όπου Γ' το αντιδιαμετρικό του Γ.
Λύση → σελ. 183

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ

2.19

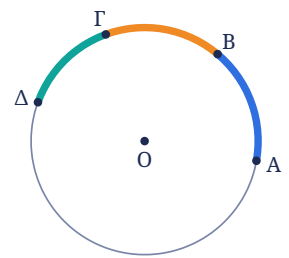
Μέτρο τόξου και γωνίας

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- διαδοχικά τόξα, άθροισμα και διαφορά τόξων
- τη μοίρα και τις υποδιαιρέσεις της
- το μέτρο τόξου και το μέτρο γωνίας
- να λύνεις προβλήματα με μέτρα τόξων και γωνιών

§2.19 Μέτρο τόξου και γωνίας

Δύο τόξα ενός κύκλου με ένα κοινό άκρο και χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία λέγονται **διαδοχικά** (π.χ. $\widehat{AB}$ και $\widehat{BG}$). Τρία ή περισσότερα τόξα λέγονται διαδοχικά αν, με τη σειρά τους, κάθε ένα είναι διαδοχικό με το επόμενο. Τα τόξα είναι διαδοχικά ακριβώς όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες είναι διαδοχικές.



📖 ΟΡΙΣΜΟΣ Πράξεις με τόξα

Αν $\widehat{AB}$, $\widehat{BG}$ διαδοχικά τόξα, το τόξο $\widehat{ABG}$ λέγεται **άθροισμά** τους: $\widehat{AB} + \widehat{BG} = \widehat{ABG}$. Αν $\widehat{BG} = \widehat{AB}$, γράφουμε $\widehat{ABG} = 2\widehat{AB}$. Όμοια ορίζεται το $n \cdot \widehat{AB}$. Αν $\widehat{\Gamma\Delta} = n \cdot \widehat{AB}$, το $\widehat{AB}$ λέγεται **n-οστό** του $\widehat{\Gamma\Delta}$: $\widehat{AB} = \frac{\widehat{\Gamma\Delta}}{n}$. Αν $\widehat{AB} > \widehat{\Gamma\Delta}$ με κοινό άκρο A, η **διαφορά** $\widehat{AB} - \widehat{\Gamma\Delta}$ είναι το τόξο $\widehat{\Gamma B}$.

► Η μοίρα

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ Μοίρα - μέτρο τόξου

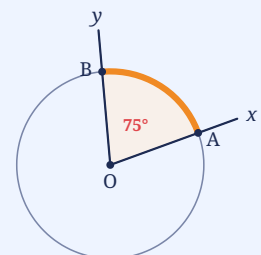
Μοίρα (1°) λέγεται το τόξο που είναι το $\frac{1}{360}$ του κύκλου. Για κάθε τόξο υπάρχει θετικός αριθμός που εκφράζει πόσες φορές περιέχει τη μοίρα (ή μέρη της): ο αριθμός αυτός λέγεται **μέτρο** του τόξου.

Άρα ολόκληρος ο κύκλος είναι 360° , το ημικύκλιο 180° και το τεταρτοκύκλιο 90° . Η μοίρα υποδιαιρείται σε **60 πρώτα λεπτά** ($60'$) και κάθε πρώτο λεπτό σε **60 δευτέρα λεπτά** ($60''$).

► Μέτρο γωνίας

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Για να μετρήσουμε μια γωνία $\widehat{xOy}$, την κάνουμε **επίκεντρη** σε έναν κύκλο (O, ρ) . **Μέτρο** της γωνίας ορίζουμε το **μέτρο του τόξου** $\widehat{AB}$ στο οποίο βαίνει.



Το μέτρο μιας ορθής, μιας ευθείας και μιας πλήρους γωνίας είναι αντίστοιχα 90° , 180° και 360° . Το μέτρο της $\widehat{xOy}$ κανονικά συμβολίζεται $(\widehat{xOy})$, αλλά συνήθως γράφουμε απλά $\widehat{xOy} = 75^\circ$. Ο ορισμός είναι «σωστός» γιατί το μέτρο **δεν εξαρτάται από τον κύκλο** που θα επιλέξουμε (θυμήσου το παράδειγμα με τους ομόκεντρους κύκλους).

🔑 ΚΛΕΙΔΙ

Μετά από αυτή την ενότητα, κάθε σχέση γωνιών μπορεί να γραφτεί με αριθμούς: συμπληρωματικές $\Rightarrow \varphi + \omega = 90^\circ$, παραπληρωματικές $\Rightarrow \varphi + \omega = 180^\circ$, γωνίες γύρω από σημείο έχουν άθροισμα 360° .

⚠️ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠️ Τα λεπτά της μοίρας είναι **εξηκονταδικά**, όχι δεκαδικά: $30,5^\circ = 30^\circ 30'$, ενώ $30,25^\circ = 30^\circ 15'$. Μην γράφεις $30,5^\circ = 30^\circ 50'!$
- ⚠️ Το μέτρο τόξου σε μοίρες δείχνει «τι μέρος του κύκλου» είναι το τόξο, όχι το μήκος του. Τόξα 60° σε άνισους κύκλους έχουν διαφορετικά μήκη.
- ⚠️ Η επίκεντρη γωνία και το αντίστοιχο τόξο της έχουν **το ίδιο μέτρο**: $\widehat{AOB} = \widehat{AB}$ (σε μοίρες).

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ $90^\circ - 37^\circ 25' = 53^\circ 75'$

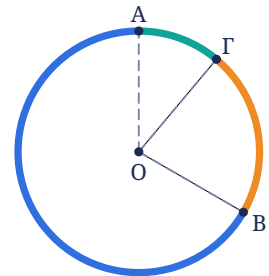
✓ $90^\circ = 89^\circ 60'$, άρα $90^\circ - 37^\circ 25' = 52^\circ 35'$.

✗ «Τα τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{BG}$, $\widehat{GA}$ ενός κύκλου έχουν άθροισμα 180° .»

✓ Τρία διαδοχικά τόξα που «κλείνουν» τον κύκλο έχουν άθροισμα 360° .

🔧 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τα διαδοχικά τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{BG}$, $\widehat{GA}$ με $\widehat{AB} = 3\widehat{BG} = 6\widehat{GA}$. Να βρείτε (i) τα μέτρα των τόξων, (ii) τα μέτρα των γωνιών $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOG}$, $\widehat{GOA}$.



Λύση (i) Από την υπόθεση $\widehat{AB} = 6\widehat{GA}$ και $\widehat{BG} = 2\widehat{GA}$. Επειδή τα τρία τόξα συμπληρώνουν τον κύκλο: $6\widehat{GA} + 2\widehat{GA} + \widehat{GA} = 360^\circ \Rightarrow 9\widehat{GA} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{GA} = 40^\circ$, οπότε $\widehat{BG} = 80^\circ$ και $\widehat{AB} = 240^\circ$.
(ii) Κάθε επίκεντρη γωνία έχει το μέτρο του τόξου της: $\widehat{AOB} = 240^\circ$ (μη κυρτή), $\widehat{BOG} = 80^\circ$, $\widehat{GOA} = 40^\circ$.

🔧 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Σύστημα με τόξα

Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB θεωρούμε σημείο Γ ώστε $\widehat{AG} - \widehat{GB} = 80^\circ$. Να βρείτε (i) τα τόξα $\widehat{AG}$ και $\widehat{GB}$, (ii) τις γωνίες $\widehat{AOG}$ και $\widehat{GOB}$.

Λύση (i) Τα δύο τόξα συμπληρώνουν το ημικύκλιο: $\widehat{AG} + \widehat{GB} = 180^\circ$. Μαζί με $\widehat{AG} - \widehat{GB} = 80^\circ$, προσθέτοντας: $2\widehat{AG} = 260^\circ \Rightarrow \widehat{AG} = 130^\circ$ και $\widehat{GB} = 50^\circ$.
(ii) $\widehat{AOG} = 130^\circ$ και $\widehat{GOB} = 50^\circ$.

 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Μοίρες και λεπτά

Να μετατρέψετε σε μοίρες και λεπτά τη γωνία $47,6^\circ$ και να υπολογίσετε το συμπλήρωμά της.

Λύση $0,6^\circ = 0,6 \cdot 60' = 36'$, άρα $47,6^\circ = 47^\circ 36'$. Συμπλήρωμα: $90^\circ - 47^\circ 36' = 89^\circ 60' - 47^\circ 36' = 42^\circ 24'$.



Για βίντεο, κουίζ και επιπλέον λυμένες ασκήσεις σε αυτό το μάθημα, επισκεψου το mathgreece.com — πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.

 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 2.19 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

• βασική • μέτρια • απαιτητική

- 1 Τρία διαδοχικά τόξα κύκλου $\widehat{AB}$, $\widehat{BG}$, $\widehat{GA}$ είναι ανάλογα των αριθμών 2, 3, 4. Να βρείτε τα μέτρα τους.
Λύση → σελ. 184
- 2 Να υπολογίσετε την παραπληρωματική της γωνίας $63^\circ 48'$.
Λύση → σελ. 184
- 3 Πόσες μοίρες διαγράφει ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού σε 20 λεπτά; Και ο ωροδείκτης σε 20 λεπτά;
Λύση → σελ. 184
- 4 Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB δίνονται σημείο M του ημικυκλίου ώστε $\widehat{MA} = \widehat{MB}$ και σημείο Σ του τόξου $\widehat{MB}$.
Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Sigma M} = \frac{1}{2}(\widehat{\Sigma A} - \widehat{\Sigma B})$.
Λύση → σελ. 184
- 5 Η ώρα είναι 3:40. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι δείκτες του ρολογιού.
Λύση → σελ. 184

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ

2.20

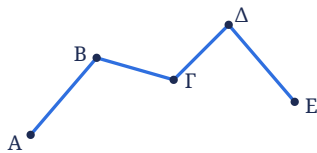
Τεθλασμένη γραμμή και πολύγωνο

© Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

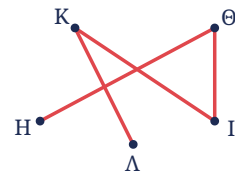
- τεθλασμένη γραμμή, κορυφές, πλευρές, περίμετρος
- απλή, κυρτή και κλειστή τεθλασμένη
- τον ορισμό του πολυγώνου και του κυρτού πολυγώνου
- διαγώνιες, γωνίες και εξωτερικές γωνίες πολυγώνου
- τον τύπο για το πλήθος των διαγωνίων

§2.20 Τεθλασμένη γραμμή - Πολύγωνο - Στοιχεία πολυγώνου

Θεωρούμε σημεία με καθορισμένη σειρά, π.χ. Α, Β, Γ, Δ, Ε, τέτοια ώστε **ανά τρία διαδοχικά να μην είναι συνευθειακά**. Το σχήμα που αποτελείται από τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ λέγεται **τεθλασμένη γραμμή** και συμβολίζεται ΑΒΓΔΕ.



απλή τεθλασμένη ΑΒΓΔΕ



μη απλή τεθλασμένη ΗΘΙΚΛ

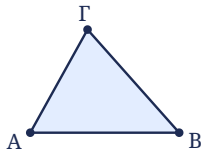
📖 ΟΡΙΣΜΟΣ Στοιχεία τεθλασμένης

- Τα Α, Β, Γ, Δ, Ε λέγονται **κορυφές** και ειδικότερα τα Α, Ε **άκρα** της τεθλασμένης. Τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ λέγονται **πλευρές** και το άθροισμά τους **περίμετρος**.
- Μια τεθλασμένη λέγεται **απλή** όταν δύο οποιεσδήποτε μη διαδοχικές πλευρές της δεν έχουν κοινό σημείο.
- Λέγεται **κυρτή** όταν ο φορέας κάθε πλευράς αφήνει όλες τις άλλες κορυφές **προς το ίδιο μέρος**.
- Λέγεται **κλειστή** όταν τα άκρα της ταυτίζονται.

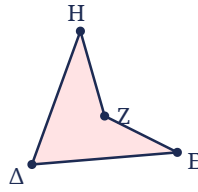
► Πολύγωνο

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

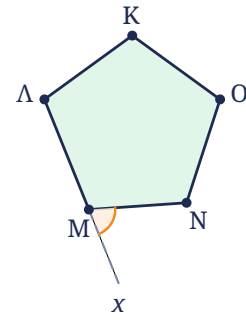
Μια **κλειστή** και **απλή** τεθλασμένη λέγεται **πολύγωνο**. Αν η τεθλασμένη είναι κυρτή, το πολύγωνο λέγεται **κυρτό**· αλλιώς **μη κυρτό**.



κυρτό τρίγωνο



μη κυρτό τετράπλευρο



κυρτό πεντάγωνο και εξωτερική γωνία στο Μ

Πολύγωνο με 3 κορυφές λέγεται **τρίγωνο**, με 4 **τετράπλευρο**, με 5 **πεντάγωνο**, με 6 **εξάγωνο** και γενικά με n κορυφές **n -γωνο**. Στο εξής, λέγοντας «πολύγωνο» θα εννοούμε **κυρτό** πολύγωνο.

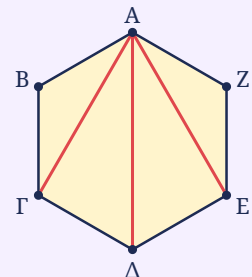
ΟΡΙΣΜΟΣ Διαγώνιες και γωνίες πολυγώνου

- **Διαγώνιος** λέγεται κάθε τμήμα με άκρα δύο **μη διαδοχικές** κορυφές.
- **Γωνίες** του πολυγώνου λέγονται οι γωνίες που σχηματίζουν οι διαδοχικές πλευρές του. Τα κοινά εσωτερικά σημεία των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου αποτελούν το **εσωτερικό** του.
- **Εξωτερική γωνία** λέγεται κάθε γωνία που είναι **εφεξής και παραπληρωματική** μιας γωνίας του πολυγώνου· τη σχηματίζουμε προεκτείνοντας μια πλευρά. Συμβολίζεται π.χ. $\hat{M}_{\text{εξ}}$.

☆ ΠΡΟΤΑΣΗ

Ένα κυρτό n -γωνο έχει $\delta = \frac{n(n-3)}{2}$ διαγώνιες.

Απόδειξη. Από κάθε κορυφή ξεκινούν $n - 3$ διαγώνιες (προς όλες τις κορυφές εκτός από την ίδια και τις δύο γειτονικές της). Οι n κορυφές δίνουν $n(n - 3)$ «διαγώνιες», όμως έτσι κάθε διαγώνιος μετρήθηκε **δύο φορές** (μία από κάθε άκρο της). Άρα $\delta = \frac{n(n-3)}{2}$.

Από την Α ξεκινούν $6 - 3 = 3$ διαγώνιες

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Η εξωτερική γωνία σχηματίζεται από μια πλευρά και την **προέκταση** της γειτονικής της, όχι από δύο πλευρές.
- ⚠ Σε κάθε κορυφή υπάρχουν δύο εξωτερικές γωνίες (προεκτείνοντας τη μία ή την άλλη πλευρά)· είναι κατακορυφήν, άρα ίσες.
- ⚠ Το τρίγωνο δεν έχει διαγώνιες: $\delta = \frac{3 \cdot 0}{2} = 0$.

❌ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Η περίμετρος ενός πολυγώνου είναι το άθροισμα πλευρών και διαγωνίων.»

✓ Περίμετρος είναι το άθροισμα **μόνο των πλευρών**.

✗ $\delta = n(n-3)$ για το πλήθος των διαγωνίων.

✓ Κάθε διαγώνιος μετρίεται δύο φορές, άρα διαιρούμε με 2: $\delta = \frac{n(n-3)}{2}$.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Πόσες διαγώνιες έχει ένα κυρτό οκτάγωνο; Ποιο κυρτό πολύγωνο έχει 20 διαγώνιες;

Λύση Για $n = 8$: $\delta = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20$. Άρα το πολύγωνο με 20 διαγώνιες είναι το **οκτάγωνο**. (Αλγεβρικά: $\frac{n(n-3)}{2} = 20 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 40 = 0 \Leftrightarrow n = 8$, αφού η άλλη ρίζα $n = -5$ απορρίπτεται.)

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Πώς αλλάζει το πλήθος των διαγωνίων

Κατά πόσο αυξάνεται το πλήθος των διαγωνίων ενός κυρτού n -γώνου όταν το πλήθος των πλευρών του αυξηθεί κατά 1;

Λύση $\delta(n+1) - \delta(n) = \frac{(n+1)(n-2)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n^2 - n - 2 - n^2 + 3n}{2} = \frac{2n-2}{2} = n-1$. Γεωμετρικά: η νέα κορυφή δίνει $n-2$ νέες διαγώνιες και η παλιά πλευρά που «σπάει» γίνεται διαγώνιος (+1).



🎓 Περισσότερη εξάσκηση;

Αν θέλεις κι άλλες ασκήσεις πάνω σε αυτή την ενότητα, μπες στο **mathgreece.com**: εκεί υπάρχει **πλήρες δωρεάν φροντιστήριο** με λυμένες ασκήσεις, διαγωνίσματα και βίντεο για όλη τη Γεωμετρία.

www.mathgreece.com

📖 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 2.20 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Να βρείτε το πλήθος των διαγωνίων (α) ενός πενταγώνου, (β) ενός δεκαγώνου.
Λύση → σελ. 184
- 2 Ποιο κυρτό πολύγωνο έχει τόσες διαγώνιες όσες και πλευρές;
Λύση → σελ. 184
- 3 Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει περίμετρο 30 cm, ΑΒ = 6 cm, ΒΓ = 2·ΑΒ και ΓΔ = ΔΑ. Να βρείτε τις πλευρές ΓΔ και ΔΑ.
Λύση → σελ. 184
- 4 Υπάρχει κυρτό πολύγωνο με 25 διαγώνιες;
Λύση → σελ. 184

Σ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Όλη η θεωρία με μια ματιά

Ευθύγραμμο τμήμα

- Από 2 σημεία περνά **μία** ευθεία.
- B μεταξύ A, Γ $\Rightarrow$ $ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ$.
- Μέσο M: $ΑΜ = ΜΒ = \frac{ΑΒ}{2}$ (μοναδικό).
- B συμμετρικό του A ως προς O $\Leftrightarrow$ O μέσο του AB.

Γωνίες

- Ορθή = 90° , ευθεία = 180° , πλήρης = 360° .
- Οξεία $< 90^\circ <$ αμβλεία $< 180^\circ$.
- Διχοτόμος: μοναδική, χωρίζει σε 2 ίσες.
- Από σημείο **μία** κάθετη σε ευθεία.

Σχέσεις γωνιών

- Συμπληρωματικές: $\varphi + \omega = 90^\circ$.
- Παραπληρωματικές: $\varphi + \omega = 180^\circ$.
- Εφεξής & παραπληρωματικές $\Leftrightarrow$ μη κοινές πλευρές αντικείμενες.
- Κατακορυφήν $\Rightarrow$ ίσες.**
- Διχοτόμοι εφεξής παραπληρωματικών $\perp$.

Κύκλος

- (O, ρ): σημεία με $ΟΜ = ρ$.
- Εσωτερικό: $ΟΜ < ρ$ · εξωτερικό: $ΟΜ > ρ$.
- Διάμετρος = 2ρ · απόστημα $\perp$ χορδή.
- Ίσοι κύκλοι $\Leftrightarrow$ ίσες ακτίνες.

Τόξα και επίκεντρες

- Ίσα τόξα $\Leftrightarrow$ ίσες επίκεντρες** (ίδιος ή ίσοι κύκλοι).
- Επίκεντρο = μέτρο τόξου της.
- Κύκλος 360° , ημικύκλιο 180° , τεταρτοκύκλιο 90° .
- $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

Πολύγωνα

- Πολύγωνο: κλειστή απλή τεθλασμένη.
- Διαγώνιες n-γώνου: $\delta = \frac{n(n-3)}{2}$.
- Εξωτερική γωνία: εφεξής & παραπληρωματική της εσωτερικής.

ΟΙ 5 ΠΙΟ ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΙΔΕΕΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Σε σημεία πάνω σε ευθεία δουλεύουμε με αθροίσματα/διαφορές τμημάτων και αντικαθιστούμε τα μέσα.
- Τα συμπληρώματα/παραπληρώματα ίσων γωνιών είναι ίσα.
- Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.
- Για συνενυθειακότητα: δύο εφεξής γωνίες με άθροισμα 180° .
- Ισότητα τόξων $\Leftrightarrow$ ισότητα επίκεντρων γωνιών.



Επανάληψη με βίντεο

Στο mathgreece.com θα βρεις επαναληπτικό βιντεομάθημα και κονίζ για όλο το Κεφάλαιο 2 — μέρος ενός πλήρους και ολοκληρωμένου δωρεάν φροντιστηρίου.

www.mathgreece.com



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Επαναληπτικό διαγώνισμα

Διάρκεια: 2 διδακτικές ώρες

Προσπάθησε να λύσεις το διαγώνισμα σε συνθήκες εξέτασης, χωρίς να ανατρέξεις στη θεωρία. Βαθμολόγησε τον εαυτό σου με τις λύσεις στο τέλος του βιβλίου.

ΘΕΜΑ 1

6 × 4 = 24 μονάδες

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ):

- α) Δύο διαφορετικές ευθείες μπορεί να έχουν δύο κοινά σημεία.
- β) Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.
- γ) Δύο ίσες γωνίες είναι πάντα κατακορυφήν.
- δ) Κάθε διάμετρος είναι χορδή.
- ε) Τόξα με το ίδιο μέτρο σε άνισους κύκλους είναι ίσα.
- στ) Ένα κυρτό εξάγωνο έχει 9 διαγώνιες.

ΘΕΜΑ 2

20 μονάδες

Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ με $AB = 8 \text{ cm}$, $BΓ = 14 \text{ cm}$. Αν M, N είναι τα μέσα των AB και AΓ, να βρείτε τα μήκη MN και BN.

ΘΕΜΑ 3

26 μονάδες

Δύο εφεξής γωνίες $\widehat{AOB}$ και $\widehat{BOΓ}$ έχουν $\widehat{AOB} = 3x + 10^\circ$ και $\widehat{BOΓ} = 5x + 10^\circ$. (i) Να βρείτε το x αν τα A, O, Γ είναι συνευθειακά. (ii) Να υπολογίσετε τη γωνία των διχοτόμων τους.

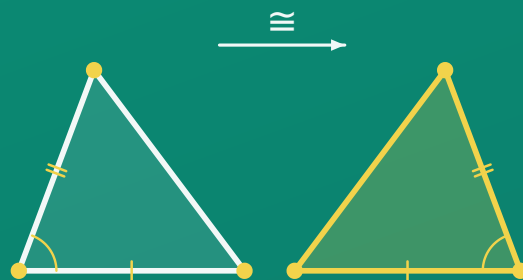
ΘΕΜΑ 4

30 μονάδες

Σε κύκλο κέντρου O τα διαδοχικά τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{BΓ}$, $\widehat{ΓΔ}$, $\widehat{ΔΑ}$ είναι ανάλογα των αριθμών 2, 3, 3, 4. (i) Να βρείτε τα μέτρα τους. (ii) Να εξετάσετε αν η BΔ είναι διάμετρος. (iii) Να βρείτε τη γωνία $\widehat{AOG}$.

Οι πλήρεις λύσεις του διαγωνίσματος βρίσκονται στις σελίδες λύσεων (σελ. 184).

Τρίγωνα



Το τρίγωνο είναι το πιο θεμελιώδες σχήμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας: κάθε πολύγωνο «κόβεται» σε τρίγωνα. Στο κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε τα **κριτήρια ισότητας τριγώνων** — το πιο ισχυρό εργαλείο απόδειξης της χρονιάς— και θα τα χρησιμοποιήσουμε για να ανακαλύψουμε ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου, της μεσοκαθέτου, της διχοτόμου και του κύκλου. Θα δούμε ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο, τις θέσεις ευθείας και κύκλου, δύο κύκλων, και θα κλείσουμε με γεωμετρικές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

3.1	Στοιχεία και είδη τριγώνων	57	3.10	Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας	83
3.2	1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων	61	3.11	Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών	86
3.3	2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων	66	3.12	Τριγωνική ανισότητα	87
3.4	3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων	67	3.13	Κάθετες και πλάγιες	90
3.5	Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου	71	3.14	Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου	92
3.6	Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων	71	3.15	Εφαπτόμενα τμήματα	93
3.7	Κύκλος - Μεσοκάθετος - Διχοτόμος	76	3.16	Σχετικές θέσεις δύο κύκλων	96
3.8	Κεντρική συμμετρία	79	3.17	Απλές γεωμετρικές κατασκευές	99
3.9	Αξονική συμμετρία	80	3.18	Βασικές κατασκευές τριγώνων	102

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · ΤΡΙΓΩΝΑ

ΜΑΘΗΜΑ

3.1

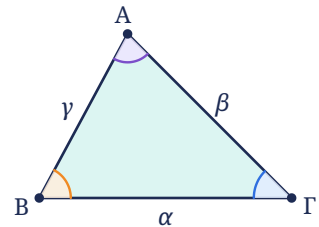
Στοιχεία και είδη τριγώνων

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τα κύρια στοιχεία του τριγώνου και τον συμβολισμό τους
- τα είδη των τριγώνων ως προς τις γωνίες
- τα είδη των τριγώνων ως προς τις πλευρές
- διάμεσο, διχοτόμο και ύψος τριγώνου

§3.1 Στοιχεία και είδη τριγώνων

Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει **τρεις κορυφές** (A, B, Γ), **τρεις πλευρές** ($AB, B\Gamma, \Gamma A$) και **τρεις γωνίες** ($\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$). Αυτά είναι τα **κύρια στοιχεία** του τριγώνου. Τα μήκη των πλευρών τα συμβολίζουμε συνήθως με το μικρό γράμμα της **απέναντι** κορυφής:

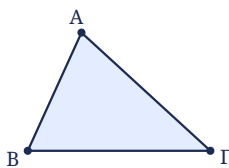


$$\alpha = B\Gamma, \quad \beta = \Gamma A, \quad \gamma = AB \quad \cdot \quad \text{περίμετρος: } \alpha + \beta + \gamma = 2\tau$$

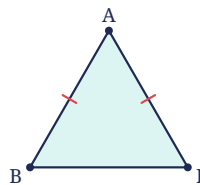
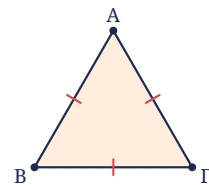
Λέμε ότι η πλευρά $B\Gamma$ είναι **απέναντι** από τη γωνία $\hat{A}$, ενώ οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι **προσκειμένες** στην πλευρά $B\Gamma$. Η γωνία $\hat{A}$ λέγεται **περιεχόμενη** γωνία των πλευρών AB και ΓA . Το $\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$ λέγεται **ημιπερίμετρος**.

► Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές

Ένα τρίγωνο λέγεται **σκαληνό** αν έχει όλες τις πλευρές του άνισες, **ισοσκελές** αν έχει δύο πλευρές ίσες και **ισόπλευρο** αν έχει και τις τρεις πλευρές ίσες.



σκαληνό: όλες άνισες

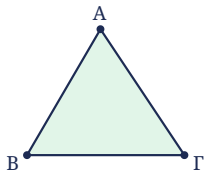
ισοσκελές: $AB = \Gamma\Gamma$ ισόπλευρο: $\alpha = \beta = \gamma$

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ Ορολογία ισοσκελούς

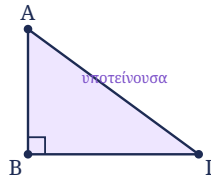
Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = \Gamma A$, οι ίσες πλευρές λέγονται **σκέλη**, η τρίτη πλευρά $B\Gamma$ λέγεται **βάση** και η κορυφή A (απέναντι από τη βάση) λέγεται **κορυφή** του ισοσκελούς. Οι γωνίες $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ λέγονται **γωνίες της βάσης**.

► Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες

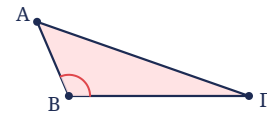
Ένα τρίγωνο λέγεται **οξυγώνιο** αν έχει όλες τις γωνίες του οξείες, **ορθογώνιο** αν έχει μία γωνία ορθή και **αμβλυγώνιο** αν έχει μία γωνία αμβλεία. Στο ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται **υποτείνουσα** και οι άλλες δύο **κάθετες πλευρές**.



οξυγώνιο: τρεις οξείες



ορθογώνιο: μία ορθή



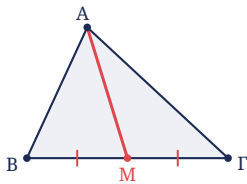
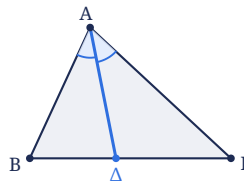
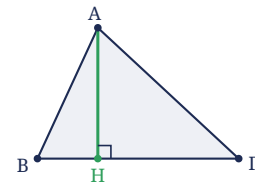
αμβλυγώνιο: μία αμβλεία

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Θα αποδείξουμε (§3.10) ότι ένα τρίγωνο **δεν** μπορεί να έχει δύο ορθές ή δύο αμβλείες γωνίες, ούτε μία ορθή και μία αμβλεία. Γι' αυτό η ταξινόμηση ως προς τις γωνίες είναι πλήρης.

Δευτερεύοντα στοιχεία: διάμεσος, διχοτόμος, ύψος**ΟΡΙΣΜΟΣ** Διάμεσοι, διχοτόμοι, ύψη

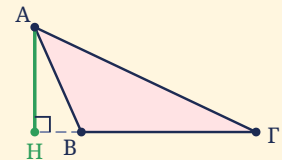
- **Διάμεσος** λέγεται το τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το **μέσο** της απέναντι πλευράς· συμβολίζεται με μ_α , μ_β , μ_γ .
- **Διχοτόμος** λέγεται το τμήμα της διχοτόμου μιας γωνίας από την κορυφή μέχρι την απέναντι πλευρά· συμβολίζεται με δ_α , δ_β , δ_γ .
- **Ύψος** λέγεται το κάθετο τμήμα από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς· συμβολίζεται με $υ_\alpha$, $υ_\beta$, $υ_\gamma$.

διάμεσος $AM = \mu_\alpha$ διχοτόμος $A\Delta = \delta_\alpha$ ύψος $AH = υ_\alpha$

Κάθε τρίγωνο έχει τρεις διαμέσους, τρεις διχοτόμους και τρία ύψη

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ▲ Σε **αμβλυγώνιο** τρίγωνο, τα ύψη από τις κορυφές των οξείων γωνιών «πέφτουν» **έξω** από το τρίγωνο, στην **προέκταση** της απέναντι πλευράς. Γι' αυτό λέμε «κάθετο προς την **ευθεία** της απέναντι πλευράς».
- ▲ Σε ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^\circ$), οι κάθετες πλευρές AB , $A\Gamma$ είναι **και ύψη**: $υ_\beta = AB$ και $υ_\gamma = A\Gamma$.
- ▲ Διάμεσος, διχοτόμος και ύψος από την ίδια κορυφή είναι γενικά **τρία διαφορετικά** τμήματα. Ταυτίζονται σε ειδικές περιπτώσεις (ισοσκελές — θα το δούμε).



⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Διχοτόμος τριγώνου είναι η ευθεία που χωρίζει την απέναντι πλευρά στη μέση.»

✓ Αυτή είναι η **διάμεσος**. Η διχοτόμος χωρίζει τη **γωνία** στη μέση.

✗ «Το ύψος είναι πάντα μέσα στο τρίγωνο.»

✓ Μόνο στο οξυγώνιο. Στο αμβλυγώνιο δύο ύψη είναι έξω, στο ορθογώνιο δύο ύψη είναι οι κάθετες πλευρές.

✗ Γράφουμε $\alpha = AB$.

✓ Το α είναι η πλευρά **απέναντι** από το A: $\alpha = BG$.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει περίμετρο 32 cm και βάση 10 cm. Να βρείτε τα σκέλη του.

Λύση Αν x το μήκος καθενός σκέλους: $2x + 10 = 32 \Rightarrow x = 11$ cm.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Σε τρίγωνο ABΓ είναι $\alpha = 7$, $\beta = 5$, $\gamma = 4$ και M το μέσο της BG. Να βρείτε τα BM, MG και την ημιπερίμετρο τ .

Λύση $BM = MG = \frac{\alpha}{2} = 3,5$. Η περίμετρος είναι $7 + 5 + 4 = 16$, άρα $\tau = 8$.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Συνδυασμοί ειδών

Ποια από τα παρακάτω είναι ταυτόχρονα δυνατά για ένα τρίγωνο: (i) ορθογώνιο και ισοσκελές, (ii) αμβλυγώνιο και ισόπλευρο, (iii) σκαληνό και οξυγώνιο;

Λύση (i) **Ναι**: π.χ. ορθογώνιο με $AB = AG$ (ορθογώνιο ισοσκελές). (ii) **Όχι**: θα δούμε ότι το ισόπλευρο έχει όλες τις γωνίες του ίσες, δηλαδή 60° (οξείες). (iii) **Ναι**: π.χ. τρίγωνο με πλευρές 5, 6, 7.

🎓 Για βίντεο, κουίζ και επιπλέον λυμένες ασκήσεις σε αυτό το μάθημα, επισκεψου το mathgreece.com — πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.

📖 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 3.1 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

• βασική • μέτρια ••• απαιτητική

1. Να σχεδιάσετε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{B}$ αμβλεία και να φέρετε τα τρία ύψη του. Ποια από αυτά βρίσκονται έξω από το τρίγωνο;

Λύση → σελ. 185

2. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει περίμετρο 27 cm. Να βρείτε την πλευρά του και τη μία διάμεσό του τμήματα στα οποία χωρίζει την πλευρά.

Λύση → σελ. 185

3. Σε ισοσκελές τρίγωνο το ένα σκέλος είναι διπλάσιο της βάσης και η περίμετρος είναι 45 cm. Να βρείτε τις πλευρές.

Λύση → σελ. 185

4
••

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), ποια είναι τα ύψη $υ_\beta$ και $υ_\gamma$; Πού τέμνονται τα τρία ύψη;

Λύση → σελ. 185

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · ΤΡΙΓΩΝΑ

ΜΑΘΗΜΑ

3.2

Ισότητα τριγώνων - 1ο κριτήριο (ΠΓΠ)

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- πότε δύο τρίγωνα λέγονται ίσα
- τα ομόλογα στοιχεία ίσων τριγώνων
- το κριτήριο Πλευρά-Γωνία-Πλευρά
- τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου και της μεσοκαθέτου

§3.2 1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

▶ Ίσα τρίγωνα

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο τρίγωνα λέγονται **ίσα** όταν με κατάλληλη μετατόπιση **συμπίπτουν**. Τότε έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Οι πλευρές και οι γωνίες που συμπίπτουν λέγονται **ομόλογα** στοιχεία. Μια βασική παρατήρηση που θα χρησιμοποιούμε **συνεχώς**:

🔑 ΚΛΕΙΔΙ

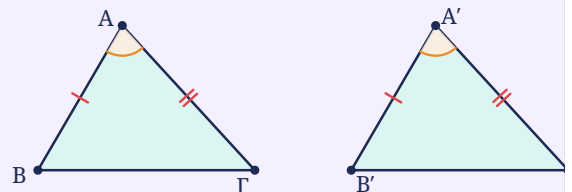
Σε ίσα τρίγωνα, **απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες** και, αντίστροφα, **απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές**. Έτσι βρίσκουμε ποια στοιχεία είναι ομόλογα.

Δεν χρειάζεται να ελέγχουμε και τα **έξι** στοιχεία για να βεβαιωθούμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα· αρκούν **τρία**, κατάλληλα επιλεγμένα. Αυτό μας λένε τα **κριτήρια ισότητας**.

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ (1Ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ – ΠΓΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν **δύο πλευρές** ίσες μία προς μία και τις **περιεχόμενες** σε αυτές **γωνίες** ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι **ίσα**.

Απόδειξη. Έστω $AB = A'B'$, $AG = A'T'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$. Μετατοπίζουμε το $A'B'T'$ έτσι ώστε η $\hat{A}'$ να συμπίπτει με την ίση της $\hat{A}$: η κορυφή A' με το A , η πλευρά $A'B'$ πάνω στην ημιευθεία AB και η $A'T'$ πάνω στην AG . Επειδή $A'B' = AB$, το B' θα συμπίπτει με το B (μοναδικό σημείο της ημιευθείας σε απόσταση AB) και, όμοια, το Γ' με το Γ . Τότε η πλευρά $B'\Gamma'$ συμπίπτει με τη $B\Gamma$ (από δύο σημεία περνά μία ευθεία), δηλαδή τα τρίγωνα συμπίπτουν. ■



Το κριτήριο το θυμόμαστε με τα αρχικά **Π-Γ-Π** (Πλευρά, Γωνία, Πλευρά): η γωνία πρέπει να βρίσκεται **ανάμεσα** στις δύο πλευρές.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ Πώς αποδεικνύω ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα

1. Κάνε σχήμα και **σημείωσε** με γραμμούλες και τοξάκια τα ίσα στοιχεία που δίνονται.
2. Βρες δύο τρίγωνα που «περιέχουν» τα τμήματα ή τις γωνίες που θέλεις να αποδείξεις ίσες.
3. Γράψε: «Συγκρίνω τα τρίγωνα XXX και YYY. Έχουν: 1) ... 2) ... 3) ...» αιτιολογώντας **κάθε** ισότητα (υπόθεση, κοινή πλευρά, κατακορυφήν, κ.λπ.).
4. Συμπεράνε: «Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε και ...» και βρες το ζητούμενο ως **ομόλογο** στοιχείο (απέναντι από ίσες πλευρές/γωνίες).

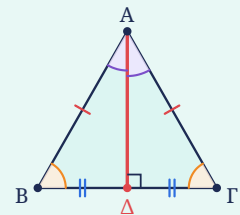
► Συνέπειες του 1ου κριτηρίου

➔ ΠΟΡΙΣΜΑ I

Σε κάθε **ισοσκελές** τρίγωνο:

- οι **γωνίες της βάσης** είναι ίσες,
- η **διχοτόμος** της γωνίας της κορυφής είναι **διάμεσος** και **ύψος**.

Απόδειξη. Έστω $AB\Gamma$ ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ και AD η διχοτόμος της $\hat{A}$. Τα τρίγωνα ADB και $AD\Gamma$ έχουν: $AB = A\Gamma$ (υπόθεση), AD κοινή και $\hat{B}\hat{A}D = \hat{D}\hat{A}\Gamma$ (AD διχοτόμος). Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε: $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (απέναντι από την κοινή AD), $BD = D\Gamma$ (απέναντι από τις ίσες γωνίες), δηλαδή η AD είναι διάμεσος, και $\hat{A}\hat{D}B = \hat{A}\hat{D}\Gamma$. Οι τελευταίες είναι εφεξής και παραπληρωματικές, άρα καθεμία είναι 90° : η AD είναι και ύψος.



➔ ΠΟΡΙΣΜΑ II

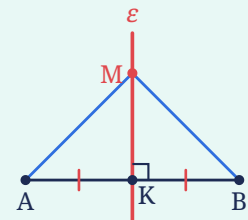
Οι γωνίες του **ισόπλευρου** τριγώνου είναι **ίσες**.

Απόδειξη. Το ισόπλευρο είναι ισοσκελές με βάση οποιαδήποτε πλευρά του. Με βάση τη $B\Gamma$: $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. με βάση την $A\Gamma$: $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Άρα $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma}$.

➔ ΠΟΡΙΣΜΑ III

Κάθε σημείο της **μεσοκαθέτου** ενός τμήματος **ισαπέχει** από τα άκρα του.

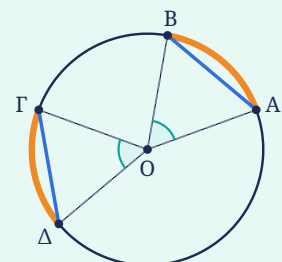
Απόδειξη. Έστω M σημείο της μεσοκαθέτου ε του AB , που τέμνει το AB στο μέσο του K . (Αν $M \equiv K$, προφανώς $MA = MB$.) Τα τρίγωνα MKA και MKB έχουν $KA = KB$, MK κοινή και $\hat{M}\hat{K}A = \hat{M}\hat{K}B = 90^\circ$, άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $MA = MB$.



➔ ΠΟΡΙΣΜΑ IV

Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι **ίσα**, τότε και οι **χορδές** τους είναι ίσες.

Απόδειξη. Έστω $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$ σε κύκλο (O, ρ) . Τότε οι επίκεντρες γωνίες είναι ίσες: $\hat{A}\hat{O}B = \hat{\Gamma}\hat{O}\Delta$. Τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ έχουν $OA = O\Gamma = \rho$, $OB = O\Delta = \rho$ και $\hat{A}\hat{O}B = \hat{\Gamma}\hat{O}\Delta$, άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $AB = \Gamma\Delta$.



⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Στο ΠΓΠ η γωνία πρέπει να είναι η **περιεχόμενη** στις δύο πλευρές. Δύο πλευρές και μια **μη περιεχόμενη** γωνία **δεν** εξασφαλίζουν ισότητα (υπάρχουν αντιπαραδείγματα — βλ. Συχνά λάθη).
- ⚠ Γράφε τα τρίγωνα με τη σειρά των ομολογων κορυφών: αν $AB\Gamma = \Delta EZ$, τότε $A \leftrightarrow \Delta$, $B \leftrightarrow E$, $\Gamma \leftrightarrow Z$. Έτσι διαβάζεις αμέσως τα ομόλογα στοιχεία.
- ⚠ Μια **κοινή πλευρά** ή **κατακορυφήν γωνίες** είναι πολύ συχνά το «κρυφό» τρίτο στοιχείο που χρειάζεσαι.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ « $AB\Gamma$ και $AB\Gamma'$ έχουν AB κοινή, $B\Gamma = B\Gamma'$ και $\hat{A}$ κοινή, άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).»

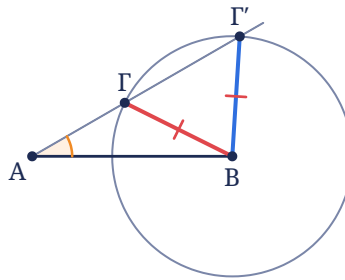
✓ Η $\hat{A}$ **δεν** είναι περιεχόμενη στις AB , $B\Gamma$. Στο σχήμα δίπλα, τα $AB\Gamma$ και $AB\Gamma'$ έχουν αυτά τα στοιχεία ίσα αλλά προφανώς **δεν** είναι ίσα!

✗ «Τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $\hat{A} = \hat{\Delta}$ » χωρίς έλεγχο ομολογίας.

✓ Βρες ποια γωνία βρίσκεται απέναντι από ποια ίση πλευρά· μόνο οι ομολογες γωνίες είναι ίσες.

✗ Παραλείπουμε την αιτιολόγηση: « $A\Delta = A\Delta$ ».

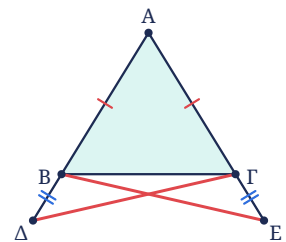
✓ Γράψε « $A\Delta$ κοινή πλευρά». Κάθε ισότητα θέλει αιτιολόγηση.



Αντιπαραδείγμα: δύο πλευρές και μη περιεχόμενη γωνία ίσες, τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Gamma'$ άνισα

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών AB , AG ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB = AG$) παίρνουμε τμήματα $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = BE$.

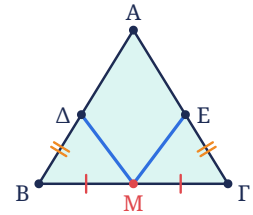


Λύση Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και AEB . Έχουν:

- 1) $A\Delta = AB + B\Delta = AG + \Gamma E = AE$,
 - 2) $A\Gamma = AB$ (υπόθεση),
 - 3) $\hat{A}$ κοινή (περιεχόμενη στις παραπάνω πλευρές).
- Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε και $\Gamma\Delta = BE$ (απέναντι από την κοινή γωνία $\hat{A}$).

 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Ισοσκελές μέσα σε ισοσκελές

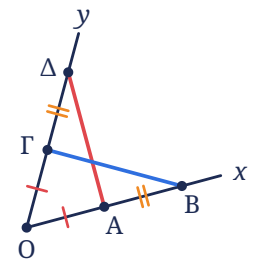
Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), M είναι το μέσο της βάσης $B\Gamma$ και Δ, E σημεία των $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα με $BD = GE$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές.



Λύση Τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ έχουν: $BD = GE$ (υπόθεση), $BM = MG$ (M μέσο) και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (γωνίες βάσης ισοσκελούς). Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $M\Delta = ME$ και το $M\Delta E$ είναι ισοσκελές.

 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Στις πλευρές Ox, Oy μιας γωνίας παίρνουμε σημεία A, B και Γ, Δ αντίστοιχα, με $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$. Να αποδείξετε ότι $A\Delta = \Gamma B$.



Λύση Τα τρίγωνα $O\Delta A$ και $O\Gamma B$ έχουν: $OA = O\Gamma$, $O\Delta = OB$ (υπόθεση) και $\hat{O}$ κοινή. Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $A\Delta = \Gamma B$.



 Κόλλησες κάπου;

Μην το αφήνεις! Στο **mathgreece.com** κάθε θεωρία έχει το δικό της βιντεομάθημα και κάθε κεφάλαιο τα δικά του κουίζ. Είναι ένα **ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο** μαθηματικών, φτιαγμένο για σένα.

www.mathgreece.com

 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 3.2 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ● μέτρια ●● απαιτητική

- 1** Στις προεκτάσεις των πλευρών $BA, \Gamma A$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ προς το A παίρνουμε τμήματα $A\Delta = AB$ και $A\epsilon = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\Delta E = B\Gamma$.

Λύση → σελ. 185

- 2** Σε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma A$ (προς τα B, Γ, A) κατά ίσα τμήματα $BD = \Gamma E = AZ$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.

Λύση → σελ. 185

- 3** Να αποδείξετε ότι σε ίσα τρίγωνα οι διάμεσοι που αντιστοιχούν σε ομόλογες πλευρές είναι ίσες.

Λύση → σελ. 185

- 4 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta$ η διχοτόμος του. Στην AB παίρνουμε σημείο E με $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\Delta E = \Delta\Gamma$.

Λύση → σελ. 185

- 5 Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB , η μεσοκάθετός του ε και δύο σημεία Γ, Δ της ε εκατέρωθεν του AB . Να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}\hat{B}\hat{\Delta}$.

Λύση → σελ. 185

- 6 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, M είναι το μέσο της $B\Gamma$ και Δ το συμμετρικό του A ως προς M . Να αποδείξετε ότι $B\Delta = A\Gamma$ και $\Gamma\Delta = AB$.

Λύση → σελ. 185

- 7 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσος AM . Αν Δ τυχαίο σημείο της ευθείας AM , να αποδείξετε ότι $\Delta B = \Delta\Gamma$. (Χρησιμοποιήστε το Πόρισμα Ι.)

Λύση → σελ. 186

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · ΤΡΙΓΩΝΑ

ΜΑΘΗΜΑ

3.3–3.4

2ο (ΓΠΓ) και 3ο (ΠΠΠ) κριτήριο ισότητας

§3.3 2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων · §3.4 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

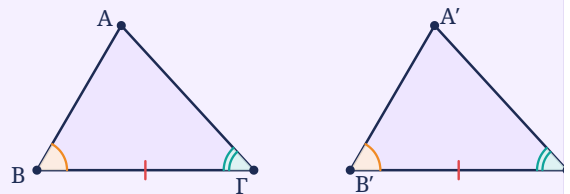
- το κριτήριο Γωνία-Πλευρά-Γωνία
- το κριτήριο Πλευρά-Πλευρά-Πλευρά
- τότε ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές
- χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου
- σχέση χορδών και τόξων

§3.3 2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ (2Ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ – ΓΠΓ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν **μία πλευρά ίση** και τις **προσκειμένες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία**, τότε τα τρίγωνα είναι **ίσα**.

Απόδειξη. Έστω $B\Gamma = B'\Gamma'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$. Αρκεί να δείξουμε ότι $AB = A'B'$ (τότε ισχύει το ΠΓΠ). Έστω ότι $AB \neq A'B'$, π.χ. $AB > A'B'$. Παίρνουμε σημείο Δ στην AB με $B\Delta = B'A'$. Τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $B\Delta = B'A'$, $B\Gamma = B'\Gamma'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $\Delta\hat{\Gamma}B = \hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma} = A\hat{\Gamma}B$. Τότε όμως οι ημιευθείες $\Gamma\Delta$ και ΓA θα σχημάτιζαν ίσες γωνίες με τη ΓB προς το ίδιο μέρος, άρα θα συνέπιπταν — άτοπο, αφού το Δ είναι εσωτερικό σημείο του AB και δεν ανήκει στην ευθεία ΓA . Άρα $AB = A'B'$ και τα τρίγωνα είναι ίσα.

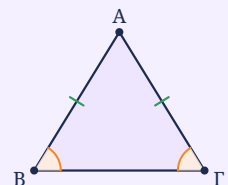


Το θυμόμαστε ως **Γ-Π-Γ** (Γωνία, Πλευρά, Γωνία): η πλευρά πρέπει να είναι **ανάμεσα** στις δύο γωνίες. (Στο Κεφάλαιο 4 θα δούμε ότι αρκεί μια πλευρά και **οποιοσδήποτε** δύο ομόλογες γωνίες, αφού τότε και οι τρίτες γωνίες είναι ίσες.)

☆ ΕΦΑΡΜΟΓΗ (ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΤΟΥ ΠΟΡΙΣΜΑΤΟΣ Ι)

Αν ένα τρίγωνο έχει **δύο γωνίες ίσες**, τότε είναι **ισοσκελές**: οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι ίσες.

Απόδειξη. Έστω $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ στο τρίγωνο $AB\Gamma$. Συγκρίνουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ με το «ίδιο» τρίγωνο $A\Gamma B$ (ως άλλη αντιστοίχιση κορυφών $B \leftrightarrow \Gamma$). Έχουν $B\Gamma = \Gamma B$, $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{B}$, άρα (ΠΠΓ) είναι ίσα με αυτή την αντιστοιχία, οπότε η AB είναι ομόλογη της AG : $AB = AG$.



🔑 ΚΛΕΙΔΙ

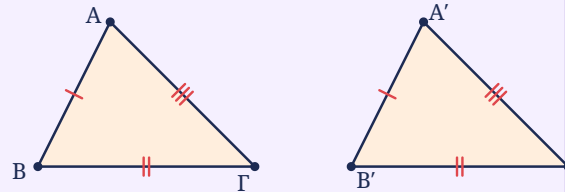
Ένα τρίγωνο είναι **ισοσκελές** $\Leftrightarrow$ έχει **δύο γωνίες ίσες**, και **ισόπλευρο** $\Leftrightarrow$ έχει **και τις τρεις γωνίες ίσες**. Αυτό είναι ο πιο γρήγορος τρόπος να δείξεις ότι δύο τμήματα είναι ίσα, όταν βρίσκονται στο ίδιο τρίγωνο!

§3.4 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ (3Ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ – ΠΠΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις **πλευρές** τους ίσες μία προς μία, τότε είναι **ίσα**.

Απόδειξη. Έστω $AB = A'B'$, $BΓ = B'T'$, $ΓΑ = Γ'A'$. Μεταφέρουμε το $A'B'T'$ ώστε η $B'T'$ να συμπίσει με την ίση της $BΓ$ και το A' να βρεθεί σε σημείο Δ στο **άλλο** ημιεπίπεδο από το A ως προς τη $BΓ$. Τότε $B\Delta = BA$ και $\Gamma\Delta = \Gamma A$. Φέρνουμε το $A\Delta$. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελή, άρα $\widehat{B\Delta A} = \widehat{B\Delta A}$ και $\widehat{\Gamma\Delta A} = \widehat{\Gamma\Delta A}$. Προσθέτοντας (όταν το $A\Delta$ τέμνει τη $BΓ$) παίρνουμε $\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{A'}$. Τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'T'$ έχουν $AB = A'B'$, $A\Gamma = A'T'$ και $\widehat{A} = \widehat{A'}$, άρα είναι ίσα (ΠΓΠ). (Οι υπόλοιπες θέσεις του $A\Delta$ αντιμετωπίζονται ανάλογα, με αφαίρεση γωνιών.)



► Πορίσματα των κριτηρίων

➡ ΠΟΡΙΣΜΑ I

Η **διάμεσος** ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη **βάση** είναι **διχοτόμος** και **ύψος**.

Απόδειξη. Αν AM η διάμεσος του ισοσκελούς $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), τα τρίγωνα AMB και $AM\Gamma$ έχουν $AB = A\Gamma$, $BM = M\Gamma$, AM κοινή, άρα είναι ίσα (ΠΠΠ). Επομένως $\widehat{B\Delta M} = \widehat{M\Delta\Gamma}$ (διχοτόμος) και $\widehat{AMB} = \widehat{AM\Gamma} = 90^\circ$ (ύψος).

➡ ΠΟΡΙΣΜΑ II

Κάθε σημείο που **ισαπέχει από τα άκρα** ενός τμήματος ανήκει στη **μεσοκάθετό** του.

Απόδειξη. Έστω $MA = MB$ (με M εκτός της AB) και K το μέσο του AB . Το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές και η MK είναι διάμεσος προς τη βάση, άρα (Πόρισμα I) και ύψος: $MK \perp AB$. Άρα η MK είναι η μεσοκάθετος του AB και το M ανήκει σε αυτήν. (Αν το M ανήκει στην AB , τότε είναι το μέσο K .)

🔑 ΚΛΕΙΔΙ

Συνδυάζοντας το Πόρισμα III της §3.2 και το Πόρισμα II της §3.4: **ένα σημείο ανήκει στη μεσοκάθετο του $AB \Leftrightarrow$ ισαπέχει από τα A και B** . Δηλαδή η μεσοκάθετος είναι ο **γεωμετρικός τόπος** των σημείων που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος (§3.7).

➡ ΠΟΡΙΣΜΑ III

Αν οι **χορδές** δύο τόξων ενός κύκλου, **μικρότερων του ημικυκλίου**, είναι **ίσες**, τότε και τα τόξα είναι **ίσα**.

Απόδειξη. Αν $AB = \Gamma\Delta$ σε κύκλο (O, ρ) , τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ έχουν $OA = O\Gamma$, $OB = O\Delta$, $AB = \Gamma\Delta$, άρα είναι ίσα (ΠΠΠ). Οπότε $\widehat{A\hat{O}B} = \widehat{\Gamma\hat{O}\Delta}$ και (ως επίκεντρες) $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$.

➡ ΠΟΡΙΣΜΑ IV

Αν οι **χορδές** δύο τόξων ενός κύκλου, **μεγαλύτερων του ημικυκλίου**, είναι **ίσες**, τότε και τα τόξα είναι **ίσα**.

Συνοπτικά, τα τρία κριτήρια:

Κριτήριο	Τι πρέπει να είναι ίσο	Προσοχή
ΠΓΠ	δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία	η γωνία ανάμεσα στις πλευρές
ΓΠΓ	μία πλευρά και οι προσκειμένες γωνίες	η πλευρά ανάμεσα στις γωνίες
ΠΠΠ	και οι τρεις πλευρές	—
ΓΓΓ ×	τρεις γωνίες	ΔΕΝ αρκούν! (ένα μικρό και ένα μεγάλο ισόπλευρο)

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Οι τρεις γωνίες ίσες **δεν** εξασφαλίζουν ισότητα: τα τρίγωνα έχουν το ίδιο «σχήμα» αλλά μπορεί να διαφέρουν στο μέγεθος (όμοια τρίγωνα — Β' Λυκείου).
- ⚠ Τα Πορίσματα III, IV δεν ισχύουν αν το ένα τόξο είναι μικρότερο και το άλλο μεγαλύτερο από ημικύκλιο: η ίδια χορδή ΑΒ αντιστοιχεί σε δύο **διαφορετικά** τόξα!
- ⚠ Για να συμπεράνεις ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές από ίσες γωνίες, οι γωνίες πρέπει να είναι γωνίες του **ίδιου** τριγώνου.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

× « $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $AG = \Delta Z$, άρα ίσα με ΓΠΓ.»

✓ Η ΑΓ δεν είναι προσκειμένη στις $\hat{A}$, $\hat{B}$. Με τα εργαλεία του Κεφ. 3 δεν αρκεί (θα αρκεί μετά το Κεφ. 4, όπου $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$).

× «Τα τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες, άρα είναι ίσα.»

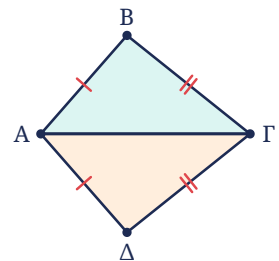
✓ Το ΓΓΓ **δεν** είναι κριτήριο ισότητας.

× «Ίσες χορδές $\Rightarrow$ ίσα τόξα» πάντα.

✓ Μόνο όταν τα τόξα είναι και τα δύο μικρότερα (ή και τα δύο μεγαλύτερα) του ημικυκλίου.

✏ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ο «χαρταετός»

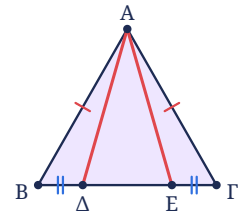
Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει $AB = AD$ και $GB = GD$. Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{G}$.



Λύση Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ έχουν: $AB = AD$, $GB = GD$ (υπόθεση) και ΑΓ κοινή. Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ). Επομένως $\hat{BAG} = \hat{GAD}$ (απέναντι από τις ίσες ΓΒ, ΓΔ) και $\hat{BGA} = \hat{GDA}$ (απέναντι από τις ίσες ΑΒ, ΑΔ). Δηλαδή η ΑΓ διχοτομεί τις $\hat{A}$ και $\hat{G}$. (Ένα τέτοιο τετράπλευρο λέγεται «χαρταετός».)

 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Δύο δρόμοι προς τη λύση

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) παίρνουμε στη βάση $B\Gamma$ σημεία Δ , E με $BD = GE$. Να αποδείξετε ότι $B\hat{A}\Delta = G\hat{A}E$, με δύο τρόπους.



Λύση **1ος τρόπος:** Τα $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ έχουν $AB = AG$, $BD = GE$, $\hat{B} = \hat{\Gamma}$: ίσα (ΠΓΠ), άρα $AD = AE$ και $B\hat{A}\Delta = G\hat{A}E$.

2ος τρόπος: Από τα ίσα τρίγωνα $AD = AE$ και επιπλέον $BE = BD + DE = GE + ED = \Gamma\Delta$. Τα ABE και $AG\Delta$ έχουν πλευρές ίσες μία προς μία (ΠΠΠ). Άρα $B\hat{A}E = G\hat{A}\Delta$ και, αφαιρώντας την κοινή $\hat{A}\Delta E$, $B\hat{A}\Delta = G\hat{A}E$.

 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Εφαρμογή του ΓΠΓ

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και σημεία Δ , E των AB , AG αντίστοιχα με $\Delta\hat{\Gamma}B = E\hat{B}\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $BE = \Gamma\Delta$.

Λύση Τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $E\Gamma B$ έχουν: $B\Gamma$ κοινή, $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$ (αφού $\hat{B} = \hat{\Gamma}$) και $\Delta\hat{\Gamma}B = E\hat{B}\Gamma$ (υπόθεση). Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ), οπότε $\Gamma\Delta = BE$ (απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Delta\hat{B}\Gamma$, $E\hat{\Gamma}B$).



 Μελέτησε έξυπνα

Συνδύασε αυτό το βοήθημα με τα βιντεομαθήματα, τα podcasts και τα παιχνίδια γνώσεων του **mathgreece.com**. Θα βρεις εκεί **πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο** για Γυμνάσιο και Λύκειο.

www.mathgreece.com

 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 3.3–3.4 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

• βασική • μέτρια • • απαιτητική

- 1** Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

Λύση → σελ. 186

- 2** Να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

Λύση → σελ. 186

- 3** Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ και $\mu_\alpha = \mu_\alpha'$. Να αποδείξετε ότι είναι ίσα.

Λύση → σελ. 186

- 4** Σε κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB = \Gamma\Delta$ και $AD = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$.

Λύση → σελ. 186

- 5** Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στην προέκταση της $B\Gamma$ προς το Γ παίρνουμε σημείο Δ και στην προέκτασή της προς το B σημείο E με $BE = \Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι: (i) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές, (ii) $B\hat{A}E = G\hat{A}\Delta$.

Λύση → σελ. 186

- 6 Σε κύκλο (O, ρ) οι χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι ίσες και μικρότερες της διαμέτρου. Αν M, N τα μέσα των τόξων $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ (των μικρότερων), να αποδείξετε ότι $MA = N\Gamma$.

Λύση → σελ. 186

- 7 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Με κέντρο B και ακτίνα BA γράφουμε κύκλο, και με κέντρο Γ και ακτίνα ΓA γράφουμε δεύτερο κύκλο· οι κύκλοι τέμνονται ξανά στο Δ . Να αποδείξετε ότι η $B\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του $A\Delta$.

Λύση → σελ. 186

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · ΤΡΙΓΩΝΑ

ΜΑΘΗΜΑ

3.5–3.6

Κάθετος από σημείο - Ισότητα ορθογώνιων τριγώνων

§3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου · §3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- ότι από σημείο εκτός ευθείας άγεται μοναδική κάθετος
- τα κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων
- ιδιότητες χορδών και αποστημάτων
- την ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου

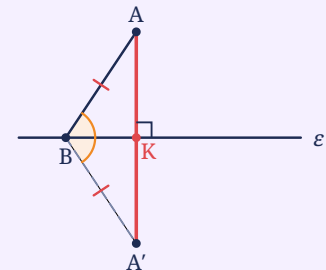
§3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Από σημείο A που βρίσκεται **εκτός** ευθείας ε διέρχεται **μία και μοναδική** κάθετος προς την ε .

Απόδειξη. Ύπαρξη. Παίρνουμε ένα σημείο B της ε και στο άλλο ημιεπίπεδο σχηματίζουμε γωνία ίση με τη γωνία που σχηματίζει η BA με την ε , παίρνοντας πάνω στη νέα πλευρά $BA' = BA$. Τα A, A' είναι εκατέρωθεν της ε , άρα το AA' τέμνει την ε σε σημείο K . Τα τρίγωνα BKA, BKA' έχουν $BA = BA', BK$ κοινή και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες: είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $\hat{BKA} = \hat{BKA'}$. Οι γωνίες αυτές είναι εφεξής και παραπληρωματικές, άρα ορθές: $AK \perp \varepsilon$.

Μοναδικότητα. Έστω ότι υπάρχει και δεύτερη κάθετος AL ($L \neq K$). Προεκτείνουμε την AK κατά $KA' = AK$. Τα ορθογώνια τρίγωνα LKA, LKA' είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $\hat{ALK} = \hat{A'LK} = 90^\circ$. Τότε $\hat{ALA'} = 180^\circ$, δηλαδή τα A, L, A' θα ήταν συνευθειακά· από τα A, A' θα περνούσαν δύο ευθείες (AK και AL), άτοπο.



Το κάθετο τμήμα AK λέγεται **απόσταση** του A από την ε και το K **προβολή** (ή **ίχνος**) του A στην ε .

§3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

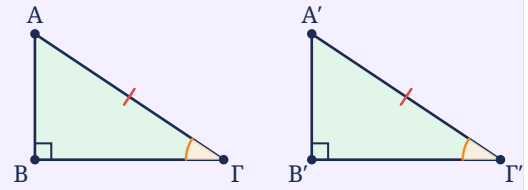
Δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν ήδη ένα ζευγάρι ίσων γωνιών, τις ορθές. Γι' αυτό τα κριτήρια ισότητας για αυτά απλοποιούνται: αρκούν **δύο** κατάλληλα στοιχεία (εκτός από την ορθή).

Από τα κριτήρια ΠΓΠ και ΓΠΓ προκύπτει αμέσως ότι δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν: (α) τις **δύο κάθετες πλευρές** ίσες μία προς μία (ΠΓΠ), ή (β) μία **κάθετη πλευρά** και την **προσκειμένη οξεία γωνία** ίσες (ΓΠΓ). Επιπλέον ισχύουν τα εξής:

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ I

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την **υποτείνουσα** και μία **οξεία γωνία** αντίστοιχα ίσες, τότε είναι ίσα.

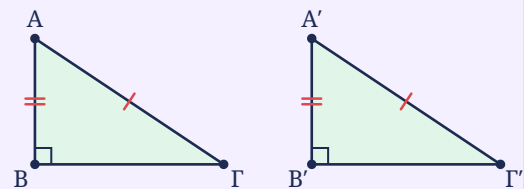
Απόδειξη. Έστω $\hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ$, $AG = A'G'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$. Μεταφέρουμε το $A'B'G'$ ώστε η $\hat{\Gamma}'$ να συμπίπτει με την ίση της $\hat{\Gamma}$: το G' στο G , η $G'A'$ πάνω στην ημιευθεία GA και η $G'B'$ πάνω στην ημιευθεία GB . Επειδή $G'A' = GA$, το A' συμπίπτει με το A . Τότε τα τμήματα AB και AB' είναι και τα δύο κάθετα από το A προς την ευθεία GB λόγω της μοναδικότητας της καθέτου (§3.5) ταυτίζονται, άρα $B' \equiv B$ και τα τρίγωνα συμπίπτουν.



☆ ΘΕΩΡΗΜΑ II

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την **υποτείνουσα** και μία **κάθετη πλευρά** αντίστοιχα ίσες, τότε είναι ίσα.

Απόδειξη. Έστω $\hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ$, $AG = A'G'$ και $AB = A'B'$. Μεταφέρουμε το $A'B'G'$ ώστε η $A'B'$ να συμπίπτει με την AB και το G' να πέσει σε σημείο Δ της ευθείας BG , από την άλλη μεριά του B (οι γωνίες στο B είναι ορθές, άρα η $B\Delta$ είναι προέκταση της GB). Τότε $A\Delta = A'G' = AG$, οπότε το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές και το AB ύψος του προς τη βάση $\Gamma\Delta$, άρα και διχοτόμος: $\hat{\Gamma}\hat{A}B = \hat{\Delta}\hat{A}B$. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta (= A'B'G')$ έχουν AB κοινή, $AG = A\Delta$ και $\hat{\Gamma}\hat{A}B = \hat{\Delta}\hat{A}B$, άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).



Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν ίσα:

Από πού

τις δύο κάθετες πλευρές

ΠΓΠ

μία κάθετη πλευρά και την προσκείμενη οξεία γωνία

ΓΠΓ

την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία

Θεώρημα I

την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά

Θεώρημα II

➔ ΠΟΡΙΣΜΑ I

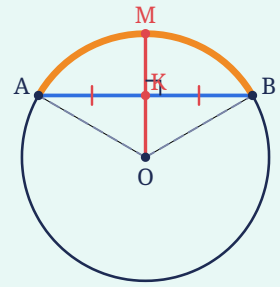
Το **ύψος** ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι **διάμεσος** και **διχοτόμος** της γωνίας της κορυφής.

Απόδειξη. Αν $AH \perp BG$ στο ισοσκελές $AB\Gamma$ ($AB = AG$), τα ορθογώνια AHB και AHG έχουν υποτείνουσες $AB = AG$ και AH κοινή, άρα είναι ίσα (Θ. II): $BH = HG$ και $\hat{B}\hat{A}H = \hat{H}\hat{A}G$.

➔ ΠΟΡΙΣΜΑ II

Η κάθετος από το **κέντρο** ενός κύκλου προς μια **χορδή** του **διχοτομεί** τη χορδή και το αντίστοιχο **τόξο** της.

Απόδειξη. Το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές ($OA = OB = \rho$) και OK το ύψος του προς τη βάση AB . Από το Πόρισμα I, η OK είναι διάμεσος ($AK = KB$) και διχοτόμος ($\widehat{AOM} = \widehat{MOB}$), οπότε $\widehat{AM} = \widehat{MB}$.

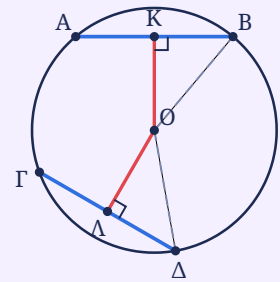


☆ ΘΕΩΡΗΜΑ III

Δύο χορδές ενός κύκλου είναι **ίσες αν και μόνο αν** τα **αποστήματά** τους είναι **ίσα**.

Απόδειξη. Έστω OK, OL τα αποστήματα των χορδών $AB, \Gamma\Delta$ · τότε (Πόρισμα II) $KB = \frac{AB}{2}$ και $L\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Τα ορθογώνια τρίγωνα OKB και $OL\Delta$ έχουν υποτείνουσες $OB = OL = \rho$.

- Αν $AB = \Gamma\Delta$, τότε $KB = L\Delta$ και τα τρίγωνα είναι ίσα (Θ. II), άρα $OK = OL$.
- Αν $OK = OL$, τα τρίγωνα είναι ίσα (Θ. II), άρα $KB = L\Delta$, οπότε $AB = \Gamma\Delta$.

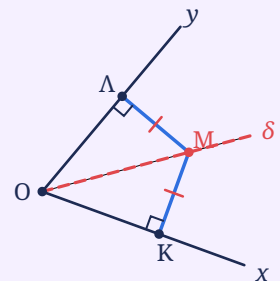


☆ ΘΕΩΡΗΜΑ IV

Κάθε σημείο της **διχοτόμου** μιας γωνίας **ισαπέχει από τις πλευρές** της και, **αντίστροφα**, κάθε **εσωτερικό** σημείο της γωνίας που **ισαπέχει από τις πλευρές** της είναι σημείο της **διχοτόμου**.

Απόδειξη. Ευθύ: Αν M σημείο της διχοτόμου $O\delta$ της $\widehat{xOy}$ και $MK \perp Ox, ML \perp Oy$, τα ορθογώνια OKM και OLM έχουν OM κοινή υποτείνουσα και $\widehat{KOM} = \widehat{MOL}$, άρα είναι ίσα (Θ. I): $MK = ML$.

Αντίστροφο: Αν M εσωτερικό σημείο με $MK = ML$, τα ορθογώνια OKM και OLM έχουν OM κοινή και $MK = ML$, άρα είναι ίσα (Θ. II): $\widehat{KOM} = \widehat{MOL}$, δηλαδή η OM είναι διχοτόμος.



⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Στα ορθογώνια τρίγωνα, πριν εφαρμόσεις κριτήριο, έλεγξε ποια πλευρά είναι η **υποτείνουσα**: πρέπει να είναι η απέναντι από την ορθή γωνία.
- ⚠ Στο Θεώρημα IV το αντίστροφο απαιτεί το σημείο να είναι **εσωτερικό** της γωνίας· σημεία έξω από τη γωνία που ισαπέχουν από τους φορείς των πλευρών βρίσκονται στη διχοτόμο της **παραπληρωματικής** γωνίας.
- ⚠ Η «απόσταση από τις πλευρές» μετρείται πάντα με **κάθετα** τμήματα.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Τα ορθογώνια έχουν μία κάθετη πλευρά ίση και μία οξεία γωνία ίση, άρα είναι ίσα.»

✓ Πρέπει η οξεία γωνία να είναι **προσκειμένη** στην ίση κάθετη πλευρά (ΓΠΓ) — ή η ίση πλευρά να είναι η **υποτείνουσα** (Θ. Ι).

✗ «Το απόστημα είναι η μισή χορδή.»

✓ Το απόστημα είναι το κάθετο τμήμα από το κέντρο· η κάθετος αυτή **διχοτομεί** τη χορδή.

≡ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ Πότε σκέφτομαι ορθογώνια τρίγωνα

1. Αν δίνονται ή θέλουμε **αποστάσεις** (κάθετα τμήματα), τα τρίγωνα που σχηματίζονται είναι **ορθογώνια**: σκέψου αμέσως τα κριτήρια ορθογωνίων.
2. Σε κύκλο, φέρε **ακτίνες** στα άκρα των χορδών: δημιουργούνται ισοσκελή τρίγωνα ($OA = OB = \rho$).
3. Σε χορδές, φέρε τα **αποστήματα**: χωρίζουν τη χορδή στη μέση και δίνουν ορθογώνια τρίγωνα με υποτείνουσα την ακτίνα.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ίσα ύψη ισοσκελούς

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρνουμε τα ύψη BD και GE προς τις ίσες πλευρές. Να αποδείξετε ότι $BD = GE$.

Λύση Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ ($\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$) έχουν την **υποτείνουσα** $B\Gamma$ κοινή και $\hat{\Delta}\Gamma B = \hat{E}\Gamma B$ (γωνίες βάσης ισοσκελούς). Άρα είναι ίσα (Θ. Ι), οπότε **$BD = GE$** .

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Χορδές και αποστήματα

Σε κύκλο (O, ρ) δύο χορδές AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο M και σχηματίζουν ίσες γωνίες με την OM ($\hat{A}\hat{M}O = \hat{\Delta}\hat{M}O$). Να αποδείξετε ότι $AB = \Gamma\Delta$.

Λύση Φέρνουμε τα αποστήματα $OK \perp AB$ και $OL \perp \Gamma\Delta$. Τα ορθογώνια τρίγωνα OKM και OLM έχουν OM κοινή υποτείνουσα και $\hat{K}\hat{M}O = \hat{L}\hat{M}O$, άρα είναι ίσα (Θ. Ι): $OK = OL$. Χορδές με ίσα αποστήματα είναι ίσες (Θ. ΙΙΙ): **$AB = \Gamma\Delta$** .

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ το ύψος AH είναι και διάμεσος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Λύση Η AH είναι κάθετη στη $B\Gamma$ στο μέσο της, άρα είναι η **μεσοκάθετος** της $B\Gamma$. Το A ανήκει στη μεσοκάθετο, άρα ισαπέχει από τα B, Γ : **$AB = A\Gamma$** . (Εναλλακτικά: τα ορθογώνια $AHB, AH\Gamma$ έχουν AH κοινή και $BH = H\Gamma$, άρα ίσα με ΠΓΠ.)



🎓 Έλεγξε τον εαυτό σου

Λύσε τα ηλεκτρονικά κουίζ του μαθήματος στο **mathgreece.com** και δεσ αμέσως πού στέκεσαι. Όλο το υλικό είναι **δωρεάν**: ένα πραγματικό φροντιστήριο στην οθόνη σου.

www.mathgreece.com

☰ Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 3.5–3.6 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ●● μέτρια ●●● απαιτητική

1. Να αποδείξετε ότι τα άκρα ενός τμήματος AB ισαπέχουν από κάθε ευθεία που διέρχεται από το μέσο του M (και δεν είναι η AB).
Λύση → σελ. 186
2. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρνουμε από το μέσο M της βάσης τις κάθετες $M\Delta$, ME στις AB , $A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$.
Λύση → σελ. 186
3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημεία Δ , E στη βάση $B\Gamma$ τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Από τα Δ , E φέρνουμε κάθετες στη $B\Gamma$ που τέμνουν τις AB , $A\Gamma$ στα Z , H . Να αποδείξετε ότι $\Delta Z = EH$.
Λύση → σελ. 186
4. Σε κύκλο (O, ρ) δίνονται δύο ίσες χορδές AB και $\Gamma\Delta$, που προεκτεινόμενες τέμνονται σε σημείο P εκτός του κύκλου. Να αποδείξετε ότι η PO διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BPA}$.
Λύση → σελ. 187
5. Αν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\alpha = \alpha'$, $\nu_\alpha = \nu_{\alpha'}$ και $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$, να αποδείξετε ότι είναι ίσα.
Λύση → σελ. 187
6. Δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, R) , (O, ρ) , $R > \rho$. Μια χορδή AB του μεγάλου κύκλου τέμνει τον μικρό στα Γ , Δ (με σειρά A, Γ, Δ, B). Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = \Delta B$.
Λύση → σελ. 187

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · ΤΡΙΓΩΝΑ

ΜΑΘΗΜΑ
3.7

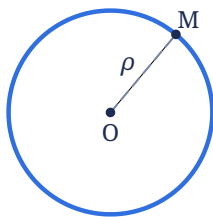
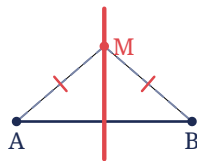
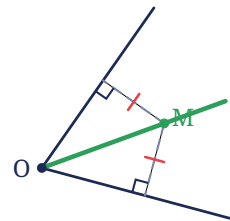
Βασικοί γεωμετρικοί τόποι: κύκλος, μεσοκάθετος, διχοτόμος

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι σημαίνει «βρίσκω γεωμετρικό τόπο»
- τη μεσοκάθετο ως γεωμετρικό τόπο
- τον κύκλο ως γεωμετρικό τόπο
- τη διχοτόμο ως γεωμετρικό τόπο

§3.7 Κύκλος - Μεσοκάθετος - Διχοτόμος

Θυμίζουμε (§2.17) ότι **γεωμετρικός τόπος** λέγεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου που έχουν μια χαρακτηριστική ιδιότητα. Με όσα αποδείξαμε στις προηγούμενες παραγράφους, μπορούμε τώρα να αναγνωρίσουμε τους τρεις **βασικούς** γεωμετρικούς τόπους, τους οποίους θα χρησιμοποιούμε σε όλη τη Γεωμετρία.

κύκλος (O, ρ) : $OM = \rho$ μεσοκάθετος: $MA = MB$ 

διχοτόμος: ίσες αποστάσεις

☆ ΟΙ ΤΡΕΙΣ ΒΑΣΙΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

- Ο **κύκλος** (O, ρ) είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν από το O απόσταση ρ .
- Η **μεσοκάθετος** ενός τμήματος AB είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που **ισαπέχουν από τα άκρα** του.
- Η **διχοτόμος** μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των **εσωτερικών** σημείων της γωνίας που **ισαπέχουν από τις πλευρές** της.

Για τον κύκλο αυτό ισχύει από τον ορισμό. Για τη μεσοκάθετο προκύπτει από το Πόρισμα III της §3.2 (κάθε σημείο της ισαπέχει από τα άκρα) και το Πόρισμα II της §3.4 (κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ανήκει σε αυτήν). Για τη διχοτόμο προκύπτει από το Θεώρημα IV της §3.6 (ευθύ και αντίστροφο).

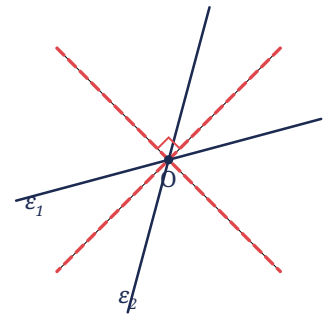
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ Πώς βρίσκω (αποδεικνύω) έναν γεωμετρικό τόπο

Η εύρεση ενός γεωμετρικού τόπου απαιτεί **δύο** αποδείξεις:

- 1. Ευθύ:** Παίρνουμε τυχαίο σημείο M με την ιδιότητα και αποδεικνύουμε ότι ανήκει στο σχήμα που «υποψιαζόμαστε» (π.χ. σε μια ευθεία ή έναν κύκλο).
- 2. Αντίστροφο:** Παίρνουμε τυχαίο σημείο M του σχήματος και αποδεικνύουμε ότι έχει την ιδιότητα.
- 3.** Αν χρειάζεται, εξαιρούμε σημεία του σχήματος που δεν έχουν την ιδιότητα (π.χ. «χωρίς τα σημεία A, B »).
- 4.** Συμπεραίνουμε: «Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ...».

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Δύο κάθετες ευθείες!

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 .



Λύση Οι δύο ευθείες σχηματίζουν τέσσερις γωνίες γύρω από το σημείο τομής O . Ένα σημείο που ισαπέχει από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ βρίσκεται στο εσωτερικό μιας από αυτές τις γωνίες (ή είναι το O) και ισαπέχει από τις πλευρές της, άρα ανήκει στη διχοτόμο της· αντίστροφα, κάθε σημείο των διχοτόμων ισαπέχει από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Οι διχοτόμοι των κατακορυφών γωνιών είναι η μία προέκταση της άλλης (§2.16, Θ. II), οπότε ο τόπος είναι **δύο ευθείες**. Επειδή είναι διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών, οι δύο αυτές ευθείες είναι **κάθετες** μεταξύ τους.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από δύο σταθερά σημεία A και B .

Λύση Αν ένας κύκλος κέντρου K περνά από τα A, B , τότε $KA = KB$ (ακτίνες), άρα το K ανήκει στη μεσοκάθετο του AB . Αντίστροφα, αν K σημείο της μεσοκαθέτου, τότε $KA = KB$ και ο κύκλος (K, KA) περνά από το B . Ο τόπος είναι **η μεσοκάθετος του AB** .

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Μια ματιά στο μέλλον

Δίνονται τρία μη συνευθειακά σημεία A, B, Γ . Υπάρχει σημείο που ισαπέχει και από τα τρία;

Λύση Ένα τέτοιο σημείο πρέπει να ανήκει και στη μεσοκάθετο του AB και στη μεσοκάθετο του $B\Gamma$. Στο Κεφάλαιο 4 θα αποδείξουμε ότι οι μεσοκάθετοι αυτές τέμνονται πάντα, σε ένα μοναδικό σημείο O , από το οποίο περνά και η μεσοκάθετος του $A\Gamma$. Το O είναι κέντρο κύκλου που περνά από τα A, B, Γ : **από τρία μη συνευθειακά σημεία περνά ακριβώς ένας κύκλος**.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Μην ξεχνάς το **αντίστροφο**! Αν δείξεις μόνο ότι τα σημεία με την ιδιότητα ανήκουν σε μια ευθεία, δεν έχεις αποδείξει ότι **όλη** η ευθεία είναι ο τόπος.
- ⚠ Η διχοτόμος είναι ο τόπος των **εσωτερικών** σημείων της γωνίας που ισαπέχουν από τις πλευρές. Αν μιλάμε για ευθείες (όχι ημιευθείες), ο τόπος είναι οι **δύο** κάθετες διχοτόμοι.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Ο τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τα A, B είναι το μέσο του AB.»

✓ Το μέσο είναι μόνο ένα σημείο του τόπου· ο τόπος είναι ολόκληρη η μεσοκάθετος.

✗ «Ο τόπος των σημείων που ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες είναι μία ευθεία.»

✓ Είναι **δύο** κάθετες ευθείες (οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν).



Για βίντεο, κουίζ και επιπλέον λυμένες ασκήσεις σε αυτό το μάθημα, επισκέψου το mathgreece.com — πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.

📋 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 3.7 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ● μέτρια ●● απαιτητική

1

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M που απέχουν 3 cm από ένα σταθερό σημείο K.

Λύση → σελ. 187

2

Να βρείτε το σημείο μιας ευθείας ε που ισαπέχει από δύο σημεία A, B (εκτός της ε). Πόσες λύσεις μπορεί να έχει το πρόβλημα;

Λύση → σελ. 187

3

Να βρείτε σημείο στο εσωτερικό μιας γωνίας $\widehat{XOY}$ που ισαπέχει από τις πλευρές της και απέχει από την κορυφή O απόσταση 4 cm.

Λύση → σελ. 187

4

Δίνονται δύο σημεία A, B και ευθεία ε. Να βρείτε σημείο M της ε που ισαπέχει από τα A και B, όταν τα A, B βρίσκονται εκατέρωθεν της ε, και να εξηγήσετε γιατί αυτό το σημείο δεν είναι γενικά το σημείο τομής του AB με την ε.

Λύση → σελ. 187

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · ΤΡΙΓΩΝΑ

ΜΑΘΗΜΑ

3.8–3.9

Κεντρική και αξονική συμμετρία

§3.8 Κεντρική συμμετρία · §3.9 Αξονική συμμετρία

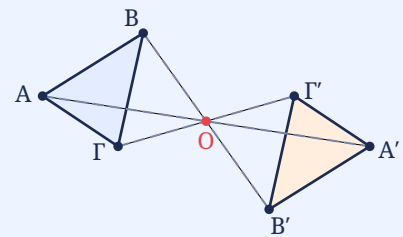
🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- το συμμετρικό σχήματος ως προς σημείο και ως προς ευθεία
- ότι τα συμμετρικά σχήματα είναι ίσα
- κέντρο συμμετρίας και άξονα συμμετρίας ενός σχήματος
- τις συμμετρίες στα γνωστά σχήματα

§3.8 Κεντρική συμμετρία

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Συμμετρικό ενός σχήματος Σ ως προς ένα σημείο O λέγεται το σχήμα Σ' που αποτελείται από τα συμμετρικά (ως προς O) όλων των σημείων του Σ .



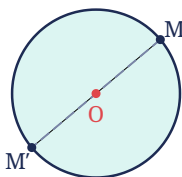
☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο σχήματα συμμετρικά ως προς κέντρο είναι **ίσα**. Ειδικότερα, το συμμετρικό ενός τμήματος AB ως προς O είναι τμήμα $A'B' = AB$.

Απόδειξη. Αν A', B' τα συμμετρικά των A, B ως προς O (εκτός ευθείας AB), τα τρίγωνα OAB και $OA'B'$ έχουν $OA = OA'$, $OB = OB'$ και $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$ (κατακορυφήν), άρα είναι ίσα (ΠΓΠ) και $AB = A'B'$. Με τον ίδιο τρόπο (ή «στρέφοντας» το σχήμα κατά 180° γύρω από το O) βλέπουμε ότι όλο το σχήμα Σ' ταυτίζεται με το Σ μετά από μετατόπιση.

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα σημείο O λέγεται **κέντρο συμμετρίας** ενός σχήματος όταν το συμμετρικό **κάθε** σημείου του σχήματος ως προς O ανήκει επίσης στο σχήμα. Τότε λέμε ότι το σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας.

κέντρο συμμετρίας του κύκλου: το O 

κέντρο συμμετρίας τμήματος: το μέσο του

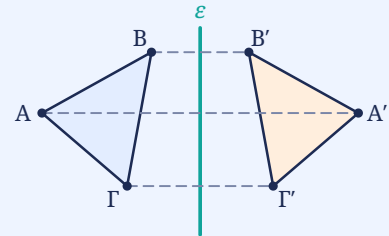
Για παράδειγμα: το **μέσο** ενός τμήματος είναι κέντρο συμμετρίας του· το **κέντρο** ενός κύκλου είναι κέντρο συμμετρίας του (το συμμετρικό κάθε σημείου του κύκλου είναι το αντιδιαμετρικό του)· **κάθε σημείο** μιας

ευθείας είναι κέντρο συμμετρίας της. Αντίθετα, ένα τρίγωνο **δεν** έχει κέντρο συμμετρίας. Στο Κεφάλαιο 5 θα δούμε ότι το παραλληλόγραμμο έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του.

§3.9 Αξονική συμμετρία

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συμμετρικό ενός σχήματος Σ ως προς μια ευθεία ε λέγεται το σχήμα Σ' που αποτελείται από τα συμμετρικά (ως προς ε) όλων των σημείων του Σ .



☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο σχήματα συμμετρικά ως προς άξονα είναι **ίσα**. Ειδικότερα, το συμμετρικό ενός τμήματος AB ως προς ε είναι τμήμα $A'B' = AB$.

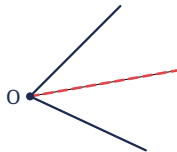
Απόδειξη. Έστω K, Λ οι προβολές των A, B στην ε . Η ε είναι μεσοκάθετος των AA' και BB' . Τα σημεία A, A' ισαπέχουν από κάθε σημείο της ε , άρα $KA = KA'$. Τα ορθογώνια $AK\Lambda$ και $A'K\Lambda$ είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $\hat{AK} = \hat{A'K}$ και, ως συμπληρώματα, $\hat{LB} = \hat{LB'}$. Τότε τα ΛAB και $\Lambda A'B'$ έχουν $\Lambda A = \Lambda A', \Lambda B = \Lambda B'$ και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες: είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $AB = A'B'$. (Γεωμετρικά: το Σ' προκύπτει αν «διπλώσουμε» το επίπεδο κατά μήκος της ε .)

ΟΡΙΣΜΟΣ Άξονας συμμετρίας σχήματος

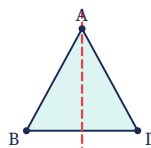
Μια ευθεία ε λέγεται **άξονας συμμετρίας** ενός σχήματος όταν το συμμετρικό **κάθε** σημείου του σχήματος ως προς την ε ανήκει επίσης στο σχήμα. Τότε, αν «διπλώσουμε» το σχήμα κατά μήκος της ε , τα δύο μέρη του συμπίπτουν.



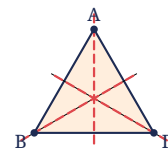
τμήμα: η μεσοκάθετος (και ο φορέας του)



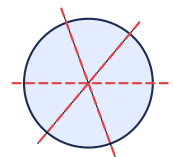
γωνία: η διχοτόμος



ισοσκελές: το ύψος της βάσης



ισόπλευρο: 3 άξονες



κύκλος: κάθε διάμετρος

Άξονες συμμετρίας γνωστών σχημάτων (κόκκινες διακεκομμένες)

Το σκαληνό τρίγωνο **δεν** έχει άξονα συμμετρίας. Το ισοσκελές (μη ισόπλευρο) έχει **έναν**: τη μεσοκάθετο της βάσης, που περιέχει το ύψος, τη διάμεσο και τη διχοτόμο από την κορυφή. Ο κύκλος έχει **άπειρους**.

🕒 ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ Συμμετρία γύρω μας

Η συμμετρία είναι παντού στη φύση και στην τέχνη: στα φτερά μιας πεταλούδας (αξονική), στις νιφάδες του χιονιού, στα αγγεία και στις προσόψεις των αρχαίων ναών. Ο Παρθενώνας είναι από τα πιο διάσημα παραδείγματα αξονικής συμμετρίας στην αρχιτεκτονική.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Κεντρική συμμετρία = «στροφή κατά 180° » γύρω από το κέντρο. Αξονική συμμετρία = «καθρέφτης» ή «δίπλωμα» κατά μήκος του άξονα. Είναι διαφορετικοί μετασχηματισμοί!
- ⚠ Σε αξονική συμμετρία, τα σημεία του άξονα μένουν στη θέση τους· σε κεντρική, μόνο το κέντρο.
- ⚠ Τα συμμετρικά σχήματα είναι ίσα: αυτό μας επιτρέπει να μεταφέρουμε ισότητες τμημάτων και γωνιών από το ένα στο άλλο.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει κέντρο συμμετρίας.»

✓ Έχει **τρεις άξονες** συμμετρίας, αλλά **όχι** κέντρο συμμετρίας (η στροφή κατά 180° δεν το αφήνει αναλλοίωτο).

✗ «Η διαγώνιος ενός ορθογωνίου είναι άξονας συμμετρίας του.»

✓ Όχι (εκτός αν είναι τετράγωνο). Άξονες του ορθογωνίου είναι οι μεσοκάθετοι των πλευρών του (Κεφ. 5).

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Μια γνωστή ισότητα από άλλη ματιά

Να βρείτε το συμμετρικό μιας γωνίας $\hat{xOy}$ ως προς την κορυφή της O .

Λύση Τα συμμετρικά των ημιευθειών Ox και Oy ως προς O είναι οι αντικείμενές τους Ox' και Oy' . Άρα το συμμετρικό της $\hat{xOy}$ είναι η **κατακορυφήν** της $\hat{x'Oy'}$ — και αφού τα συμμετρικά σχήματα είναι ίσα, ξαναβρίσκουμε ότι οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες!

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Ένα σημείο M βρίσκεται στο εσωτερικό μιας οξείας γωνίας $\hat{xOy}$. Αν M_1, M_2 είναι τα συμμετρικά του M ως προς τις Ox, Oy , να αποδείξετε ότι $OM_1 = OM_2$.

Λύση Η Ox είναι μεσοκάθετος του MM_1 , άρα το O ισαπέχει από τα M, M_1 : $OM_1 = OM$. Όμοια $OM_2 = OM$. Άρα $OM_1 = OM_2$ και τα M, M_1, M_2 ανήκουν σε κύκλο κέντρου O .

**🎓 Θέλεις να το δεις και σε βίντεο;**

Στο **mathgreece.com** θα βρεις αυτό το μάθημα εξηγημένο βήμα-βήμα σε βιντεομάθημα, μαζί με σημειώσεις και κουίζ αυτοαξιολόγησης. Ένα **πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο**, στη διάθεσή σου όποτε το χρειαστείς.

www.mathgreece.com

📖 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 3.8–3.9 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

• βασική • μέτρια • • απαιτητική

- 1** Πόσους άξονες συμμετρίας έχει: (α) ένα σκαληνό τρίγωνο, (β) ένα ισοσκελές μη ισόπλευρο, (γ) ένα ισόπλευρο, (δ) μια ευθεία;

Λύση → σελ. 187

- 2 Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό ενός κύκλου (K, ρ) ως προς ένα σημείο O είναι κύκλος ίσος με αυτόν και να βρείτε το κέντρο του.

Λύση → σελ. 187

- 3 Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) ποιο είναι το συμμετρικό του B ως προς τη διχοτόμο $A\Delta$ της γωνίας $\hat{A}$; Τι συμπεραίνετε για το συμμετρικό της διαμέσου BM (M μέσο $A\Gamma$);

Λύση → σελ. 187

- 4 Δίνεται ευθεία ε και δύο σημεία A, B προς το ίδιο μέρος της. Αν A' το συμμετρικό του A ως προς την ε και η $A'B$ τέμνει την ε στο M , να αποδείξετε ότι η ε σχηματίζει ίσες γωνίες με τις MA και MB .

Λύση → σελ. 188

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · ΤΡΙΓΩΝΑ

ΜΑΘΗΜΑ

3.10

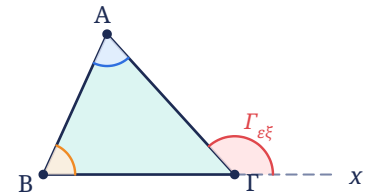
Εξωτερική γωνία τριγώνου

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- ότι κάθε εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι εσωτερικές
- ότι ένα τρίγωνο έχει το πολύ μία ορθή ή αμβλεία γωνία
- ότι δύο γωνίες τριγώνου έχουν άθροισμα μικρότερο από 180°

§3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

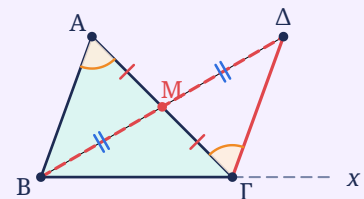
Θυμίζουμε ότι **εξωτερική γωνία** ενός τριγώνου είναι κάθε γωνία που σχηματίζεται από μια πλευρά και την **προέκταση** μιας άλλης πλευράς· είναι εφεξής και παραπληρωματική της αντίστοιχης εσωτερικής γωνίας. Οι άλλες δύο γωνίες του τριγώνου λέγονται **απέναντι εσωτερικές** της.



☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε **εξωτερική γωνία** ενός τριγώνου είναι **μεγαλύτερη** από καθεμία από τις **απέναντι εσωτερικές** γωνίες του τριγώνου.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\chi} = \hat{A}\hat{\Gamma}x > \hat{A}$. Έστω M το μέσο της AG. Στην προέκταση της BM παίρνουμε $M\Delta = BM$. Τα τρίγωνα AMB και ΓMΔ έχουν $AM = M\Gamma$, $BM = M\Delta$ και $\hat{A}\hat{M}B = \hat{\Gamma}\hat{M}\Delta$ (κατακορυφήν), άρα είναι ίσα (ΠΓΠ). Επομένως $\hat{A} = \hat{B}\hat{A}M = \hat{M}\hat{\Gamma}\Delta$. Το Δ βρίσκεται στο εσωτερικό της $\hat{A}\hat{\Gamma}x$ (το Δ είναι προς το μέρος της AG που βρίσκεται η Γx και προς το μέρος της BΓ που βρίσκεται το A), οπότε $\hat{A}\hat{\Gamma}x > \hat{A}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{A}$. Όμοια (με το μέσο της BΓ) αποδεικνύεται ότι η κατακορυφήν της $\hat{A}\hat{\Gamma}x$, άρα και η ίδια, είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{B}$.



➡ ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. Κάθε τρίγωνο έχει **το πολύ μία** γωνία ορθή ή αμβλεία.
2. Το άθροισμα **δύο** γωνιών κάθε τριγώνου είναι **μικρότερο από 180°** .

Απόδειξη. (ii) Από το θεώρημα $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\chi} > \hat{A}$, άρα $180^\circ - \hat{\Gamma} > \hat{A}$, δηλαδή $\hat{A} + \hat{\Gamma} < 180^\circ$ · όμοια για κάθε ζευγάρι γωνιών. (i) Αν δύο γωνίες ήταν ορθές ή αμβλείες, το άθροισμά τους θα ήταν $\geq 180^\circ$, που αντίκειται στο (ii).

① ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από το Πόρισμα (i) προκύπτει ξανά ότι από σημείο εκτός ευθείας άγεται **μία μόνο** κάθετος: αν υπήρχαν δύο, AK και AL, το τρίγωνο AKL θα είχε δύο ορθές γωνίες. Επίσης: σε ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο τρίγωνο οι άλλες δύο γωνίες είναι **οξείες**.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Το θεώρημα δίνει **ανισότητα**, όχι ισότητα. Ότι η εξωτερική γωνία **ισούται** με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών θα το αποδείξουμε στο Κεφάλαιο 4 (με τη βοήθεια των παραλλήλων).
- ⚠ Η σύγκριση γίνεται με τις **απέναντι** εσωτερικές γωνίες, όχι με την εφεξής της (με αυτήν είναι παραπληρωματικές).

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Η εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από όλες τις γωνίες του τριγώνου.»

✓ Είναι μεγαλύτερη από τις δύο **απέναντι** με την εφεξής εσωτερική μπορεί να είναι μικρότερη (π.χ. όταν η εσωτερική είναι αμβλεία).

✗ «Ένα τρίγωνο μπορεί να έχει γωνίες 100° και 90° .»

✓ Όχι: το άθροισμα δύο γωνιών τριγώνου είναι $< 180^\circ$.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Υπάρχει τρίγωνο με δύο γωνίες 95° και 85° ; Με γωνίες 120° και 50° ;

Λύση Όχι για το πρώτο: $95^\circ + 85^\circ = 180^\circ$, ενώ το άθροισμα δύο γωνιών τριγώνου είναι **μικρότερο** από 180° . Για το δεύτερο, $120^\circ + 50^\circ = 170^\circ < 180^\circ$, οπότε το Πόρισμα δεν το αποκλείει (και πράγματι υπάρχει, με τρίτη γωνία 10° , όπως θα δούμε στο Κεφ. 4).

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Εφαρμογή στο τρίγωνο

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ ένα σημείο της πλευράς $B\Gamma$ (διάφορο των B, Γ). Να αποδείξετε ότι $\hat{A\Delta\Gamma} > \hat{B}$ και $\hat{A\Delta B} > \hat{\Gamma}$.

Λύση Η $\hat{A\Delta\Gamma}$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $AB\Delta$ (σχηματίζεται από την $A\Delta$ και την προέκταση της $B\Delta$), άρα είναι μεγαλύτερη από την απέναντι εσωτερική $\hat{B}$. Όμοια η $\hat{A\Delta B}$ είναι εξωτερική του $A\Delta\Gamma$, άρα $\hat{A\Delta B} > \hat{\Gamma}$.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$, αν $\hat{B}$ είναι ορθή ή αμβλεία, τότε το ύψος από το A πέφτει έξω από την πλευρά $B\Gamma$.

Λύση Έστω ότι το ίχνος H του ύψους AH πέφτει σε εσωτερικό σημείο της $B\Gamma$. Τότε στο τρίγωνο ABH θα είχαμε $\hat{H} = 90^\circ$ και $\hat{B} \geq 90^\circ$: δύο γωνίες με άθροισμα $\geq 180^\circ$, **άτοπο**. Ούτε μπορεί $H \equiv B$ (εκτός αν $\hat{B} = 90^\circ$, οπότε το ύψος είναι η AB). Άρα, για αμβλεία $\hat{B}$, το H βρίσκεται στην **προέκταση** της $B\Gamma$.

🎓 Για βίντεο, κουίζ και επιπλέον λυμένες ασκήσεις σε αυτό το μάθημα, επισκεψού το mathgreece.com — πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.

 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 3.10 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ● μέτρια ●● απαιτητική

- 1 Να εξετάσετε αν υπάρχει τρίγωνο με γωνίες: (α) 90° και 90° , (β) 100° και 70° , (γ) 89° και 91° .
Λύση → σελ. 188
- 2 Σε τρίγωνο ABΓ η εξωτερική γωνία στο Γ είναι 70° . Τι είδους είναι η γωνία $\hat{\Gamma}$; Μπορεί η $\hat{A}$ να είναι 80° ;
Λύση → σελ. 188
- 3 Έστω τρίγωνο ABΓ και Μ σημείο στο εσωτερικό του. Να αποδείξετε ότι $\hat{BM\Gamma} > \hat{A}$.
Λύση → σελ. 188
- 4 Να αποδείξετε ότι οι γωνίες της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι οξείες.
Λύση → σελ. 188
- 5 Να αποδείξετε ότι κάθε τρίγωνο έχει τουλάχιστον δύο οξείες γωνίες. Ποιο είναι το είδος της τρίτης γωνίας σε κάθε περίπτωση;
Λύση → σελ. 188

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · ΤΡΙΓΩΝΑ

ΜΑΘΗΜΑ

3.11–3.12

Ανισοτικές σχέσεις και τριγωνική ανισότητα

§3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών · §3.12 Τριγωνική ανισότητα

🕒 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- ότι απέναντι από μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται μεγαλύτερη γωνία (και αντίστροφα)
- πότε ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές ή ισόπλευρο μέσω γωνιών
- την τριγωνική ανισότητα
- πότε τρία τμήματα σχηματίζουν τρίγωνο

§3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών

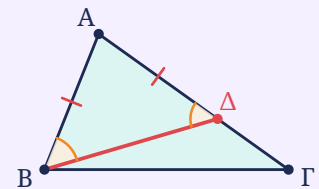
☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε τρίγωνο, απέναντι από **άνισες πλευρές** βρίσκονται **όμοια άνισες γωνίες** και αντίστροφα:

$$\beta > \gamma \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{\Gamma}$$

Απόδειξη. Ευθύ. Έστω $AG > AB$. Παίρνουμε στην AG σημείο Δ με $A\Delta = AB$. Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{A}\hat{B}\Delta = \hat{A}\hat{\Delta}B$. Η $\hat{A}\hat{\Delta}B$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B\Delta\Gamma$, άρα $\hat{A}\hat{\Delta}B > \hat{\Gamma}$. Επειδή το Δ είναι εσωτερικό σημείο της AG , η $B\Delta$ είναι στο εσωτερικό της $\hat{B}$, οπότε $\hat{B} > \hat{A}\hat{B}\Delta = \hat{A}\hat{\Delta}B > \hat{\Gamma}$.

Αντίστροφο. Έστω $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Αν ήταν $\beta = \gamma$, θα είχαμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (ισοσκελές)· αν ήταν $\beta < \gamma$, από το ευθύ θα είχαμε $\hat{B} < \hat{\Gamma}$. Και τα δύο είναι άτοπα, άρα $\beta > \gamma$. ■



➡ ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. Αν ένα τρίγωνο έχει μία γωνία **ορθή ή αμβλεία**, τότε η **απέναντι πλευρά** είναι η **μεγαλύτερη** πλευρά του. Ειδικά, στο ορθογώνιο τρίγωνο η **υποτείνουσα** είναι μεγαλύτερη από κάθε κάθετη πλευρά.
2. Ένα τρίγωνο είναι **ισοσκελές** αν και μόνο αν έχει δύο γωνίες ίσες.
3. Ένα τρίγωνο είναι **ισόπλευρο** αν και μόνο αν έχει όλες τις γωνίες του ίσες.

Επομένως, σε κάθε τρίγωνο, η **μεγαλύτερη πλευρά** βρίσκεται απέναντι από τη **μεγαλύτερη γωνία** και η **μικρότερη πλευρά** απέναντι από τη **μικρότερη γωνία**.

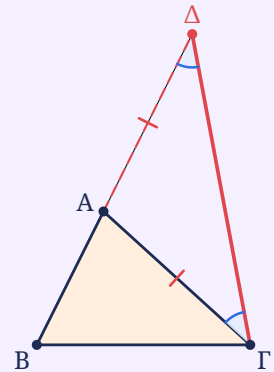
§3.12 Τριγωνική ανισότητα

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ (ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ)

Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι **μικρότερη από το άθροισμα** των δύο άλλων και **μεγαλύτερη από τη διαφορά** τους:

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$$

Απόδειξη. Στην προέκταση της ΒΑ παίρνουμε $ΑΔ = ΑΓ$. Τότε $ΒΔ = ΒΑ + ΑΔ = \gamma + \beta$. Το τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{ΑΔΓ} = \hat{ΑΓΔ}$. Η ΓΑ βρίσκεται στο εσωτερικό της $Β\hat{ΓΔ}$, οπότε $Β\hat{ΓΔ} > Α\hat{ΓΔ} = Β\hat{ΔΓ}$. Στο τρίγωνο $ΒΓΔ$, απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία $Β\hat{ΓΔ}$ βρίσκεται μεγαλύτερη πλευρά: $ΒΔ > ΒΓ$, δηλαδή $\alpha < \beta + \gamma$. Γράφοντας την ίδια ανισότητα για τις άλλες πλευρές: $\beta < \alpha + \gamma \Rightarrow \alpha > \beta - \gamma$ και $\gamma < \alpha + \beta \Rightarrow \alpha > \gamma - \beta$, δηλαδή $\alpha > |\beta - \gamma|$.



🔑 ΚΛΕΙΔΙ

Τρία θετικά μήκη $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ σχηματίζουν τρίγωνο **αν και μόνο αν** $\alpha < \beta + \gamma$, δηλαδή η **μεγαλύτερη** πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων. (Αρκεί αυτός ο έλεγχος· οι άλλες ανισότητες ισχύουν τότε αυτόματα.)

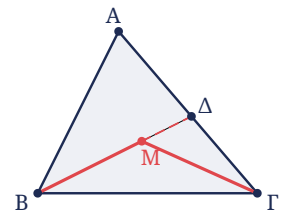
➡ ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε **χορδή** ενός κύκλου είναι **μικρότερη ή ίση** της διαμέτρου.

Απόδειξη. Αν η χορδή ΑΒ είναι διάμετρος, ισχύει η ισότητα. Αλλιώς, στο τρίγωνο ΟΑΒ: $ΑΒ < ΟΑ + ΟΒ = 2\rho$.

✏ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Εσωτερικό σημείο τριγώνου

Αν Μ είναι εσωτερικό σημείο τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $ΜΒ + ΜΓ < ΑΒ + ΑΓ$.



Λύση Προεκτείνουμε τη ΒΜ και τέμνει την ΑΓ στο Δ. Στο τρίγωνο ΑΒΔ: $ΒΔ < ΑΒ + ΑΔ$, δηλαδή $ΒΜ + ΜΔ < ΑΒ + ΑΔ$ (1). Στο τρίγωνο ΜΔΓ: $ΜΓ < ΜΔ + ΔΓ$ (2). Προσθέτοντας κατά μέλη: $ΒΜ + ΜΔ + ΜΓ < ΑΒ + ΑΔ + ΜΔ + ΔΓ$, και διαγράφοντας το ΜΔ: $ΒΜ + ΜΓ < ΑΒ + (ΑΔ + ΔΓ) = ΑΒ + ΑΓ$.

≡ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ Ασκήσεις με ανισότητες

1. Βρες ένα τρίγωνο που να περιέχει τα τμήματα της ανισότητας· αν δεν υπάρχει, **κατασκευάσε το** (προέκταση, συμμετρικό σημείο, διπλασιασμός διαμέσου).
2. Γράψε την τριγωνική ανισότητα σε **ένα ή περισσότερα** τρίγωνα.
3. **Πρόσθεσε κατά μέλη** και απλοποίησε τα κοινά τμήματα.
4. Για σύγκριση τμημάτων **του ίδιου τριγώνου**, σύγκρινε τις απέναντι γωνίες (§3.11).

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Η τριγωνική ανισότητα είναι **γνήσια** ($<$) για τρίγωνα. Η ισότητα $AB = AG + GB$ ισχύει μόνο όταν το G είναι σημείο του τμήματος AB (εκφυλισμένο «τρίγωνο»).
- ⚠ Για να ελέγξεις αν τρία μήκη σχηματίζουν τρίγωνο, αρκεί να συγκρίνεις τη **μεγαλύτερη** πλευρά με το άθροισμα των άλλων δύο.
- ⚠ Η §3.11 συγκρίνει πλευρές και γωνίες **του ίδιου** τριγώνου. Για διαφορετικά τρίγωνα δεν ισχύει!

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «5, 3, 2 είναι πλευρές τριγώνου.»

✓ $3 + 2 = 5$, όχι μεγαλύτερο. **Δεν** σχηματίζουν τρίγωνο.

✗ «Αφού $\beta > \gamma$, η β είναι η μεγαλύτερη πλευρά.»

✓ Συγκρίνεις μόνο δύο πλευρές· η α μπορεί να είναι ακόμα μεγαλύτερη.

✗ « $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, άρα $\beta = 2\gamma$.»

✓ Η αναλογία γωνιών **δεν** μεταφέρεται στις πλευρές. Ισχύει μόνο η διάταξη: $\hat{B} > \hat{\Gamma} \Rightarrow \beta > \gamma$.

🔗 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Υπάρχει τρίγωνο;

Να εξετάσετε αν υπάρχει τρίγωνο με πλευρές: (α) 4, 6, 9 (β) 3, 4, 8 (γ) 5, 5, 10.

Λύση (α) Μεγαλύτερη η 9: $9 < 4 + 6 = 10$ ✓ — **υπάρχει**. (β) $8 < 3 + 4 = 7$; ✗ — **δεν υπάρχει**. (γ) $10 < 5 + 5 = 10$; ✗ — **δεν υπάρχει** (εκφυλισμένο).

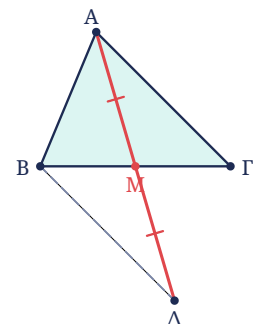
🔗 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 70^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$. Να διατάξετε τις πλευρές του κατά μέγεθος. (Δίνεται ότι $\hat{\Gamma} = 65^\circ$.)

Λύση Είναι $\hat{A} > \hat{\Gamma} > \hat{B}$, άρα και οι απέναντι πλευρές: $\alpha > \gamma > \beta$, δηλαδή $B\Gamma > AB > A\Gamma$.

🔗 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Η τεχνική «διπλασιασμός διαμέσου»

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\mu_\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$.



Λύση Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά $MD = AM$. Όπως είδαμε (§3.2), τα τρίγωνα $AM\Gamma$ και ΔMB είναι ίσα, άρα $B\Delta = A\Gamma = \beta$. Στο τρίγωνο $AB\Delta$: $A\Delta < AB + B\Delta$, δηλαδή $2\mu_\alpha < \gamma + \beta$, οπότε $\mu_\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$.



Περισσότερη εξάσκηση;

Αν θέλεις κι άλλες ασκήσεις πάνω σε αυτή την ενότητα, μπες στο **mathgreece.com**: εκεί υπάρχει πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με λυμένες ασκήσεις, διαγωνίσματα και βίντεο για όλη τη Γεωμετρία.

www.mathgreece.com

Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 3.11–3.12 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Ποιες από τις τριάδες μπορεί να είναι πλευρές τριγώνων: (α) 2, 3, 4 (β) 1, 2, 3 (γ) 7, 8, 16 (δ) 6, 6, 11;
Λύση → σελ. 188
- 2 Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει δύο πλευρές 4 cm και 9 cm. Ποια είναι η περίμετρός του;
Λύση → σελ. 188
- 3 Σε τρίγωνο ABΓ είναι $AB = 5$, $AG = 8$. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει η ΒΓ; Αν η ΒΓ είναι ακέραιος, πόσα τρίγωνα υπάρχουν;
Λύση → σελ. 188
- 4 Σε τρίγωνο ABΓ είναι $AB < AG$ και ΑΔ η διχοτόμος. Να αποδείξετε ότι $\hat{A\Delta\Gamma} > \hat{A\Delta B}$.
Λύση → σελ. 188
- 5 Αν Μ τυχαίο σημείο μέσα σε τρίγωνο ABΓ με περίμετρο 2τ, να αποδείξετε ότι $\tau < MA + MB + MG < 2\tau$.
Λύση → σελ. 188
- 6 Να αποδείξετε ότι σε κάθε κυρτό τετράπλευρο το άθροισμα των διαγωνίων είναι μεγαλύτερο από την ημιπερίμετρο και μικρότερο από την περίμετρο.
Λύση → σελ. 188

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · ΤΡΙΓΩΝΑ

ΜΑΘΗΜΑ

3.13

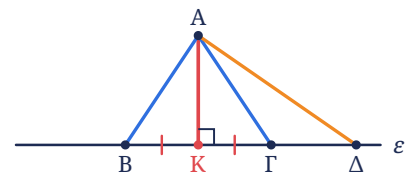
Κάθετα και πλάγια τμήματα

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- ότι το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο
- πώς συγκρίνονται δύο άνισα πλάγια τμήματα
- τότε δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα

§3.13 Κάθετες και πλάγιες

Από ένα σημείο A εκτός ευθείας ε φέρνουμε το **κάθετο** τμήμα AK και διάφορα άλλα τμήματα AB , AG , AD προς σημεία της ε , που λέγονται **πλάγια**. Τα σημεία B , Γ , Δ λέγονται **ίχνη** των πλάγιων τμημάτων και το K ίχνος της καθέτου. Τι σχέση έχουν τα μήκη τους;



☆ ΘΕΩΡΗΜΑ I

Αν δύο πλάγια τμήματα είναι **ίσα**, τότε τα **ίχνη** τους **ισαπέχουν** από το **ίχνος** της καθέτου, και αντίστροφα:
 $AB = AG \Leftrightarrow KB = K\Gamma$.

Απόδειξη. Αν $AB = AG$, τα ορθογώνια τρίγωνα AKB και $AK\Gamma$ έχουν υποτείνουσες ίσες και AK κοινή, άρα είναι ίσα (§3.6, Θ. II) και $KB = K\Gamma$. Αντίστροφα, αν $KB = K\Gamma$, τα AKB , $AK\Gamma$ έχουν τις κάθετες πλευρές ίσες, άρα είναι ίσα (ΠΓΠ) και $AB = AG$.

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ II

1. Το **κάθετο** τμήμα είναι **μικρότερο** από κάθε πλάγιο: $AK < AB$.
2. Αν δύο πλάγια τμήματα είναι **άνισα**, τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το **ίχνος** της καθέτου είναι **ομοιοτρόπως άνισες**, και αντίστροφα: $AD > AG \Leftrightarrow KD > K\Gamma$.

Απόδειξη. (i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο AKB η υποτείνουσα AB είναι η μεγαλύτερη πλευρά (§3.11), άρα $AK < AB$.
 (ii) Αρκεί να το δείξουμε όταν τα Γ , Δ είναι προς το ίδιο μέρος του K (αλλιώς παίρνουμε το συμμετρικό του ενός ως προς K , που δίνει ίσο πλάγιο τμήμα, από το Θ. I). Έστω $KD > K\Gamma$, δηλαδή το Γ μεταξύ K και Δ . Η $\widehat{A\Gamma\Delta}$ είναι εξωτερική του ορθογωνίου $AK\Gamma$, άρα $\widehat{A\Gamma\Delta} > 90^\circ$, δηλαδή αμβλεία. Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ η αμβλεία γωνία $\widehat{A\Gamma\Delta}$ είναι η μεγαλύτερη, άρα η απέναντι πλευρά AD είναι η μεγαλύτερη: $AD > AG$. Το αντίστροφο αποδεικνύεται με απαγωγή σε άτοπο (όπως στην §3.11).

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Ο συντομότερος δρόμος

Η ιδιότητα (i) εκφράζεται και ως: η **απόσταση** ενός σημείου από μια ευθεία είναι η **μικρότερη απόσταση** του σημείου από τα σημεία της ευθείας. Γι' αυτό, π.χ., ο πιο σύντομος δρόμος από ένα σπίτι σε έναν ευθύγραμμο δρόμο είναι ο κάθετος.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Τα θεωρήματα αφορούν πλάγια τμήματα **από το ίδιο σημείο** προς την **ίδια ευθεία**.
- ⚠ Από ένα σημείο Α εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε **ακριβώς δύο** πλάγια τμήματα ορισμένου μήκους $\ell > AK$ (συμμετρικά ως προς την ΑΚ), ένα αν $\ell = AK$ (το κάθετο) και κανένα αν $\ell < AK$.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ « $AB > AG$, άρα το Β είναι πιο μακριά από το Γ» — χωρίς αναφορά στο ίχνος της καθέτου.

✓ Η σύγκριση γίνεται με τις αποστάσεις **από το ίχνος Κ της καθέτου**: $KB > KG$.

✗ «Η απόσταση του Α από την ε είναι το ΑΒ.»

✓ Η απόσταση είναι μόνο το **κάθετο** τμήμα ΑΚ.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Από σημείο Α που απέχει 4 cm από ευθεία ε φέρνουμε πλάγια τμήματα ΑΒ, ΑΓ με ίχνη εκατέρωθεν του ίχνους Κ της καθέτου, ώστε $KB = 3$ cm, $KG = 5$ cm. Ποιο πλάγιο τμήμα είναι μεγαλύτερο; Υπάρχει πλάγιο τμήμα μήκους 3,5 cm;

Λύση Αφού $KG > KB$, από το Θ. II είναι **$AG > AB$** . Πλάγιο τμήμα μήκους 3,5 cm **δεν** υπάρχει, γιατί κάθε πλάγιο τμήμα είναι μεγαλύτερο από το κάθετο $AK = 4$ cm.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Τμήμα προς τη βάση ισοσκελούς

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) παίρνουμε σημείο Δ στη βάση ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $AD < AB$.

Λύση Έστω ΑΚ το ύψος, που είναι και διάμεσος: $KB = KG$. Το Δ είναι μεταξύ Β και Γ, άρα $KD < KB$ (ή $\Delta \equiv K$, οπότε $AD = AK < AB$). Από το Θ. II: **$AD < AB$** . Δηλαδή κάθε τμήμα από την κορυφή προς εσωτερικό σημείο της βάσης είναι μικρότερο από τα σκέλη.



Για βίντεο, κουίζ και επιπλέον λυμένες ασκήσεις σε αυτό το μάθημα, επισκέψου το mathgreece.com — πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.

📋 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 3.13 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

• βασική • μέτρια • • απαιτητική

- 1 Σημείο Α απέχει 5 cm από ευθεία ε. Πόσα σημεία της ε απέχουν από το Α: (α) 5 cm, (β) 7 cm, (γ) 4 cm;
Λύση → σελ. 189
- 2 Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}$ και $\hat{G}$ οξείες φέρνουμε το ύψος ΑΗ. Να αποδείξετε ότι αν $AB < AG$ τότε $HB < HG$.
Λύση → σελ. 189
- 3 Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΑΜ ενός τριγώνου ΑΒΓ με $AB < AG$ βρίσκεται μεταξύ του ύψους ΑΗ και της πλευράς ΑΓ, δηλαδή ότι το Μ βρίσκεται μεταξύ Η και Γ.
Λύση → σελ. 189

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · ΤΡΙΓΩΝΑ

ΜΑΘΗΜΑ

3.14–3.15

Ευθεία και κύκλος - Εφαπτόμενα τμήματα

§3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου · §3.15 Εφαπτόμενα τμήματα

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τις τρεις σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου
- ότι η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ακτίνα του σημείου επαφής
- ότι τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο είναι ίσα
- τις ιδιότητες της διακεντρικής ευθείας

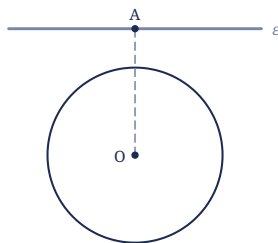
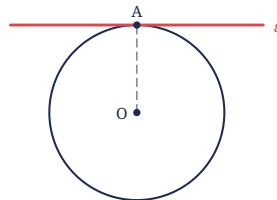
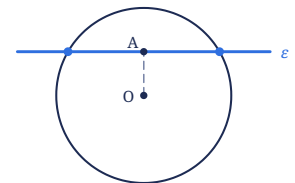
§3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

Ας πάρουμε έναν κύκλο (O, ρ) , μια ευθεία ε και ας ονομάσουμε $\delta = OA$ την **απόσταση του κέντρου από την ευθεία** (A η προβολή του O στην ε). Πρώτα, ένα βασικό αποτέλεσμα:

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ I

Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν **το πολύ δύο κοινά σημεία**.

Απόδειξη. Αν είχαν τρία κοινά σημεία A, B, Γ (με το B μεταξύ A, Γ), θα ήταν $OA = OB = O\Gamma = \rho$, δηλαδή από το O θα υπήρχαν τρία ίσα πλάγια (ή κάθετο) τμήματα προς την ε . Όμως από το Θ. I της §3.13, ίσα πλάγια τμήματα έχουν ίχνη που ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου — αυτό μπορεί να συμβεί για **δύο** μόνο σημεία (συμμετρικά ως προς την προβολή). Άποπο. ■

 $\delta > \rho$: εξωτερική $\delta = \rho$: εφαπτομένη $\delta < \rho$: τέμνουσα

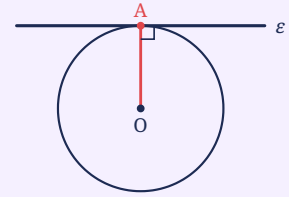
Οι τρεις σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

Απόσταση κέντρου	Κοινά σημεία	Η ευθεία λέγεται
$\delta > \rho$	κανένα	εξωτερική του κύκλου
$\delta = \rho$	ένα (το A)	εφαπτομένη — το A λέγεται σημείο επαφής
$\delta < \rho$	δύο	τέμνουσα

Πράγματι: αν $\delta > \rho$, κάθε σημείο M της ε έχει $OM \geq \delta > \rho$ (κάθετο $\leq$ πλάγιο), άρα είναι εξωτερικό. Αν $\delta = \rho$, το A είναι κοινό σημείο, ενώ κάθε άλλο σημείο M της ε έχει $OM > OA = \rho$. Αν $\delta < \rho$, υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία της ε , συμμετρικά ως προς το A , που απέχουν ρ από το O . Ισχύουν και τα αντίστροφα (π.χ. αν η ε εφάπτεται, τότε $\delta = \rho$).

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Η **εφαπτομένη** ενός κύκλου είναι **κάθετη** στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής. Αντίστροφα, η ευθεία που είναι κάθετη σε μια ακτίνα στο άκρο της είναι εφαπτομένη του κύκλου.



Απόδειξη. Αν η ε εφάπτεται στο A, η απόσταση του O από την ε είναι $\rho = OA$. επειδή το A είναι σημείο της ε , το OA είναι το κάθετο τμήμα (μοναδικό με το ελάχιστο μήκος), άρα $OA \perp \varepsilon$. Αντίστροφα, αν $\varepsilon \perp OA$ στο A, τότε η απόσταση του O από την ε είναι $OA = \rho$, άρα η ε εφάπτεται.

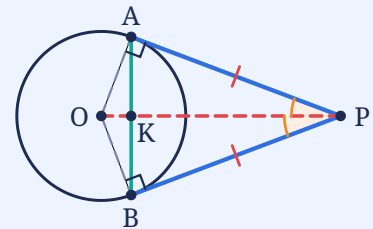
🔑 ΚΛΕΙΔΙ

Μόλις δεις **εφαπτομένη** σε μια άσκηση, φέρε αμέσως την **ακτίνα στο σημείο επαφής**: σχηματίζεται ορθή γωνία και συνήθως ορθογώνιο τρίγωνο!

§3.15 Εφαπτόμενα τμήματα

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν από ένα **εξωτερικό** σημείο P ενός κύκλου φέρουμε τις δύο εφαπτόμενες, με σημεία επαφής A και B, τα τμήματα PA και PB λέγονται **εφαπτόμενα τμήματα** από το P. Η ευθεία PO λέγεται **διακεντρική ευθεία** του P.



☆ ΘΕΩΡΗΜΑ II

Τα **εφαπτόμενα τμήματα** κύκλου που άγονται από ένα εξωτερικό σημείο είναι **ίσα**.

Απόδειξη. Τα τρίγωνα OAP και OBP είναι ορθογώνια ($\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, εφαπτομένη $\perp$ ακτίνα), έχουν κοινή υποτείνουσα OP και $OA = OB = \rho$. Άρα είναι ίσα (§3.6, Θ. II) και **PA = PB**.

➡ ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν P είναι εξωτερικό σημείο κύκλου (O, ρ), τότε η διακεντρική ευθεία PO:

1. είναι **μεσοκάθετος** της χορδής AB που ενώνει τα σημεία επαφής,
2. **διχοτομεί** τη γωνία $\hat{APB}$ των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία $\hat{AOB}$ των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

Απόδειξη. (i) Τα P και O ισαπέχουν από τα A, B ($PA = PB$, $OA = OB$), άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του AB, που επομένως είναι η PO. (ii) Από τα ίσα τρίγωνα OAP, OBP: $\hat{APO} = \hat{OPB}$ και $\hat{AOP} = \hat{POB}$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Η εφαπτομένη έχει **ένα μόνο** κοινό σημείο με τον κύκλο· δεν αρκεί να «ακουμπά» στο σχήμα, πρέπει $\delta = \rho$ ή κάθετη στην ακτίνα.
- ⚠ Από σημείο **του κύκλου** άγεται **μία** εφαπτομένη, από **εξωτερικό** σημείο **δύο**, από **εσωτερικό** καμία.
- ⚠ Ισότητα εφαπτόμενων τμημάτων: τα τμήματα μετριοούνται **από το P μέχρι τα σημεία επαφής**.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Η εφαπτομένη σχηματίζει ορθή γωνία με κάθε ακτίνα.»

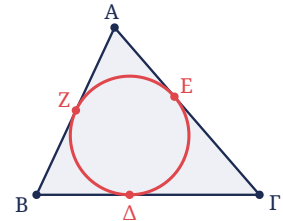
✓ Μόνο με την ακτίνα του **σημείου επαφής**.

✗ « $PA = PB = PO$.»

✓ Η PO είναι υποτείνουσα των ορθογωνίων OAP, OBP, άρα **μεγαλύτερη** από τα PA, PB.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Εγγεγραμμένος κύκλος και εφαπτόμενα τμήματα

Ένας κύκλος εφάπτεται στις πλευρές BG, ΓA, AB ενός τριγώνου στα σημεία Δ, E, Z αντίστοιχα. Αν $AB = 7$, $BG = 9$, $GA = 8$, να βρείτε τα AZ, BΔ, ΓE.



Λύση Θέτουμε $AZ = AE = x$, $BZ = BΔ = y$, $ΓΔ = ΓE = z$ (εφαπτόμενα τμήματα από την ίδια κορυφή). Τότε $x + y = 7$, $y + z = 9$, $z + x = 8$. Προσθέτοντας: $2(x + y + z) = 24 \Rightarrow x + y + z = 12$. Άρα $x = 12 - 9 = 3$, $y = 12 - 8 = 4$, $z = 12 - 7 = 5$. (Γενικά: $AZ = \tau - \alpha$, $BΔ = \tau - \beta$, $ΓE = \tau - \gamma$.)

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Μια πρόγνωση από το Κεφ. 4

Από εξωτερικό σημείο P κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA, PB. Αν $\hat{APB} = 60^\circ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο PAB είναι ισόπλευρο.

Λύση Το τρίγωνο PAB είναι ισοσκελές ($PA = PB$), άρα $\hat{PAB} = \hat{PBA}$. Θα δούμε στο Κεφ. 4 ότι το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι 180° , οπότε $\hat{PAB} = \hat{PBA} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$: όλες οι γωνίες ίσες, άρα **ισόπλευρο**.



🎓 Κόλλησες κάπου;

Μην το αφήνεις! Στο **mathgreece.com** κάθε θεωρία έχει το δικό της βιντεομάθημα και κάθε κεφάλαιο τα δικά του κουνί. Είναι ένα ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών, φτιαγμένο για σένα.

www.mathgreece.com

Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 3.14–3.15 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ● μέτρια ●● απαιτητική

- 1** Σε κύκλο (Ο, 5 cm) μια ευθεία ε απέχει από το κέντρο: (α) 3 cm, (β) 5 cm, (γ) 7 cm. Ποια είναι κάθε φορά η σχετική θέση της ε και του κύκλου;

●

Λύση → σελ. 189
- 2** Από σημείο P φέρνουμε εφαπτόμενα τμήματα PA = 8 cm και PB σε κύκλο. Αν $\hat{APB} = 50^\circ$, να βρείτε το PB και τη γωνία $\hat{APO}$.

●

Λύση → σελ. 189
- 3** Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες ενός κύκλου στα άκρα μιας διαμέτρου δεν τέμνονται (είναι παράλληλες).

●●

Λύση → σελ. 189
- 4** Ένα τετράπλευρο ABΓΔ έχει τις πλευρές του εφαπτόμενες σε κύκλο (περιγεγραμμένο τετράπλευρο). Να αποδείξετε ότι $AB + \Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.

●●

Λύση → σελ. 189
- 5** Από εξωτερικό σημείο P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA, PB σε κύκλο (Ο). Μια τρίτη εφαπτομένη σε σημείο M του μικρού τόξου $\widehat{AB}$ τέμνει τις PA, PB στα Γ, Δ. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου PΓΔ είναι σταθερή (ίση με 2PA).

●●●

Λύση → σελ. 189

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · ΤΡΙΓΩΝΑ

ΜΑΘΗΜΑ

3.16

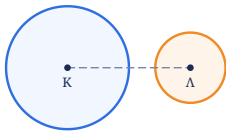
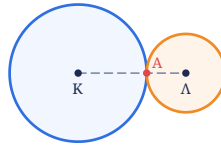
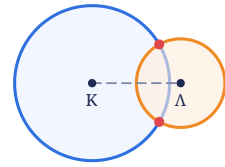
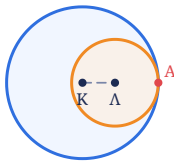
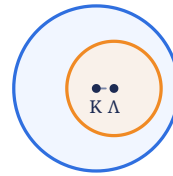
Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τη διάκεντρο δύο κύκλων
- τις πέντε σχετικές θέσεις δύο κύκλων
- ότι η διάκεντρος είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής
- πότε δύο κύκλοι εφάπτονται

§3.16 Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Έστω δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) με $R \geq \rho$. Το τμήμα $K\Lambda = \delta$ λέγεται **διάκεντρος** και η ευθεία $K\Lambda$ **διακεντρική ευθεία**. Η σχετική θέση των κύκλων εξαρτάται από τη σύγκριση του δ με το **άθροισμα** $R + \rho$ και τη **διαφορά** $R - \rho$ των ακτίνων.


 $\delta > R + \rho$: ο ένας εξωτερικός του άλλου

 $\delta = R + \rho$: εφάπτονται εξωτερικά

 $R - \rho < \delta < R + \rho$: τέμνονται

 $\delta = R - \rho$: εφάπτονται εσωτερικά

 $\delta < R - \rho$: ο ένας εσωτερικός του άλλου

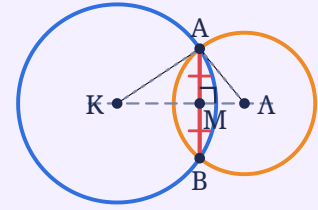
Σχέση διακέντρου	Θέση των κύκλων	Κοινά σημεία
$\delta > R + \rho$	ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου	0
$\delta = R + \rho$	εφάπτονται εξωτερικά	1
$R - \rho < \delta < R + \rho$	τέμνονται	2
$\delta = R - \rho$	εφάπτονται εσωτερικά	1
$\delta < R - \rho$	ο ένας (μικρός) είναι εσωτερικός του άλλου (αν $\delta = 0$: ομόκεντροι)	0

Και στις δύο περιπτώσεις επαφής, το **σημείο επαφής** βρίσκεται πάνω στη **διακεντρική ευθεία**: οι κύκλοι έχουν στο σημείο αυτό **κοινή εφαπτομένη**, κάθετη στη διάκεντρο.

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Η **διάκεντρος** δύο τεμνόμενων κύκλων είναι **μεσοκάθετος** της **κοινής χορδής** τους.

Απόδειξη. Αν A, B τα κοινά σημεία, τότε $KA = KB = R$ και $LA = LB = r$. Άρα και το K και το L ισαπέχουν από τα άκρα του AB , οπότε ανήκουν στη μεσοκάθετό του. Επομένως η KL είναι η μεσοκάθετος της κοινής χορδής AB .



⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Πριν συγκρίνεις, βάλε τις ακτίνες σε σειρά: $R \geq r$. Η διαφορά είναι πάντα $R - r \geq 0$.
- ⚠ Για τεμνόμενους κύκλους πρέπει να ισχύουν **και οι δύο** ανισότητες $R - r < d < R + r$ (είναι η τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο KAL !).
- ⚠ «Εφάπτονται» χωρίς διευκρίνιση σημαίνει ότι πρέπει να εξετάσεις **και τις δύο** περιπτώσεις (εσωτερικά και εξωτερικά).

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ $R = 5, r = 3, d = 1 \Rightarrow$ «τέμνονται, αφού $d < R + r$ ».

✓ Πρέπει επίσης $d > R - r = 2$. Εδώ $d = 1 < 2$: ο μικρός κύκλος είναι **εσωτερικός** του μεγάλου.

✗ «Δύο κύκλοι που εφάπτονται έχουν $d = R + r$ ».

✓ Μόνο αν εφάπτονται **εξωτερικά**. Αν εφάπτονται εσωτερικά, $d = R - r$.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Δύο κύκλοι έχουν ακτίνες 7 cm και 4 cm. Να βρείτε τη σχετική τους θέση όταν η διάκεντρος είναι: (α) 12 cm, (β) 11 cm, (γ) 8 cm, (δ) 3 cm, (ε) 2 cm.

Λύση $R + r = 11$ και $R - r = 3$. (α) $12 > 11$: **εξωτερικοί**. (β) $11 = 11$: **εφάπτονται εξωτερικά**. (γ) $3 < 8 < 11$: **τέμνονται**. (δ) $3 = 3$: **εφάπτονται εσωτερικά**. (ε) $2 < 3$: ο μικρός είναι **εσωτερικός** του μεγάλου.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Δύο περιπτώσεις επαφής

Δύο κύκλοι $(K, 5)$ και (L, r) εφάπτονται και η διάκεντρός τους είναι 8. Να βρείτε την ακτίνα r .

Λύση Εξωτερική επαφή: $5 + r = 8 \Rightarrow r = 3$. Εσωτερική επαφή: $|5 - r| = 8 \Rightarrow r = 13$ (ο $(K, 5)$ είναι μέσα στον $(L, 13)$) ή $r = -3$ (απορρίπτεται). Άρα $r = 3$ ή $r = 13$.

📺 Για βίντεο, κουίζ και επιπλέον λυμένες ασκήσεις σε αυτό το μάθημα, επισκέψου το mathgreece.com — πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.

📖 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 3.16 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ●● μέτρια ●●● απαιτητική

1 Δύο κύκλοι με ακτίνες 6 και 2 έχουν διάκεντρο d . Για ποιες τιμές του d τέμνονται;

Λύση → σελ. 189

- 2 Τρεις κύκλοι με κέντρα A, B, Γ εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο. Αν $AB = 5$, $B\Gamma = 7$, $\Gamma A = 6$, να βρείτε τις ακτίνες τους.

Λύση → σελ. 189

- 3 Δύο κύκλοι τέμνονται στα A, B . Από το A φέρνουμε διάμετρο $A\Gamma$ του πρώτου και διάμετρο $A\Delta$ του δεύτερου. Να αποδείξετε ότι η διάκεντρος $K\Lambda$ είναι ίση με το μισό του $\Gamma\Delta$. (Υπόδειξη: θα χρειαστείτε το Θ. I της §5.6.)

Λύση → σελ. 189

- 4 Να αποδείξετε ότι αν δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο A , τότε η κοινή εφαπτομένη τους στο A είναι κάθετη στη διάκεντρο $K\Lambda$.

Λύση → σελ. 189

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · ΤΡΙΓΩΝΑ

ΜΑΘΗΜΑ

3.17

Βασικές γεωμετρικές κατασκευές

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τα στάδια λύσης ενός προβλήματος κατασκευής
- να φέρνεις κάθετη από σημείο
- να κατασκευάζεις γωνία ίση με δοσμένη
- να κατασκευάζεις τη διχοτόμο γωνίας
- να κατασκευάζεις μεσοκάθετο και μέσο τμήματος

§3.17 Απλές γεωμετρικές κατασκευές

Θυμίζουμε ότι μια **γεωμετρική κατασκευή** γίνεται **μόνο** με κανόνα (χωρίς υποδιαίρεσεις) και διαβήτη. Η λύση ενός προβλήματος κατασκευής περιλαμβάνει τρία στάδια:

☞ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ Τα στάδια ενός προβλήματος κατασκευής

- 1. Κατασκευή:** περιγράφουμε με σειρά τα βήματα (τι γράφουμε με διαβήτη, ποιες ευθείες φέρνουμε).
- 2. Απόδειξη:** αποδεικνύουμε ότι το σχήμα που κατασκευάσαμε έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.
- 3. Διερεύνηση:** εξετάζουμε πότε το πρόβλημα έχει λύση και πόσες λύσεις έχει.

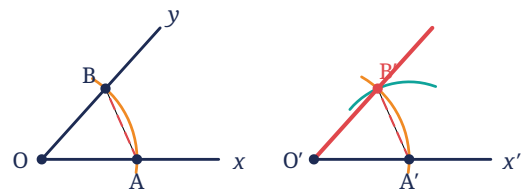
► Πρόβλημα 1: Γωνία ίση με δοσμένη

Δίνεται γωνία $\angle xOy$ και ημιευθεία $O'x'$. Να κατασκευαστεί γωνία ίση με την $\angle xOy$, με κορυφή O' και πλευρά την $O'x'$.

Κατασκευή. Με κέντρο O και τυχαία ακτίνα ρ γράφουμε κύκλο που τέμνει τις Ox , Oy στα A , B . Με κέντρο O' και την ίδια ακτίνα ρ γράφουμε κύκλο που τέμνει την $O'x'$ στο A' . Με κέντρο A' και ακτίνα AB γράφουμε κύκλο που τέμνει τον (O', ρ) στο B' . Η $\angle x'O'B'$ είναι η ζητούμενη.

Απόδειξη. Τα τρίγωνα OAB και $O'A'B'$ έχουν $OA = O'A' = \rho$, $OB = O'B' = \rho$ και $AB = A'B'$, άρα είναι ίσα (ΠΠΠ) και $\angle AOB = \angle A'O'B'$.

Διερεύνηση. Οι κύκλοι (O', ρ) και (A', AB) τέμνονται πάντα, γιατί για τη διάκεντρο $O'A' = \rho$ ισχύει $\rho - AB < \rho < \rho + AB$. Το πρόβλημα έχει **δύο** λύσεις, μία σε κάθε ημιεπίπεδο της $O'x'$.



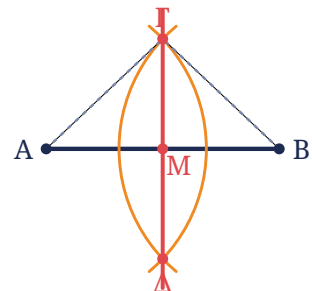
► Πρόβλημα 2: Μεσοκάθετος (και μέσο) τμήματος

Κατασκευή. Με κέντρα τα άκρα A και B ενός τμήματος και ακτίνα $\rho > \frac{AB}{2}$

γράφουμε δύο κύκλους, που τέμνονται στα Γ , Δ . Η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του AB και το σημείο τομής της M με το AB είναι το μέσο του.

Απόδειξη. $\Gamma A = \Gamma B = \rho$ και $\Delta A = \Delta B = \rho$, άρα τα Γ , Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του AB (§3.4), που επομένως είναι η $\Gamma\Delta$.

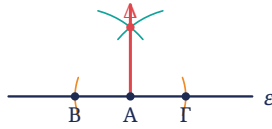
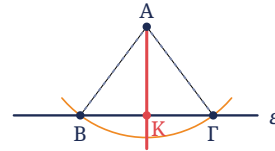
Διερεύνηση. Οι κύκλοι τέμνονται, γιατί $0 < AB < 2\rho$. Η λύση είναι **μοναδική**.



► Πρόβλημα 3: Κάθετη σε ευθεία από σημείο

(i) Το A ανήκει στην ε . Με κέντρο A και τυχαία ακτίνα γράφουμε κύκλο που τέμνει την ε στα B, Γ. Το A είναι μέσο του BΓ, άρα η ζητούμενη κάθετος είναι η **μεσοκάθετος του BΓ** (Πρόβλημα 2).

(ii) Το A δεν ανήκει στην ε . Με κέντρο A και ακτίνα μεγαλύτερη από την απόσταση του A από την ε γράφουμε κύκλο που τέμνει την ε στα B, Γ. Επειδή $AB = AG$, το A ανήκει στη μεσοκάθετο του BΓ, η οποία είναι κάθετη στην ε : η ζητούμενη κάθετος είναι η **μεσοκάθετος του BΓ**.

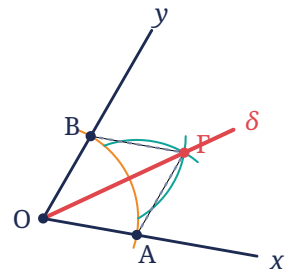
το A ανήκει στην ε το A δεν ανήκει στην ε

► Πρόβλημα 4: Διχοτόμος γωνίας

Κατασκευή. Με κέντρο την κορυφή O και τυχαία ακτίνα γράφουμε κύκλο που τέμνει τις πλευρές στα A και B. Με κέντρα A και B και την ίδια ακτίνα (ή οποιαδήποτε ακτίνα $> \frac{AB}{2}$) γράφουμε κύκλους που τέμνονται στο Γ, στο εσωτερικό της γωνίας. Η OΓ είναι η διχοτόμος.

Απόδειξη. Τα τρίγωνα OΑΓ και OΒΓ έχουν $OA = OB$, $AG = BG$ και OΓ κοινή, άρα είναι ίσα (ΠΠΠ): $\hat{AOG} = \hat{BOG}$.

Διερεύνηση. Η λύση υπάρχει πάντα και είναι μοναδική.



3

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Στην κατασκευή **δεν** επιτρέπεται να μετρήσουμε με τον χάρακα ή με το μοιρογνωμόνιο! Ο κανόνας χρησιμοποιείται μόνο για να ενώνουμε σημεία.
- ⚠ Στη μεσοκάθετο, η ακτίνα των κύκλων πρέπει να είναι **μεγαλύτερη από το μισό** του AB, αλλιώς οι κύκλοι δεν τέμνονται.
- ⚠ Μην παραλείπεις την **απόδειξη** και τη **διερεύνηση**: είναι μέρος της λύσης και βαθμολογούνται.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

- ✗ Βρίσκουμε το μέσο ενός τμήματος μετρώντας με τον χάρακα και διαιρώντας με 2.
- ✗ Στη διχοτόμο, γράφουμε τους κύκλους από τα A, B με ακτίνα μικρότερη του $\frac{AB}{2}$.

- ✓ Το μέσο βρίσκεται **γεωμετρικά**, ως τομή του τμήματος με τη μεσοκάθετό του (Πρόβλημα 2).
- ✓ Τότε οι κύκλοι δεν τέμνονται· χρειάζεται ακτίνα $> \frac{AB}{2}$.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Συνδυάζοντας κατασκευές

Να κατασκευάσετε γωνία 45° με κανόνα και διαβήτη.

Λύση Κατασκευάζουμε μια ορθή γωνία: σε μια ευθεία ε παίρνουμε σημείο A και φέρνουμε την κάθετη στην ε στο A (Πρόβλημα 3(i)). Στη συνέχεια φέρνουμε τη διχοτόμο της ορθής γωνίας (Πρόβλημα 4). Καθεμία από τις δύο γωνίες που προκύπτουν είναι $\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Το «χαμένο» κέντρο

Να βρείτε με κανόνα και διαβήτη το κέντρο ενός κύκλου που έχει σχεδιαστεί (χωρίς να είναι σημειωμένο το κέντρο).

Λύση Παίρνουμε τρία σημεία A, B, Γ του κύκλου και κατασκευάζουμε τις μεσοκαθέτους των χορδών AB και $B\Gamma$. Το κέντρο ισαπέχει από τα A, B (άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του AB) και από τα B, Γ (άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του $B\Gamma$). Επομένως το κέντρο είναι το **σημείο τομής των δύο μεσοκαθέτων**.



 Μελέτησε έξυπνα

Συνδύασε αυτό το βοήθημα με τα βιντεομαθήματα, τα podcasts και τα παιχνίδια γνώσεων του **mathgreece.com**. Θα βρεις εκεί **πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο** για Γυμνάσιο και Λύκειο.

www.mathgreece.com

 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 3.17 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

• βασική • μέτρια • απαιτητική

1. Να κατασκευάσετε γωνία 135° .
Λύση → σελ. 190
2. Δίνεται τμήμα AB . Να το χωρίσετε σε 4 ίσα τμήματα με κανόνα και διαβήτη.
Λύση → σελ. 190
3. Να κατασκευάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο με δοσμένη βάση $B\Gamma = \alpha$ και δοσμένο ύψος υ προς τη βάση.
Λύση → σελ. 190
4. Δίνεται γωνία $\hat{xOy}$ και σημείο A στο εσωτερικό της. Να κατασκευάσετε σημείο M της Ox που να ισαπέχει από το O και το A .
Λύση → σελ. 190

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · ΤΡΙΓΩΝΑ

ΜΑΘΗΜΑ

3.18

Βασικές κατασκευές τριγώνων

© Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- την κατασκευή τριγώνου από δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία
- την κατασκευή από πλευρά και δύο προσκείμενες γωνίες
- την κατασκευή από τρεις πλευρές και τη διερεύνησή της

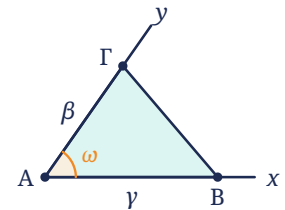
§3.18 Βασικές κατασκευές τριγώνων

Σε αντιστοιχία με τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων, έχουμε τις εξής τρεις βασικές κατασκευές. Κάθε κριτήριο εξασφαλίζει ότι, αν η κατασκευή είναι δυνατή, το τρίγωνο είναι **μοναδικό** (κατά μέγεθος και μορφή).

► Πρόβλημα 1: Δίνονται β , γ και $\hat{A} = \omega$ (ΠΓΠ)

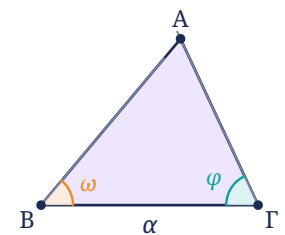
Κατασκευή. Κατασκευάζουμε γωνία $\hat{x}\hat{A}y = \omega$ (§3.17, Πρόβλ. 1). Πάνω στις Ax και Ay παίρνουμε τμήματα $AB = \gamma$ και $AG = \beta$. Το ABG είναι το ζητούμενο.

Διερεύνηση. Το πρόβλημα έχει πάντα λύση (για $\omega < 180^\circ$), η οποία είναι μοναδική (ΠΓΠ).

► Πρόβλημα 2: Δίνονται α , $\hat{B} = \omega$ και $\hat{G} = \varphi$ (ΓΠΓ)

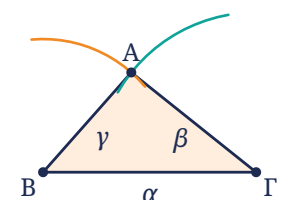
Κατασκευή. Παίρνουμε τμήμα $BG = \alpha$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τις γωνίες $\hat{B}\hat{G}x = \omega$ και $\hat{B}\hat{G}y = \varphi$. Αν οι ημιευθείες Bx , Gy τέμνονται στο A , το ABG είναι το ζητούμενο.

Διερεύνηση. Για να υπάρχει λύση πρέπει οι Bx , Gy να τέμνονται, οπότε από το Πόρισμα της §3.10 πρέπει $\omega + \varphi < 180^\circ$. Στο Κεφάλαιο 4 θα αποδείξουμε ότι η συνθήκη αυτή είναι και ικανή. Η λύση είναι μοναδική (ΓΠΓ).

► Πρόβλημα 3: Δίνονται α , β , γ (ΠΠΠ)

Κατασκευή. Παίρνουμε τμήμα $BG = \alpha$. Με κέντρο B και ακτίνα γ γράφουμε κύκλο, και με κέντρο G και ακτίνα β γράφουμε δεύτερο κύκλο. Αν A είναι ένα κοινό σημείο τους, το ABG είναι το ζητούμενο, αφού $AB = \gamma$, $AG = \beta$, $BG = \alpha$.

Διερεύνηση. Οι κύκλοι (B, γ) και (G, β) με διάκεντρο α τέμνονται αν και μόνο αν $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$. Αυτή είναι λοιπόν η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να υπάρχει τρίγωνο με πλευρές α , β , γ . Η λύση είναι μοναδική (ΠΠΠ) — τα δύο σημεία τομής δίνουν ίσα, συμμετρικά τρίγωνα.



🔑 ΚΛΕΙΔΙ

Η διερεύνηση του Προβλήματος 3 μας δίνει έναν πολύ χρήσιμο κανόνα: **τρία τμήματα α , β , γ είναι πλευρές τριγώνου $\Leftrightarrow$ το μεγαλύτερο είναι μικρότερο από το άθροισμα των άλλων δύο.**

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Στο Πρόβλημα 2 οι δύο γωνίες πρέπει να κατασκευαστούν **στο ίδιο ημιεπίπεδο** ως προς τη ΒΓ.
- ⚠ Το πρόβλημα «δίνονται δύο πλευρές και μια **μη περιεχόμενη** γωνία» μπορεί να έχει καμία, μία ή δύο λύσεις (θυμήσου το αντιπαράδειγμα της §3.2).

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Με πλευρές 3, 4, 8 κατασκευάζουμε τρίγωνο.»

✓ Οι κύκλοι (Β, 3) και (Γ, 4) με διάκεντρο 8 δεν τέμνονται ($8 > 7$). Δεν υπάρχει τρίγωνο.

✗ «Με $\hat{B} = 100^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ κατασκευάζουμε τρίγωνο.»

✓ Το άθροισμα είναι $190^\circ > 180^\circ$: οι ημιευθείες δεν τέμνονται.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Η πρώτη πρόταση του Ευκλείδη

Να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά ένα δοσμένο τμήμα α .

Λύση Παίρνουμε $B\Gamma = \alpha$ και γράφουμε τους κύκλους (Β, α) και (Γ, α). Επειδή $0 < \alpha < 2\alpha$, οι κύκλοι τέμνονται σε ένα σημείο Α (και στο συμμετρικό του). Τότε $AB = AG = B\Gamma = \alpha$: το $AB\Gamma$ είναι **ισόπλευρο**. (Αυτή είναι η πρώτη πρόταση του 1ου βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη!)

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο με δοσμένη υποτείνουσα α και μία κάθετη πλευρά $\beta < \alpha$.

Λύση Κατασκευάζουμε ορθή γωνία $x\hat{\Gamma}y$. Στην Γχ παίρνουμε $\Gamma A = \beta$. Με κέντρο Α και ακτίνα α γράφουμε κύκλο που τέμνει τη Γy στο Β (τέμνει, γιατί η απόσταση του Α από τη Γy είναι $\beta < \alpha$). Το $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο: $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, $\Gamma A = \beta$, $AB = \alpha$. Η λύση είναι μοναδική (§3.6, Θ. II).



Για βίντεο, κουίζ και επιπλέον λυμένες ασκήσεις σε αυτό το μάθημα, επισκεψού το mathgreece.com — πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.

📖 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 3.18 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ● μέτρια ●●● απαιτητική

1

Να κατασκευάσετε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha = 5$ cm, $\beta = 4$ cm, $\gamma = 3$ cm και να εξηγήσετε γιατί υπάρχει.

Λύση → σελ. 190

2

Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο με βάση α και γωνία βάσης ω . Πότε έχει λύση;

Λύση → σελ. 190

3

Να κατασκευάσετε τρίγωνο $AB\Gamma$ όταν δίνονται: η πλευρά α , η διάμεσος μ_α και η πλευρά β . Πότε έχει λύση;

Λύση → σελ. 190



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Όλη η θεωρία με μια ματιά

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

- ΠΠΠ: 2 πλευρές + περιεχόμενη γωνία.
- ΓΠΓ: πλευρά + 2 προσκείμενες γωνίες.
- ΠΠΠ: 3 πλευρές.
- Απέναντι από ίσες πλευρές → ίσες γωνίες.
- ΓΓΓ δεν είναι κριτήριο!

Ορθογώνια τρίγωνα (ίσα αν...)

- 2 κάθετες πλευρές.
- κάθετη + προσκείμενη οξεία.
- υποτείνουσα + οξεία γωνία.
- υποτείνουσα + κάθετη πλευρά.

Ισοσκελές τρίγωνο ($AB = AG$)

- $\hat{B} = \hat{G}$ και αντίστροφα.
- Διχοτόμος = διάμεσος = ύψος από το A (= μεσοκάθετος βάσης).
- Ισόπλευρο $\Leftrightarrow$ ίσες γωνίες.

Γεωμετρικοί τόποι

- Μεσοκάθετος AB: σημεία με $MA = MB$.
- Διχοτόμος: εσωτερικά σημεία που ισαπέχουν από τις πλευρές.
- Κύκλος (O, ρ): σημεία με $OM = \rho$.

Ανισότητες

- $\hat{\Gamma}_{\epsilon\zeta} > \hat{A}, \hat{B}$.
- $\beta > \gamma \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{G}$.
- $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$.
- Κάθετο < πλάγιο: $AB > AG \Leftrightarrow KB > KG$.

Κύκλος

- Κάθετος από κέντρο διχοτομεί χορδή & τόξο.
- Ίσες χορδές $\Leftrightarrow$ ίσα αποστήματα $\Leftrightarrow$ ίσα τόξα.
- Εφαπτομένη $\perp$ ακτίνα επαφής.
- Εφαπτόμενα τμήματα ίσα.
- Δύο κύκλοι: σύγκριση δ με $R + \rho, R - \rho$.



Το πιο σημαντικό κεφάλαιο της χρονιάς!

Τα κριτήρια ισότητας θα τα χρειάζεσαι σε όλη τη Γεωμετρία. Δες στο mathgreece.com τα βιντεομαθήματα και τις δεκάδες λυμένες ασκήσεις του Κεφαλαίου 3 — πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

www.mathgreece.com



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Επαναληπτικό διαγώνισμα

Διάρκεια: 2 διδακτικές ώρες

Ενδεικτική διάρκεια: 2 ώρες. Σε κάθε απόδειξη να αιτιολογείτε πλήρως κάθε βήμα.

ΘΕΜΑ 1

25 μονάδες

- α) Να διατυπώσετε το 2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΓΠΓ).
- β) Να χαρακτηρίσετε Σωστό ή Λάθος:
- α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.
 - β) Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.
 - γ) Τα τμήματα 2, 5, 8 μπορεί να είναι πλευρές τριγώνου.
 - δ) Η εφαπτομένη κύκλου είναι κάθετη στην ακτίνα του σημείου επαφής.
 - ε) Δύο κύκλοι με $R = 5$, $\rho = 2$, $\delta = 4$ τέμνονται.

ΘΕΜΑ 2

25 μονάδες

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στις πλευρές AB και $A\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E αντίστοιχα, τέτοια ώστε $A\Delta = AE$. Να αποδείξετε ότι: α) $BE = \Gamma\Delta$, β) $\hat{A}\hat{B}E = \hat{A}\hat{\Gamma}\Delta$, γ) αν O το σημείο τομής των BE , $\Gamma\Delta$, τότε $OB = O\Gamma$.

ΘΕΜΑ 3

25 μονάδες

Από εξωτερικό σημείο P κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA , PB . α) Να αποδείξετε ότι η PO είναι μεσοκάθετος της AB . β) Αν M είναι τυχαίο σημείο της ευθείας PO , να αποδείξετε ότι $MA = MB$. γ) Αν $\hat{A}\hat{P}B = 70^\circ$, να βρείτε τη γωνία $\hat{A}\hat{P}O$.

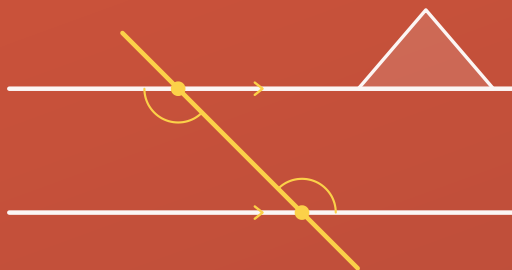
ΘΕΜΑ 4

25 μονάδες

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB < A\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ . Στην $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο E με $AE = AB$. Να αποδείξετε ότι: α) $\Delta B = \Delta E$, β) $\hat{A}\hat{E}\Delta = \hat{B}$, γ) $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και $\Delta\Gamma > \Delta B$.

Οι πλήρεις λύσεις του διαγωνίσματος βρίσκονται στις σελίδες λύσεων (σελ. 190).

Παράλληλες ευθείες



Το Κεφάλαιο 4 είναι αφιερωμένο στις **παράλληλες ευθείες** και στο περίφημο **αίτημα παραλληλίας** του Ευκλείδη, πάνω στο οποίο στηρίζεται όλη η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Θα μάθουμε να αναγνωρίζουμε πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες, θα ανακαλύψουμε τους αξιοσημείωτους κύκλους του τριγώνου και θα αποδείξουμε ένα από τα πιο γνωστά αποτελέσματα όλων των εποχών: **το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180°** .

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

4.1	Εισαγωγή	107	4.5	Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου	115
4.2	Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα	107	4.6	Άθροισμα γωνιών τριγώνου	118
4.3	Κατασκευή παράλληλης ευθείας	112	4.7	Γωνίες με πλευρές κάθετες	119
4.4	Γωνίες με πλευρές παράλληλες	112	4.8	Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου	122

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 · ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

ΜΑΘΗΜΑ

4.1–4.2

Τέμνουσα δύο ευθειών και αίτημα παραλληλίας

§4.1 Εισαγωγή · §4.2 Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τα ονόματα των γωνιών που σχηματίζει μια τέμνουσα
- το αίτημα παραλληλίας (5ο αίτημα του Ευκλείδη)
- κριτήρια για να είναι δύο ευθείες παράλληλες
- τις ιδιότητες των παράλληλων ευθειών

§4.1 Εισαγωγή

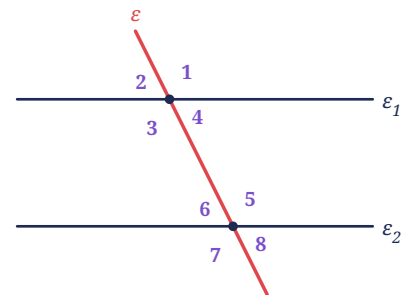
📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου λέγονται **παράλληλες** όταν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Γράφουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Συμφωνούμε επίσης ότι κάθε ευθεία είναι παράλληλη με τον εαυτό της.

Στην καθημερινή ζωή συναντάμε παντού εικόνες παράλληλων ευθειών: οι γραμμές του τετραδίου, οι ράγες του τρένου, οι απέναντι ακμές ενός θρανίου. Το ερώτημα είναι: πώς μπορούμε να βεβαιωθούμε ότι δύο ευθείες δεν θα συναντηθούν ποτέ, αφού εκτείνονται απεριόριστα; Η απάντηση έρχεται μέσα από τις **γωνίες** που σχηματίζουν με μια τρίτη ευθεία.

§4.2 Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα

Δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται από μια τρίτη ευθεία ε , που λέγεται **τέμνουσα**, στα σημεία Α και Β. Σχηματίζονται **οκτώ** γωνίες, τέσσερις σε κάθε σημείο. Οι γωνίες που βρίσκονται **ανάμεσα** στις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ λέγονται **εντός**, ενώ οι υπόλοιπες **εκτός**.



Οι οκτώ γωνίες (αριθμημένες)

Ονομασία ζεύγους	Τι σημαίνει	Παράδειγμα στο σχήμα
εντός εναλλάξ	εντός και εκατέρωθεν της τέμνουσας	4 και 6 · 3 και 5
εκτός εναλλάξ	εκτός και εκατέρωθεν της τέμνουσας	1 και 7 · 2 και 8
εντός, εκτός και επί τα αυτά (αντίστοιχες)	η μία εντός, η άλλη εκτός, προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας	1 και 5 · 4 και 8 · 2 και 6 · 3 και 7
εντός και επί τα αυτά	και οι δύο εντός, προς το ίδιο μέρος	4 και 5 · 3 και 6

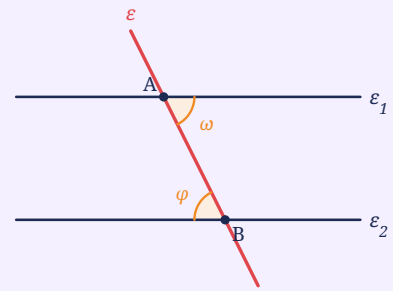
📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Πώς διαβάζεται το σχήμα

Η αρίθμηση: στο Α οι γωνίες 1, 2, 3, 4 και στο Β οι 5, 6, 7, 8, ξεκινώντας από τη δεξιά «πάνω» γωνία και κινούμενοι αριστερόστροφα. Οι εντός είναι οι 3, 4 (κάτω από την ε_1) και οι 5, 6 (πάνω από την ε_2).

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν δύο ευθείες, τεμνόμενες από τρίτη, σχηματίζουν δύο **εντός εναλλάξ γωνίες ίσες**, τότε είναι **παράλληλες**.

Απόδειξη. Έστω $\omega = \varphi$. Αν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονταν σε ένα σημείο Γ, θα σχηματιζόταν τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο η μία από τις ω, φ θα ήταν **εξωτερική** γωνία και η άλλη **απέναντι εσωτερική**. Από το θεώρημα της §3.10 θα έπρεπε η εξωτερική να είναι μεγαλύτερη· όμως $\omega = \varphi$, άτοπο. Άρα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.



➔ ΠΟΡΙΣΜΑ I

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο **εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες** ή δύο **εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές**, τότε είναι **παράλληλες**.

➔ ΠΟΡΙΣΜΑ II

Δύο ευθείες **κάθετες στην ίδια ευθεία**, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους **παράλληλες**.

Απόδειξη. Οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζουν με την ευθεία είναι και οι δύο ορθές, άρα ίσες.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι από ένα σημείο Α εκτός ευθείας ε **υπάρχει** τουλάχιστον μία παράλληλη προς την ε (π.χ. η κάθετη στην κάθετο ΑΚ). Πόσες υπάρχουν; Εδώ η λογική «σταματά» και χρειαζόμαστε ένα νέο αξίωμα:

⌘ ΑΙΤΗΜΑ Αίτημα παραλληλίας (Ευκλείδειο αίτημα)

Από σημείο εκτός ευθείας άγεται **μία μόνο** παράλληλη προς αυτήν.

🕒 ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ Ο Playfair και το 5ο αίτημα

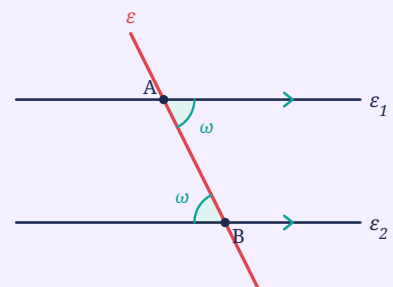
Το αξίωμα αυτό είναι ισοδύναμο με το **5ο αίτημα** των «Στοιχείων» (Κεφάλαιο 1). Η διατύπωση «μία μόνο παράλληλη» οφείλεται στον Σκωτσέζο μαθηματικό **John Playfair** (1795), αλλά την ίδια ιδέα τη βρίσκουμε ήδη στον Πρόκλο (5ος αι. μ.Χ.). Οι προσπάθειες 2.000 χρόνων να αποδειχθεί το αίτημα οδήγησαν τελικά στις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

► Ιδιότητες των παραλλήλων

☆ ΠΡΟΤΑΣΗ I

Αν δύο **παράλληλες** ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις **εντός εναλλάξ γωνίες ίσες**.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και ω, φ εντός εναλλάξ. Αν $\omega \neq \varphi$, φέρνουμε από το Α ευθεία ζ που σχηματίζει με την τέμνουσα γωνία ίση με φ (εντός εναλλάξ). Τότε από το προηγούμενο θεώρημα $\zeta \parallel \varepsilon_2$. Έτσι από το Α θα περνούσαν δύο παράλληλες προς την ε_2 (η ε_1 και η ζ), που αντίκειται στο αίτημα παραλληλίας. Άρα $\omega = \varphi$.



➡ ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν:

1. τις εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες,
2. τις εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές.

🔑 ΚΛΕΙΔΙ

Για παράλληλες ευθείες και μια τέμνουσα, όλες οι οξείες γωνίες που σχηματίζονται είναι **ίσες** μεταξύ τους, όλες οι αμβλείες είναι **ίσες** μεταξύ τους, και κάθε οξεία είναι **παραπληρωματική** κάθε αμβλείας. Με αυτό λύνεις «με μια ματιά» κάθε άσκηση υπολογισμού!

☆ ΠΡΟΤΑΣΗ II

Αν δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες προς μια τρίτη ε , τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

Απόδειξη. Αν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είχαν κοινό σημείο M , από το M θα περνούσαν δύο παράλληλες προς την ε , άτοπο από το αίτημα παραλληλίας. ■

☆ ΠΡΟΤΑΣΗ III

Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες και μια τρίτη ευθεία τέμνει τη μία, τότε τέμνει και την άλλη.

Απόδειξη. Αν η ε τέμνει την ε_1 στο A αλλά ήταν παράλληλη στην ε_2 , από το A θα περνούσαν δύο παράλληλες στην ε_2 (η ε_1 και η ε), άτοπο. ■

➡ ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν μια ευθεία είναι **κάθετη** σε μία από δύο παράλληλες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.

Απόδειξη. Από την Πρόταση III τέμνει και την άλλη, και από την Πρόταση I οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, άρα και η δεύτερη είναι ορθή. ■

☆ ΠΡΟΤΑΣΗ IV (ΤΟ 50 ΑΙΤΗΜΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ)

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις **εντός και επί τα αυτά** μέρη γωνίες με άθροισμα **μικρότερο από 180°** , τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

Απόδειξη. Αφού το άθροισμα δεν είναι 180° , οι ευθείες δεν είναι παράλληλες (αλλιώς από το Πόρισμα θα ήταν παραπληρωματικές), άρα τέμνονται σε σημείο Γ . Το Γ δεν μπορεί να είναι προς την άλλη μεριά: τότε στο τρίγωνο $AB\Gamma$ θα είχαμε δύο γωνίες που είναι τα παραπληρώματα των δοσμένων, με άθροισμα $> 180^\circ$, άτοπο (§3.10). ■

➡ ΠΟΡΙΣΜΑ

Η κατασκευή τριγώνου με δοσμένη μία πλευρά και τις δύο προσκείμενες σε αυτήν γωνίες έχει λύση **αν και μόνο αν** το άθροισμα των δύο γωνιών είναι μικρότερο από 180° (§3.18, Πρόβλημα 2).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ Παράλληλες: απόδειξη και χρήση

1. Για να αποδείξεις ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$: βρες μια τέμνουσα και δείξε ότι δύο εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες (ή εντός εκτός επί τα αυτά ίσες, ή εντός επί τα αυτά παραπληρωματικές). Εναλλακτικά: δείξε ότι είναι και οι δύο κάθετες ή και οι δύο παράλληλες σε τρίτη ευθεία.
2. Αν **γνωρίζεις** ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$: «μετέφερε» γωνίες από τη μία ευθεία στην άλλη μέσω των ζευγών ίσων γωνιών.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Η σειρά της λογικής μετράει! «Εντός εναλλάξ ίσες $\Rightarrow$ παράλληλες» αποδεικνύεται **χωρίς** το αίτημα. Το αντίστροφο «παράλληλες $\Rightarrow$ εντός εναλλάξ ίσες» χρειάζεται το **αίτημα παραλληλίας**.
- ⚠ Οι γωνίες «εντός και επί τα αυτά» είναι **παραπληρωματικές** (όχι ίσες) όταν οι ευθείες είναι παράλληλες.
- ⚠ Δύο ευθείες που «φαίνονται» παράλληλες στο σχήμα δεν είναι απαραίτητα παράλληλες. Χρειάζεται απόδειξη!

ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ « $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, άρα οι εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι ίσες.»

✓ Είναι **παραπληρωματικές** (άθροισμα 180°).

✗ «Οι γωνίες 1 και 5 είναι εντός εναλλάξ.»

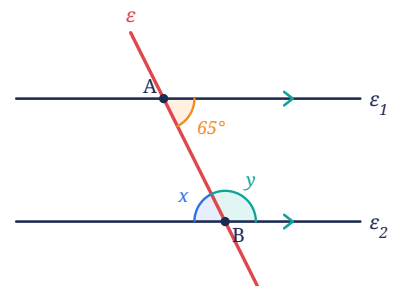
✓ Είναι **εντός, εκτός και επί τα αυτά** (αντίστοιχες).

✗ «Από ένα σημείο περνούν άπειρες παράλληλες σε μια ευθεία.»

✓ Από σημείο **εκτός** ευθείας περνά **μία μόνο** (αίτημα παραλληλίας).

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

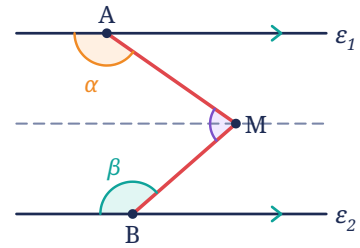
Στο σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και η γωνία στο Α είναι 65° . Να βρείτε τις γωνίες x και y .



Λύση Η 65° και η x είναι **εντός εναλλάξ** (η πρώτη κάτω από την ε_1 δεξιά, η δεύτερη πάνω από την ε_2 αριστερά) άρα $x = 65^\circ$. Η y είναι εφεξής και παραπληρωματική της x πάνω στην ε_2 , άρα $y = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.

 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Το «σπασμένο» σχήμα Z

Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες και M ένα σημείο ανάμεσά τους. Αν $A \in \varepsilon_1, B \in \varepsilon_2$, να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{AMB}$ ισούται με το άθροισμα των γωνιών που σχηματίζουν οι MA, MB με τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ (από τη μεριά του M).



Λύση Από το M φέρνουμε την ευθεία $\zeta \parallel \varepsilon_1$ (μοναδική, από το αίτημα). Τότε $\zeta \parallel \varepsilon_2$ (Πρόταση II). Η ζ χωρίζει τη γωνία $\widehat{AMB}$ σε δύο μέρη. Το πρώτο είναι εντός εναλλάξ (ως προς την τέμνουσα MA των παραλλήλων ε_1, ζ) με τη γωνία που σχηματίζει η AM με την ε_1 · το δεύτερο είναι εντός εναλλάξ (τέμνουσα MB , παράλληλες ζ, ε_2) με τη γωνία της BM με την ε_2 . Άρα $\widehat{AMB} = \alpha + \beta$.



 Έλεγε τον εαυτό σου

Λύσε τα ηλεκτρονικά κουίζ του μαθήματος στο **mathgreece.com** και δες αμέσως πού στέκεσαι. Όλο το υλικό είναι δωρεάν: ένα πραγματικό φροντιστήριο στην οθόνη σου.

www.mathgreece.com

 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 4.1–4.2 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

• βασική • μέτρια • • απαιτητική

- 1 Δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη και μία από τις οκτώ γωνίες είναι 48° . Να βρείτε τις υπόλοιπες.
• Λύση → σελ. 191
- 2 Δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες, που σχηματίζουν δύο παράλληλες με μια τέμνουσα, διαφέρουν κατά 40° . Να τις βρείτε.
• Λύση → σελ. 191
- 3 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε από το A ευθεία $\varepsilon \parallel B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι η ε σχηματίζει με τις $AB, A\Gamma$ γωνίες ίσες με $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.
• Λύση → σελ. 191
- 4 Η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο Δ . Από το Δ φέρνουμε $\Delta E \parallel B\Gamma$, με E στην AB . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.
• • Λύση → σελ. 191
- 5 Δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται από τρίτη ευθεία ε . Αν οι διχοτόμοι δύο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.
• • Λύση → σελ. 191
- 6 Οι διχοτόμοι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών, που σχηματίζουν δύο παράλληλες με μια τέμνουσα, τέμνονται στο M . Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν ορθή γωνία.
• • • Λύση → σελ. 191

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 · ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

ΜΑΘΗΜΑ

4.3–4.4

Κατασκευή παράλληλης - Γωνίες με παράλληλες πλευρές

§4.3 Κατασκευή παράλληλης ευθείας · §4.4 Γωνίες με πλευρές παράλληλες

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

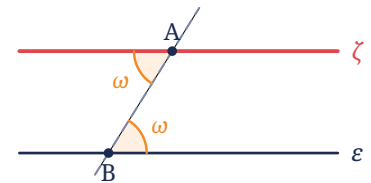
- να κατασκευάζεις παράλληλη από σημείο
- την απόσταση δύο παράλληλων και τη μεσοπαράλληλο
- πότε δύο γωνίες με παράλληλες πλευρές είναι ίσες και πότε παραπληρωματικές

§4.3 Κατασκευή παράλληλης ευθείας

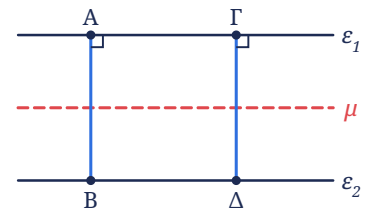
Πρόβλημα. Δίνεται ευθεία ε και σημείο A εκτός αυτής. Να κατασκευαστεί η παράλληλη προς την ε από το A .

Κατασκευή. Φέρνουμε από το A μια τυχαία ευθεία που τέμνει την ε σε ένα σημείο B · σχηματίζεται μια γωνία ω . Στο A κατασκευάζουμε (§3.17, Πρόβλημα 1) γωνία ίση με την ω , σε θέση **εντός εναλλάξ**. Η πλευρά της ζ είναι η ζητούμενη παράλληλη.

Απόδειξη. Οι ε , ζ σχηματίζουν με την τέμνουσα AB εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, άρα $\zeta \parallel \varepsilon$. Από το αίτημα παραλληλίας η λύση είναι **μοναδική**.



Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, τότε κάθε ευθεία κάθετη στη μία είναι κάθετη και στην άλλη. Αποδεικνύεται (με ορθογώνια τρίγωνα ή με τα παραλληλόγραμμα του Κεφ. 5) ότι **όλα τα σημεία της ε_1 απέχουν την ίδια απόσταση από την ε_2** . Η απόσταση αυτή λέγεται **απόσταση των παραλλήλων**.



📖 ΟΡΙΣΜΟΣ Μεσοπαράλληλος

Η ευθεία μ που είναι παράλληλη στις ε_1 , ε_2 και βρίσκεται «στη μέση» τους (ισαπέχει από αυτές) λέγεται **μεσοπαράλληλος** των ε_1 , ε_2 . Είναι ο **γεωμετρικός τόπος** των σημείων που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες.

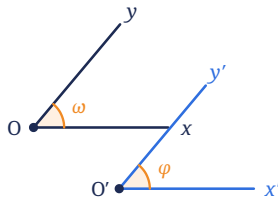
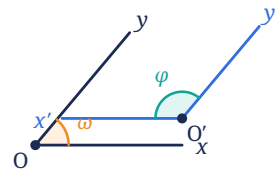
§4.4 Γωνίες με πλευρές παράλληλες

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο γωνίες με τις πλευρές τους **παράλληλες**:

1. είναι **ίσες** αν είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες,
2. είναι **παραπληρωματικές** αν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

Απόδειξη. Έστω $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}'y'$ με $Ox \parallel O'x'$ και $Oy \parallel O'y'$. Αν η ευθεία $O'y'$ τέμνει την ευθεία Ox στο K , τότε από τις παράλληλες Oy , $O'y'$ (τέμνουσα Ox) η γωνία στο K είναι ίση με ω (εντός εκτός επί τα αυτά), και από τις παράλληλες Ox , $O'x'$ (τέμνουσα $O'y'$) η γωνία στο K είναι ίση με φ ή παραπληρωματική της. Άρα $\varphi = \omega$ (όταν είναι του ίδιου είδους) ή $\varphi + \omega = 180^\circ$ (διαφορετικού είδους).

και οι δύο οξείες: $\varphi = \omega$ μία οξεία, μία αμβλεία: $\varphi + \omega = 180^\circ$ **⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!**

- ⚠ Πριν αποφασίσεις «ίσες ή παραπληρωματικές», έλεγξε **το είδος** (οξεία/αμβλεία) των δύο γωνιών.
- ⚠ Η μεσοπαράλληλος ορίζεται μόνο για **παράλληλες** ευθείες. Για τεμνόμενες, τα σημεία που ισαπέχουν βρίσκονται στις διχοτόμους (§3.7).

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Γωνίες με παράλληλες πλευρές είναι πάντα ίσες.»

✓ Μπορεί να είναι και **παραπληρωματικές**, αν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

✗ Κατασκευάζουμε παράλληλη «σύροντας» τον χάρακα πάνω στον γνώμονα.

✓ Αυτό είναι πρακτικό σχέδιο· η γεωμετρική κατασκευή γίνεται με ίσες εντός εναλλάξ γωνίες (κανόνας και διαβήτη).

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Η γωνία $\widehat{xOy} = 40^\circ$ και η γωνία $\widehat{x'O'y'}$ έχει $O'x' \parallel Ox$ και $O'y' \parallel Oy$. Ποιες τιμές μπορεί να έχει η $\widehat{x'O'y'}$;

Λύση Αν είναι οξεία: 40° · αν είναι αμβλεία: 140° .

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Γωνία από παράλληλες

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ από τυχαίο σημείο Δ της $B\Gamma$ φέρνουμε $\Delta E \parallel A\Gamma$ (E στην AB) και $\Delta Z \parallel AB$ (Z στην $A\Gamma$). Να αποδείξετε ότι $\widehat{E\Delta Z} = \widehat{A}$.

Λύση Οι γωνίες $\widehat{E\Delta Z}$ και $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες ($\Delta E \parallel A\Gamma$, $\Delta Z \parallel AB$). Για να δούμε αν είναι ίσες ή παραπληρωματικές, υπολογίζουμε: $\widehat{E\Delta B} = \widehat{\Gamma}$ και $\widehat{Z\hat{\Delta}\Gamma} = \widehat{B}$ (εντός εκτός επί τα αυτά), άρα $\widehat{E\Delta Z} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \widehat{A}$ (§4.6).



Για βίντεο, κουίζ και επιπλέον λυμένες ασκήσεις σε αυτό το μάθημα, επισκέψου το **mathgreece.com** — πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.

**Ασκήσεις για λύση**

Μάθημα 4.3–4.4 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ●● μέτρια ●●● απαιτητική

1

Δίνεται ευθεία ϵ και σημείο A που απέχει από αυτή 3 cm. Πόσες ευθείες παράλληλες στην ϵ απέχουν 3 cm από την ϵ ; Ποια από αυτές περνά από το A ;

Λύση → σελ. 191

- 2 Οι γωνίες $\hat{x}\hat{O}y$ και $\hat{x}'\hat{O}'y'$ έχουν παράλληλες πλευρές και η μία είναι τετραπλάσια της άλλης. Να τις βρείτε.
Λύση → σελ. 191
- 3 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που απέχουν 2 cm από μια ευθεία ε.
Λύση → σελ. 191

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 · ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

ΜΑΘΗΜΑ

4.5

Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

📌 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

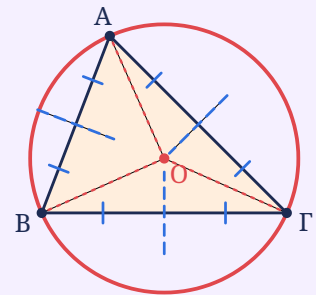
- ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών τριγώνου συντρέχουν (περίκεντρο)
- ότι οι διχοτόμοι συντρέχουν (έγκεντρο)
- τον περιγεγραμμένο και τον εγγεγραμμένο κύκλο
- τους παρεγγεγραμμένους κύκλους

§4.5 Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι τρεις **μεσοκάθετοι** των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το **ίδιο σημείο**, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.

Απόδειξη. Οι μεσοκάθετοι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ των AB, AG τέμνονται (αν ήταν παράλληλες, οι AB, AG που είναι κάθετες σε αυτές θα ήταν παράλληλες ή θα ταυτίζονταν, άτοπο). Έστω O το σημείο τομής. Αφού $O \in \varepsilon_1$: $OA = OB$ · αφού $O \in \varepsilon_2$: $OA = OG$. Άρα $OB = OG$, οπότε το O ανήκει και στη μεσοκάθετο της BG . Ο κύκλος (O, OA) περνά από τα A, B, G .



📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Το κοινό σημείο O των μεσοκαθέτων λέγεται **περίκεντρο** του τριγώνου, ο κύκλος (O, R) με $R = OA = OB = OG$ λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου και το τρίγωνο λέγεται **εγγεγραμμένο** στον κύκλο.

➡ ΠΟΡΙΣΜΑ

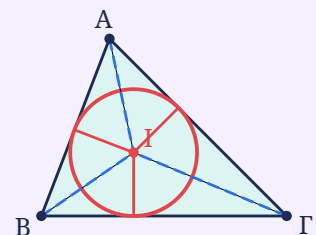
Από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένας **μοναδικός** κύκλος.

Απόδειξη. Το κέντρο του πρέπει να ισαπέχει από τα τρία σημεία, άρα να είναι το (μοναδικό) περίκεντρο του τριγώνου που ορίζουν.

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι **διχοτόμοι** των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το **ίδιο σημείο**, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που **εφάπτεται** και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

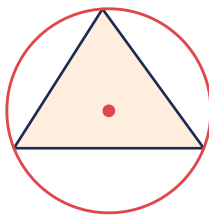
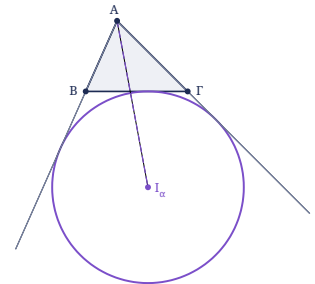
Απόδειξη. Οι διχοτόμοι των $\hat{B}, \hat{G}$ τέμνονται σε ένα σημείο I στο εσωτερικό του τριγώνου (οι γωνίες $\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{G}}{2} < 180^\circ$, άρα τέμνονται — Πρόταση IV). Το I ως σημείο της διχοτόμου της $\hat{B}$ ισαπέχει από τις BA, BG , και ως σημείο της διχοτόμου της $\hat{G}$ ισαπέχει από τις GB, GA . Άρα ισαπέχει από τις AB, AG και, ως εσωτερικό σημείο της $\hat{A}$, ανήκει στη διχοτόμο της. Αν ρ η κοινή απόσταση, ο κύκλος (I, ρ) εφάπτεται στις τρεις πλευρές.



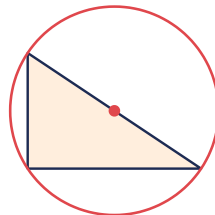
ΟΡΙΣΜΟΣ

Το κοινό σημείο I των διχοτόμων λέγεται **έγκεντρο** του τριγώνου και ο κύκλος (I, ρ) λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου. Το τρίγωνο λέγεται **περιγεγραμμένο** στον κύκλο.

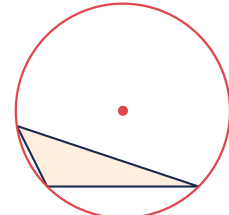
Οι διχοτόμοι των **εξωτερικών** γωνιών $\hat{B}_{εξ}$, $\hat{G}_{εξ}$ και η διχοτόμος της εσωτερικής $\hat{A}$ διέρχονται επίσης από το ίδιο σημείο I_α , που ισαπέχει από τις ευθείες των τριών πλευρών (με την ίδια απόδειξη). Ο κύκλος (I_α, ρ_α) εφάπτεται στη $B\Gamma$ και στις προεκτάσεις των AB , AG και λέγεται **παρεγγεγραμμένος κύκλος** στη γωνία $\hat{A}$. Κάθε τρίγωνο έχει **τρεις** παρεγγεγραμμένους κύκλους, με κέντρα $I_\alpha, I_\beta, I_\gamma$.



οξυγώνιο: μέσα



ορθογώνιο: μέσο υποτείνουσας



αμβλυγώνιο: έξω

Θέση του περικέντρου ανάλογα με το είδος του τριγώνου

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Το **περίκεντρο** ισαπέχει από τις **κορυφές**, το **έγκεντρο** ισαπέχει από τις **πλευρές**. Μην τα μπερδεύεις!
- ⚠ Το έγκεντρο βρίσκεται **πάντα** μέσα στο τρίγωνο· το περίκεντρο μπορεί να είναι μέσα, πάνω (μέσο υποτείνουσας) ή έξω.
- ⚠ Για να βρεις το περίκεντρο αρκούν **δύο** μεσοκάθετοι· η τρίτη περνά αυτόματα από το σημείο τομής τους.

ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Ο εγγεγραμμένος κύκλος περνά από τις κορυφές.»

✓ Αυτός είναι ο **περιγεγραμμένος**. Ο εγγεγραμμένος **εφάπτεται** στις πλευρές.

✗ «Περίκεντρο = σημείο τομής των διχοτόμων.»

✓ Περίκεντρο = τομή των **μεσοκαθέτων**. Έγκεντρο = τομή των **διχοτόμων**.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με περίκεντρο O είναι $OA = 5$ cm. Πόσο είναι τα OB, OG ; Αν το O βρίσκεται πάνω στη $B\Gamma$, τι είδους είναι το τρίγωνο;

Λύση $OB = OG = OA = 5$ cm (ακτίνες του περιγεγραμμένου κύκλου). Αν το O είναι πάνω στη $B\Gamma$, τότε είναι το μέσο της ($OB = OG$) και $OA = OB = OG = \frac{BG}{2}$: η διάμεσος από το A ισούται με το μισό της $B\Gamma$, οπότε (όπως θα δούμε στην §5.9) το τρίγωνο είναι **ορθογώνιο** με $\hat{A} = 90^\circ$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Το κέντρο του ισόπλευρου

Να αποδείξετε ότι σε ισόπλευρο τρίγωνο το περίκεντρο και το έγκεντρο ταυτίζονται.

Λύση Στο ισόπλευρο, η διχοτόμος από κάθε κορυφή είναι και διάμεσος και ύψος (Πόρισμα Ι §3.2), δηλαδή είναι η μεσοκάθετος της απέναντι πλευράς. Άρα οι τρεις διχοτόμοι ταυτίζονται με τις τρεις μεσοκαθέτους και το κοινό τους σημείο είναι και έγκεντρο και περίκεντρο (το λέμε απλά **κέντρο** του ισόπλευρου τριγώνου).



Θέλεις να το δεις και σε βίντεο;

Στο mathgreece.com θα βρεις αυτό το μάθημα εξηγημένο βήμα-βήμα σε βιντεομάθημα, μαζί με σημειώσεις και κουίζ αυτοαξιολόγησης. Ένα **πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο**, στη διάθεσή σου όποτε το χρειαστείς.

www.mathgreece.com

Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 4.5 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ● μέτρια ●● απαιτητική

- 1 Τρία χωριά Α, Β, Γ (όχι στην ίδια ευθεία) θέλουν να κατασκευάσουν ένα κοινό αντλιοστάσιο που να απέχει το ίδιο από κάθε χωριό. Πού πρέπει να το τοποθετήσουν;

Λύση → σελ. 191
- 2 Ένα οικόπεδο σχήματος τριγώνου έχει περίφραξη και στις τρεις πλευρές. Πού πρέπει να τοποθετηθεί ένας ποτιστικός μηχανισμός ώστε να απέχει εξίσου από τους τρεις φράχτες; Ποιο είναι το μεγαλύτερο κυκλικό παρτέρι που χωράει μέσα στο οικόπεδο;

Λύση → σελ. 191
- 3 Σε τρίγωνο ΑΒΓ, Ι το έγκεντρο. Αν $\hat{B} = 50^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 70^\circ$, να βρείτε τη γωνία ΒΙΓ.

Λύση → σελ. 192
- 4 Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τρίγωνο το περίκεντρο ανήκει σε μια διάμεσο, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές (ή η διάμεσος περνά από το μέσο της υποτείνουσας ορθογωνίου).

Λύση → σελ. 192

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 · ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

ΜΑΘΗΜΑ

4.6–4.7

Άθροισμα γωνιών τριγώνου – Γωνίες με κάθετες πλευρές

§4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου · §4.7 Γωνίες με πλευρές κάθετες

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

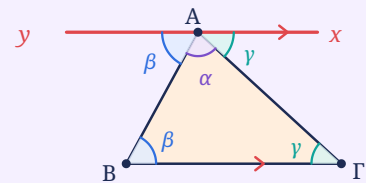
- ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180°
- ότι η εξωτερική γωνία ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι
- σχέσεις γωνιών σε ορθογώνιο, ισοσκελές και ισόπλευρο
- πότε γωνίες με κάθετες πλευρές είναι ίσες ή παραπληρωματικές

§4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Το **άθροισμα των γωνιών** κάθε τριγώνου είναι 180° (δύο ορθές): $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

Απόδειξη. Από την κορυφή A φέρνουμε την ευθεία $xy \parallel BG$ (μοναδική, από το αίτημα παραλληλίας). Οι γωνίες $\gamma\hat{A}B$ και $\hat{B}$ είναι εντός εναλλάξ (παράλληλες xy, BG , τέμνουσα AB), άρα ίσες· όμοια $x\hat{A}G = \hat{C}$ (τέμνουσα AG). Οι τρεις γωνίες $\gamma\hat{A}B, \gamma\hat{A}G, \gamma\hat{A}x$ είναι διαδοχικές και σχηματίζουν την ευθεία γωνία $\gamma\hat{A}x$. Άρα $\hat{B} + \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$.



➡ ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. Κάθε **εξωτερική γωνία** τριγώνου **ισούται** με το **άθροισμα** των δύο απέναντι εσωτερικών: $\hat{\Gamma}_{εξ} = \hat{A} + \hat{B}$.
2. Αν δύο τρίγωνα έχουν **δύο γωνίες** ίσες μία προς μία, τότε έχουν και τις **τρίτες** γωνίες ίσες.
3. Οι οξείες γωνίες ενός **ορθογωνίου** τριγώνου είναι **συμπληρωματικές**.
4. Κάθε γωνία **ισόπλευρου** τριγώνου είναι 60° .
5. Σε **ορθογώνιο ισοσκελές** τρίγωνο οι οξείες γωνίες είναι 45° .

Απόδειξη. (i) $\hat{\Gamma}_{εξ} = 180^\circ - \hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$. (ii) Η τρίτη γωνία είναι 180° μείον το άθροισμα των άλλων δύο. (iii) $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. (iv) $3\hat{A} = 180^\circ$. (v) $2\hat{B} = 90^\circ$.

① ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Γενίκευση του ΓΠΓ

Χάρη στο Πόρισμα (ii), το κριτήριο **ΓΠΓ** γενικεύεται: δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν μία πλευρά ίση και **οποιοσδήποτε** δύο γωνίες ίσες, αρκεί οι γωνίες να βρίσκονται στις ίδιες θέσεις ως προς την ίση πλευρά (απέναντι ή προσκείμενες). Πράγματι, τότε και οι τρίτες γωνίες είναι ίσες και έχουμε πλευρά με δύο προσκείμενες ίσες γωνίες.

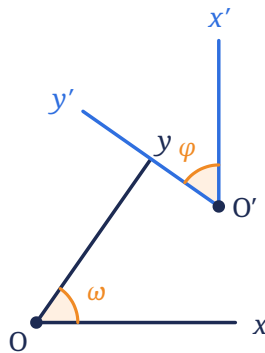
§4.7 Γωνίες με πλευρές κάθετες

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο γωνίες με τις πλευρές τους **κάθετες** μία προς μία:

1. είναι **ίσες** αν είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες,
2. είναι **παραπληρωματικές** αν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

Απόδειξη. Έστω $\omega = \angle xOy$ και $\varphi = \angle x'O'y'$ οξείες, με $Ox \perp O'x'$ και $Oy \perp O'y'$. Από το O φέρνουμε ημιευθείες $Oz \parallel O'x'$ και $Ot \parallel O'y'$, προσανατολισμένες ώστε $\angle zOt = \varphi$ (§4.4). Τότε $Oz \perp Ox$ και $Ot \perp Oy$. Αν η Oy βρίσκεται στο εσωτερικό της ορθής xOz , τότε $\angle yOz = 90^\circ - \omega$. Επίσης η Oz βρίσκεται στο εσωτερικό της ορθής yOt , οπότε $\angle zOt = 90^\circ - \angle yOz = 90^\circ - (90^\circ - \omega) = \omega$. Άρα $\varphi = \omega$. Αν η μία γωνία είναι αμβλεία, εφαρμόζουμε τα παραπάνω στην παραπληρωματική της και βρίσκουμε ότι οι γωνίες είναι παραπληρωματικές.



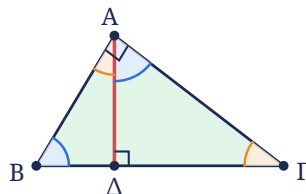
$Ox \perp O'x'$, $Oy \perp O'y'$; $\varphi = \omega$ (και οι δύο οξείες)

➡ ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. Δύο **αμβλείες** γωνίες με κάθετες πλευρές είναι ίσες.
2. Δύο γωνίες με κάθετες πλευρές, από τις οποίες η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία, είναι **παραπληρωματικές**.

🔑 ΚΛΕΙΔΙ

Ένα πολύ συχνό «μοτίβο»: σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με ύψος $A\Delta$, ισχύουν $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{B}$ (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές — ή ως συμπληρώματα της ίδιας γωνίας).



Στο ορθογώνιο τρίγωνο με ύψος $A\Delta$: ίσες γωνίες με το ίδιο χρώμα

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Το «180°» ισχύει **μόνο** στην Ευκλείδεια Γεωμετρία· στηρίζεται στο αίτημα παραλληλίας. (Σε ένα τρίγωνο πάνω σε σφαίρα το άθροισμα είναι μεγαλύτερο από 180°!)
- ⚠ Η εξωτερική γωνία ισούται με το άθροισμα των **δύο απέναντι** γωνιών, όχι με την εφεξής της.
- ⚠ Στις γωνίες με κάθετες πλευρές, όπως και με παράλληλες, κοίτα πρώτα το **είδος** τους (οξεία/αμβλεία).

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ $\hat{\Gamma}_{\text{εξ}} = \hat{A} + \hat{\Gamma}$.

✓ $\hat{\Gamma}_{\text{εξ}} = \hat{A} + \hat{B}$ (οι δύο **απέναντι**).

✗ «Ένα τρίγωνο με γωνίες 50°, 60°, 80° υπάρχει.»

✓ $50 + 60 + 80 = 190 \neq 180$. **Δεν** υπάρχει.

✗ Σε ορθογώνιο τρίγωνο με ύψος ΑΔ γράφουμε $\hat{B}\hat{A}\hat{D} = \hat{B}$.

✓ $\hat{B}\hat{A}\hat{D} = \hat{\Gamma}$, γιατί και οι δύο είναι συμπληρωματικές της $\hat{B}$.

≡ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ Υπολογισμός γωνιών

1. Βάλε άγνωστο (π.χ. x) στη γωνία που ζητάς και γράψε τις άλλες με τη βοήθειά του.
2. Χρησιμοποίησε: άθροισμα γωνιών τριγώνου = 180°, εξωτερική = άθροισμα απέναντι, γωνίες βάσης ισοσκελούς ίσες, διχοτόμος → μισά.
3. Αν υπάρχουν παράλληλες, «μετέφερε» γωνίες με εντός εναλλάξ / αντίστοιχες.
4. Λύσε την εξίσωση και έλεγξε ότι όλες οι γωνίες βγαίνουν θετικές και με σωστά αθροίσματα.

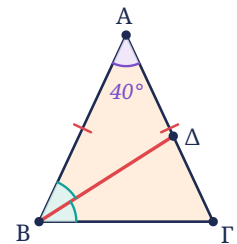
✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 2\hat{B}$ και $\hat{\Gamma} = 3\hat{B}$. Να βρείτε τις γωνίες του. Τι είδους τρίγωνο είναι;

Λύση $\hat{B} + 2\hat{B} + 3\hat{B} = 180^\circ \Rightarrow 6\hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ, \hat{A} = 60^\circ, \hat{\Gamma} = 90^\circ$. Είναι **ορθογώνιο** (στο Γ).

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) είναι $\hat{A} = 40^\circ$. Η διχοτόμος της $\hat{B}$ τέμνει την ΑΓ στο Δ. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΓ.



Λύση $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$. Άρα $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} = 35^\circ$. Στο ΒΔΓ: $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 180^\circ - 35^\circ - 70^\circ = 75^\circ$. Οι γωνίες του ΒΔΓ είναι **35°, 70°, 75°**. (Έλεγχος με εξωτερική γωνία: $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ είναι εξωτερική του ΑΒΔ, άρα $= \hat{A} + \hat{A}\hat{B}\hat{D} = 40^\circ + 35^\circ = 75^\circ \checkmark$.)

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Μια «κλασική» σχέση

Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι διχοτόμοι των $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ τέμνονται στο Ι. Να αποδείξετε ότι $\hat{B}\hat{I}\hat{\Gamma} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$.

Λύση Στο τρίγωνο IBΓ: $\hat{B}\hat{I}\hat{G} = 180^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{I}}{2} = 180^\circ - \frac{\hat{B} + \hat{I}}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$.



Περισσότερη εξάσκηση;

Αν θέλεις κι άλλες ασκήσεις πάνω σε αυτή την ενότητα, μπες στο **mathgreece.com**: εκεί υπάρχει πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με λυμένες ασκήσεις, διαγωνίσματα και βίντεο για όλη τη Γεωμετρία.

www.mathgreece.com

Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 4.6–4.7 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

• βασική • μέτρια • απαιτητική

- 1 Να βρείτε τις γωνίες τριγώνου που είναι ανάλογες των αριθμών 2, 3, 4.
Λύση → σελ. 192
- 2 Σε ορθογώνιο τρίγωνο η μία οξεία γωνία είναι κατά 20° μεγαλύτερη από την άλλη. Να βρείτε τις οξείες γωνίες.
Λύση → σελ. 192
- 3 Σε τρίγωνο ABΓ η εξωτερική γωνία στο A είναι 110° και $\hat{B} = 45^\circ$. Να βρείτε τις $\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}$.
Λύση → σελ. 192
- 4 Σε ισοσκελές τρίγωνο η μία γωνία είναι 100° . Να βρείτε τις άλλες. Αν η μία γωνία είναι 50° , ποιες είναι οι δυνατές περιπτώσεις;
Λύση → σελ. 192
- 5 Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τρίγωνο ABΓ η διάμεσος AM ισούται με MB (= MG), τότε $\hat{A} = 90^\circ$.
Λύση → σελ. 192
- 6 Σε τρίγωνο ABΓ φέρνουμε το ύψος AD και τη διχοτόμο AE. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta A E} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.
Λύση → σελ. 192
- 7 Οι γωνίες $\hat{xOy}$ και $\hat{x'O'y'}$ έχουν κάθετες πλευρές και η μία είναι διπλάσια της άλλης. Να τις βρείτε.
Λύση → σελ. 192

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 · ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

ΜΑΘΗΜΑ

4.8

Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου

📌 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

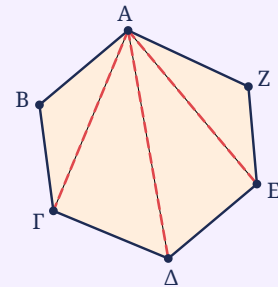
- τον τύπο για το άθροισμα των γωνιών κυρτού πολυγώνου
- ότι το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών είναι 360°
- να λύνεις προβλήματα με γωνίες πολυγώνων

§4.8 Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Το άθροισμα των γωνιών κάθε **κυρτού ν-γώνου** είναι $(2n - 4)$ **ορθές** $= (n - 2) \cdot 180^\circ$.

Απόδειξη. Από μια κορυφή, π.χ. την Α, φέρνουμε όλες τις διαγώνιες ($n - 3$ το πλήθος). Αυτές χωρίζουν το πολύγωνο σε $n - 2$ **τρίγωνα**. Το άθροισμα των γωνιών όλων αυτών των τριγώνων είναι ακριβώς το άθροισμα των γωνιών του πολυγώνου, άρα ισούται με $(n - 2) \cdot 180^\circ$.



Το εξάγωνο χωρίζεται σε 4 τρίγωνα: $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$

Πολύγωνο	n	Άθροισμα γωνιών	Κάθε γωνία αν είναι όλες ίσες
τρίγωνο	3	180°	60°
τετράπλευρο	4	360°	90°
πεντάγωνο	5	540°	108°
εξάγωνο	6	720°	120°
οκτάγωνο	8	1080°	135°
δεκάγωνο	10	1440°	144°

➡ ΠΟΡΙΣΜΑ

Το άθροισμα των **εξωτερικών** γωνιών κάθε κυρτού ν-γώνου είναι 4 **ορθές** $= 360^\circ$, ανεξάρτητα από το πλήθος των πλευρών.

Απόδειξη. Σε κάθε κορυφή η εσωτερική και η εξωτερική γωνία έχουν άθροισμα 180° . Για τις n κορυφές: (άθροισμα εσωτερικών) + (άθροισμα εξωτερικών) = $n \cdot 180^\circ$. Άρα άθροισμα εξωτερικών = $n \cdot 180^\circ - (n - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$.

i ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Μια διαισθητική εικόνα

Φαντάσου ότι περπατάς γύρω από ένα κυρτό πολύγωνο. Σε κάθε κορυφή στρίβεις κατά την εξωτερική γωνία. Όταν επιστρέψεις στην αφετηρία, έχεις κάνει **μία πλήρη στροφή**: 360° !

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Ο τύπος $(n - 2) \cdot 180^\circ$ ισχύει για **κυρτά** πολύγωνα (και επεκτείνεται και σε μη κυρτά απλά πολύγωνα, αλλά εκεί δεν τον αποδείξαμε).
- ⚠ Στο άθροισμα των εξωτερικών παίρνουμε **μία** εξωτερική γωνία σε κάθε κορυφή.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Το άθροισμα των γωνιών του πενταγώνου είναι $5 \cdot 180^\circ$.»

✓ $(5 - 2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$.

✗ «Όσο περισσότερες πλευρές, τόσο μεγαλύτερο το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών.»

✓ Είναι **πάντα** 360° .

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Οι γωνίες ενός τετραπλεύρου είναι ανάλογες των αριθμών 1, 2, 3, 4. Να τις βρείτε.

Λύση $x + 2x + 3x + 4x = 360^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$: **$36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ$** .

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Ποιο κυρτό πολύγωνο έχει άθροισμα γωνιών 1260° ; Και ποιο πολύγωνο με όλες τις γωνίες ίσες έχει κάθε εξωτερική γωνία 24° ;

Λύση $(n - 2) \cdot 180^\circ = 1260^\circ \Rightarrow n - 2 = 7 \Rightarrow n = 9$: **εννεάγωνο**. Για το δεύτερο: $n \cdot 24^\circ = 360^\circ \Rightarrow n = 15$ (δεκαπεντάγωνο).

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Μια όμορφη εφαρμογή των εξωτερικών γωνιών

Να αποδείξετε ότι ένα κυρτό πολύγωνο δεν μπορεί να έχει περισσότερες από τρεις οξείες γωνίες.

Λύση Αν μια εσωτερική γωνία είναι οξεία, η εξωτερική της είναι **αμβλεία** ($> 90^\circ$). Αν υπήρχαν τέσσερις οξείες εσωτερικές, θα υπήρχαν τέσσερις αμβλείες εξωτερικές, με άθροισμα $> 360^\circ$. Αυτό είναι άτοπο, γιατί το άθροισμα **όλων** των εξωτερικών είναι 360° .

📖 Για βίντεο, κουίζ και επιπλέον λυμένες ασκήσεις σε αυτό το μάθημα, επισκέψου το **mathgreece.com** — πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.

📖 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 4.8 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

• βασική • μέτρια • • απαιτητική

1

Να βρείτε το άθροισμα των γωνιών (α) ενός επταγώνου, (β) ενός δωδεκαγώνου.

Λύση → σελ. 192

- 2 Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 110^\circ$, $\hat{\Gamma} = 95^\circ$. Να βρείτε τη $\hat{\Delta}$ και την εξωτερική γωνία στο Δ.
Λύση → σελ. 192
- 3 Ένα πολύγωνο έχει όλες τις γωνίες του ίσες με 140° . Πόσες πλευρές έχει;
Λύση → σελ. 192
- 4 Να αποδείξετε ότι σε κάθε κυρτό τετράπλευρο οι διχοτόμοι δύο διαδοχικών γωνιών σχηματίζουν γωνία ίση με το ημιάθροισμα των δύο άλλων γωνιών.
Λύση → σελ. 192
- 5 Ένα κυρτό πολύγωνο έχει άθροισμα γωνιών τριπλάσιο από το άθροισμα των εξωτερικών του γωνιών. Πόσες πλευρές έχει;
Λύση → σελ. 192



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 · ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Όλη η θεωρία με μια ματιά

Πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες

- Εντός εναλλάξ ίσες.
- Εντός εκτός επί τα αυτά ίσες.
- Εντός επί τα αυτά παραπληρωματικές.
- Κάθετες στην ίδια ευθεία.
- Παράλληλες σε τρίτη.

Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ (τέμνουσα ε)

- Εντός εναλλάξ: ίσες.
- Αντίστοιχες: ίσες.
- Εντός επί τα αυτά: άθροισμα 180° .
- Κάθετη στη μία $\Rightarrow$ κάθετη και στην άλλη.

Αίτημα παραλληλίας

Από σημείο εκτός ευθείας άγεται **μία μόνο** παράλληλη.
Είναι ισοδύναμο με το 5ο αίτημα του Ευκλείδη.

Γωνίες τριγώνου

- $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$.
- $\hat{\Gamma}_{εξ} = \hat{A} + \hat{B}$.
- Ορθογώνιο: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$.
- Ισόπλευρο: $60^\circ \cdot \text{Ορθ. ισοσκελές: } 45^\circ$.
- $\hat{B}\hat{\Gamma} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$.

Αξιοσημείωτα σημεία

- **Περίκεντρο Ο:** μεσοκάθετοι — ισαπέχει από κορυφές.
- **Έγκεντρο Ι:** διχοτόμοι — ισαπέχει από πλευρές.
- Παράκεντρα $I_\omega, I_\beta, I_\gamma$.

Πολύγωνα · παράλληλες/κάθετες πλευρές

- Άθροισμα γωνιών ν-γώνου: $(n - 2) \cdot 180^\circ$.
- Άθροισμα εξωτερικών: 360° .
- Γωνίες με πλευρές παράλληλες ή κάθετες: ίσες (ίδιο είδος) ή παραπληρωματικές.



Κάνε επανάληψη παίζοντας!

Στο **mathgreece.com** θα βρεις παιχνίδια γνώσεων και κουίζ για τις παράλληλες και τις γωνίες τριγώνου — μέρος ενός πλήρους και ολοκληρωμένου δωρεάν φροντιστηρίου.

www.mathgreece.com



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Επαναληπτικό διαγώνισμα

Διάρκεια: 2 διδακτικές ώρες

Ενδεικτική διάρκεια: 2 ώρες. Να αιτιολογείτε κάθε ισότητα γωνιών (εντός εναλλάξ, κατακορυφήν κ.λπ.).

ΘΕΜΑ 1

25 μονάδες

- α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180° .
- β) Σωστό ή Λάθος:
- α) Αν δύο παράλληλες τέμνονται από τρίτη, οι εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι ίσες.
 - β) Το έγκεντρο ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου.
 - γ) Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός εξαγώνου είναι 360° .
 - δ) Δύο γωνίες με πλευρές κάθετες είναι πάντα ίσες.

ΘΕΜΑ 2

25 μονάδες

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ και το ύψος από το A είναι AH . Να βρείτε: α) τη γωνία $\hat{A}$, β) τη γωνία $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$, γ) τη γωνία $\hat{H}\hat{A}\hat{\Delta}$.

ΘΕΜΑ 3

25 μονάδες

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η ευθεία ε που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στη $B\Gamma$. α) Να αποδείξετε ότι η ε διχοτομεί την εξωτερική γωνία του τριγώνου στο A . β) Αν $\hat{A} = 50^\circ$, να βρείτε τις γωνίες που σχηματίζει η ε με τις AB και $A\Gamma$.

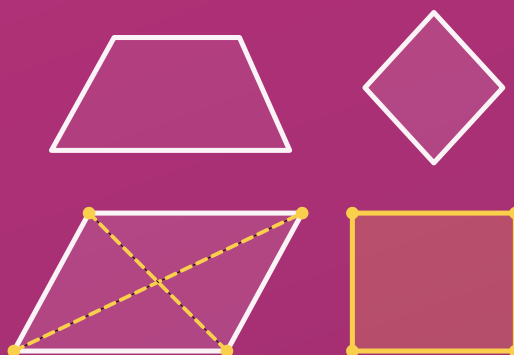
ΘΕΜΑ 4

25 μονάδες

Ένα κυρτό πολύγωνο έχει όλες τις γωνίες του ίσες και κάθε γωνία του είναι τετραπλάσια της εξωτερικής. α) Να βρείτε το πλήθος των πλευρών του. β) Να βρείτε το πλήθος των διαγωνίων του. γ) Να βρείτε το άθροισμα των γωνιών του.

Οι πλήρεις λύσεις του διαγωνίσματος βρίσκονται στις σελίδες λύσεων (σελ. 192).

Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία



Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε τα πιο «χρήσιμα» τετράπλευρα: το **παραλληλόγραμμο** και τις ειδικές μορφές του —**ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο**— καθώς και το **τραπέζιο**. Με τα εργαλεία που θα αποκτήσουμε θα αποδείξουμε σπουδαία αποτελέσματα για τα τρίγωνα: το θεώρημα των μέσων, την ύπαρξη του **βαρύκεντρου** και του **ορθόκεντρου** και μια εκπληκτική ιδιότητα του ορθογωνίου τριγώνου.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

5.1	Εισαγωγή	128	5.8	Το ορθόκεντρο τριγώνου	143
5.2	Παραλληλόγραμμα	128	5.9	Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου	146
5.3	Ορθογώνιο	133	5.10	Τραπέζιο	149
5.4	Ρόμβος	135	5.11	Ισοσκελές τραπέζιο	150
5.5	Τετράγωνο	136	5.12	Αξιοσημείωτες ευθείες και κύκλοι τριγώνου	153
5.6	Εφαρμογές στα τρίγωνα	139			
5.7	Βαρύκεντρο τριγώνου	142			

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 · ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ - ΤΡΑΠΕΖΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ

5.1-5.2

Τετράπλευρα - Το παραλληλόγραμμα

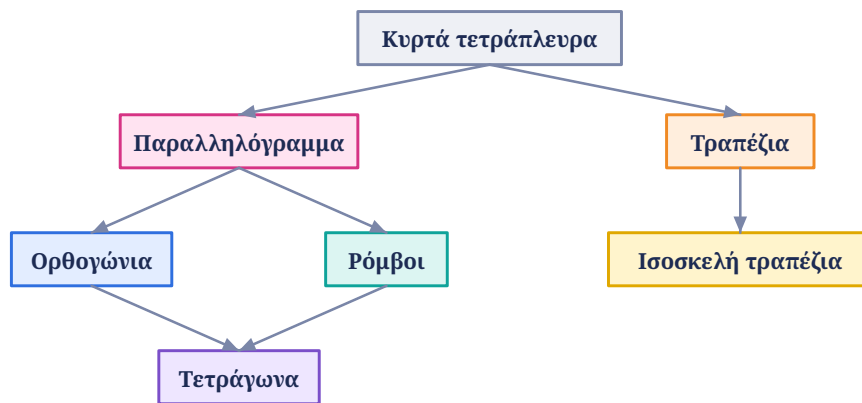
§5.1 Εισαγωγή · §5.2 Παραλληλόγραμμα

© Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τα στοιχεία ενός τετραπλεύρου και την ταξινόμησή τους
- τον ορισμό και τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου
- τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμα
- ότι το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας

§5.1 Εισαγωγή

Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, οι πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ (καθώς και οι $B\Gamma$, ΔA) λέγονται **απέναντι** πλευρές, ενώ οι AB , $B\Gamma$ λέγονται **διαδοχικές**. Οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{\Gamma}$ (καθώς και οι $\hat{B}$, $\hat{\Delta}$) λέγονται **απέναντι** γωνίες. Τα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι οι **διαγώνιοι**. Από την §4.8 γνωρίζουμε ότι σε κάθε κυρτό τετράπλευρο $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ$.

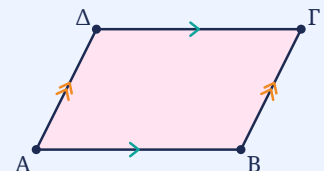


Η «οικογένεια» των τετραπλεύρων: κάθε βέλος σημαίνει «είναι ειδική περίπτωση του»

§5.2 Παραλληλόγραμμα

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Παραλληλόγραμμα λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις **απέναντι** πλευρές του **παράλληλες**: $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$.

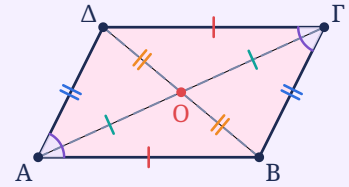


☆ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Σε κάθε παραλληλόγραμμο:

1. οι απέναντι πλευρές είναι ίσες,
2. οι απέναντι γωνίες είναι ίσες,
3. οι διαγώνιοι διχοτομούνται (το σημείο τομής τους είναι μέσο και των δύο).

Απόδειξη. Φέρνουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΑ έχουν ΑΓ κοινή, $\hat{B}\hat{A}\hat{G} = \hat{A}\hat{G}\hat{D}$ (εντός εναλλάξ, $AB \parallel \Gamma\Delta$) και $\hat{B}\hat{G}\hat{A} = \hat{G}\hat{A}\hat{D}$ (εντός εναλλάξ, $AD \parallel BG$). Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ), οπότε (i) $AB = \Gamma\Delta$, $BG = AD$ και (ii) $\hat{B} = \hat{D}$ όμοια, με τη διαγώνιο ΒΔ, $\hat{A} = \hat{G}$.
(iii) Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ έχουν $AB = \Gamma\Delta$, $\hat{O}\hat{A}\hat{B} = \hat{O}\hat{G}\hat{D}$, $\hat{O}\hat{B}\hat{A} = \hat{O}\hat{D}\hat{G}$ (εντός εναλλάξ), άρα είναι ίσα (ΓΠΓ): $OA = OG$ και $OB = OD$.



Επιπλέον, δύο διαδοχικές γωνίες παραλληλογράμμου είναι **παραπληρωματικές** (εντός και επί τα αυτά, π.χ. $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$). Το σημείο τομής Ο των διαγωνίων λέγεται **κέντρο** του παραλληλογράμμου.

➡ ΠΟΡΙΣΜΑ

Το κέντρο Ο ενός παραλληλογράμμου είναι **κέντρο συμμετρίας** του.

Απόδειξη. Κάθε κορυφή έχει συμμετρική ως προς Ο την απέναντί της (οι διαγώνιοι διχοτομούνται). Αν Μ είναι σημείο μιας πλευράς, π.χ. της ΑΒ, η ευθεία ΜΟ τέμνει τη ΓΔ σε σημείο Μ'. τα τρίγωνα ΟΑΜ, ΟΓΜ' είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα $OM = OM'$ και το Μ' είναι το συμμετρικό του Μ.

➡ ΠΟΡΙΣΜΑ

Τα τμήματα παραλλήλων που περιέχονται μεταξύ παράλληλων ευθειών είναι ίσα. Ειδικότερα, η απόσταση δύο παράλληλων ευθειών είναι **σταθερή** (όλα τα σημεία της μίας ισαπέχουν από την άλλη).

Απόδειξη. Τα τμήματα σχηματίζουν μαζί με τις παράλληλες ευθείες ένα παραλληλόγραμμα, του οποίου είναι απέναντι πλευρές.

► Κριτήρια για παραλληλόγραμμα

☆ ΚΡΙΤΗΡΙΑ

Ένα (κυρτό) τετράπλευρο είναι **παραλληλόγραμμα** αν ισχύει **μία** από τις παρακάτω προτάσεις:

1. οι **απέναντι πλευρές** του είναι **ίσες** ανά δύο,
2. δύο απέναντι πλευρές του είναι **ίσες και παράλληλες**,
3. οι **απέναντι γωνίες** του είναι **ίσες** ανά δύο,
4. οι **διαγώνιοί** του **διχοτομούνται**.

Απόδειξη. (i) Αν $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$, τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta A$ είναι ίσα (ΠΠΠ), άρα $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} \Rightarrow AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{A} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{A} \Rightarrow A\Delta \parallel B\Gamma$.

(ii) Αν $AB = \Gamma\Delta$ και $AB \parallel \Gamma\Delta$, τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta A$ έχουν $A\Gamma$ κοινή, $AB = \Gamma\Delta$, $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ (εντός εναλλάξ): ίσα (ΠΓΠ), άρα $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{A} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{A} \Rightarrow A\Delta \parallel B\Gamma$.

(iii) Αν $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$, τότε $2\hat{A} + 2\hat{B} = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$, άρα $A\Delta \parallel B\Gamma$ (εντός επί τα αυτά παραπληρωματικές)· όμοια $AB \parallel \Gamma\Delta$.

(iv) Αν $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$, τα τρίγωνα OAB , $O\Gamma\Delta$ είναι ίσα (ΠΓΠ, κατακορυφήν γωνίες), άρα $AB = \Gamma\Delta$ και $\hat{O}\hat{A}\hat{B} = \hat{O}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} \Rightarrow AB \parallel \Gamma\Delta$ · από το (ii) είναι παραλληλόγραμμα. ■

🔑 ΚΛΕΙΔΙ

Για να αποδείξεις ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμα, το πιο «οικονομικό» κριτήριο είναι συνήθως το **(ii)**: **δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες**. Όταν στην άσκηση υπάρχουν **μέσα** τμημάτων, σκέψου το **(iv)**: **διαγώνιοι που διχοτομούνται**.

⚠️ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠️ Στο κριτήριο (ii) οι ίσες πλευρές πρέπει να είναι **και** παράλληλες **και** απέναντι. Ένα τετράπλευρο με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$ **δεν** είναι απαραίτητα παραλληλόγραμμα (μπορεί να είναι ισοσκελές τραπέζιο!).
- ⚠️ Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται, αλλά γενικά **δεν είναι ίσες** ούτε **κάθετες**, ούτε **διχοτομούν τις γωνίες**.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου είναι ίσες.»

✓ Αυτό ισχύει μόνο στο **ορθογώνιο**. Στο παραλληλόγραμμα απλώς διχοτομούνται.

✗ « $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma \Rightarrow$ παραλληλόγραμμα.»

✓ Λάθος: το ισοσκελές τραπέζιο είναι αντιπαράδειγμα. Χρειάζεται $AB = \Gamma\Delta$ **και** $AB \parallel \Gamma\Delta$ (ίδιο ζευγάρι).

✗ «Σε παραλληλόγραμμα οι διαδοχικές γωνίες είναι ίσες.»

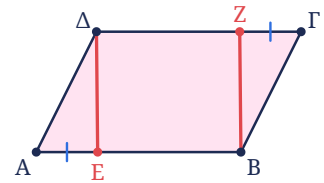
✓ Είναι **παραπληρωματικές**. Ίσες είναι οι απέναντι.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ Στρατηγική για παραλληλόγραμμα

1. Σε ασκήσεις με παραλληλόγραμμα, γράψε πρώτα **όλες τις ιδιότητες** που «δωρεάν» έχεις: απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες, απέναντι γωνίες ίσες, διαδοχικές παραπληρωματικές, διαγώνιοι διχοτομούνται.
2. Για ισότητες τμημάτων/γωνιών, ψάξε ίσα τρίγωνα που χρησιμοποιούν αυτές τις ιδιότητες.
3. Για να αποδείξεις ότι κάτι **είναι** παραλληλόγραμμα, διάλεξε το κατάλληλο κριτήριο ανάλογα με τα δεδομένα (παράλληλες; ίσες; μέσα;).

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

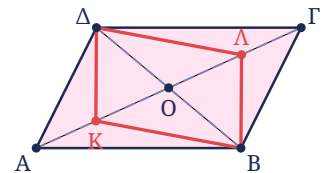
Σε παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε σημεία E στην AB και Z στη $\Gamma\Delta$ με $AE = \Gamma Z$. Να αποδείξετε ότι το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμα.



Λύση $EB = AB - AE$ και $\Delta Z = \Gamma\Delta - \Gamma Z$. Αφού $AB = \Gamma\Delta$ και $AE = \Gamma Z$, είναι $EB = \Delta Z$. Επίσης $EB \parallel \Delta Z$ (βρίσκονται πάνω στις παράλληλες $AB, \Gamma\Delta$). Άρα το ΔEBZ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες: είναι **παραλληλόγραμμα** (κριτήριο ii).

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Χρήση του κριτηρίου των διαγωνίων

Στη διαγώνιο $A\Gamma$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε σημεία K, Λ με $AK = \Gamma\Lambda$. Να αποδείξετε ότι το $B\Lambda\Delta K$ είναι παραλληλόγραμμα.



Λύση Έστω O το κέντρο: $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$. Τότε $OK = OA - AK = O\Gamma - \Gamma\Lambda = O\Lambda$. Το τετράπλευρο $B\Lambda\Delta K$ έχει διαγώνιους $K\Lambda$ και $B\Delta$ που διχοτομούνται στο O , άρα είναι **παραλληλόγραμμα** (κριτήριο iv).

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Σε παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = 3\hat{B}$. Να βρείτε τις γωνίες του.

Λύση $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow 4\hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ, \hat{A} = 135^\circ$. Άρα $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 135^\circ, \hat{B} = \hat{\Delta} = 45^\circ$.

**Κόλλησες κάπου;**

Μην το αφήνεις! Στο **mathgreece.com** κάθε θεωρία έχει το δικό της βιντεομάθημα και κάθε κεφάλαιο τα δικά του κουίζ. Είναι ένα **ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο** μαθηματικών, φτιαγμένο για σένα.

www.mathgreece.com

 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 5.1–5.2 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ● μέτρια ●● απαιτητική

- 1 Η περίμετρος ενός παραλληλογράμμου είναι 36 cm και η μία πλευρά είναι διπλάσια της άλλης. Να βρείτε τις πλευρές του.
● Λύση → σελ. 193
- 2 Σε παραλληλόγραμμο ABΓΔ οι διαγώνιοι τέμνονται στο Ο με $OA = 5$ cm και $BD = 14$ cm. Να βρείτε τα ΑΓ και ΟΔ.
● Λύση → σελ. 193
- 3 Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ παραλληλογράμμου ABΓΔ τέμνει τη ΓΔ στο Ε. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.
●● Λύση → σελ. 193
- 4 Σε παραλληλόγραμμο ABΓΔ φέρνουμε $AE \perp BD$ και $\Gamma Z \perp BD$. Να αποδείξετε ότι το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
●● Λύση → σελ. 193
- 5 Να αποδείξετε ότι αν ένα τετράπλευρο έχει δύο ζεύγη διαδοχικών γωνιών παραπληρωματικά ($\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$), τότε είναι παραλληλόγραμμο.
●● Λύση → σελ. 193
- 6 Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Στην προέκταση της διαμέσου ΑΜ παίρνουμε $M\Delta = AM$. Να αποδείξετε ότι το ABΔΓ είναι παραλληλόγραμμο και να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα για να δείξετε ότι $\mu_\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$.
●●● Λύση → σελ. 193

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 · ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ - ΤΡΑΠΕΖΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ

5.3

Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμα

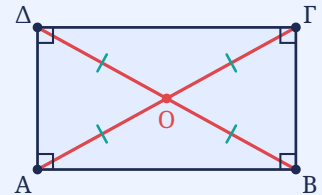
🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τον ορισμό του ορθογωνίου
- τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο
- ότι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες

§5.3 Ορθογώνιο

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμα που έχει **μία γωνία ορθή**.



Αφού οι διαδοχικές γωνίες του παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές και οι απέναντι ίσες, αν η μία γωνία είναι ορθή, τότε **όλες** οι γωνίες είναι ορθές. Το ορθογώνιο έχει λοιπόν **όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου** και επιπλέον:

☆ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Οι **διαγώνιοι** του ορθογωνίου είναι **ίσες**.

Απόδειξη. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $BA\Delta$ έχουν AB κοινή και $B\Gamma = A\Delta$ (απέναντι πλευρές), άρα είναι ίσα (ΠΓΠ, με τις ορθές γωνίες), οπότε $A\Gamma = B\Delta$.

☆ ΚΡΙΤΗΡΙΑ

Ένα τετράπλευρο είναι **ορθογώνιο** αν ισχύει **μία** από τις προτάσεις:

1. είναι παραλληλόγραμμα και έχει μία γωνία ορθή,
2. είναι παραλληλόγραμμα και οι **διαγώνιοί** του είναι **ίσες**,
3. έχει **τρεις** γωνίες ορθές.

Απόδειξη. (i) Είναι ο ορισμός. (ii) Αν $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμα με $A\Gamma = B\Delta$, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $BA\Delta$ έχουν AB κοινή, $B\Gamma = A\Delta$, $A\Gamma = B\Delta$: ίσα (ΠΠΠ), άρα $\hat{B} = \hat{A}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$, οπότε $\hat{A} = 90^\circ$. (iii) Αν $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$, τότε και $\hat{\Delta} = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$, οι απέναντι γωνίες είναι ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμα με ορθή γωνία.

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Κύκλος και συμμετρίες του ορθογωνίου

Στο ορθογώνιο, το κέντρο O ισαπέχει από τις τέσσερις κορυφές ($OA = OB = OG = OD = \text{μισή διαγώνιος}$). Άρα **οι κορυφές ενός ορθογωνίου βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο O** . Το ορθογώνιο έχει επίσης **δύο άξονες συμμετρίας**: τις μεσοκαθέτους των πλευρών του.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Ένα τετράπλευρο με **ίσες διαγώνιους** δεν είναι απαραίτητα ορθογώνιο (π.χ. ισοσκελές τραπέζιο)! Πρέπει πρώτα να είναι **παραλληλόγραμμα**.
- ⚠ Δύο ορθές γωνίες δεν αρκούν· χρειάζονται **τρεις** (ή παραλληλόγραμμα με μία).

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Το $ABΓΔ$ έχει $ΑΓ = ΒΔ$, άρα είναι ορθογώνιο.»

✓ Πρέπει να δείξεις πρώτα ότι είναι **παραλληλόγραμμα**.

✗ «Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι κάθετες.»

✓ Αυτό ισχύει μόνο αν είναι τετράγωνο.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Σε ορθογώνιο $ABΓΔ$ οι διαγώνιοι τέμνονται στο O και $\widehat{A\hat{O}B} = 120^\circ$. Αν $ΑΓ = 12\text{ cm}$, να βρείτε τη γωνία $\widehat{O\hat{A}B}$ και την πλευρά $ΒΓ$.

Λύση Το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές ($OA = OB = 6\text{ cm}$), άρα $\widehat{O\hat{A}B} = \widehat{O\hat{B}A} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ ($\widehat{B} = 90^\circ$) είναι $\widehat{B\hat{A}Γ} = 30^\circ$, άρα η απέναντι πλευρά $ΒΓ$ είναι το μισό της υποτείνουσας (§5.9): **$ΒΓ = 6\text{ cm}$** . (Και χωρίς §5.9: η $\widehat{B\hat{O}Γ} = 60^\circ$ και το $OΒΓ$ είναι ισοσκελές με γωνία κορυφής 60° , άρα ισόπλευρο: $ΒΓ = OB = 6\text{ cm}$.)

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Σε ένα παραλληλόγραμμα $ABΓΔ$ το κέντρο O ισαπέχει από τα A και B . Να αποδείξετε ότι είναι ορθογώνιο.

Λύση $OA = OB \Rightarrow 2OA = 2OB \Rightarrow ΑΓ = ΒΔ$. Παραλληλόγραμμα με ίσες διαγώνιους: **ορθογώνιο** (κριτήριο ii).

🎓 Για βίντεο, κουίζ και επιπλέον λυμένες ασκήσεις σε αυτό το μάθημα, επισκεψού το **mathgreece.com** — πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.

📖 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 5.3 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

• βασική • μέτρια ••• απαιτητική

- 1** Οι διαγώνιοι ορθογωνίου σχηματίζουν γωνία 50° . Να βρείτε τις γωνίες που σχηματίζει μια διαγώνιος με τις πλευρές.

Λύση → σελ. 193

- 2** Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός παραλληλογράμμου (που δεν είναι ρόμβος) σχηματίζουν τετράπλευρο. Να αποδείξετε ότι είναι ορθογώνιο.

Λύση → σελ. 194

- 3** Από τυχαίο σημείο M της υποτείνουσας $ΒΓ$ ορθογωνίου τριγώνου $ABΓ$ φέρνουμε $ΜΔ \perp AB$ και $ΜΕ \perp ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι $ΔΕ = AM$.

Λύση → σελ. 194

- 4** Να αποδείξετε ότι αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου είναι ίσες και διχοτομούνται, τότε είναι ορθογώνιο.

Λύση → σελ. 194

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 · ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ - ΤΡΑΠΕΖΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ

5.4–5.5

Ο ρόμβος και το τετράγωνο

§5.4 Ρόμβος · §5.5 Τετράγωνο

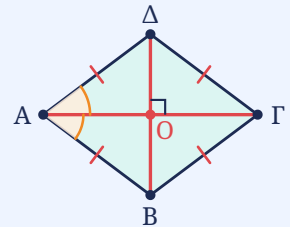
🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τον ορισμό και τις ιδιότητες του ρόμβου
- τα κριτήρια για ρόμβο
- τον ορισμό, τις ιδιότητες και τα κριτήρια του τετραγώνου

§5.4 Ρόμβος

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.



Αφού οι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου είναι ίσες, ο ρόμβος έχει **και τις τέσσερις πλευρές του ίσες**. Έχει όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και επιπλέον:

☆ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Οι **διαγώνιοι** του ρόμβου είναι **κάθετες** και **διχοτομούν τις γωνίες του**.

Απόδειξη. Το τρίγωνο ABD είναι ισοσκελές ($AB = AD$) και η AO είναι διάμεσός του (O μέσο της BD). Άρα η AO είναι και ύψος και διχοτόμος (§3.4): $AG \perp BD$ και $\hat{BAG} = \hat{DAG}$. Όμοια για τις άλλες κορυφές.

☆ ΚΡΙΤΗΡΙΑ

Ένα τετράπλευρο είναι **ρόμβος** αν ισχύει **μία** από τις προτάσεις:

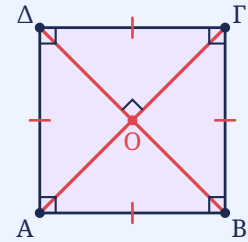
1. έχει **όλες τις πλευρές ίσες**,
2. είναι παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες,
3. είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι **κάθετες**,
4. είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του **διχοτομεί** μία γωνία του.

Απόδειξη. (i) Απέναντι πλευρές ίσες $\Rightarrow$ παραλληλόγραμμο, με διαδοχικές ίσες $\Rightarrow$ ρόμβος. (iii) Η AO είναι διάμεσος (O μέσο BD) και ύψος του ABD , άρα (μεσοκάθετος της BD) $AB = AD$. (iv) Αν η AG διχοτομεί την $\hat{A}$, τότε $\hat{BAG} = \hat{DAG} = \hat{GAB}$ (εντός εναλλάξ, $AD \parallel BG$), οπότε το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές: $AB = BG$.

§5.5 Τετράγωνο

ΟΡΙΣΜΟΣ

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι **ορθογώνιο και ρόμβος**.



Το τετράγωνο έχει επομένως **όλες** τις ιδιότητες: τέσσερις ίσες πλευρές, τέσσερις ορθές γωνίες, διαγώνιους **ίσες, κάθετες**, που **διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες** του (κάθε διαγώνιος σχηματίζει 45° με τις πλευρές). Έχει **τέσσερις άξονες συμμετρίας** (τις δύο διαγώνιους και τις δύο μεσοκαθέτους των πλευρών) και κέντρο συμμετρίας το O .

☆ ΚΡΙΤΗΡΙΑ

Ένα παραλληλόγραμμο είναι **τετράγωνο** αν:

1. είναι **ορθογώνιο** και έχει **μία** από τις ιδιότητες του ρόμβου (δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, ή κάθετες διαγώνιους, ή διαγώνιο που διχοτομεί γωνία), **ή**
2. είναι **ρόμβος** και έχει **μία** από τις ιδιότητες του ορθογωνίου (μία ορθή γωνία ή ίσες διαγώνιους).

Ιδιότητα	Παραλληλόγρ.	Ορθογώνιο	Ρόμβος	Τετράγωνο
Απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες	✓	✓	✓	✓
Όλες οι πλευρές ίσες	—	—	✓	✓
Όλες οι γωνίες ορθές	—	✓	—	✓
Διαγώνιοι διχοτομούνται	✓	✓	✓	✓
Διαγώνιοι ίσες	—	✓	—	✓
Διαγώνιοι κάθετες	—	—	✓	✓
Διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες	—	—	✓	✓
Άξονες συμμετρίας	0	2	2	4

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Ένα τετράπλευρο με **κάθετες διαγώνιους** δεν είναι απαραίτητα ρόμβος (π.χ. ο «χαρταετός»)! Πρέπει πρώτα να είναι παραλληλόγραμμο.
- ⚠ Το τετράγωνο **είναι** και ρόμβος και ορθογώνιο. Ο ρόμβος δεν είναι γενικά ορθογώνιο.
- ⚠ Σε κάθε κριτήριο τετραγώνου χρειάζεσαι **ένα «ορθογώνιο» χαρακτηριστικό ΚΑΙ ένα «ρομβικό»**.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Ένα τετράπλευρο με κάθετες διαγώνιους είναι ρόμβος.»

✓ Μόνο αν είναι **παραλληλόγραμμα** (ή αν οι διαγώνιοι και διχοτομούνται).

✗ «Ένα ορθογώνιο με κάθετες διαγώνιους είναι ρόμβος, όχι τετράγωνο.»

✓ Είναι ταυτόχρονα ορθογώνιο και ρόμβος, δηλαδή **τετράγωνο**.

✗ «Το τετράγωνο δεν είναι ρόμβος.»

✓ Κάθε τετράγωνο **είναι** ρόμβος (με ορθές γωνίες).

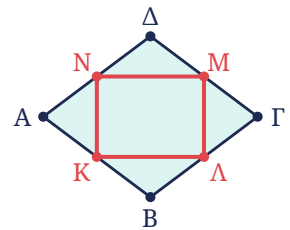
✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Σε ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = 60^\circ$ και $AB = 8 \text{ cm}$. Να βρείτε τις γωνίες και τη διαγώνιο BD .

Λύση $\hat{G} = 60^\circ$, $\hat{B} = \hat{\Delta} = 120^\circ$. Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Delta$) με γωνία κορυφής 60° , άρα ισόπλευρο: $BD = 8 \text{ cm}$.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Μια πρόγνωση από την §5.6

Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ρόμβου είναι κορυφές ορθογωνίου.



Λύση Αν K, L, M, N τα μέσα των AB, BC, CD, DA , τότε (θεώρημα μέσων §5.6) $KL \parallel AC \parallel NM$ και $KN \parallel BD \parallel LM$, άρα το $KLMN$ είναι παραλληλόγραμμα με πλευρές παράλληλες στις διαγώνιους του ρόμβου. Επειδή $AC \perp BD$, θα είναι $KL \perp KN$ (γωνία με πλευρές παράλληλες σε κάθετες ευθείες). Άρα το $KLMN$ είναι ορθογώνιο.



📖 Μελέτησε έξυπνα

Συνδύασε αυτό το βοήθημα με τα βιντεομαθήματα, τα podcasts και τα παιχνίδια γνώσεων του **mathgreece.com**. Θα βρεις εκεί **πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο** για Γυμνάσιο και Λύκειο.

www.mathgreece.com

📋 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 5.4–5.5 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

• βασική • μέτρια • • απαιτητική

1 Ένας ρόμβος έχει περίμετρο 40 cm και μία γωνία 120° . Να βρείτε την πλευρά και τη μικρή διαγώνιο.

Λύση → σελ. 194

2 Να αποδείξετε ότι αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου διχοτομούνται και είναι κάθετες, τότε είναι ρόμβος.

Λύση → σελ. 194

- 3 Σε τετράγωνο $ABΓΔ$ παίρνουμε σημεία $E, Z, H, Θ$ στις πλευρές $AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ$ με $AE = BZ = ΓH = ΔΘ$. Να αποδείξετε ότι το $EZHΘ$ είναι τετράγωνο.

Λύση → σελ. 194

- 4 Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που σχηματίζουν οι διχοτόμοι των γωνιών ενός ορθογωνίου (μη τετραγώνου) είναι τετράγωνο.

Λύση → σελ. 194

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 · ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ - ΤΡΑΠΕΖΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ

5.6

Εφαρμογές στα τρίγωνα: το θεώρημα των μέσων

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- ότι το τμήμα των μέσων δύο πλευρών είναι παράλληλο και ίσο με το μισό της τρίτης
- το αντίστροφο θεώρημα
- ότι παράλληλες που ορίζουν ίσα τμήματα σε μία ευθεία ορίζουν ίσα και σε κάθε άλλη
- πώς χωρίζουμε τμήμα σε n ίσα μέρη

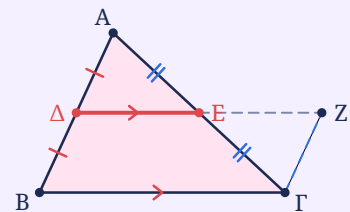
§5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ I

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι **παράλληλο** προς την τρίτη πλευρά και **ίσο με το μισό** της: ΔE

$$\Delta E \parallel B\Gamma \text{ και } \Delta E = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Απόδειξη. Έστω Δ, E τα μέσα των $AB, A\Gamma$. Προεκτείνουμε τη ΔE κατά $EZ = \Delta E$. Το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma Z$ έχει διαγώνιους $A\Gamma, \Delta Z$ που διχοτομούνται στο E , άρα είναι παραλληλόγραμμο: $\Gamma Z = \Delta\Delta = \Delta B$ και $\Gamma Z \parallel \Delta\Delta$, δηλαδή $\Gamma Z \parallel \Delta B$. Έτσι το $\Delta B\Gamma Z$ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες ($\Delta B, \Gamma Z$), άρα είναι παραλληλόγραμμο: $\Delta Z \parallel B\Gamma$ και $\Delta Z = B\Gamma$. Επομένως $\Delta E \parallel B\Gamma$ και $\Delta E = \frac{\Delta Z}{2} = \frac{B\Gamma}{2}$.



☆ ΘΕΩΡΗΜΑ II

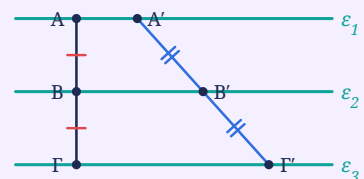
Αν από το **μέσο** μιας πλευράς τριγώνου φέρουμε **ευθεία παράλληλη** προς μια άλλη πλευρά, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το **μέσο της τρίτης** πλευράς.

Απόδειξη. Έστω Δ το μέσο της AB και η παράλληλη από το Δ προς τη $B\Gamma$. Αν E' το μέσο της $A\Gamma$, από το Θεώρημα I η $\Delta E' \parallel B\Gamma$. Από το Δ όμως άγεται μία μόνο παράλληλη στη $B\Gamma$ (αίτημα παραλληλίας), άρα η ευθεία ταυτίζεται με τη $\Delta E'$ και περνά από το μέσο E' της $A\Gamma$.

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ III

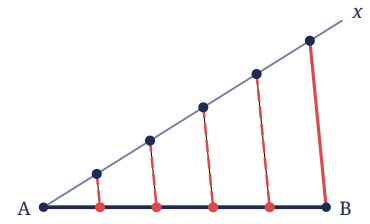
Αν **τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες** ορίζουν σε μια ευθεία **ίσα τμήματα**, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$, που ορίζουν στην ευθεία δ τα ίσα τμήματα $AB = B\Gamma$, και στην ευθεία δ' τα τμήματα $A'B', B'\Gamma'$. Φέρνουμε από το A' παράλληλη προς τη δ , που τέμνει τις $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ στα K, Λ . Τα $ABKA'$ και $B\Gamma\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $A'K = AB = B\Gamma = K\Lambda$: το K είναι μέσο του $A'\Lambda$. Στο τρίγωνο $A'\Lambda\Gamma'$, από το μέσο K της $A'\Lambda$ φέρνουμε την $\varepsilon_2 \parallel \Lambda\Gamma'$ ($= \varepsilon_3$), άρα (Θ. II) περνά από το μέσο της $A'\Gamma'$, που είναι το B' . Επομένως $A'B' = B'\Gamma'$.



► Διαίρεση τμήματος σε n ίσα μέρη

Το Θεώρημα III μας δίνει έναν κομψό τρόπο να χωρίσουμε ένα τμήμα AB σε n ίσα μέρη με κανόνα και διαβήτη: φέρνουμε μια τυχαία ημιευθεία Ax και παίρνουμε πάνω της n διαδοχικά ίσα τμήματα (με τον διαβήτη). Ενώνουμε το τελευταίο σημείο με το B και από τα υπόλοιπα φέρνουμε παράλληλες προς αυτό το τμήμα. Οι παράλληλες χωρίζουν το AB σε n ίσα μέρη.

Διαίρεση του AB σε 5 ίσα μέρη

🔑 ΚΛΕΙΔΙ

Όταν σε ένα τρίγωνο εμφανίζονται **μέσα πλευρών**, σκέψου αμέσως το θεώρημα των μέσων: «ενώνω τα μέσα» → παράλληλο και μισό. Αν έχεις ένα μέσο και μια παράλληλη, χρησιμοποίησε το Θεώρημα II.

⚠️ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠️ Το Θεώρημα I απαιτεί τα σημεία να είναι **μέσα** και των δύο πλευρών· δεν αρκεί να είναι «κάπου» πάνω τους.
- ⚠️ Στο Θεώρημα II η ευθεία πρέπει να ξεκινά από **μέσο** πλευράς και να είναι **παράλληλη** σε δεύτερη πλευρά.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ « $\Delta E = B\Gamma$ » για τα μέσα Δ, E των $AB, A\Gamma$.

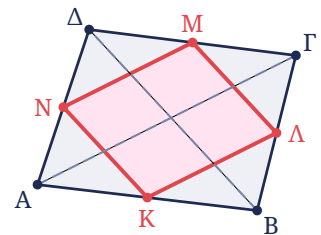
✓ $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$.

✗ «Από το μέσο της AB φέρνω οποιαδήποτε ευθεία και τέμνει την $A\Gamma$ στο μέσο της.»

✓ Μόνο η **παράλληλη** προς τη $B\Gamma$ περνά από το μέσο της $A\Gamma$.

🔗 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Το παραλληλόγραμμο Varignon

Να αποδείξετε ότι τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ οποιουδήποτε τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.



Λύση Στο τρίγωνο $AB\Gamma$: $K\Lambda \parallel A\Gamma$ και $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$ (θεώρημα μέσων). Στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$: $NM \parallel A\Gamma$ και $NM = \frac{A\Gamma}{2}$. Άρα $K\Lambda \parallel NM$ και $K\Lambda = NM$: το $K\Lambda MN$ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες, είναι **παραλληλόγραμμο**. (Θεώρημα Varignon. Η περίμετρός του ισούται με $A\Gamma + B\Delta$.)

🔗 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Χρήση του Θ. II

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, Δ και E είναι τα μέσα των $AB, A\Gamma$ και M ένα σημείο της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι η ΔE διέρχεται από το μέσο του AM .

Λύση Έστω Κ το σημείο τομής της ΔΕ με την ΑΜ. Στο τρίγωνο ΑΒΜ, η ΔΚ ξεκινά από το μέσο Δ της ΑΒ και είναι παράλληλη στη ΒΜ (αφού ΔΕ // ΒΓ). Από το Θ. ΙΙ, το Κ είναι το **μέσο της ΑΜ**.



Έλεγξε τον εαυτό σου

Λύσε τα ηλεκτρονικά κουίζ του μαθήματος στο **mathgreece.com** και δες αμέσως πού στέκεσαι. Όλο το υλικό είναι **δωρεάν**: ένα πραγματικό φροντιστήριο στην οθόνη σου.

www.mathgreece.com

Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 5.6 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

• βασική • μέτρια • • απαιτητική

- 1 Σε τρίγωνο με πλευρές 8, 10, 12 cm ενώνουμε τα μέσα των πλευρών. Να βρείτε την περίμετρο του τριγώνου που σχηματίζεται.
• Λύση → σελ. 194
- 2 Να αποδείξετε ότι τα τρία τμήματα που ενώνουν τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου το χωρίζουν σε τέσσερα ίσα τρίγωνα.
• • Λύση → σελ. 194
- 3 Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ τα μέσα των πλευρών είναι Κ, Λ, Μ, Ν. Τι είδους τετράπλευρο είναι το ΚΛΜΝ;
• • Λύση → σελ. 194
- 4 Σε τρίγωνο ΑΒΓ, Μ το μέσο της ΒΓ. Από το Μ φέρνουμε ΜΔ // ΑΒ (Δ στην ΑΓ) και ΜΕ // ΑΓ (Ε στην ΑΒ). Να αποδείξετε ότι $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$.
• • Λύση → σελ. 194
- 5 Σε τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ η διάμεσος και Ν το μέσο της ΑΜ. Η ΒΝ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = \frac{ΑΓ}{3}$.
• • • Λύση → σελ. 195

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 · ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ - ΤΡΑΠΕΖΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ

5.7–5.8

Βαρύκεντρο και ορθόκεντρο τριγώνου

§5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου · §5.8 Το ορθόκεντρο τριγώνου

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

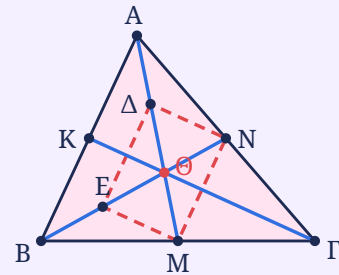
- ότι οι διάμεσοι συντρέχουν στο βαρύκεντρο
- ότι οι φορείς των υψών συντρέχουν στο ορθόκεντρο
- ότι το βαρύκεντρο απέχει από κάθε κορυφή τα $\frac{2}{3}$ της διαμέσου
- την ορθοκεντρική τετράδα

§5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι τρεις **διάμεσοι** ενός τριγώνου διέρχονται από το **ίδιο σημείο**, του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

Απόδειξη. Έστω AM , BN δύο διάμεσοι, που τέμνονται σε ένα σημείο Θ , και Δ , E τα μέσα των $A\Theta$, $B\Theta$. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$: $NM \parallel AB$ και $NM = \frac{AB}{2}$. Στο τρίγωνο ΘAB : $\Delta E \parallel AB$ και $\Delta E = \frac{AB}{2}$. Άρα $NM = \Delta E$ και $NM \parallel \Delta E$, οπότε το ΔEMN είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του διχοτομούνται: $\Theta\Delta = \Theta M$ και $\Theta E = \Theta N$. Επομένως $A\Delta = \Delta\Theta = \Theta M$, δηλαδή $A\Theta = \frac{2}{3}AM$, και όμοια $B\Theta = \frac{2}{3}BN$. Με τον ίδιο συλλογισμό, η τρίτη διάμεσος ΓK τέμνει την AM σε σημείο Θ' με $A\Theta' = \frac{2}{3}AM$. Αφού υπάρχει μοναδικό τέτοιο σημείο της AM , $\Theta' \equiv \Theta$: οι τρεις διάμεσοι συντρέχουν. ■



📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Το κοινό σημείο Θ των διαμέσων λέγεται **βαρύκεντρο** (ή κέντρο βάρους) του τριγώνου. Ισχύουν: $A\Theta = \frac{2}{3}AM$, $\Theta M = \frac{1}{3}AM$, $A\Theta = 2\Theta M$.

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Γιατί «βαρύκεντρο»;

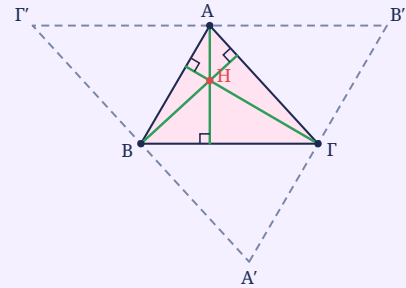
Αν κόψεις ένα τρίγωνο από χαρτόνι, μπορείς να το ισορροπήσεις πάνω στη μύτη ενός μολυβιού ακριβώς στο βαρύκεντρό του! Γι' αυτό λέγεται και «κέντρο βάρους».

§5.8 Το ορθόκεντρο τριγώνου

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

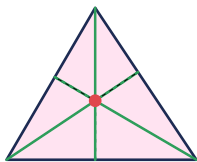
Οι **φορείς των υψών** ενός τριγώνου διέρχονται από το **ίδιο σημείο**.

Απόδειξη. Από τις κορυφές A, B, Γ φέρνουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές· σχηματίζεται ένα μεγάλο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$. Τα $AB\Gamma B'$ και $A\Gamma B\Gamma'$ είναι παραλληλόγραμμα, άρα $AB' = B\Gamma$ και $A\Gamma' = B\Gamma$, οπότε το A είναι **μέσο** της $B\Gamma'$. Όμοια τα B, Γ είναι μέσα των $\Gamma'A'$ και $A'B'$. Το ύψος AD είναι κάθετο στη $B\Gamma$, άρα και στην παράλληλή της $B\Gamma'$, στο μέσο της A : είναι η **μεσοκάθετος** της $B\Gamma'$. Το ίδιο ισχύει για τα άλλα δύο ύψη. Οι τρεις μεσοκάθετοι του $A'B'\Gamma'$ συντρέχουν (§4.5), άρα και τα ύψη του $AB\Gamma$.

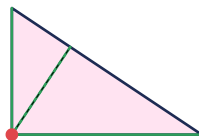
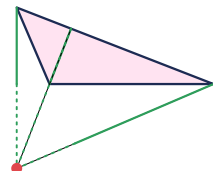


□ ΟΡΙΣΜΟΣ

Το κοινό σημείο H των υψών λέγεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου.



οξυγώνιο: μέσα

ορθογώνιο: η κορυφή της ορθής
Θέση του ορθόκεντρου H 

αμβλυγώνιο: έξω

➡ ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε το A είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $H B \Gamma$, το B του $H A \Gamma$ και το Γ του $H A B$. Τα τέσσερα σημεία A, B, Γ, H λέγονται **ορθοκεντρική τετράδα**.

Απόδειξη. Στο τρίγωνο $H B \Gamma$: η HA (φορέας του ύψους AD) είναι κάθετη στη $B\Gamma$, η BA είναι κάθετη στην $H\Gamma$ (γιατί η ΓH είναι φορέας του ύψους από το Γ) και η ΓA κάθετη στη HB . Άρα οι ευθείες αυτές είναι φορείς των υψών του $H B \Gamma$ και περνούν από το A .

Σημείο	Σε ποιες ευθείες	Ιδιότητα	Θέση
Βαρύκεντρο Θ	διάμεσοι	$A\Theta = \frac{2}{3}AM$	πάντα μέσα
Ορθόκεντρο H	ύψη (φορείς)	ορθοκεντρική τετράδα	μέσα / κορυφή / έξω

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Το βαρύκεντρο χωρίζει κάθε διάμεσο σε λόγο **2 : 1** μετρώντας **από την κορυφή**. Το μεγάλο κομμάτι είναι προς την κορυφή!
- ⚠ Στο αμβλυγώνιο τρίγωνο συντρέχουν οι **φορείς** των υψών (οι προεκτάσεις τους), όχι τα ίδια τα τμήματα.

✗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ « $\Theta M = \frac{2}{3} AM$.»

✓ $\Theta M = \frac{1}{3} AM$ · το $\frac{2}{3}$ είναι το $A\Theta$.

✗ «Το ορθόκεντρο είναι πάντα μέσα στο τρίγωνο.»

✓ Μόνο στο οξυγώνιο.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η διάμεσος AM είναι 15 cm. Να βρείτε τις αποστάσεις του βαρύκεντρου Θ από το A και από το M .

Λύση $A\Theta = \frac{2}{3} \cdot 15 = 10 \text{ cm}$, $\Theta M = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5 \text{ cm}$.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, Θ είναι το βαρύκεντρο και Δ το συμμετρικό του Θ ως προς το μέσο M της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το $B\Theta\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και ότι $A\Theta = \Theta\Delta$.

Λύση Οι διαγώνιοι $\Theta\Delta$ και $B\Gamma$ του $B\Theta\Gamma\Delta$ διχοτομούνται στο M , άρα είναι **παραλληλόγραμμο**. Επίσης $\Theta\Delta = 2\Theta M = A\Theta$ (αφού $A\Theta = 2\Theta M$). Άρα **$A\Theta = \Theta\Delta$** : το Θ είναι μέσο του $A\Delta$.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να αποδείξετε ότι σε ισόπλευρο τρίγωνο το βαρύκεντρο, το ορθόκεντρο, το περίκεντρο και το έγκεντρο ταυτίζονται.

Λύση Στο ισόπλευρο τρίγωνο, η διάμεσος, το ύψος, η διχοτόμος και η μεσοκάθετος της ίδιας πλευράς βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία (για κάθε πλευρά). Άρα οι τρεις διάμεσοι, τα τρία ύψη, οι τρεις διχοτόμοι και οι τρεις μεσοκάθετοι είναι οι **ίδιες τρεις ευθείες** και έχουν το ίδιο κοινό σημείο.



📖 Θέλεις να το δεις και σε βίντεο;

Στο mathgreece.com θα βρεις αυτό το μάθημα εξηγημένο βήμα-βήμα σε βιντεομάθημα, μαζί με σημειώσεις και κούιζ αυτοαξιολόγησης. Ένα **πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο**, στη διάθεσή σου όποτε το χρειαστείς.

www.mathgreece.com

📖 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 5.7–5.8 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

• βασική • μέτρια • • απαιτητική

- 1 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με βαρύκεντρο Θ είναι $B\Theta = 8 \text{ cm}$. Να βρείτε το μήκος της διαμέσου BN .

Λύση → σελ. 195

- 2 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) ποιο είναι το ορθόκεντρο; Ποιο είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $H\beta\Gamma$, όπου H το ορθόκεντρο του $AB\Gamma$;

Λύση → σελ. 195

- 3 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, οι διάμεσοι BN και ΓK τέμνονται στο Θ . Να αποδείξετε ότι αν $BN = \Gamma K$, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Λύση → σελ. 195

- 4 Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των διαμέσων είναι μικρότερο από την περίμετρο.

Λύση → σελ. 195

- 5 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Θ το βαρύκεντρό του. Μια ευθεία ε αφήνει τις κορυφές προς το ίδιο μέρος της. Αν A', B', Γ', Θ' είναι οι προβολές των A, B, Γ, Θ στην ε , να αποδείξετε ότι $AA' + BB' + \Gamma\Gamma' = 3\Theta\Theta'$. (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τη διάμεσο τραπεζίου, §5.10.)

Λύση → σελ. 195

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 · ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ - ΤΡΑΠΕΖΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ

5.9

Η διάμεσος του ορθογώνιου τριγώνου

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- ότι η διάμεσος προς την υποτείνουσα ισούται με το μισό της
- τη σχέση γωνίας 30° και πλευράς σε ορθογώνιο τρίγωνο
- το αντίστροφο

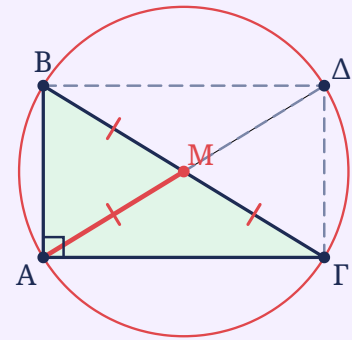
§5.9 Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Η **διάμεσος** ορθογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι **ίση με το μισό της υποτείνουσας**: $\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow$

$$AM = \frac{BG}{2}.$$

Απόδειξη. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά $M\Delta = AM$. Οι διαγώνιοι του $AB\Delta\Gamma$ διχοτομούνται στο M, άρα είναι παραλληλόγραμμο· αφού $\hat{A} = 90^\circ$, είναι **ορθογώνιο**. Οι διαγώνιοι του ορθογώνιου είναι ίσες: $AD = BG$, οπότε $AM = \frac{AD}{2} = \frac{BG}{2}$.



Ισοδύναμα: το μέσο της υποτείνουσας ισαπέχει από τις τρεις κορυφές, δηλαδή είναι το **περίκεντρο**. Ο περιγεγραμμένος κύκλος ορθογώνιου τριγώνου έχει **διάμετρο την υποτείνουσα**.

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Αν η **διάμεσος** ενός τριγώνου ισούται με το **μισό** της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι **ορθογώνιο** με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

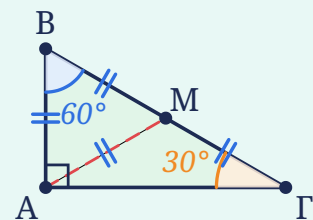
Απόδειξη. Έστω $AM = MB = MG$. Τα τρίγωνα MAB και MAG είναι ισοσκελή, άρα $\hat{MAB} = \hat{B}$ και $\hat{MAG} = \hat{G}$. Τότε $\hat{A} = \hat{B} + \hat{G}$ και, αφού $\hat{A} + \hat{B} + \hat{G} = 180^\circ$, έχουμε $2\hat{A} = 180^\circ$, δηλαδή $\hat{A} = 90^\circ$.

➡ ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία είναι 30° , τότε η **απέναντι πλευρά** της είναι το **μισό της υποτείνουσας**, και αντίστροφα: $\hat{A} = 90^\circ: \hat{G} = 30^\circ \Leftrightarrow$

$$AB = \frac{BG}{2}.$$

Απόδειξη. Έστω $\hat{G} = 30^\circ$, οπότε $\hat{B} = 60^\circ$. Η διάμεσος $AM = MB = \frac{BG}{2}$ (Θ. Ι), άρα το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές με $\hat{B} = 60^\circ$, επομένως ισόπλευρο: $AB = MB = \frac{BG}{2}$. Αντίστροφα, αν $AB = \frac{BG}{2} = MB = MA$, το ABM είναι ισόπλευρο, άρα $\hat{B} = 60^\circ$ και $\hat{G} = 30^\circ$.



⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Το Θεώρημα Ι αφορά τη διάμεσο **από την ορθή γωνία** προς την **υποτείνουσα**. Οι άλλες δύο διάμεσοι δεν έχουν αυτή την ιδιότητα.
- ⚠ Στο πόρισμα των 30° : η πλευρά που είναι το μισό της υποτείνουσας είναι η **απέναντι** από τη γωνία των 30° , δηλαδή η **μικρότερη** κάθετη πλευρά.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Η κάθετη πλευρά που είναι προσκείμενη στη γωνία 30° είναι το μισό της υποτείνουσας.»

✓ Είναι η **απέναντι** από την 30° (δίπλα στη γωνία 60°).

✗ «Αφού $AM = \frac{BG}{2}$, το M είναι το μέσο της BG.»

✓ Το M πρέπει πρώτα να είναι μέσο (διάμεσος)· τότε η ισότητα σημαίνει ορθή γωνία στο A.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η υποτείνουσα είναι $B\Gamma = 14$ cm και $\hat{B} = 60^\circ$. Να βρείτε τη διάμεσο AM και την πλευρά AB.

Λύση $AM = \frac{14}{2} = 7$ cm. Επειδή $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, η απέναντι πλευρά $AB = \frac{B\Gamma}{2} = 7$ cm.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Ύψος και διάμεσος από την ορθή γωνία

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρνουμε το ύψος AD και τη διάμεσο AM. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta AM} = |\hat{B} - \hat{\Gamma}|$.

Λύση Έστω $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Επειδή $MA = MG$, είναι $\hat{MAG} = \hat{\Gamma}$. Επίσης $\hat{\Delta AG} = \hat{B}$ (γωνίες με κάθετες πλευρές / συμπληρωματικές της $\hat{\Gamma}$). Επειδή $\hat{B} > \hat{\Gamma}$, η AM βρίσκεται μεταξύ AD και AG, άρα $\hat{\Delta AM} = \hat{\Delta AG} - \hat{MAG} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ τα ύψη BD και GE. Αν M το μέσο της BG, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MDE είναι ισοσκελές.

Λύση Το τρίγωνο BΔΓ είναι ορθογώνιο στο Δ με υποτείνουσα BG, άρα $MD = \frac{BG}{2}$. Όμοια, στο ορθογώνιο BEΓ: $ME = \frac{BG}{2}$. Επομένως $MD = ME$.

📺 Για βίντεο, κουίζ και επιπλέον λυμένες ασκήσεις σε αυτό το μάθημα, επισκεψού το **mathgreece.com** — πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.

📖 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 5.9 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Σε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος προς την υποτείνουσα είναι 6,5 cm. Πόση είναι η υποτείνουσα και η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου;

Λύση → σελ. 195

- 2 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και $AB = 5$ cm. Να βρείτε τη $B\Gamma$ και τη διάμεσο AM .
Λύση → σελ. 195
- 3 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AM = BM = \Gamma M$, όπου M σημείο της $B\Gamma$. Αν $\hat{B} = 35^\circ$, να βρείτε τις άλλες γωνίες.
Λύση → σελ. 195
- 4 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 2AB$.
Λύση → σελ. 195
- 5 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 15^\circ$. Αν AD είναι το ύψος, να αποδείξετε ότι $AD = \frac{B\Gamma}{4}$.
Λύση → σελ. 195

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 · ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ - ΤΡΑΠΕΖΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ

5.10–5.11

Τραπεζίο και ισοσκελές τραπέζιο

§5.10 Τραπεζίο · §5.11 Ισοσκελές τραπέζιο

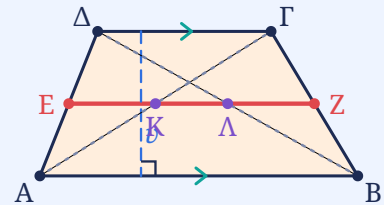
☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τον ορισμό και τα στοιχεία του τραπεζίου
- τη διάμεσο του τραπεζίου και το μήκος της
- το τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων
- τις ιδιότητες και τα κριτήρια του ισοσκελούς τραπεζίου

§5.10 Τραπεζίο

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Τραπεζίο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει **δύο μόνο** πλευρές παράλληλες. Οι παράλληλες πλευρές λέγονται **βάσεις** (μεγάλη Β και μικρή β), οι άλλες δύο **μη παράλληλες πλευρές**. Η απόσταση των βάσεων λέγεται **ύψος** υ. Το τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών λέγεται **διάμεσος** του τραπεζίου.



☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Η **διάμεσος** του τραπεζίου είναι **παράλληλη** προς τις βάσεις και **ίση** με το **ημιάθροισμά** τους: $EZ \parallel AB, \Gamma\Delta$ και $EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}$.

Απόδειξη. Έστω EZ η διάμεσος (E μέσο της AD, Z μέσο της ΒΓ). Η ευθεία ΔZ τέμνει την προέκταση της AB σε σημείο Η. Τα τρίγωνα ZΓΔ και ZBH έχουν ZΓ = ZB, $\hat{\Gamma}Z\Delta = \hat{B}ZH$ (κατακορυφήν) και $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}Z = \hat{H}\hat{B}Z$ (εντός εναλλάξ, $\Gamma\Delta \parallel AH$): ίσα (ΓΠΓ), άρα ΔZ = ZH και BH = ΓΔ. Στο τρίγωνο ΔAH, τα E, Z είναι μέσα των ΔΑ, ΔΗ, άρα $EZ \parallel AH$ (δηλαδή $\parallel AB, \Gamma\Delta$) και $EZ = \frac{AH}{2} = \frac{AB + BH}{2} = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}$.

➡ ΠΟΡΙΣΜΑ

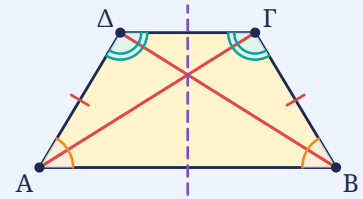
Η διάμεσος EZ του τραπεζίου διέρχεται από τα **μέσα Κ, Λ των διαγωνίων** του και ισχύει $KL = \frac{AB - \Gamma\Delta}{2}$ (ημιδιαφορά των βάσεων).

Απόδειξη. Στο τρίγωνο ABΓ, από το μέσο Z της ΒΓ η ZK $\parallel$ AB, άρα (Θ. II §5.6) περνά από το μέσο Κ της ΑΓ, και $ZK = \frac{AB}{2}$. Όμοια, στο τρίγωνο ΒΓΔ, από το μέσο Z της ΒΓ η ZΛ $\parallel$ ΓΔ περνά από το μέσο Λ της ΒΔ και $Z\Lambda = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Τα Κ, Λ βρίσκονται πάνω στη διάμεσο EZ (που είναι παράλληλη στις βάσεις). Άρα $KL = ZK - Z\Lambda = \frac{AB - \Gamma\Delta}{2}$.

§5.11 Ισοσκελές τραπέζιο

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι **μη** παράλληλες πλευρές είναι ίσες.



☆ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο:

1. οι **γωνίες** που πρόσκεινται σε **κάθε βάση** είναι **ίσες**,
2. οι **διαγώνιοι** είναι **ίσες**.

Απόδειξη. (i) Φέρνουμε από το Γ την $ΓΕ \parallel ΔΑ$ (Ε στην ΑΒ). Το ΑΕΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $ΓΕ = ΔΑ = ΓΒ$: το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{B} = \hat{ΓΕΒ} = \hat{A}$ (αντίστοιχες, $ΓΕ \parallel ΔΑ$). Οι γωνίες $\hat{Γ}$, $\hat{Δ}$ είναι παραπληρωματικές των ίσων $\hat{B}$, $\hat{A}$, άρα ίσες.
(ii) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΑΔ έχουν ΑΒ κοινή, $ΒΓ = ΑΔ$ και $\hat{B} = \hat{A}$: ίσα (ΠΓΠ), άρα $ΑΓ = ΒΔ$.

☆ ΚΡΙΤΗΡΙΑ

Ένα τραπέζιο είναι **ισοσκελές** αν:

1. οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι **ίσες**, ή
2. οι **διαγώνιοι** του είναι **ίσες**.

Απόδειξη. (i) Με την ίδια κατασκευή ($ΓΕ \parallel ΔΑ$): $\hat{ΓΕΒ} = \hat{A} = \hat{B}$, άρα το ΓΕΒ είναι ισοσκελές: $ΓΒ = ΓΕ = ΔΑ$. (ii) Φέρνουμε $ΓΗ \perp ΑΒ$ και $ΔΘ \perp ΑΒ$. $ΓΗ = ΔΘ$ (απόσταση παραλλήλων). Τα ορθογώνια ΑΓΗ και ΒΔΘ έχουν υποτείνουσες $ΑΓ = ΒΔ$ και $ΓΗ = ΔΘ$, άρα είναι ίσα: $\hat{ΓΑΒ} = \hat{ΔΒΑ}$. Τότε τα ΑΒΓ, ΒΑΔ είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $ΒΓ = ΑΔ$.

① ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το ισοσκελές τραπέζιο έχει **άξονα συμμετρίας** την κοινή μεσοκάθετο των βάσεων του. Επίσης (όπως θα δούμε στην §6.6) είναι **εγγράψιμο** σε κύκλο.

🔑 ΚΛΕΙΔΙ

Χρήσιμη κατασκευή σε τραπέζια: φέρε από μια κορυφή της μικρής βάσης **παράλληλη** προς μια μη παράλληλη πλευρά (δημιουργείται παραλληλόγραμμο + τρίγωνο) ή φέρε τα **ύψη** από τα άκρα της μικρής βάσης (δημιουργούνται ορθογώνιο + ορθογώνια τρίγωνα).

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Η διάμεσος του τραπέζιου ενώνει τα μέσα των **μη παράλληλων** πλευρών — **όχι** των βάσεων.
- ⚠ Στον τύπο $ΚΛ = \frac{B - \beta}{2}$ αφαιρούμε τη **μικρή** βάση από τη **μεγάλη**.
- ⚠ Ένα τραπέζιο με ίσες μη παράλληλες πλευρές είναι ισοσκελές· όμως ένα τετράπλευρο με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AD = B\Gamma$ μπορεί να είναι και παραλληλόγραμμο!

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Διάμεσος τραπέζιου = $\frac{B - \beta}{2}$.»

✓ Διάμεσος = $\frac{B + \beta}{2}$ · το $\frac{B - \beta}{2}$ είναι το τμήμα των μέσων των διαγωνίων.

✗ «Σε κάθε τραπέζιο οι διαγώνιοι είναι ίσες.»

✓ Μόνο στο **ισοσκελές**.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Σε τραπέζιο οι βάσεις είναι 18 cm και 10 cm. Να βρείτε τη διάμεσο και την απόσταση των μέσων των διαγωνίων.

Λύση Διάμεσος: $\frac{18 + 10}{2} = 14 \text{ cm}$. $ΚΛ = \frac{18 - 10}{2} = 4 \text{ cm}$.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Τα ύψη ως εργαλείο

Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB > \Gamma\Delta$) είναι $\hat{A} = 60^\circ$, $A\Delta = 8 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 6 \text{ cm}$. Να βρείτε τη μεγάλη βάση AB .

Λύση Φέρνουμε τα ύψη $\Delta\Theta$, ΓH . Στο ορθογώνιο $A\Theta\Delta$: $\hat{A} = 60^\circ$, άρα $\hat{A}\Delta\Theta = 30^\circ$ και $A\Theta = \frac{A\Delta}{2} = 4 \text{ cm}$. Όμοια $\text{H}\text{B} = 4 \text{ cm}$ και $\Theta\text{H} = \Gamma\Delta = 6 \text{ cm}$. Άρα $AB = 4 + 6 + 4 = 14 \text{ cm}$.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $AB = A\Delta + \Gamma\Delta$. Αν E είναι το σημείο της AB με $AE = A\Delta$, να αποδείξετε ότι το $EB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και ότι η ΔE διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Delta}$.

Λύση $EB = AB - AE = (A\Delta + \Gamma\Delta) - A\Delta = \Gamma\Delta$. Επίσης $EB \parallel \Gamma\Delta$ (πάνω στις βάσεις). Το $EB\Gamma\Delta$ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες: **παραλληλόγραμμο**. Επίσης το $A\Delta\text{E}$ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{A}\hat{\text{E}}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Delta}\hat{\text{E}}$, και $\hat{A}\hat{\text{E}}\hat{\Delta} = \hat{\text{E}}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ (εντός εναλλάξ, $AB \parallel \Gamma\Delta$). Άρα $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\text{E}} = \hat{\text{E}}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$: η ΔE διχοτομεί τη $\hat{\Delta}$.

**🎓 Περισσότερη εξάσκηση;**

Αν θέλεις κι άλλες ασκήσεις πάνω σε αυτή την ενότητα, μπες στο **mathgreece.com**: εκεί υπάρχει **πλήρες δωρεάν φροντιστήριο** με λυμένες ασκήσεις, διαγωνίσματα και βίντεο για όλη τη Γεωμετρία.

www.mathgreece.com

 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 5.10–5.11 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ● μέτρια ●● απαιτητική

- 1 Η διάμεσος ενός τραπεζίου είναι 12 cm και η μία βάση είναι 15 cm. Να βρείτε την άλλη βάση.
● Λύση → σελ. 196
- 2 Σε ισοσκελές τραπέζιο η μία γωνία είναι 70° . Να βρείτε τις άλλες.
● Λύση → σελ. 196
- 3 Σε τραπέζιο ABΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ τέμνονται στο Ε. Να αποδείξετε ότι $\hat{A\hat{E}\Delta} = 90^\circ$.
●● Λύση → σελ. 196
- 4 Σε ισοσκελές τραπέζιο ABΓΔ οι διαγώνιοι τέμνονται στο Ο. Να αποδείξετε ότι $OA = OB$ και $OG = OD$.
●● Λύση → σελ. 196
- 5 Σε ορθογώνιο τραπέζιο ABΓΔ ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$) είναι $AB = 2\Gamma\Delta = 2A\Delta$. Να βρείτε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.
●●● Λύση → σελ. 196

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 · ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ - ΤΡΑΠΕΖΙΑ

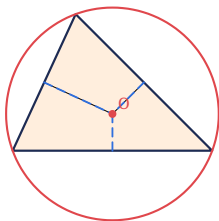
ΜΑΘΗΜΑ
5.12Αξιοσημείωτα σημεία και κύκλοι τριγώνου
(ανακεφαλαίωση)

📌 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

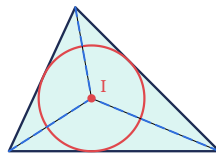
- να ξεχωρίζεις τα τέσσερα αξιοσημείωτα σημεία του τριγώνου
- να θυμάσαι πώς ορίζεται και τι ιδιότητα έχει το καθένα
- να τα εντοπίζεις σε ειδικά τρίγωνα

§5.12 Αξιοσημείωτες ευθείες και κύκλοι τριγώνου

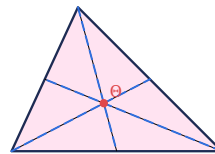
Στις §4.5, §5.7 και §5.8 είδαμε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ υπάρχουν τέσσερις τριάδες **συντρεχουσών** ευθειών. Για να αποδείξουμε την ύπαρξη και τις ιδιότητές τους χρησιμοποιήσαμε τη θεωρία των παραλληλογράμμων, που στηρίζεται στο αίτημα παραλληλίας. Ας τα συγκεντρώσουμε:



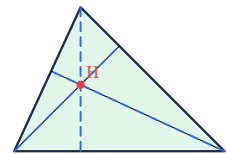
περίκεντρο



έγκεντρο



βαρύκεντρο



ορθόκεντρο

Σημείο	Τομή των...	Χαρακτηριστική ιδιότητα	Κύκλος
Περίκεντρο O	μεσοκαθέτων των πλευρών	$OA = OB = OG$ (ισαπέχει από τις κορυφές)	περιγεγραμμένος (O, R)
Έγκεντρο I	διχοτόμων των γωνιών	ισαπέχει από τις πλευρές	εγγεγραμμένος (I, ρ)
Βαρύκεντρο Θ	διαμέσων	$A\Theta = \frac{2}{3} AM$	—
Ορθόκεντρο H	(φορέων των) υψών	ορθοκεντρική τετράδα A, B, Γ, H	—

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Για τον φιλομαθή: ευθεία και κύκλος του Euler

Αποδεικνύεται ότι σε κάθε (μη ισόπλευρο) τρίγωνο τα σημεία O, Θ, H είναι **συνευθειακά** και ισχύει $\Theta H = 2\Theta O$. Η ευθεία τους λέγεται **ευθεία του Euler**. Επίσης, τα μέσα των πλευρών, τα ίχνη των υψών και τα μέσα των $AH, BH, \Gamma H$ βρίσκονται σε έναν κύκλο, τον **κύκλο των εννέα σημείων** (ή κύκλο του Euler). Τα αποτελέσματα αυτά είναι εκτός ύλης, αλλά αξίζει να τα ξέρεις!

⚠️ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠️ Μην μπερδεύεις «περί-» με «εγ-»: **περιγεγραμμένος** = γύρω από το τρίγωνο (περνά από τις κορυφές), **εγγεγραμμένος** = μέσα στο τρίγωνο (εφάπτεται στις πλευρές).
- ⚠️ Στο **ισοσκελές** τρίγωνο και τα τέσσερα σημεία βρίσκονται πάνω στον άξονα συμμετρίας (ύψος από την κορυφή). Στο **ισόπλευρο** ταυτίζονται.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Το βαρύκεντρο ισαπέχει από τις κορυφές.»

✓ Αυτή είναι ιδιότητα του **περικόκεντρου**.

✗ «Ο εγγεγραμμένος κύκλος έχει κέντρο το βαρύκεντρο.»

✓ Έχει κέντρο το **έγκεντρο** (τομή διχοτόμων).

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) να αποδείξετε ότι τα σημεία O, I, Θ, H ανήκουν στην ευθεία του ύψους AA .

Λύση Η ευθεία AA είναι ταυτόχρονα ύψος, διάμεσος, διχοτόμος από το A και μεσοκάθετος της $B\Gamma$. Το H ανήκει στα ύψη, το Θ στις διαμέσους, το I στις διχοτόμους, το O στις μεσοκαθέτους· άρα όλα ανήκουν στην AA .

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με υποτείνουσα $B\Gamma = 10 \text{ cm}$, πού βρίσκονται το περίκεντρο και το ορθόκεντρο; Πόση είναι η απόστασή τους;

Λύση Περίκεντρο: το μέσο M της $B\Gamma$. Ορθόκεντρο: η κορυφή A . Η απόστασή τους είναι η διάμεσος $AM = \frac{B\Gamma}{2} = 5 \text{ cm}$.

📺 Για βίντεο, κουίζ και επιπλέον λυμένες ασκήσεις σε αυτό το μάθημα, επισκέψου το mathgreece.com — πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.

📋 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 5.12 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Να αντιστοιχίσετε: (α) περίκεντρο, (β) έγκεντρο, (γ) βαρύκεντρο, (δ) ορθόκεντρο με (1) διάμεσοι, (2) ύψη, (3) μεσοκάθετοι, (4) διχοτόμοι.

Λύση → σελ. 196

- 2 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ το έγκεντρο I ανήκει στη διάμεσο AM . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Λύση → σελ. 196

- 3 Σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α , το ύψος είναι u . Να εκφράσετε τις ακτίνες R και r του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου ως συνάρτηση του u .

Λύση → σελ. 196



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 · ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Όλη η θεωρία με μια ματιά

Παραλληλόγραμμα

Ιδιότητες: απέναντι πλευρές ίσες, απέναντι γωνίες ίσες, διαγώνιοι διχοτομούνται.

Κριτήρια: απέναντι πλευρές ίσες · δύο απέναντι ίσες & παράλληλες · απέναντι γωνίες ίσες · διαγώνιοι διχοτομούνται.

Ορθογώνιο · Ρόμβος · Τετράγωνο

- Ορθογώνιο: διαγώνιοι **ίσες**.
- Ρόμβος: διαγώνιοι **κάθετες** & διχοτομούν τις γωνίες.
- Τετράγωνο: ορθογώνιο + ρόμβος.

Μέσα πλευρών τριγώνου

- Δ, E μέσα $AB, AG \Rightarrow DE \parallel BG, DE = \frac{BG}{2}$.
- Από μέσο, παράλληλη σε πλευρά $\Rightarrow$ περνά από μέσο.
- Παράλληλες με ίσα τμήματα σε μία ευθεία $\Rightarrow$ ίσα και σε κάθε άλλη.

Βαρύκεντρο & ορθόκεντρο

- $AO = \frac{2}{3}AM, OM = \frac{1}{3}AM$.
- Τα ύψη συντρέχουν στο H .
- A, B, Γ, H ορθοκεντρική τετράδα.

Ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^\circ$)

- $AM = \frac{BG}{2}$ (και αντίστροφα).
- $\hat{\Gamma} = 30^\circ \Rightarrow AB = \frac{BG}{2}$.
- Περίκεντρο = μέσο υποτεινούσας.

Τραπεζίο

- Διάμεσος: $\frac{B + \beta}{2}$, παράλληλη στις βάσεις.
- Μέσα διαγωνίων: $K\Lambda = \frac{B - \beta}{2}$.
- Ισοσκελές: γωνίες βάσης ίσες, διαγώνιοι ίσες (και αντίστροφα).



Όλα τα τετράπλευρα σε ένα βίντεο

Στο mathgreece.com θα βρεις συγκεντρωτικό βιντεομάθημα με όλες τις ιδιότητες και τα κριτήρια των τετραπλεύρων, κουίζ και διαγωνίσματα — **πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.**

www.mathgreece.com



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Επαναληπτικό διαγώνισμα

Διάρκεια: 2 διδακτικές ώρες

Ενδεικτική διάρκεια: 2 ώρες. Σε κάθε κριτήριο που χρησιμοποιείτε, να αναφέρετε ποιο είναι.

ΘΕΜΑ 1

25 μονάδες

α) Να αποδείξετε ότι το τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

β) Σωστό ή Λάθος:

α) Κάθε τετράπλευρο με ίσες διαγώνιους είναι ορθογώνιο.

β) Οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι κάθετες.

γ) Η διάμεσος τραπεζίου ισούται με την ημιδιαφορά των βάσεων.

δ) Το βαρύκεντρο απέχει από την κορυφή τα $\frac{2}{3}$ της διαμέσου.

ΘΕΜΑ 2

25 μονάδες

Δίνεται παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα E, Z των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. α) Να αποδείξετε ότι το $A\epsilon\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμα. β) Αν οι AZ και ΓE τέμνουν τη διαγώνιο $B\Delta$ στα K και Λ , να αποδείξετε ότι $\Delta K = K\Lambda = \Lambda B$.

ΘΕΜΑ 3

25 μονάδες

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $\hat{B} = 60^\circ$ και M το μέσο της $B\Gamma$. α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο. β) Αν $AB = 4$ cm, να βρείτε τη $B\Gamma$. γ) Αν N το μέσο της $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι $MN \perp A\Gamma$ και $MN = 2$ cm.

ΘΕΜΑ 4

25 μονάδες

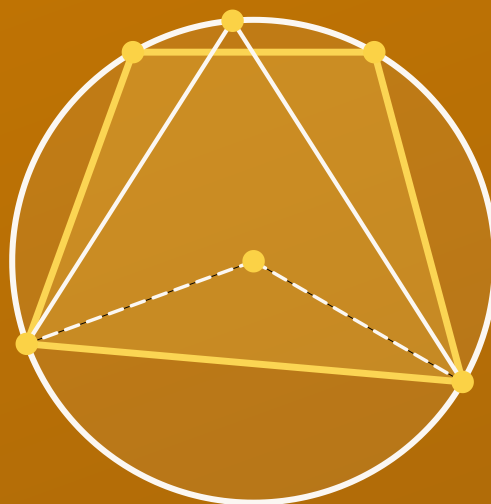
Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB > \Gamma\Delta$) είναι $A\Delta = \Gamma\Delta = B\Gamma$ και $AB = 2\Gamma\Delta$. α) Αν M το μέσο της AB , να αποδείξετε ότι τα $AM\Gamma\Delta$ και $MB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβοι. β) Να βρείτε τις γωνίες του τραπεζίου. γ) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma \perp B\Gamma$.

Οι πλήρεις λύσεις του διαγωνίσματος βρίσκονται στις σελίδες λύσεων (σελ. 196).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

6

Εγγεγραμμένα σχήματα



Στο τελευταίο κεφάλαιο επιστρέφουμε στον κύκλο. Θα γνωρίσουμε την **εγγεγραμμένη γωνία** και τη σχέση της με την επίκεντρη, τη **γωνία χορδής και εφαπτομένης**, και θα μελετήσουμε σημαντικούς **γεωμετρικούς τόπους** στον κύκλο. Τέλος, θα μάθουμε πότε τέσσερα σημεία βρίσκονται στον ίδιο κύκλο (**εγγράψιμα τετράπλευρα**) και πώς λύνουμε προβλήματα κατασκευών με τη μέθοδο των γεωμετρικών τόπων.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

6.1	Εισαγωγικά - Ορισμοί	158	6.5	Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο	168
6.2	Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης	159	6.6	Το εγγράψιμο τετράπλευρο	170
6.3	Γωνία χορδής και εφαπτομένης	162	6.7	Γεωμετρικοί τόποι και γεωμετρικές κατασκευές με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων	174
6.4	Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στον κύκλο - Τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία	165			

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 · ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ

6.1–6.2

Εγγεγραμμένη γωνία

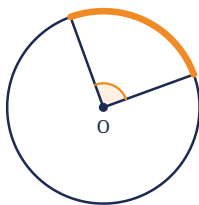
§6.1 Εισαγωγικά - Ορισμοί · §6.2 Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

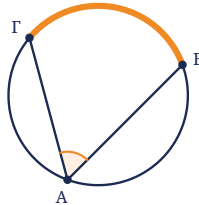
- επίκεντρη, εγγεγραμμένη γωνία και γωνία χορδής-εφαπτομένης
- ότι η εγγεγραμμένη είναι το μισό της επίκεντρης στο ίδιο τόξο
- ότι η εγγεγραμμένη σε ημικόκλιο είναι ορθή
- ότι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο είναι ίσες

§6.1 Εισαγωγικά - Ορισμοί

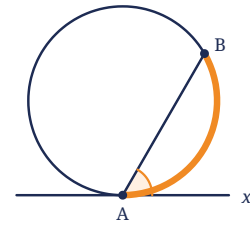
Μια κυρτή γωνία και ένας κύκλος μπορεί να έχουν διάφορες σχετικές θέσεις. Τρεις από αυτές μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα:



επίκεντρη



εγγεγραμμένη



χορδής και εφαπτομένης

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ Τρία είδη γωνιών στον κύκλο

1. Αν η κορυφή είναι το **κέντρο** του κύκλου, η γωνία λέγεται **επίκεντρη** (§2.18).
2. Αν η κορυφή είναι **σημείο του κύκλου** και οι πλευρές της είναι **τέμνουσες**, η γωνία λέγεται **εγγεγραμμένη**. Το τόξο $\widehat{B\Gamma}$ που περιέχεται στη γωνία λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της· λέμε ότι η $\hat{A}$ **βαίνει** στο $\widehat{B\Gamma}$.
3. Αν η κορυφή είναι σημείο του κύκλου, η μία πλευρά τέμνουσα και η άλλη **εφαπτομένη**, η γωνία λέγεται **γωνία χορδής και εφαπτομένης**.

§6.2 Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

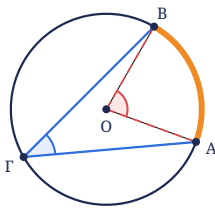
Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο: $\widehat{A\Gamma B} = \frac{\widehat{A\hat{O}B}}{2}$.

Απόδειξη. Έστω η εγγεγραμμένη $\widehat{A\Gamma B}$ και η επίκεντρη $\widehat{A\hat{O}B}$ που βαίνουν στο τόξο $\widehat{AB}$.

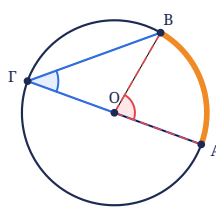
(i) Το O σε πλευρά, π.χ. στην ΓA : Η $\widehat{A\hat{O}B}$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου $O\Gamma B$ ($O\Gamma = OB$), άρα $\widehat{A\hat{O}B} = \widehat{O\hat{\Gamma}B} + \widehat{O\hat{B}\Gamma} = 2\widehat{A\Gamma B}$.

(ii) Το O στο εσωτερικό της γωνίας: Φέρνουμε τη διάμετρο $\Gamma\Gamma'$. Από την (i): $\widehat{A\hat{O}\Gamma'} = 2\widehat{A\Gamma'\Gamma}$ και $\widehat{\Gamma'\hat{O}B} = 2\widehat{\Gamma'\Gamma B}$. Προσθέτοντας: $\widehat{A\hat{O}B} = 2\widehat{A\Gamma B}$.

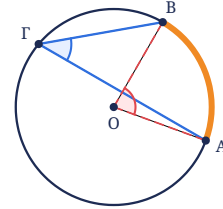
(iii) Το O στο εξωτερικό: Όμοια, με αφαίρεση των αντίστοιχων ισοτήτων.



Ο στο εσωτερικό



Ο σε πλευρά

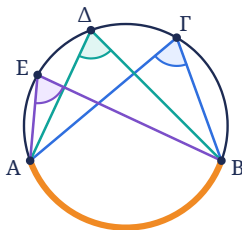


Ο στο εξωτερικό

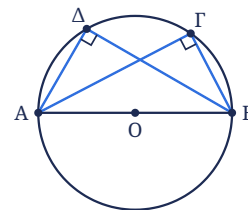
Οι τρεις περιπτώσεις της απόδειξης (μπλε: εγγεγραμμένη, κόκκινη: επίκεντρη)

➡ ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου: $\widehat{A\Gamma B} = \frac{\widehat{AB}}{2}$.
2. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
3. Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο (ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων) είναι ίσες, και αντίστροφα: ίσες εγγεγραμμένες βαίνουν σε ίσα τόξα.



στο ίδιο τόξο: ίσες



σε ημικύκλιο: ορθές

ⓘ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Παράλληλες χορδές

Από το Πόρισμα (iii) προκύπτει ότι τα τόξα που περιέχονται μεταξύ δύο παράλληλων χορδών είναι ίσα: αν $AB \parallel \Gamma\Delta$, τότε οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζει η χορδή $A\Delta$ με τις παράλληλες είναι ίσες εγγεγραμμένες, άρα βαίνουν σε ίσα τόξα.

🔑 ΚΛΕΙΔΙ

Σε κάθε άσκηση με κύκλο, ψάξε **εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο**: είναι ίσες! Και όπου δεις **διάμετρο**, ψάξε ορθή γωνία.

⚠️ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠️ Η εγγεγραμμένη και η επίκεντρη πρέπει να βαίνουν στο **ίδιο τόξο**. Αν βαίνουν σε τόξα που συμπληρώνουν τον κύκλο, η σχέση αλλάζει.
- ⚠️ Εγγεγραμμένες που «βλέπουν» την ίδια χορδή αλλά βρίσκονται **εκατέρωθεν** της χορδής βαίνουν σε **διαφορετικά** τόξα: είναι **παραπληρωματικές**, όχι ίσες.
- ⚠️ $\widehat{AGB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$: το τόξο είναι το **διπλάσιο** της εγγεγραμμένης, όχι το μισό.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Η εγγεγραμμένη είναι διπλάσια της επίκεντρης.»

✓ Ανάποδα: η **επίκεντρη** είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης.

✗ «Όλες οι γωνίες που βλέπουν τη χορδή AB είναι ίσες.»

✓ Μόνο όσες κορυφές τους βρίσκονται στο **ίδιο τόξο** (προς την ίδια μεριά της AB)· οι άλλες είναι παραπληρωματικές.

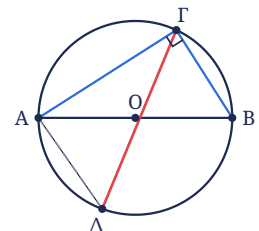
✍️ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Σε κύκλο κέντρου O είναι $\widehat{AOB} = 110^\circ$. Να βρείτε μια εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{AGB}$ όταν (α) το Γ βρίσκεται στο μεγάλο τόξο $\widehat{AB}$, (β) το Γ βρίσκεται στο μικρό τόξο $\widehat{AB}$.

Λύση (α) Η $\widehat{AGB}$ βαίνει στο μικρό τόξο (110°): $\widehat{AGB} = 55^\circ$. (β) Η $\widehat{AGB}$ βαίνει στο μεγάλο τόξο ($360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$): $\widehat{AGB} = 125^\circ$. Παρατήρησε ότι $55^\circ + 125^\circ = 180^\circ$.

✍️ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Η AB είναι διάμετρος κύκλου και Γ σημείο του κύκλου με $\widehat{GAB} = 35^\circ$. Αν Δ είναι σημείο του τόξου που δεν περιέχει το Γ, να βρείτε τις γωνίες $\widehat{AGB}$, $\widehat{ABG}$ και $\widehat{ADG}$.



Λύση $\widehat{AGB} = 90^\circ$ (βαίνει σε ημικύκλιο). $\widehat{ABG} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$. Οι $\widehat{ADG}$ και $\widehat{ABG}$ βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{AG}$, άρα $\widehat{ADG} = 55^\circ$.

✍️ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Τεμνόμενες χορδές

Δύο χορδές AB και ΓΔ ενός κύκλου τέμνονται στο P. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα PΑΓ και PΔΒ έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Λύση $\widehat{PAG} = \widehat{BAG}$ και $\widehat{PDB} = \widehat{GDB}$ βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{BG}$, άρα είναι ίσες. Όμοια $\widehat{PGA} = \widehat{DGA} = \widehat{DBA} = \widehat{PBD}$ (τόξο $\widehat{AD}$). Και $\widehat{APG} = \widehat{BPD}$ (κατακορυφήν). (Τα τρίγωνα αυτά λέγονται όμοια — θα τα μελετήσεις στη Β')

Λυκείου.)



🎓 Κόλλησες κάπου;

Μην το αφήνεις! Στο **mathgreece.com** κάθε θεωρία έχει το δικό της βιντεομάθημα και κάθε κεφάλαιο τα δικά του κουίζ. Είναι ένα ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών, φτιαγμένο για σένα.

www.mathgreece.com

📖 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 6.1–6.2 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

• βασική • μέτρια • • απαιτητική

- 1 Μια εγγεγραμμένη γωνία είναι 38° . Να βρείτε το αντίστοιχο τόξο και την επίκεντρη γωνία που βαίνει στο ίδιο τόξο.
• Λύση → σελ. 197
- 2 Σε κύκλο, τα σημεία A, B, Γ χωρίζουν τον κύκλο σε τόξα $\widehat{AB} = 100^\circ$, $\widehat{B\Gamma} = 120^\circ$, $\widehat{\Gamma A} = 140^\circ$. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ABΓ.
• Λύση → σελ. 197
- 3 Να αποδείξετε ότι αν ένα τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και η μία πλευρά του είναι διάμετρος, τότε είναι ορθογώνιο. Ισχύει το αντίστροφο;
• Λύση → σελ. 197
- 4 Σε κύκλο κέντρου O, M είναι το μέσο του τόξου $\widehat{B\Gamma}$ που δεν περιέχει το A. Να αποδείξετε ότι η AM διχοτομεί τη γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$.
•• Λύση → σελ. 197
- 5 Δύο κύκλοι τέμνονται στα A και B. Αν ΑΓ και ΑΔ είναι διαμέτροι των δύο κύκλων, να αποδείξετε ότι τα Γ, B, Δ είναι συνευθειακά.
•• Λύση → σελ. 197
- 6 Δύο κάθετες χορδές AB και ΓΔ κύκλου τέμνονται στο P. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος PM του τριγώνου PBΓ είναι κάθετη στην ΑΔ.
••• Λύση → σελ. 197

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 · ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ

6.3

Γωνία χορδής και εφαπτομένης - Γωνία δύο τεμνουσών

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

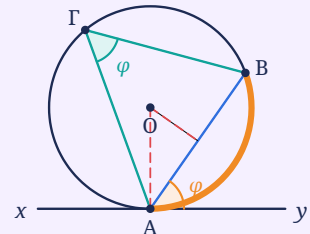
- ότι η γωνία χορδής-εφαπτομένης ισούται με την εγγεγραμμένη στο τόξο της χορδής
- να υπολογίζεις τη γωνία δύο τεμνουσών με κορυφή μέσα ή έξω από τον κύκλο

§6.3 Γωνία χορδής και εφαπτομένης

☆ ΘΕΩΡΗΜΑ

Η γωνία που σχηματίζεται από μια **χορδή** κύκλου και την **εφαπτομένη** στο άκρο της χορδής **ισούται** με την **εγγεγραμμένη** γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής (το τόξο που περιέχεται στη γωνία χορδής-εφαπτομένης).

Απόδειξη. Έστω $\gamma\hat{A}B = \varphi$ οξεία γωνία χορδής AB και εφαπτομένης Ay, και $A\hat{\Gamma}B$ εγγεγραμμένη στο τόξο της χορδής. Φέρνουμε το απόστημα OM της AB· η OM διχοτομεί την επίκεντρη $A\hat{O}B$, άρα $A\hat{O}M = \frac{A\hat{O}B}{2} = A\hat{\Gamma}B$. Οι γωνίες $\gamma\hat{A}B$ και $A\hat{O}M$ είναι οξείες με κάθετες πλευρές ($Ay \perp OA$ και $AB \perp OM$), άρα ίσες (§4.7). Επομένως $\gamma\hat{A}B = A\hat{\Gamma}B$. Αν η γωνία χορδής-εφαπτομένης είναι αμβλεία, η απόδειξη είναι ανάλογη (με την παραπληρωματική της).



➡ ΠΟΡΙΣΜΑ

Το **μέτρο** της γωνίας χορδής και εφαπτομένης ισούται με το **μισό του μέτρου του τόξου** της χορδής που περιέχεται στη γωνία.

► Γωνία δύο τεμνουσών

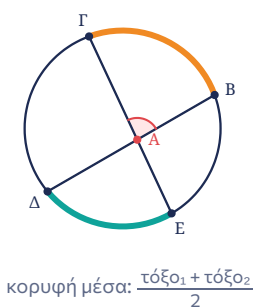
Μια γωνία που έχει την κορυφή της **μέσα** ή **έξω** από έναν κύκλο και πλευρές τέμνουσες του κύκλου λέγεται **γωνία δύο τεμνουσών**. Με τη βοήθεια της εξωτερικής γωνίας τριγώνου και των εγγεγραμμένων γωνιών βρίσκουμε:

☆ ΕΦΑΡΜΟΓΗ (ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΤΕΜΝΟΥΣΩΝ)

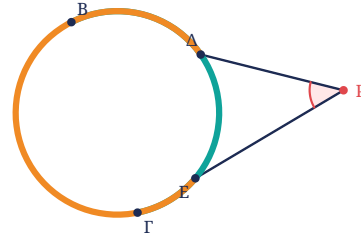
1. Αν η κορυφή A είναι **εσωτερικό** σημείο του κύκλου, η γωνία ισούται με το **ημιάθροισμα** των τόξων που περιέχονται στη γωνία και στην κατακορυφήν της: $\widehat{B\hat{A}G} = \frac{\widehat{B\Gamma} + \widehat{\Delta E}}{2}$.
2. Αν η κορυφή P είναι **εξωτερικό** σημείο, η γωνία ισούται με την **ημιδιαφορά** των τόξων που περιέχονται στη γωνία: $\hat{P} = \frac{\widehat{\Delta E} - \widehat{B\Gamma}}{2}$.

Απόδειξη. (i) Φέρνουμε τη BE. Η $\widehat{B\hat{A}G}$ είναι εξωτερική του τριγώνου ABE, άρα $\widehat{B\hat{A}G} = \widehat{ABE} + \widehat{AEB} = \widehat{\Delta BE} + \widehat{BEG} = \frac{\widehat{\Delta E}}{2} + \frac{\widehat{B\Gamma}}{2}$.

(ii) Φέρνουμε τη BE. Η $\widehat{\Delta BE}$ είναι εξωτερική του τριγώνου PBE, άρα $\widehat{\Delta BE} = \hat{P} + \widehat{BEP}$, δηλαδή $\hat{P} = \widehat{\Delta BE} - \widehat{BEG} = \frac{\widehat{\Delta E}}{2} - \frac{\widehat{B\Gamma}}{2}$.



κορυφή μέσα: $\frac{\text{τόξο}_1 + \text{τόξο}_2}{2}$



κορυφή έξω: $\frac{\text{μεγάλο τόξο} - \text{μικρό}}{2}$

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Στη γωνία χορδής-εφαπτομένης, το τόξο που μετράει είναι αυτό που βρίσκεται **μέσα** στη γωνία· η ίση εγγεγραμμένη έχει την κορυφή της **στο άλλο τόξο**.
- ⚠ Κορυφή μέσα $\Rightarrow$ **άθροισμα** τόξων/2· κορυφή έξω $\Rightarrow$ **διαφορά** τόξων/2.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Η γωνία χορδής-εφαπτομένης ισούται με το τόξο της.»

✓ Ισούται με το **μισό** του τόξου της (όπως μια εγγεγραμμένη).

✗ Για κορυφή έξω από τον κύκλο: γωνία = $\frac{\widehat{\Delta E} + \widehat{B\Gamma}}{2}$.

✓ Για κορυφή έξω παίρνουμε τη **διαφορά**: $\frac{\widehat{\Delta E} - \widehat{B\Gamma}}{2}$.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Η εφαπτομένη σε σημείο A κύκλου σχηματίζει με τη χορδή AB γωνία 70° . Να βρείτε το τόξο $\widehat{AB}$ (που περιέχεται στη γωνία) και μια εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε αυτό.

Λύση Τόξο = $2 \cdot 70^\circ = 140^\circ$ · εγγεγραμμένη: 70° .

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Από εξωτερικό σημείο P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA, PB σε κύκλο. Αν το μικρό τόξο $\widehat{AB}$ είναι 100° , να βρείτε τη γωνία $\hat{APB}$.

Λύση

Η γωνία χορδής-εφαπτομένης $\widehat{PAB} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$, και όμοια $\widehat{PBA} = 50^\circ$. Στο τρίγωνο PAB: $\widehat{APB} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. (Με τον τύπο της «κορυφής έξω», που ισχύει και για εφαπτόμενες: $\frac{260^\circ - 100^\circ}{2} = 80^\circ \checkmark$.)



Για βίντεο, κουίζ και επιπλέον λυμένες ασκήσεις σε αυτό το μάθημα, επισκέψου το mathgreece.com — πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.

Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 6.3 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Δύο χορδές τέμνονται μέσα σε κύκλο και σχηματίζουν γωνία που περιέχει τόξο 70° , ενώ η κατακορυφήν της περιέχει τόξο 50° . Πόση είναι η γωνία;
Λύση → σελ. 197
- 2 Δύο τέμνουσες από εξωτερικό σημείο P ορίζουν στον κύκλο τόξα 130° (μακρινό) και 40° (κοντινό). Να βρείτε τη γωνία $\widehat{P}$.
Λύση → σελ. 197
- 3 Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο μέσο M ενός τόξου $\widehat{AB}$ είναι παράλληλη στη χορδή AB.
Λύση → σελ. 197
- 4 Δίνεται κύκλος (K), η εφαπτομένη ε σε σημείο του A και σημείο P της ε. Μια ευθεία από το P τέμνει τον κύκλο στα B και Γ (B πιο κοντά στο P). Αν η διχοτόμος της $\widehat{BAG}$ τέμνει τη BΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι $PD = PA$.
Λύση → σελ. 197

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 · ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ

6.4

Τόξο που δέχεται γνωστή γωνία

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι σημαίνει «το τμήμα AB φαίνεται υπό γωνία φ »
- πώς κατασκευάζουμε τόξο που δέχεται γωνία φ
- τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που βλέπουν ένα τμήμα υπό γωνία φ
- την αναλυτική-συνθετική μέθοδο

§6.4

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στον κύκλο - Τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν M είναι ένα σημείο εκτός της ευθείας AB με $\widehat{AMB} = \varphi$, λέμε ότι το M **βλέπει** το τμήμα AB **υπό γωνία φ** (ή ότι το AB φαίνεται από το M υπό γωνία φ). Ένα τόξο με χορδή AB λέμε ότι **δέχεται γωνία φ** όταν κάθε σημείο του (εκτός από τα A, B) βλέπει το AB υπό γωνία φ .

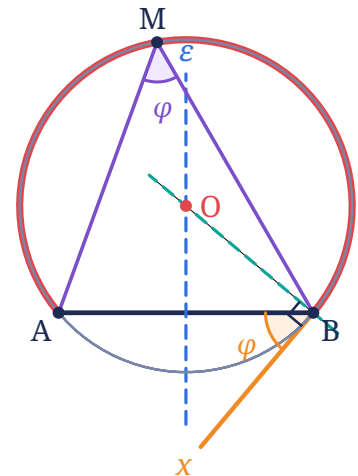
Πρόβλημα. Δίνεται τμήμα AB και γωνία φ . Να κατασκευαστεί τόξο με χορδή AB που δέχεται γωνία φ .

Ανάλυση. Έστω ότι το τόξο $\widehat{AMB}$ κέντρου O είναι το ζητούμενο. Η εφαπτομένη Bx του κύκλου στο B σχηματίζει με τη χορδή BA γωνία ίση με την εγγεγραμμένη $\widehat{AMB} = \varphi$ (§6.3)· άρα η Bx είναι γνωστή ημιευθεία. Επειδή $OB \perp Bx$, το O βρίσκεται στην κάθετη ζ της Bx στο B · βρίσκεται επίσης στη μεσοκάθετο ε του AB .

Σύνθεση (κατασκευή). Κατασκευάζουμε ημιευθεία Bx με $\widehat{ABx} = \varphi$, την κάθετη ζ της Bx στο B και τη μεσοκάθετο ε του AB . Η τομή τους είναι το κέντρο O . Το τόξο του κύκλου (O, OA) που βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που **δεν** περιέχει τη Bx είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη. Για κάθε σημείο M του τόξου: $\widehat{AMB} = \widehat{ABx} = \varphi$ (εγγεγραμμένη = γωνία χορδής-εφαπτομένης).

Διερεύνηση. Οι ζ, ε τέμνονται πάντα (αφού $\varphi \neq 0^\circ$), άρα το πρόβλημα έχει πάντα λύση.



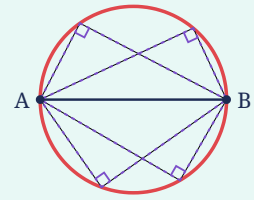
☆ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα AB **φαίνεται υπό γωνία φ** είναι **δύο τόξα κύκλων**, με χορδή AB , **συμμετρικά** ως προς την ευθεία AB , χωρίς τα άκρα τους A, B , καθένα από τα οποία δέχεται γωνία φ .

Απόδειξη. Για τα σημεία του τόξου ισχύει $\widehat{AMB} = \varphi$. Αν ένα σημείο I του ίδιου ημιεπιπέδου βρίσκεται **μέσα** στο τόξο (π.χ. στο τμήμα AM), τότε $\widehat{AIB}$ είναι εξωτερική του τριγώνου IMB , άρα $\widehat{AIB} > \varphi$ · αν βρίσκεται **έξω** (π.χ. στην προέκταση της AM στο E), τότε $\widehat{AEB} < \varphi$. Άρα στο ημιεπίπεδο αυτό τα μόνα σημεία με την ιδιότητα είναι τα σημεία του τόξου. Το ίδιο, συμμετρικά, στο άλλο ημιεπίπεδο.

➔ ΠΟΡΙΣΜΑ

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων από τα οποία ένα τμήμα AB φαίνεται υπό **ορθή** γωνία είναι ο **κύκλος με διάμετρο AB** , χωρίς τα σημεία A και B .



≡ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ Η αναλυτική-συνθετική μέθοδος

- 1. Ανάλυση:** υποθέτουμε ότι το ζητούμενο σχήμα έχει κατασκευαστεί και αναζητούμε ιδιότητες που ανάγουν την κατασκευή σε γνωστές κατασκευές ή γεωμετρικούς τόπους.
- 2. Σύνθεση (κατασκευή):** με οδηγό την ανάλυση, κάνουμε με σειρά τις επιμέρους κατασκευές.
- 3. Απόδειξη:** δείχνουμε ότι το σχήμα που κατασκευάσαμε έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.
- 4. Διερεύνηση:** εξετάζουμε πότε υπάρχει λύση και πόσες λύσεις υπάρχουν.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Ο τόπος είναι **δύο** τόξα (ένα σε κάθε ημιεπίπεδο της AB), όχι ένα.
- ⚠ Τα άκρα A, B **εξαιρούνται**: από αυτά το τμήμα δεν «φαίνεται» υπό γωνία.
- ⚠ Αν $\varphi < 90^\circ$ τα τόξα είναι **μεγαλύτερα** από ημικύκλιο· αν $\varphi > 90^\circ$, **μικρότερα**· αν $\varphi = 90^\circ$, ημικύκλια.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Ο τόπος των σημείων που βλέπουν το AB υπό 90° είναι ο κύκλος διαμέτρου AB .»

✓ Σωστό, αλλά **χωρίς τα σημεία A και B** .

✗ «Το κέντρο του τόξου είναι το μέσο του AB .»

✓ Μόνο όταν $\varphi = 90^\circ$. Γενικά το κέντρο είναι η τομή της μεσοκαθέτου του AB με την κάθετη στην Bx .

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ένα τμήμα $AB = 6$ cm. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των κορυφών Γ των ορθογωνίων τριγώνων $AB\Gamma$ με υποτείνουσα AB ;

Λύση Η γωνία $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, άρα το Γ βλέπει το AB υπό ορθή γωνία: ο τόπος είναι ο **κύκλος με διάμετρο AB** (κέντρο το μέσο του AB , ακτίνα 3 cm), **χωρίς τα A, B** .

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Ένα πρόβλημα της καθημερινότητας

Σε έναν κινηματογράφο, η οθόνη AB φαίνεται από το καλύτερο κάθισμα K υπό γωνία φ . Ποια άλλα σημεία της αίθουσας έχουν την ίδια οπτική γωνία;

Λύση Όλα τα σημεία του **τόξου** που περνά από τα A, B, K (του περιγεγραμμένου κύκλου του ABK), προς τη μεριά της αίθουσας. Από κάθε τέτοιο σημείο η οθόνη φαίνεται υπό την ίδια γωνία φ (εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο).

**Μελέτησε έξυπνα**

Συνδύασε αυτό το βοήθημα με τα βιντεομαθήματα, τα podcasts και τα παιχνίδια γνώσεων του **mathgreece.com**. Θα βρεις εκεί **πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο** για Γυμνάσιο και Λύκειο.

www.mathgreece.com**Ασκήσεις για λύση**

Μάθημα 6.4 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ● μέτρια ●● απαιτητική

- 1** Δίνεται τμήμα AB . Να περιγράψετε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M με $\widehat{AMB} = 60^\circ$.
.. Λύση → σελ. 197
- 2** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων M των χορδών ενός κύκλου (O, R) που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο P στο εσωτερικό του κύκλου.
... Λύση → σελ. 198
- 3** Ο καπετάνιος ενός σκάφους βλέπει δύο φάρους A, B υπό γωνία 40° και τους φάρους B, Γ υπό γωνία 70° . Πώς μπορεί να βρει τη θέση του στον χάρτη;
.. Λύση → σελ. 198

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 · ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ

6.5

Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο

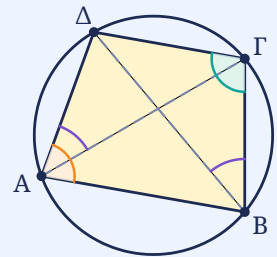
☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι λέγεται εγγεγραμμένο τετράπλευρο
- ότι οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές
- ότι κάθε πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες
- ότι η εξωτερική γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική

§6.5 Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγεγραμμένο** σε κύκλο αν οι **κορυφές** του είναι σημεία του κύκλου. Ο κύκλος λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** του τετραπλεύρου.



☆ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις ιδιότητες:

1. οι **απέναντι γωνίες** του είναι **παραπληρωματικές**: $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$, $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180^\circ$,
2. κάθε **πλευρά** του φαίνεται από τις **απέναντι κορυφές** υπό **ίσες γωνίες** (π.χ. $\hat{G}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{G}\hat{B}\hat{\Delta}$).

Απόδειξη. (i) Η $\hat{A}$ βαίνει στο τόξο $\widehat{B\Gamma\Delta}$ και η $\hat{\Gamma}$ στο τόξο $\widehat{B\Delta A}$. τα δύο τόξα συμπληρώνουν τον κύκλο. Άρα $\hat{A} + \hat{\Gamma} = \frac{\widehat{B\Gamma\Delta} + \widehat{B\Delta A}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$.

(ii) Οι $\hat{G}\hat{A}\hat{\Delta}$ και $\hat{G}\hat{B}\hat{\Delta}$ είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{GD}$, άρα είναι ίσες. ■

➡ ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε **εξωτερική γωνία** εγγεγραμμένου τετραπλεύρου **ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του**.

Απόδειξη. Η εξωτερική γωνία στο Γ είναι $180^\circ - \hat{\Gamma} = \hat{A}$. ■

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Οι **απέναντι γωνίες** είναι παραπληρωματικές, όχι οι διαδοχικές (αυτές είναι παραπληρωματικές στο παραλληλόγραμμο!).
- ⚠ Η ιδιότητα (ii) αφορά γωνίες που βλέπουν την **ίδια πλευρά** από τις δύο **απέναντι κορυφές**, δηλαδή γωνίες που σχηματίζονται με τις **διαγώνιους**.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Σε εγγεγραμμένο τετράπλευρο $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.»✓ $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$. Ίσες είναι μόνο αν είναι και οι δύο ορθές.✗ « $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B}$ » (γωνίες που δεν βλέπουν την ίδια πλευρά).✓ Ίσες είναι π.χ. $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ (βλέπουν την $A\Delta$).

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Σε εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = 75^\circ$ και $\hat{B} = 110^\circ$. Να βρείτε τις $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$.Λύση $\hat{\Gamma} = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$, $\hat{\Delta} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Σε εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = 45^\circ$. Να βρείτε τις γωνίες $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B}$.Λύση $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 30^\circ$ (βλέπουν τη $B\Gamma$). $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = 45^\circ$ (βλέπουν την AB).

✍ ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Ποια παραλληλόγραμμα «χωράνε» σε κύκλο;

Να αποδείξετε ότι κάθε παραλληλόγραμμο που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο είναι ορθογώνιο.

Λύση Στο παραλληλόγραμμο $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Επειδή είναι εγγεγραμμένο, $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$. Άρα $2\hat{A} = 180^\circ$, $\hat{A} = 90^\circ$: ορθογώνιο.
 Για βίντεο, κουίζ και επιπλέον λυμένες ασκήσεις σε αυτό το μάθημα, επισκεψού το mathgreece.com — πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.

📖 Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 6.5 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

● βασική ●● μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Σε εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = 120^\circ$ και η εξωτερική γωνία στο B είναι 80° . Να βρείτε τις $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$.

Λύση → σελ. 198

- 2 Να αποδείξετε ότι ένας ρόμβος εγγεγραμμένος σε κύκλο είναι τετράγωνο.

Λύση → σελ. 198

- 3 Οι γωνίες εγγεγραμμένου τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = 3x$, $\hat{B} = 2x + 10^\circ$, $\hat{\Gamma} = x + 20^\circ$. Να βρείτε την x και τη $\hat{\Delta}$.

Λύση → σελ. 198

- 4 Δύο κύκλοι τέμνονται στα A και B . Από το A και το B φέρνουμε ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα Γ , Γ' και τον άλλο στα Δ , Δ' αντίστοιχα (Γ , Δ στην ευθεία από το A , Γ' , Δ' στην ευθεία από το B). Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta'$.

Λύση → σελ. 198

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 · ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ

6.6

Το εγγράψιμο τετράπλευρο

🕒 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- πότε ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο
- περιγεγραμμένα και περιγράψιμα τετράπλευρα
- τα τρία κριτήρια εγγραψιμότητας

§6.6 Το εγγράψιμο τετράπλευρο

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγράψιμο** όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που διέρχεται και από τις **τέσσερις** κορυφές του. Τα τέσσερα σημεία λέγονται τότε **ομοκυκλικά**.

Από τρία μη συνευθειακά σημεία περνά πάντα (μοναδικός) κύκλος. Για **τέσσερα** όμως σημεία αυτό δεν ισχύει γενικά: π.χ. οι κορυφές ενός παραλληλογράμμου που δεν είναι ορθογώνιο δεν είναι ομοκυκλικές. Πότε λοιπόν ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο;

☆ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΕΓΓΡΑΨΙΜΟΤΗΤΑΣ

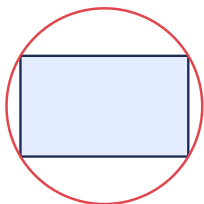
Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι **εγγράψιμο** σε κύκλο αν ισχύει **μία** από τις προτάσεις:

1. δύο **απέναντι γωνίες** του είναι **παραπληρωματικές**,
2. μία **πλευρά** του φαίνεται από τις **απέναντι κορυφές** υπό **ίσες γωνίες**,
3. μία **εξωτερική γωνία** του **ισούται** με την **απέναντι εσωτερική**.

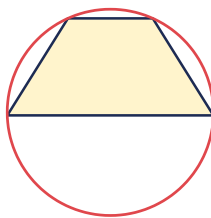
Απόδειξη. (i) Έστω $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$. Φέρνουμε τον κύκλο που περνά από τα A, B, Δ . Τα A και Γ είναι εκατέρωθεν της $B\Delta$. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία στο τόξο $\widehat{B\Delta}$ που δεν περιέχει το A ισούται με $180^\circ - \hat{A} = \hat{\Gamma}$. Άρα το Γ βλέπει το $B\Delta$ υπό την ίδια γωνία με τα σημεία αυτού του τόξου· από τον γεωμετρικό τόπο της §6.4, το Γ ανήκει στο τόξο, δηλαδή στον κύκλο.

(ii) Αν $\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}\hat{B} = \varphi$, τα A, B βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της $\Gamma\Delta$ και βλέπουν το $\Gamma\Delta$ υπό γωνία φ , άρα ανήκουν στο ίδιο τόξο του γεωμετρικού τόπου (§6.4): τα A, B, Γ, Δ είναι ομοκυκλικά.

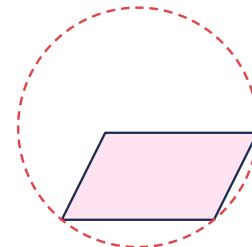
(iii) Αν η εξωτερική γωνία στο Γ ισούται με $\hat{A}$, τότε $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ και εφαρμόζουμε το (i).



ορθογώνιο: εγγράψιμο ✓



ισοσκελές τραπέζιο: εγγράψιμο ✓



πλάγιο παραλληλόγραμμο: όχι ✗

Τετράπλευρο

Εγγράψιμο;

Γιατί

Ορθογώνιο, τετράγωνο

✓ πάντα

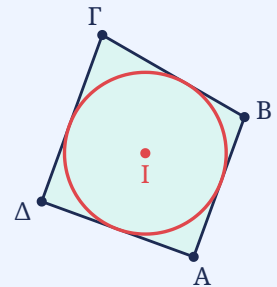
απέναντι γωνίες $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Ισοσκελές τραπέζιο	✓ πάντα	$\hat{A} = \hat{B}$, και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$
Πλάγιο παραλληλόγραμμο, ρόμβος (μη τετράγωνο)	×	απέναντι γωνίες ίσες και όχι ορθές
Μη ισοσκελές τραπέζιο	×	οι γωνίες της βάσης δεν είναι ίσες

► Περιγεγραμμένο και περιγράψιμο τετράπλευρο

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα τετράπλευρο του οποίου **οι πλευρές εφάπτονται** στον ίδιο κύκλο λέγεται **περιγεγραμμένο** στον κύκλο, ενώ ο κύκλος λέγεται **εγγεγραμμένος** στο τετράπλευρο. Ένα τετράπλευρο που μπορεί να γίνει περιγεγραμμένο λέγεται **περιγράψιμο**.



☆ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

(Α) Σε κάθε περιγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ: (i) οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο (το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου), (ii) $AB + \Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.

(Β) Αντίστροφα, ένα κυρτό τετράπλευρο είναι περιγράψιμο αν οι διχοτόμοι των γωνιών του συντρέχουν ή αν τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

Απόδειξη. (Α)(i) Το κέντρο I του κύκλου ισαπέχει από όλες τις πλευρές, άρα ανήκει στις διχοτόμους όλων των γωνιών. (ii) Αποδείχθηκε στην §3.15 με τα ίσα εφαπτόμενα τμήματα.

(Β) Αν οι διχοτόμοι συντρέχουν στο O, το O ισαπέχει από τις τέσσερις πλευρές, οπότε ο κύκλος με κέντρο O και ακτίνα την κοινή απόσταση εφάπτεται και στις τέσσερις. Το δεύτερο κριτήριο αποδεικνύεται με απαγωγή σε άτοπο.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

⚠ Μην μπερδεύεις τα δύο: **εγγράψιμο** → κύκλος από τις **κορυφές** (κριτήριο: απέναντι γωνίες παραπληρωματικές)· **περιγράψιμο** → κύκλος που εφάπτεται στις **πλευρές** (κριτήριο: $AB + \Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$).

⚠ Στο κριτήριο (ii) οι δύο κορυφές πρέπει να βρίσκονται **στο ίδιο ημιεπίπεδο** ως προς την πλευρά.

⊗ ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ «Το ΑΒΓΔ έχει $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$, άρα είναι εγγράψιμο.»

✓ Οι $\hat{A}, \hat{B}$ είναι **διαδοχικές**· χρειάζεται άθροισμα 180° για **απέναντι** γωνίες.

✗ «Ο ρόμβος είναι εγγράψιμος.»

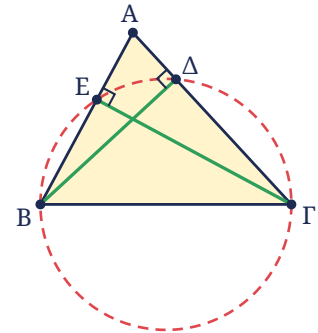
✓ Ο ρόμβος είναι **περιγράψιμος** (όλες οι πλευρές ίσες, άρα $AB + \Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$), αλλά εγγράψιμος μόνο αν είναι τετράγωνο.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ Πώς αποδεικνύω ότι τέσσερα σημεία είναι ομοκυκλικά

- Ψάξε **δύο απέναντι ορθές γωνίες** (π.χ. από ύψη ή εφαπτόμενες): τότε το άθροισμά τους είναι 180° .
- Ψάξε μια πλευρά που «φαίνεται» από δύο κορυφές υπό **δύο ορθές γωνίες**: τότε και οι τέσσερις κορυφές είναι στον κύκλο με διάμετρο αυτή την πλευρά.
- Δείξε ότι μια **εξωτερική γωνία** ισούται με την **απέναντι εσωτερική**.
- Μόλις αποδείξεις ότι είναι εγγράψιμο, «κέρδισε» ίσες γωνίες από εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο!

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ύψη και εγγράψιμο τετράπλευρο

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta E$ είναι εγγράψιμο και να βρείτε το κέντρο του κύκλου.



Λύση Η πλευρά $B\Gamma$ φαίνεται από τις κορυφές Δ, E υπό ίσες γωνίες: $\hat{B}\Delta\Gamma = \hat{B}\Gamma E = 90^\circ$ (κριτήριο ii). Άρα το $B\Gamma\Delta E$ είναι **εγγράψιμο**· επειδή οι γωνίες είναι ορθές, ο κύκλος έχει **διάμετρο τη $B\Gamma$** και κέντρο το μέσο M της $B\Gamma$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός κυρτού τετραπλεύρου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.

Λύση Έστω A_1, Γ_1 δύο απέναντι κορυφές του νέου τετραπλεύρου, όπου η A_1 είναι τομή των διχοτόμων των $\hat{A}, \hat{B}$ και η Γ_1 τομή των διχοτόμων των $\hat{\Gamma}, \hat{\Delta}$. Τότε η γωνία στο A_1 είναι $180^\circ - \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$ και στο Γ_1 είναι $180^\circ - \frac{\hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2}$. Το άθροισμά τους είναι $360^\circ - \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$. Δύο απέναντι γωνίες παραπληρωματικές: **εγγράψιμο**.

**Έλεγξε τον εαυτό σου**

Λύσε τα ηλεκτρονικά κουίζ του μαθήματος στο **mathgreece.com** και δεξ αμέσως πού στέκεσαι. Όλο το υλικό είναι **δωρεάν**: ένα πραγματικό φροντιστήριο στην οθόνη σου.

www.mathgreece.com

Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 6.6 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

• βασική • μέτρια • • απαιτητική

- Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι εγγράψιμα: (α) ορθογώνιο, (β) ρόμβος (μη τετράγωνο), (γ) ισοσκελές τραπέζιο, (δ) πλάγιο παραλληλόγραμμο;

Λύση → σελ. 198

- 2 Να αποδείξετε ότι κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι εγγράψιμο.

Λύση → σελ. 198

- 3 Οι εφαπτόμενες στα άκρα δύο κάθετων χορδών κύκλου σχηματίζουν τετράπλευρο. Να αποδείξετε ότι είναι εγγράψιμο.

Λύση → σελ. 198

- 4 Να αποδείξετε ότι τα ύψη AD , BE , $ΓZ$ ενός οξυγωνίου τριγώνου $ABΓ$ διχοτομούν τις γωνίες του τριγώνου $ΔEZ$ (ορθικό τρίγωνο).

Λύση → σελ. 198

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 · ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ

6.7

Κατασκευές με γεωμετρικούς τόπους

🕒 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τους βασικούς γεωμετρικούς τόπους της χρονιάς
- την κατασκευή εφαπτομένης από εξωτερικό σημείο
- τη μέθοδο τομής γεωμετρικών τόπων
- κοινές εφαπτόμενες δύο κύκλων

§6.7

Γεωμετρικοί τόποι και γεωμετρικές κατασκευές με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων

Σε όλη τη χρονιά γνωρίσαμε βασικούς γεωμετρικούς τόπους. Ας τους συγκεντρώσουμε, γιατί είναι τα «εργαλεία» για τα προβλήματα κατασκευών:

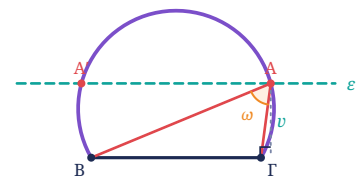
Ιδιότητα των σημείων M	Γεωμετρικός τόπος
$MO = \rho$ (σταθερή απόσταση από σημείο)	κύκλος (O, ρ)
$MA = MB$	μεσοκάθετος του AB
ισαπέχει από τις πλευρές γωνίας (εσωτερικά σημεία)	διχοτόμος της γωνίας
ισαπέχει από δύο τεμνόμενες ευθείες	οι δύο (κάθετες) διχοτόμοι
απέχει απόσταση δ από ευθεία ε	δύο παράλληλες της ε σε απόσταση δ
ισαπέχει από δύο παράλληλες ευθείες	η μεσοπαράλληλός τους
$\widehat{AMB} = \varphi$	δύο συμμετρικά τόξα χορδής AB που δέχονται γωνία φ
$\widehat{AMB} = 90^\circ$	κύκλος διαμέτρου AB (χωρίς A, B)

🔑 ΚΛΕΙΔΙ

Μέθοδος τομής γεωμετρικών τόπων: αν ένα ζητούμενο σημείο πρέπει να ικανοποιεί **δύο** συνθήκες, βρίσκουμε τον γεωμετρικό τόπο T_1 για την πρώτη και τον T_2 για τη δεύτερη. Το σημείο είναι η **τομή** $T_1 \cap T_2$.

🔧 ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ένα κλασικό πρόβλημα κατασκευής

Να κατασκευαστεί τρίγωνο ABΓ με δοσμένα: πλευρά BΓ = α , ύψος AΔ = ν και γωνία $\widehat{A} = \omega$.



Λύση Ανάλυση. Έστω ABΓ το ζητούμενο. Αφού $\widehat{A} = \omega$, το A βλέπει το γνωστό τμήμα BΓ υπό γωνία ω : ανήκει στον τόπο T_1 (δύο τόξα χορδής BΓ που δέχονται γωνία ω). Αφού απέχει από τη BΓ απόσταση ν , ανήκει στον τόπο T_2 (δύο παράλληλες της BΓ σε απόσταση ν). Άρα $A \in T_1 \cap T_2$.

Σύνθεση. Παίρνουμε BΓ = α , γράφουμε τα τόξα που δέχονται γωνία ω και φέρνουμε τις παράλληλες ε , ε'

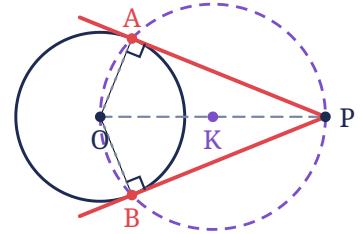
της ΒΓ σε απόσταση ν . Ένα σημείο τομής Α δίνει το ζητούμενο τρίγωνο.

Απόδειξη. $B\Gamma = \alpha$, $\hat{A} = \omega$ (το Α είναι στο τόξο), $A\Delta = \nu$ (το Α είναι στην ε).

Διερεύνηση. Το πρόβλημα έχει λύση όταν η ε τέμνει ή εφάπτεται στο τόξο, δηλαδή όταν το ν δεν ξεπερνά την απόσταση του «ψηλότερου» σημείου του τόξου (το μέσο του) από τη ΒΓ. Οι λύσεις είναι συμμετρικές ως προς τη μεσοκάθετο της ΒΓ, άρα δίνουν ίσα τρίγωνα.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Κατασκευή εφαπτομένης

Να κατασκευάσετε τις εφαπτόμενες ενός κύκλου (Ο, R) από ένα εξωτερικό σημείο P.



Λύση Ανάλυση. Αν PA εφαπτόμενη με σημείο επαφής Α, τότε $\widehat{OAP} = 90^\circ$, δηλαδή το Α βλέπει το OP υπό ορθή γωνία: ανήκει στον **κύκλο διαμέτρου OP**. Ανήκει επίσης στον κύκλο (Ο, R).

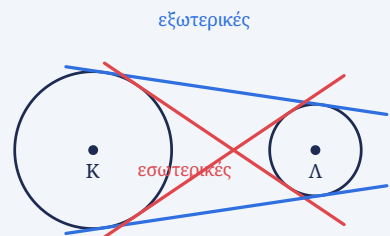
Κατασκευή. Βρίσκουμε το μέσο K του OP και γράφουμε τον κύκλο (K, KO). Τα σημεία τομής του με τον (Ο, R) είναι τα σημεία επαφής Α, Β· οι PA, PB είναι οι εφαπτόμενες.

Απόδειξη. $\widehat{OAP} = 90^\circ$ (εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο), άρα $PA \perp OA$, δηλαδή η PA εφάπτεται.

Διερεύνηση. Οι δύο κύκλοι τέμνονται πάντα όταν το P είναι εξωτερικό: **δύο** λύσεις.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Κοινές εφαπτόμενες δύο κύκλων

Μια ευθεία που εφάπτεται και σε δύο κύκλους λέγεται **κοινή εφαπτομένη** τους. Λέγεται **εξωτερική** αν οι κύκλοι βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της και **εσωτερική** αν βρίσκονται εκατέρωθεν. Δύο κύκλοι που ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου έχουν **4** κοινές εφαπτόμενες (2 εξωτερικές, 2 εσωτερικές)· αν εφάπτονται εξωτερικά **3**· αν τέμνονται **2**· αν εφάπτονται εσωτερικά **1**· αν ο ένας είναι εσωτερικός του άλλου, **καμία**. Η κατασκευή τους ανάγεται στην κατασκευή εφαπτομένης από σημείο προς έναν βοηθητικό κύκλο ακτίνας $R - \rho$ ή $R + \rho$.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

- ⚠ Σε κάθε πρόβλημα κατασκευής γράφε και τα **τέσσερα** βήματα: ανάλυση, σύνθεση, απόδειξη, διερεύνηση.
- ⚠ Η διερεύνηση πρέπει να απαντά: **πότε** υπάρχει λύση και **πόσες** λύσεις υπάρχουν.

ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ — και πώς τα αποφεύγεις

✗ Στην κατασκευή εφαπτομένης, ενώνουμε το P με ένα «τυχαίο» σημείο του κύκλου που «φαίνεται» σωστό.

✗ Παραλείπουμε τη διερεύνηση.

✓ Το σημείο επαφής βρίσκεται με ακρίβεια ως τομή με τον κύκλο διαμέτρου OP.

✓ Η διερεύνηση είναι μέρος της λύσης· χωρίς αυτήν η λύση είναι ελλιπής.



Για βίντεο, κουίζ και επιπλέον λυμένες ασκήσεις σε αυτό το μάθημα, επισκέψου το mathgreece.com — πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.



Ασκήσεις για λύση

Μάθημα 6.7 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

• βασική • μέτρια • • απαιτητική

- 1 Να βρείτε σημείο M που να απέχει απόσταση 2 cm από μια ευθεία ε και να ισαπέχει από δύο σημεία A, B .
.. Πόσες λύσεις μπορεί να υπάρχουν;

Λύση → σελ. 199

- 2 Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα α και ύψος προς την υποτείνουσα ν . Πότε έχει
.. λύση;

Λύση → σελ. 199

- 3 Να κατασκευάσετε κύκλο με δοσμένη ακτίνα ρ που να εφάπτεται σε δύο δοσμένες τεμνόμενες ευθείες.
...

Λύση → σελ. 199

- 4 Να κατασκευάσετε τρίγωνο $AB\Gamma$ με δοσμένα $\alpha, \hat{A} = \omega$ και διάμεσο μ_α .
...

Λύση → σελ. 199



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 · ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Όλη η θεωρία με μια ματιά

Εγγεγραμμένη γωνία

- Εγγεγραμμένη = $\frac{1}{2}$ επίκεντρη (ίδιο τόξο).
- Εγγεγραμμένη = $\frac{\text{τόξο}}{2}$.
- Σε ημικόκλιο: 90° .
- Στο ίδιο τόξο: ίσες.

Γωνία χορδής-εφαπτομένης

- = εγγεγραμμένη στο τόξο της χορδής.
- = $\frac{\text{τόξο}}{2}$.

Γωνία δύο τεμνουσών

- Κορυφή μέσα: $\frac{\text{τόξο}_1 + \text{τόξο}_2}{2}$.
- Κορυφή έξω: $\frac{\text{μεγάλο} - \text{μικρό}}{2}$.

Γεωμετρικός τόπος $\hat{AMB} = \varphi$

- Δύο συμμετρικά τόξα χορδής AB.
- $\varphi = 90^\circ$: κύκλος διαμέτρου AB.

Εγγεγραμμένο τετράπλευρο

- $\hat{A} + \hat{\Gamma} = \hat{B} + \hat{\Delta} = 180^\circ$.
- Πλευρά φαίνεται από απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.
- Εξωτερική = απέναντι εσωτερική.

Εγγράψιμο αν...

- δύο απέναντι γωνίες παραπληρωματικές, ή
- πλευρά φαίνεται υπό ίσες γωνίες, ή
- εξωτερική = απέναντι εσωτερική.
- Περιγράψιμο: $AB + \Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.

**Τέλος της ύλης — συγχαρητήρια!**

Για τελική επανάληψη πριν τις εξετάσεις, στο mathgreece.com θα βρεις επαναληπτικά βίντεο, διαγωνίσματα προσομοίωσης και κουίζ για όλη τη Γεωμετρία — **πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.**

www.mathgreece.com



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Επαναληπτικό διαγώνισμα

Διάρκεια: 2 διδακτικές ώρες

Ενδεικτική διάρκεια: 2 ώρες. Να σχεδιάζετε προσεκτικό σχήμα και να αιτιολογείτε κάθε ισότητα γωνιών.

ΘΕΜΑ 1

25 μονάδες

- α) Να αποδείξετε ότι οι απέναντι γωνίες εγγεγραμμένου τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές.
- β) Σωστό ή Λάθος:
- α) Η εγγεγραμμένη γωνία είναι διπλάσια της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο.
 - β) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
 - γ) Κάθε ρόμβος είναι εγγράψιμος.
 - δ) Η γωνία χορδής-εφαπτομένης ισούται με το μισό του τόξου της χορδής.

ΘΕΜΑ 2

25 μονάδες

Σε κύκλο κέντρου O τα σημεία A, B, Γ είναι τέτοια ώστε $\widehat{AB} = 80^\circ$ και $\widehat{B\Gamma} = 140^\circ$ (διαδοχικά τόξα). α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. β) Αν η εφαπτομένη στο A τέμνει την προέκταση της ΓB στο P , να βρείτε τη γωνία $\widehat{PAB}$ και τη γωνία $\widehat{P}$.

ΘΕΜΑ 3

25 μονάδες

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με ύψη AD, BE που τέμνονται στο H . α) Να αποδείξετε ότι το $\Gamma\Delta H E$ είναι εγγράψιμο. β) Να αποδείξετε ότι το $AB\Delta E$ είναι εγγράψιμο. γ) Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Gamma\Delta E} = \widehat{A}$.

ΘΕΜΑ 4

25 μονάδες

Δίνεται τμήμα $AB = 8 \text{ cm}$. α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία $\widehat{AMB} = 90^\circ$. β) Ένα σημείο M του τόπου απέχει από την AB 3 cm . Πόσα τέτοια σημεία υπάρχουν; γ) Υπάρχει σημείο του τόπου που απέχει 5 cm από την AB ;

Οι πλήρεις λύσεις του διαγωνίσματος βρίσκονται στις σελίδες λύσεων (σελ. 199).

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Λύσεις των ασκήσεων

Μην κοιτάς τη λύση πριν προσπαθήσεις! Κάθε λύση έχει σύνδεσμο προς την εκφώνησή της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία

Μάθημα 1.1 Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

- 1 Πρωταρχικές (χωρίς ορισμό) είναι: **σημείο, επίπεδο, ευθεία**, δηλαδή τα (α) , (γ) , (ϵ) . Το τρίγωνο, ο κύκλος και η γωνία **ορίζονται** με τη βοήθεια των πρωταρχικών εννοιών.
[↔ εκφώνηση σελ. 10](#)
- 2 «Αν ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση $B\Gamma$, τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ». **Υπόθεση:** $AB = A\Gamma$. **Συμπέρασμα:** $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.
[↔ εκφώνηση σελ. 10](#)
- 3 α) «Αν ένας ακέραιος είναι άρτιος, τότε είναι πολλαπλάσιο του 4»: **ψευδής** (αντιπαράδειγμα: 6).
β) «Αν δύο γωνίες είναι ίσες, τότε είναι ορθές»: **ψευδής** (δύο γωνίες 50°).
γ) «Αν ένα τετράπλευρο έχει τέσσερις ίσες πλευρές, τότε είναι τετράγωνο»: **ψευδής** (έναν ρόμβο που δεν έχει ορθές γωνίες).
[↔ εκφώνηση σελ. 10](#)
- 4 Π.χ. «Ένας ακέραιος είναι άρτιος **αν και μόνο αν** λήγει σε 0, 2, 4, 6 ή 8». Ή: «Ένα τρίγωνο έχει τρεις ίσες πλευρές **αν και μόνο αν** έχει τρεις ίσες γωνίες» (θα το αποδείξουμε στο Κεφάλαιο 3).
[↔ εκφώνηση σελ. 10](#)
- 5 Έστω ότι ο n **δεν** είναι περιττός, δηλαδή $n = 2k$ (άρτιος). Τότε $n^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2)$, που είναι άρτιος. Αυτό είναι **άτοπο**, γιατί από την υπόθεση ο n^2 είναι περιττός. Άρα ο n είναι περιττός.
[↔ εκφώνηση σελ. 10](#)
- 6 Όχι. Η μέτρηση με όργανα έχει πάντα σφάλμα και αφορά **ένα συγκεκριμένο σχέδιο**, όχι κάθε τρίγωνο που ικανοποιεί τα δεδομένα. Στη Γεωμετρία μια ιδιότητα αποδεικνύεται μόνο με λογικούς συλλογισμούς από τα δεδομένα, τους ορισμούς, τα αξιώματα και τα γνωστά θεωρήματα.
[↔ εκφώνηση σελ. 11](#)
- 7 Έστω ότι υπάρχουν δύο διαφορετικά σημεία M, N του τμήματος με $AM = MB$ και $AN = NB$. Τότε και το M και το N θα ήταν μέσα του AB , δηλαδή το AB θα είχε δύο διαφορετικά μέσα. Αυτό είναι **άτοπο**, γιατί το μέσο ενός τμήματος είναι μοναδικό. Άρα $M \equiv N$.
[↔ εκφώνηση σελ. 11](#)

Μάθημα 1.2 Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας

- 1 «Γεωμετρία» = γη + μετρώ, δηλαδή «μέτρηση της γης». Η πρώτη Γεωμετρία γεννήθηκε από πρακτικές ανάγκες, κυρίως από την ανάγκη να μετρηθούν και να ξαναχαραχτούν τα χωράφια μετά τις πλημμύρες του Νείλου.
[↔ εκφώνηση σελ. 14](#)

- 2 Π.χ.: (1) η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη, (2) οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες, (3) οι γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες, (4) η εγγεγραμμένη γωνία σε ημικύκλιο είναι ορθή.

↔ εκφώνηση σελ. 14

- 3 Από 13 βιβλία. Ξεκινά με 23 ορισμούς, 5 αιτήματα και 5 κοινές έννοιες.

↔ εκφώνηση σελ. 15

- 4 Είναι Γεωμετρίες στις οποίες το **5ο αίτημα** (αίτημα παραλληλίας) αντικαθίσταται από διαφορετικό αξίωμα. Αναπτύχθηκαν τον 19ο αιώνα από τους Lobachevsky, Bolyai, Gauss και Riemann και αποδείχτηκαν λογικά συνεπείς.

↔ εκφώνηση σελ. 15

- 5 Τεντώνουμε το σκονί ώστε οι πλευρές του τριγώνου να έχουν 3, 4 και 5 διαστήματα· η γωνία απέναντι από την πλευρά των 5 διαστημάτων είναι ορθή. Για τους Αιγυπτίους αρκούσε ότι η μέθοδος «δούλευε» στην πράξη· η Γεωμετρία τους ήταν εμπειρική και όχι αποδεικτική.

↔ εκφώνηση σελ. 15

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα

Μάθημα 2.1–2.2 Σημεία, γραμμές, επιφάνειες και το επίπεδο

- 1 Το σημείο έχει **καμία** διάσταση, η γραμμή **μία**, η επιφάνεια **δύο** και το στερεό **τρεις**.

↔ εκφώνηση σελ. 18

- 2 Επίπεδο: η επιφάνεια του θρανίου, ο πίνακας, το τζάμι του παραθύρου. Καμπύλη επιφάνεια: π.χ. η επιφάνεια μιας υδρογείου σφαίρας ή ενός μπουκαλιού.

↔ εκφώνηση σελ. 18

- 3 Γιατί το επίπεδο είναι πρωταρχική έννοια. Το μελετάμε μέσα από τις ιδιότητες των επίπεδων σχημάτων, δηλαδή των σχημάτων που όλα τα σημεία τους ανήκουν στο ίδιο επίπεδο.

↔ εκφώνηση σελ. 18

Μάθημα 2.3–2.5 Ευθεία, ημιευθεία και ευθύγραμμο τμήμα

- 1 Αν είχαν δύο κοινά σημεία A, B, τότε από τα A, B θα περνούσαν δύο διαφορετικές ευθείες, άτοπο (από δύο σημεία περνά μία μόνο ευθεία). Άρα δύο διαφορετικές ευθείες έχουν **ένα** κοινό σημείο (τεμνόμενες) ή **κανένα** (παράλληλες).

↔ εκφώνηση σελ. 22

- 2 Με αρχή το A: Ax (που περιέχει το B, δηλαδή η ημιευθεία AB) και Ax'. Με αρχή το B: Bx και Bx' (που περιέχει το A, δηλαδή η BA). Αντικείμενες είναι οι Ax, Ax' και οι Bx, Bx'.

↔ εκφώνηση σελ. 22

- 3 Αφού το B είναι μεταξύ A και Γ, η σειρά είναι A, B, Γ. Αφού το Γ είναι μεταξύ A και Δ, το Δ βρίσκεται μετά το Γ (από την άλλη πλευρά του Γ σε σχέση με το A). Άρα η σειρά των σημείων είναι A, B, Γ, Δ και το Γ βρίσκεται μεταξύ των B και Δ.

↔ εκφώνηση σελ. 22

- 4 (i) Κάθε ζευγάρι ευθειών δίνει ένα σημείο τομής: 3 σημεία τομής, έστω A, B, Γ (σχηματίζουν τρίγωνο). (ii) Τα σημεία τομής ορίζουν τα 3 τμήματα AB, BΓ, ΓΑ (τις πλευρές του τριγώνου).

↔ εκφώνηση σελ. 22

- 5 Κάθε τμήμα αντιστοιχεί σε ένα ζευγάρι σημείων. Για n σημεία έχουμε $\frac{n(n-1)}{2}$ ζευγάρια. Για $n = 5$: $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ για $n = 10$: $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ τμήματα.

↔ εκφώνηση σελ. 22

- 6 Κάθε διασταύρωση αντιστοιχεί σε ένα ζευγάρι δρόμων, και σε διαφορετικά ζευγάρια αντιστοιχούν διαφορετικά σημεία (κανένας τρεις δρόμοι δεν συντρέχουν). Για 4 δρόμους: $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ τροχονόμοι. Για n δρόμους: $\frac{n(n-1)}{2}$ τροχονόμοι.

↔ εκφώνηση σελ. 22

Μάθημα 2.6–2.8 Μετατοπίσεις, σύγκριση και πράξεις τμημάτων

- 1 $ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ$ και $ΒΔ = ΒΓ + ΓΔ$. Αφού $ΑΓ = ΒΔ$, έχουμε $ΑΒ + ΒΓ = ΒΓ + ΓΔ$, οπότε (αφαιρώντας το $ΒΓ$) $ΑΒ = ΓΔ$.

↔ εκφώνηση σελ. 26

- 2 $MN = MB + BN = 3 + 5 = 8$ cm. $ΑΓ = 16$ cm, άρα $ΑΚ = 8$ cm. Επειδή $ΑΒ = 6 < 8$, το B βρίσκεται μεταξύ A και K, οπότε $KB = AK - AB = 8 - 6 = 2$ cm.

↔ εκφώνηση σελ. 26

- 3 (i) $EZ = EB + BΓ + ΓΖ = \frac{AB}{2} + BΓ + \frac{ΓΔ}{2} = \frac{AB + ΓΔ + 2BΓ}{2} = \frac{(AB + BΓ + ΓΔ) + BΓ}{2} = \frac{AD + BΓ}{2}$.
(ii) $ΑΓ + ΒΔ = (ΑΒ + ΒΓ) + (ΒΓ + ΓΔ) = (ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ) + BΓ = AD + BΓ$.

↔ εκφώνηση σελ. 26

- 4 Η σειρά είναι A, M, B, Δ. Τότε $ΔΑ = ΔΜ + ΜΑ$ και $ΔΒ = ΔΜ - ΜΒ$. Προσθέτοντας κατά μέλη και επειδή $ΜΑ = ΜΒ$: $ΔΑ + ΔΒ = 2ΔΜ$, δηλαδή $ΔΜ = \frac{ΔΑ + ΔΒ}{2}$.

↔ εκφώνηση σελ. 26

- 5 $ΑΔ = \frac{AB}{2}$ και $ΑΕ = \frac{ΑΓ}{2}$, ενώ τα Δ, Ε βρίσκονται στην ίδια ευθεία με το Α.
• Αν τα B, Γ είναι προς το ίδιο μέρος του Α, τότε και τα Δ, Ε είναι προς το ίδιο μέρος, οπότε $ΔΕ = |ΑΕ - ΑΔ| = \frac{|ΑΓ - ΑΒ|}{2} = \frac{BΓ}{2}$.
• Αν το Α είναι μεταξύ B και Γ, τότε τα Δ, Ε είναι εκατέρωθεν του Α, οπότε $ΔΕ = ΑΔ + ΑΕ = \frac{AB + ΑΓ}{2} = \frac{BΓ}{2}$.
Σε κάθε περίπτωση $ΔΕ = \frac{BΓ}{2}$.

↔ εκφώνηση σελ. 26

- 6 Αν το Γ είναι μεταξύ των A, B, τότε $AB = ΑΓ + ΓΒ$ (ισότητα). Αν το Γ δεν είναι μεταξύ των A, B, τότε είτε το Α είναι μεταξύ Γ, Β οπότε $ΓΒ = ΓΑ + ΑΒ \Rightarrow AB = ΓΒ - ΓΑ < ΑΓ + ΓΒ$, είτε το Β είναι μεταξύ Α, Γ οπότε $ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ \Rightarrow AB = ΑΓ - ΒΓ < ΑΓ + ΒΓ$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν το Γ είναι σημείο του τμήματος AB.

↔ εκφώνηση σελ. 26

Μάθημα 2.9–2.10 Μήκος, απόσταση και συμμετρία ως προς κέντρο

- 1 Αν Β το συμμετρικό, το Ο είναι μέσο του AB, άρα $AB = 2 \cdot OA = 8$ cm.

↔ εκφώνηση σελ. 28

- 2** Το συμμετρικό A' του A ως προς B βρίσκεται από τη μεριά του Γ , με $BA' = 5$. Το συμμετρικό Γ' του Γ ως προς B βρίσκεται από τη μεριά του A , με $B\Gamma' = 3$. Τα A', Γ' είναι εκατέρωθεν του B , άρα $A\Gamma' = 5 + 3 = 8 (= A\Gamma)$.

↔ εκφώνηση σελ. 28

- 3** Θέτουμε $OA = OB = \alpha$ και $BK = K\Gamma = \beta$. Η σειρά των σημείων είναι A, O, B, K, Γ . Τότε $A\Gamma = AO + OB + BK + K\Gamma = 2\alpha + 2\beta$, ενώ $OK = OB + BK = \alpha + \beta$. Άρα $A\Gamma = 2OK$.

↔ εκφώνηση σελ. 28

Μάθημα 2.11–2.12 Ημιεπίπεδα και η έννοια της γωνίας

- 1** Η ε τέμνει τα τμήματα με άκρα εκατέρωθεν αυτής, δηλαδή τα $A\Gamma$ και $B\Gamma$. Δεν τέμνει το AB (τα A, B είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο).

↔ εκφώνηση σελ. 31

- 2** Κάθε ζευγάρι ημιευθειών ορίζει μία κυρτή γωνία: $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ γωνίες.

↔ εκφώνηση σελ. 31

- 3** Η **ευθεία** είναι γραμμή, ενώ η **ευθεία γωνία** είναι ένα ολόκληρο ημιεπίπεδο, που έχει ως πλευρές δύο αντικείμενες ημιευθείες (και ακμή την ευθεία). Η **πλήρης γωνία** είναι όλο το επίπεδο (η μη κυρτή γωνία που αντιστοιχεί σε δύο ταυτιζόμενες πλευρές).

↔ εκφώνηση σελ. 31

Μάθημα 2.13–2.14 Σύγκριση γωνιών, διχοτόμος, κάθετες ευθείες

- 1** $x\hat{O}\delta = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$, **οξεία**.

↔ εκφώνηση σελ. 35

- 2** Αν K η προβολή του A στην ε , τότε $KA' = KA = 3$ cm, άρα το A' απέχει από την ε **3 cm** και $AA' = 6$ cm.

↔ εκφώνηση σελ. 35

- 3** $x\hat{O}\delta = \frac{x\hat{O}y}{2}$ (διχοτόμος) και $x\hat{O}\varepsilon = \frac{x\hat{O}\delta}{2} = \frac{x\hat{O}y}{4}$. Άρα $x\hat{O}y = 4x\hat{O}\varepsilon$ για κάθε γωνία.

↔ εκφώνηση σελ. 35

- 4** Αν υπήρχαν δύο, οι αντίστοιχες ημιευθείες προς το ίδιο ημιεπίπεδο θα ήταν και οι δύο διχοτόμοι της ευθείας γωνίας με κορυφή A (θα τη χώριζαν σε δύο ορθές). Αυτό είναι άτοπο, γιατί η διχοτόμος γωνίας είναι μοναδική.

↔ εκφώνηση σελ. 35

- 5** Το συμμετρικό του A ως προς την ε είναι το B (από τον ορισμό, η ε είναι μεσοκάθετος του AB). Επειδή $GM \perp AB$, η απόσταση του Γ από την ευθεία AB είναι $GM = 3$ cm.

↔ εκφώνηση σελ. 35

Μάθημα 2.15–2.16 Πράξεις και απλές σχέσεις γωνιών

- 1** Συμπληρωματική: $90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$. Παραπληρωματική: $180^\circ - 34^\circ = 146^\circ$.

↔ εκφώνηση σελ. 40

- 2** $x + 2x = 90^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$. Οι γωνίες είναι **30° και 60°** .

↔ εκφώνηση σελ. 40

- 3** $\varphi = (90^\circ - \varphi) - 20^\circ \Leftrightarrow 2\varphi = 70^\circ \Leftrightarrow \varphi = 35^\circ$. Οι γωνίες είναι **35° και 55°** .

↔ εκφώνηση σελ. 40

4 $\omega = \frac{6}{5} \cdot 90^\circ = 108^\circ$. Παραπληρωματική: $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$. Η ω είναι αμβλεία ($> 90^\circ$), άρα **δεν** έχει συμπληρωματική.

↔ εκφώνηση σελ. 40

5 Η κατακορυφήν της είναι επίσης 38° · οι άλλες δύο είναι παραπληρωματικές της: $180^\circ - 38^\circ = 142^\circ$ η καθεμία.

↔ εκφώνηση σελ. 40

6 Αφού το άθροισμα των τριών διαδοχικών γωνιών είναι 180° , οι Ox , Ot είναι αντικείμενες. Έστω $O\delta$ η διχοτόμος της $y\hat{O}z$, οπότε $y\hat{O}\delta = \delta\hat{O}z$. Τότε $x\hat{O}\delta = x\hat{O}y + y\hat{O}\delta$ και $\delta\hat{O}t = \delta\hat{O}z + z\hat{O}t$. Αφού $x\hat{O}y = z\hat{O}t$, έχουμε $x\hat{O}\delta = \delta\hat{O}t$. Αλλά $x\hat{O}\delta + \delta\hat{O}t = 180^\circ$, άρα καθεμία είναι 90° , δηλαδή **$O\delta \perp x't$** .

↔ εκφώνηση σελ. 40

7 $180^\circ - x = x + 100^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$. Συμπληρωματική: 50° .

↔ εκφώνηση σελ. 40

8 $\Delta\hat{O}E = \Delta\hat{O}B + B\hat{O}E = \frac{A\hat{O}B}{2} + \frac{B\hat{O}G}{2} = \frac{A\hat{O}B + B\hat{O}G}{2}$. Αν είναι και παραπληρωματικές, τότε $\Delta\hat{O}E = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$, δηλαδή οι διχοτόμοι είναι κάθετες (Θεώρημα ΙΙΙ).

↔ εκφώνηση σελ. 40

9 Έστω $A\hat{O}\Delta = \Delta\hat{O}B = \varphi$. Τότε $A\hat{O}G = \varphi + \Delta\hat{O}G$ και $G\hat{O}B = \varphi - \Delta\hat{O}G$. Αφαιρώντας κατά μέλη: $A\hat{O}G - G\hat{O}B = 2\Delta\hat{O}G$, δηλαδή $\Delta\hat{O}G = \frac{A\hat{O}G - G\hat{O}B}{2}$. (Παρατήρησε την αναλογία με το Παράδειγμα 3 της §2.8!)

↔ εκφώνηση σελ. 40

Μάθημα 2.17 Έννοια και στοιχεία του κύκλου

1 Διάμετρος = $2 \cdot 5 = 10$ cm. Όχι: όπως θα αποδείξουμε (§3.12), κάθε χορδή είναι μικρότερη ή ίση με τη διάμετρο, άρα δεν μπορεί να είναι 12 cm.

↔ εκφώνηση σελ. 43

2 Α: $OA < 3 \Rightarrow$ **εσωτερικό**. Β: $OB = 3 \Rightarrow$ **σημείο του κύκλου**. Γ: $OG > 3 \Rightarrow$ **εξωτερικό**.

↔ εκφώνηση σελ. 43

3 Είναι τα σημεία Μ με $\rho < OM < R$, δηλαδή τα σημεία του **κυκλικού δακτυλίου** ανάμεσα στους δύο κύκλους (χωρίς τα σημεία των κύκλων).

↔ εκφώνηση σελ. 44

4 $OB = \rho$ και $BG = OB = \rho$, οπότε $OG = 2\rho > \rho$: το Γ είναι **εξωτερικό**. Η σειρά είναι Α, Ο, Β, Γ, άρα $AG = \rho + \rho + \rho = 3\rho$.

↔ εκφώνηση σελ. 44

Μάθημα 2.18 Επίκεντρα γωνία και αντίστοιχο τόξο

1 Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες: $A\hat{O}B = G\hat{O}\Delta$. Ίσες επίκεντρες γωνίες βαίνουν σε ίσα τόξα, άρα $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$.

↔ εκφώνηση σελ. 47

2 Όχι. Τα τόξα ανήκουν σε άνισους κύκλους, οπότε δεν συγκρίνονται (έχουν το ίδιο μέτρο σε μοίρες, αλλά δεν είναι ίσα). Το θεώρημα ισχύει μόνο για τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων.

↔ εκφώνηση σελ. 47

3 Το μέσο ενός τόξου είναι μοναδικό, άρα **$M \equiv N$** .

↔ εκφώνηση σελ. 47

4 Η προέκταση ON της διχοτόμου OM της $A\hat{O}G$ είναι διχοτόμος της κατακορυφήν γωνίας $B\hat{O}G'$ (Θεώρημα ΙΙ της §2.16), αφού οι OB, OG' είναι προεκτάσεις των OA, OG. Άρα $B\hat{O}N = N\hat{O}G'$, οπότε $\widehat{BN} = \widehat{NG'}$: το N είναι μέσο του $\widehat{BG'}$.

↔ εκφώνηση σελ. 47

Μάθημα 2.19 Μέτρο τόξου και γωνίας

1 $2x + 3x + 4x = 360^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$. Τα τόξα είναι 80° , 120° , 160° .

↔ εκφώνηση σελ. 50

2 $180^\circ - 63^\circ 48' = 179^\circ 60' - 63^\circ 48' = 116^\circ 12'$.

↔ εκφώνηση σελ. 50

3 Ο λεπτοδείκτης κάνει πλήρη στροφή (360°) σε 60 λεπτά, άρα σε 20 λεπτά: 120° . Ο ωροδείκτης κάνει 360° σε 12 ώρες, δηλαδή 30° την ώρα, άρα σε 20 λεπτά: 10° .

↔ εκφώνηση σελ. 50

4 Το M είναι μέσο του ημικυκλίου, άρα $\widehat{MA} = \widehat{MB} = 90^\circ$. Επειδή το Σ είναι στο τόξο $\widehat{MB}$: $\widehat{SA} = \widehat{SM} + \widehat{MA} = \widehat{SM} + 90^\circ$ και $\widehat{SB} = \widehat{MB} - \widehat{MS} = 90^\circ - \widehat{SM}$. Αφαιρώντας: $\widehat{SA} - \widehat{SB} = 2\widehat{SM}$, δηλαδή $\widehat{SM} = \frac{1}{2}(\widehat{SA} - \widehat{SB})$.

↔ εκφώνηση σελ. 50

5 Ο λεπτοδείκτης στα 40 λεπτά βρίσκεται στις $40 \cdot 6^\circ = 240^\circ$ (μετρώντας από τη θέση των «12», δεξιόστροφα). Ο ωροδείκτης κινείται $0,5^\circ$ ανά λεπτό: στις 3:40 βρίσκεται στις $3 \cdot 30^\circ + 40 \cdot 0,5^\circ = 90^\circ + 20^\circ = 110^\circ$. Η γωνία των δεικτών είναι $240^\circ - 110^\circ = 130^\circ$.

↔ εκφώνηση σελ. 50

Μάθημα 2.20 Τεθλασμένη γραμμή και πολύγωνο

1 (α) $\frac{5 \cdot 2}{2} = 5$. (β) $\frac{10 \cdot 7}{2} = 35$.

↔ εκφώνηση σελ. 53

2 $\frac{v(v-3)}{2} = v \Leftrightarrow v - 3 = 2 \Leftrightarrow v = 5$: το πεντάγωνο.

↔ εκφώνηση σελ. 53

3 $B\Gamma = 12$ cm. Τότε $\Gamma\Delta + \Delta A = 30 - 6 - 12 = 12$ cm, άρα $\Gamma\Delta = \Delta A = 6$ cm.

↔ εκφώνηση σελ. 53

4 $\frac{v(v-3)}{2} = 25 \Leftrightarrow v^2 - 3v - 50 = 0$. Η διακρίνουσα είναι $9 + 200 = 209$, που δεν είναι τέλειο τετράγωνο, άρα δεν υπάρχει φυσικός v . Δεν υπάρχει τέτοιο πολύγωνο (ελέγχουμε: $v = 9$ δίνει 27, $v = 8$ δίνει 20).

↔ εκφώνηση σελ. 53

Διαγώνισμα Κεφαλαίου 2

01 α) Λ (θα ταυτίζονταν), β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ (τόξα άνισων κύκλων δεν συγκρίνονται), στ) Σ ($-\frac{6 \cdot 3}{2} = 9$).

02 $AG = 22$ cm, $AM = 4$ cm, $AN = 11$ cm. Τα M, N είναι προς το ίδιο μέρος του A, άρα $MN = AN - AM = 7$ cm ($= \frac{B\Gamma}{2}$).
 $BN = AN - AB = 11 - 8 = 3$ cm.

03 (i) Τα A, O, Γ συνευθειακά $\Leftrightarrow$ οι εφεξής γωνίες είναι παραπληρωματικές: $8x + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$, οπότε $\widehat{AOB} = 70^\circ$, $\widehat{BO\Gamma} = 110^\circ$. (ii) Η γωνία των διχοτόμων είναι $35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$.

- Θ4 (i) $2x + 3x + 3x + 4x = 360^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$: $\widehat{AB} = 60^\circ$, $\widehat{BG} = 90^\circ$, $\widehat{GD} = 90^\circ$, $\widehat{DA} = 120^\circ$. (ii) $\widehat{BGD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, άρα τα B, Δ χωρίζουν τον κύκλο σε δύο ημικύκλια, δηλαδή η **BD είναι διάμετρος**. (iii) $\widehat{ABG} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$, άρα $\widehat{AOG} = 150^\circ$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Τρίγωνα

Μάθημα 3.1 Στοιχεία και είδη τριγώνων

- Τα ύψη από τις κορυφές A και Γ (κορυφές οξείων γωνιών) πέφτουν στις προεκτάσεις των πλευρών BG και AB αντίστοιχα, δηλαδή **έξω** από το τρίγωνο. Το ύψος από το B είναι μέσα.
↔ εκφώνηση σελ. 59
- Πλευρά = $27 : 3 = 9$ cm. Η διάμεσος χωρίζει την απέναντι πλευρά σε δύο τμήματα **4,5 cm** το καθένα.
↔ εκφώνηση σελ. 59
- Βάση x, σκέλη $2x$: $5x = 45 \Rightarrow x = 9$. Πλευρές: **9, 18, 18 cm**.
↔ εκφώνηση σελ. 59
- $v_B = AB$ (αφού $AB \perp AG$) και $v_G = AG$. Τα τρία ύψη (ή οι φορείς τους) διέρχονται από την κορυφή **A** της ορθής γωνίας.
↔ εκφώνηση σελ. 60

Μάθημα 3.2 Ισότητα τριγώνων - 1ο κριτήριο (ΠΓΠ)

- Τα τρίγωνα AΔE και ABΓ έχουν $AD = AB$, $AE = AG$ και $\widehat{DAE} = \widehat{BAG}$ (κατακορυφήν). Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε **DE = BG**.
↔ εκφώνηση σελ. 64
- Έστω α η πλευρά και $\kappa = BD = GE = AZ$. Οι γωνίες $\widehat{DBE}$, $\widehat{E\Gamma Z}$, $\widehat{Z\Delta A}$ είναι παραπληρωματικές των (ίσων) γωνιών του ισόπλευρου, άρα ίσες. Τα τρίγωνα ΔBE, EΓZ, ZΔA έχουν: $BD = GE = AZ = \kappa$, $BE = \Gamma Z = \Delta A = \alpha + \kappa$ και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες. Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ) και $DE = EZ = ZA$: το ΔEZ είναι ισόπλευρο.
↔ εκφώνηση σελ. 64
- Έστω $AB\Gamma = A'B'\Gamma'$ και AM, A'M' οι διάμεσοι προς τις BG, BΓ'. Τα τρίγωνα ABM, A'B'M' έχουν $AB = A'B'$, $BM = \frac{BG}{2} = \frac{B'\Gamma'}{2} = B'M'$ και $\widehat{B} = \widehat{B'}$. Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ) και **AM = A'M'**.
↔ εκφώνηση σελ. 64
- Τα τρίγωνα AED και AGΔ έχουν $AE = AG$, AD κοινή και $\widehat{EAD} = \widehat{GAD}$ (AD διχοτόμος). Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε **DE = ΔΓ**.
↔ εκφώνηση σελ. 65
- Από το Πόρισμα III: $GA = GB$ και $DA = DB$. Άρα τα τρίγωνα AΓB και AΔB είναι ισοσκελή, άρα $\widehat{GAB} = \widehat{GBA}$ και $\widehat{DAB} = \widehat{DBA}$. Προσθέτοντας (το AB βρίσκεται μέσα στις γωνίες $\widehat{GAD}$, $\widehat{GBD}$) παίρνουμε $\widehat{GAD} = \widehat{GBD}$.
↔ εκφώνηση σελ. 65
- Το M είναι μέσο του AD και του BG. Τα τρίγωνα MAΓ και MΔB έχουν $MA = MD$, $M\Gamma = MB$ και $\widehat{AM\Gamma} = \widehat{DMB}$ (κατακορυφήν): είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα **BA = ΔΓ**. Όμοια τα MAB και MΔΓ είναι ίσα, άρα **ΓΔ = AB**.
↔ εκφώνηση σελ. 65

- 7 Στο ισοσκελές η διχοτόμος από το Α είναι διάμεσος και ύψος· επειδή η διάμεσος από το Α είναι μοναδική (το μέσο Μ είναι μοναδικό), η ΑΜ συμπίπτει με τη διχοτόμο, άρα $AM \perp BG$. Η ΑΜ λοιπόν είναι κάθετη στη ΒΓ στο μέσο της, δηλαδή είναι η **μεσοκάθετος** της ΒΓ. Από το Πόρισμα ΙΙΙ, κάθε σημείο Δ της ΑΜ ισαπέχει από τα Β, Γ: $DB = DG$.

↔ εκφώνηση σελ. 65

Μάθημα 3.3–3.4 2ο (ΓΠΓ) και 3ο (ΠΠΠ) κριτήριο ισότητας

- 1 Έστω ABG με $AB = AG$ και BD, GE οι διχοτόμοι των $\hat{B}, \hat{G}$. Τα τρίγωνα DBG και EGB έχουν ΒΓ κοινή, $\hat{B} = \hat{G}$ και $\frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{G}}{2} = \hat{EGB}$. Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ) και $BD = GE$.

↔ εκφώνηση σελ. 69

- 2 Έστω $AB = AG$, BM και GN οι διάμεσοι προς τις AG, AB . Τα τρίγωνα MBG και NGB έχουν ΒΓ κοινή, $\hat{B} = \hat{G}$ και $\frac{AG}{2} = \frac{AB}{2} = BN$. Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $BM = GN$.

↔ εκφώνηση σελ. 69

- 3 Προεκτείνουμε τις διαμέσους ΑΜ, Α'Μ' κατά $MD = AM$ και $M'D' = A'M'$. Τότε (όπως στην άσκηση της §3.2) $BD = AG = \beta$ και $B'D' = \beta'$. Τα τρίγωνα $ABD, A'B'D'$ έχουν $AB = A'B', BD = B'D', AD = 2\mu_\alpha = A'D'$, άρα ίσα (ΠΠΠ). Έτσι $B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'$ και όμοια $M\hat{A}G = M'\hat{A}'G'$, οπότε $\hat{A} = \hat{A}'$. Με ΠΓΠ τα $ABG, A'B'G'$ είναι ίσα.

↔ εκφώνηση σελ. 69

- 4 Φέρνουμε τη διαγώνιο ΒΔ. Τα τρίγωνα ABD και GDB έχουν $AB = GD, AD = GB$ και ΒΔ κοινή, άρα είναι ίσα (ΠΠΠ) και $\hat{A} = \hat{G}$. Όμοια, με τη διαγώνιο ΑΓ, τα ABG και GDA είναι ίσα και $\hat{B} = \hat{D}$.

↔ εκφώνηση σελ. 69

- 5 Οι $\hat{ABE}, \hat{AGD}$ είναι παραπληρωματικές των ίσων $\hat{B}, \hat{G}$, άρα ίσες. Τα ABE και AGD έχουν $AB = AG, BE = GD, \hat{ABE} = \hat{AGD}$: ίσα (ΠΓΠ). Άρα (i) $AE = AD$, το ADE ισοσκελές, και (ii) $B\hat{A}E = G\hat{A}D$.

↔ εκφώνηση σελ. 69

- 6 Ίσες χορδές $\Rightarrow$ ίσα (μικρά) τόξα: $\widehat{AB} = \widehat{GD}$ (Πόρισμα ΙΙΙ). Τότε τα μισά τους είναι ίσα: $\widehat{AM} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{GD}}{2} = \widehat{GN}$. Ίσα τόξα έχουν ίσες χορδές (Πόρισμα ΙV §3.2), άρα $MA = NG$.

↔ εκφώνηση σελ. 70

- 7 $BA = BD$ (ακτίνες του πρώτου κύκλου), άρα το Β ισαπέχει από τα Α, Δ και ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΔ (Πόρισμα ΙΙ). Όμοια $GA = GD$, άρα και το Γ ανήκει στη μεσοκάθετο. Δύο διαφορετικά σημεία ορίζουν μία ευθεία, άρα η **ΒΓ είναι η μεσοκάθετος του ΑΔ**.

↔ εκφώνηση σελ. 70

Μάθημα 3.5–3.6 Κάθετος από σημείο - Ισότητα ορθογώνιων τριγώνων

- 1 Έστω ε η ευθεία, $AK \perp \varepsilon$ και $BL \perp \varepsilon$. Τα ορθογώνια τρίγωνα AKM και BLM έχουν υποτείνουσες $MA = MB$ και $\hat{AMK} = \hat{BML}$ (κατακορυφήν). Άρα είναι ίσα (Θ. Ι) και $AK = BL$. (Αν $\varepsilon \perp AB$, οι αποστάσεις είναι $MA = MB$.)

↔ εκφώνηση σελ. 75

- 2 Τα ορθογώνια MDB και MEG έχουν υποτείνουσες $MB = MG$ και $\hat{B} = \hat{G}$, άρα ίσα (Θ. Ι): $MD = ME$. (Αλλιώς: η ΑΜ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$, άρα το Μ ισαπέχει από τις πλευρές της.)

↔ εκφώνηση σελ. 75

- 3 Τα ορθογώνια ZDB και HEG έχουν $BD = GE$ (κάθετες πλευρές) και $\hat{B} = \hat{G}$ (προσκειμένες οξείες). Άρα ίσα (ΓΠΓ): $DZ = EH$.

↔ εκφώνηση σελ. 75

- 4 Φέρνουμε τα αποστήματα $OK \perp AB$ και $OL \perp ΓΔ$. Ίσες χορδές έχουν ίσα αποστήματα: $OK = OL$. Το O είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας που σχηματίζουν οι ευθείες PAB και $ΠΓΔ$ και ισαπέχει από τις πλευρές της, άρα (Θ) . IV) ανήκει στη διχοτόμο της: η **PO είναι διχοτόμος**.

↔ εκφώνηση σελ. 75

- 5 Έστω AH , AM το ύψος και η διάμεσος (και $A'H'$, $A'M'$ στο άλλο τρίγωνο). Τα ορθογώνια AHM και $A'H'M'$ έχουν υποτείνουσες $AM = A'M'$ και $AH = A'H'$, άρα είναι ίσα (Θ, II) , οπότε $HM = H'M'$. Ονομάζουμε τις κορυφές ώστε τα H , B να βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του M και τα H' , B' προς το ίδιο μέρος του M' . Επειδή $BM = B'M' = \frac{\alpha}{2}$, έχουμε $BH = |BM - HM| = B'H'$ και $ΓH = ΓM + MH = Γ'M'$. Τα ορθογώνια AHB , $A'H'B'$ έχουν τις κάθετες πλευρές ίσες, άρα $AB = A'B'$ όμοια $ΑΓ = ΑΤ'$. Με ΠΠΠ τα τρίγωνα $ABΓ$, $A'B'T'$ είναι ίσα.

↔ εκφώνηση σελ. 75

- 6 Φέρνουμε το απόστημα $OK \perp AB$. Η OK είναι απόστημα και της χορδής $ΓΔ$ του μικρού κύκλου. Από το Πόρισμα II: $KA = KB$ και $KΓ = ΚΔ$. Αφαιρώντας: $ΑΓ = KA - KΓ = KB - ΚΔ = ΔB$.

↔ εκφώνηση σελ. 75

Μάθημα 3.7 Βασικοί γεωμετρικοί τόποι: κύκλος, μεσοκάθετος, διχοτόμος

- 1 Είναι ο κύκλος (**K, 3 cm**).
- 2 Το σημείο πρέπει να ανήκει στη μεσοκάθετο του AB και στην ϵ , άρα είναι η **τομή** τους. Αν η μεσοκάθετος τέμνει την ϵ , υπάρχει **μία** λύση· αν δεν την τέμνει (όταν $AB \perp \epsilon$, τότε η μεσοκάθετος είναι παράλληλη στην ϵ), **καμία**· αν συμπίπτει με την ϵ , **άπειρες**.
- 3 Το σημείο ανήκει στη διχοτόμο $Οδ$ της γωνίας (ισαπέχει από τις πλευρές) και στον κύκλο (O , 4 cm). Είναι το σημείο τομής της ημιευθείας $Οδ$ με τον κύκλο: **μία** λύση.
- 4 Το M είναι η τομή της μεσοκαθέτου του AB με την ϵ . Το σημείο τομής του AB με την ϵ ισαπέχει από τα A , B μόνο αν είναι το μέσο του AB , κάτι που δεν ισχύει γενικά.

↔ εκφώνηση σελ. 78

↔ εκφώνηση σελ. 78

↔ εκφώνηση σελ. 78

↔ εκφώνηση σελ. 78

Μάθημα 3.8–3.9 Κεντρική και αξονική συμμετρία

- 1 (α) **Κανέναν**. (β) **Έναν** (τη μεσοκάθετο της βάσης). (γ) **Τρεις**. (δ) **Άπειρους**: την ίδια την ευθεία και κάθε ευθεία κάθετη σε αυτήν.
- 2 Αν K' το συμμετρικό του K ως προς O και M' το συμμετρικό ενός σημείου M του κύκλου, τότε $K'M' = KM = \rho$ (το συμμετρικό τμήματος είναι ίσο τμήμα). Άρα όλα τα M' ανήκουν στον κύκλο (**K', ρ**) — και αντίστροφα κάθε σημείο του (K', ρ) είναι συμμετρικό σημείου του (K, ρ) .
- 3 Η $ΑΔ$ είναι η μεσοκάθετος της $BΓ$, άρα το συμμετρικό του B είναι το $Γ$. Το συμμετρικό του A είναι το ίδιο το A και το συμμετρικό του μέσου M του $ΑΓ$ είναι το μέσο N του AB . Άρα το συμμετρικό της BM είναι η $ΓN$, οπότε $BM = ΓN$ (οι διάμεσοι προς τις ίσες πλευρές είναι ίσες).

↔ εκφώνηση σελ. 81

↔ εκφώνηση σελ. 82

↔ εκφώνηση σελ. 82

- 4 Η ε είναι μεσοκάθετος του AA' , άρα $MA = MA'$ και (ισοσκελές MAA' , η ε ύψος άρα διχοτόμος) η ε διχοτομεί την $\widehat{AMA'}$. Έτσι η γωνία της MA με την ε είναι ίση με τη γωνία της MA' με την ε , η οποία είναι κατακορυφήν με τη γωνία της MB με την ε (αφού A', M, B συνευθειακά). Άρα οι MA, MB σχηματίζουν ίσες γωνίες με την ε . (Έτσι ανακλάται μια ακτίνα φωτός σε έναν καθρέφτη!)

↔ εκφώνηση σελ. 82

Μάθημα 3.10 Εξωτερική γωνία τριγώνου

- 1 (α) Όχι (άθροισμα 180°). (β) Μπορεί (άθροισμα $170^\circ < 180^\circ$). (γ) Όχι (άθροισμα 180°).
↔ εκφώνηση σελ. 85
- 2 $\hat{\Gamma} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$, **αμβλεία**. Η $\hat{A}$ είναι απέναντι εσωτερική της $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\zeta}$, άρα $\hat{A} < 70^\circ$: **δεν** μπορεί να είναι 80° .
↔ εκφώνηση σελ. 85
- 3 Προεκτείνουμε τη BM ώστε να τέμνει την AG στο Δ . Η $B\hat{M}\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου $M\Delta\Gamma$, άρα $B\hat{M}\Gamma > M\hat{\Delta}\Gamma$. Η $M\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου $AB\Delta$, άρα $B\hat{\Delta}\Gamma > \hat{A}$. Επομένως **$B\hat{M}\Gamma > \hat{A}$** .
↔ εκφώνηση σελ. 85
- 4 Αφού $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} < 180^\circ$, έχουμε $2\hat{B} < 180^\circ$, άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} < 90^\circ$: **οξείες**.
↔ εκφώνηση σελ. 85
- 5 Από το Πόρισμα (i), ένα τρίγωνο έχει το πολύ μία γωνία ορθή ή αμβλεία, άρα οι άλλες δύο (τουλάχιστον) είναι **οξείες**. Η τρίτη μπορεί να είναι οξεία (οξυγώνιο), ορθή (ορθογώνιο) ή αμβλεία (αμβλυγώνιο).
↔ εκφώνηση σελ. 85

Μάθημα 3.11–3.12 Ανισοτικές σχέσεις και τριγωνική ανισότητα

- 1 (α) Ναι ($4 < 5$). (β) Όχι ($3 = 3$). (γ) Όχι ($16 > 15$). (δ) Ναι ($11 < 12$).
↔ εκφώνηση σελ. 89
- 2 Αν τα σκέλη ήταν $4: 9 < 4 + 4; \times$. Άρα τα σκέλη είναι 9 και η βάση 4 ($4 < 18 \checkmark$). Περίμετρος: $9 + 9 + 4 = \mathbf{22 \text{ cm}}$.
↔ εκφώνηση σελ. 89
- 3 $|8 - 5| < BG < 8 + 5 \Rightarrow 3 < BG < 13$. Ακέραιες τιμές: $4, 5, \dots, 12$, δηλαδή **9** δυνατά μήκη.
↔ εκφώνηση σελ. 89
- 4 Επειδή $AB < AG$, υπάρχει σημείο E της AG (μεταξύ A και Γ) με $AE = AB$. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Delta$ έχουν $AB = AE$, $A\Delta$ κοινή και $B\hat{A}\Delta = \hat{\Delta}A\Delta$ (διχοτόμος), άρα είναι ίσα (ΠΓΠ): $A\hat{\Delta}B = \hat{A}\hat{\Delta}E$. Επειδή το E είναι εσωτερικό σημείο της AG , η ΔE βρίσκεται στο εσωτερικό της $A\hat{\Delta}\Gamma$, άρα $A\hat{\Delta}E < A\hat{\Delta}\Gamma$. Επομένως **$A\hat{\Delta}B < A\hat{\Delta}\Gamma$** .
↔ εκφώνηση σελ. 89
- 5 **Αριστερή:** Στα τρίγωνα $MAB, MB\Gamma, M\Gamma A$: $MA + MB > \gamma$, $MB + M\Gamma > \alpha$, $M\Gamma + MA > \beta$. Προσθέτοντας: $2(MA + MB + M\Gamma) > 2\tau$.
Δεξιά: Από το Παράδειγμα: $MB + M\Gamma < \beta + \gamma$, $M\Gamma + MA < \alpha + \gamma$, $MA + MB < \alpha + \beta$. Προσθέτοντας: $2(MA + MB + M\Gamma) < 2(\alpha + \beta + \gamma) = 4\tau$, άρα $MA + MB + M\Gamma < 2\tau$.
↔ εκφώνηση σελ. 89
- 6 Έστω $AB\Gamma\Delta$ με διαγώνιους $AG, B\Delta$ που τέμνονται στο O . **Μεγαλύτερο από την ημιπερίμετρο:** στα τρίγωνα $OAB, OBG, O\Gamma\Delta, O\Delta A$: $OA + OB > AB$ κ.λπ. Προσθέτοντας: $2(AG + B\Delta) > \text{περίμετρος}$. **Μικρότερο από την περίμετρο:** στα τρίγωνα $AB\Gamma, A\Gamma\Delta$: $AG < AB + B\Gamma$, $AG < A\Delta + \Delta\Gamma$ · στα $AB\Delta, B\Gamma\Delta$: $B\Delta < AB + A\Delta$, $B\Delta < B\Gamma + \Gamma\Delta$. Προσθέτοντας: $2(AG + B\Delta) < 2 \cdot \text{περίμετρος}$.

↔ εκφώνηση σελ. 89

Μάθημα 3.13 Κάθετα και πλάγια τμήματα

- 1 (α) Ένα (το ίχνος της καθέτου). (β) Δύο, συμμετρικά ως προς το ίχνος. (γ) Κανένα (κάθε πλάγιο είναι $> 5 \text{ cm}$).
 ⇔ εκφώνηση σελ. 91
- 2 Επειδή οι $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ είναι οξείες, το H είναι μεταξύ B και Γ. Τα AB, AG είναι πλάγια τμήματα από το A προς τη BG με ίχνος καθέτου το H. Από το Θ. II: $AB < AG \Rightarrow HB < HG$.
 ⇔ εκφώνηση σελ. 91
- 3 Από την προηγούμενη άσκηση (για οξείες $\hat{B}, \hat{\Gamma}$): $HB < HG$, άρα το H βρίσκεται πιο κοντά στο B από το μέσο M, δηλαδή $HB < \frac{BG}{2} = MB$ · οπότε το M βρίσκεται μεταξύ H και Γ. (Αν $\hat{B}$ δεν είναι οξεία, το H βρίσκεται στην προέκταση της GB και το συμπέρασμα ισχύει προφανώς.)
 ⇔ εκφώνηση σελ. 91

Μάθημα 3.14–3.15 Ευθεία και κύκλος - Εφαπτόμενα τμήματα

- 1 (α) $\delta < \rho$: τέμνουσα. (β) $\delta = \rho$: εφαπτομένη. (γ) $\delta > \rho$: εξωτερική.
 ⇔ εκφώνηση σελ. 95
- 2 $PB = PA = 8 \text{ cm}$ · η PO διχοτομεί την $\hat{APB}$, άρα $\hat{APO} = 25^\circ$.
 ⇔ εκφώνηση σελ. 95
- 3 Έστω AB διάμετρος και $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι εφαπτόμενες στα A, B. Αφού $\varepsilon_1 \perp AB$ και $\varepsilon_2 \perp AB$, αν τέμνονταν σε σημείο P, από το P θα υπήρχαν δύο κάθετες στην ευθεία AB, άτοπο (μοναδικότητα καθέτου). Άρα **δεν τέμνονται**.
 ⇔ εκφώνηση σελ. 95
- 4 Έστω K, Λ, Μ, Ν τα σημεία επαφής στις AB, BG, ΓΔ, ΔΑ. Τα εφαπτόμενα τμήματα από κάθε κορυφή είναι ίσα: $AK = AN, BK = BL, GL = GM, DM = DN$. Τότε $AB + GL = (AK + KB) + (GM + ML) = AN + BL + GL + DN = (AN + ND) + (BL + LG) = AD + BG$.
 ⇔ εκφώνηση σελ. 95
- 5 $GM = GA$ και $DM = DB$ (εφαπτόμενα τμήματα από τα Γ, Δ). Περίμετρος $PG\Delta = PG + GL + DP = PG + (GM + MD) + DP = (PG + GA) + (PD + DB) = PA + PB = 2PA$, ανεξάρτητα από τη θέση του M.
 ⇔ εκφώνηση σελ. 95

Μάθημα 3.16 Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

- 1 $R - \rho < \delta < R + \rho \Rightarrow 4 < \delta < 8$.
 ⇔ εκφώνηση σελ. 97
- 2 $\rho_A + \rho_B = 5, \rho_B + \rho_\Gamma = 7, \rho_\Gamma + \rho_A = 6$. Άθροισμα: $\rho_A + \rho_B + \rho_\Gamma = 9$. Άρα $\rho_A = 2, \rho_B = 3, \rho_\Gamma = 4$.
 ⇔ εκφώνηση σελ. 98
- 3 Τα K, Λ είναι τα μέσα των AG, AD. Στο τρίγωνο AGΔ, το τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών είναι ίσο με το μισό της τρίτης (§5.6), άρα $KL = \frac{GD}{2}$.
 ⇔ εκφώνηση σελ. 98
- 4 Το A βρίσκεται στη διάκεντρο ΚΛ. Η εφαπτομένη του πρώτου κύκλου στο A είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΑ, δηλαδή στην ευθεία ΚΛ· όμοια η εφαπτομένη του δεύτερου είναι κάθετη στη ΛΑ, δηλαδή στην ίδια ευθεία ΚΛ. Από το Α άγεται μία μόνο κάθετη στην ΚΛ, άρα οι δύο εφαπτόμενες ταυτίζονται και είναι κάθετες στη διάκεντρο.
 ⇔ εκφώνηση σελ. 98

Μάθημα 3.17 Βασικές γεωμετρικές κατασκευές

- 1 Κατασκευάζουμε ορθή γωνία $\hat{xOy}$ και τη διχοτόμο της $O\delta$ ($\hat{xO\delta} = 45^\circ$). Η γωνία που σχηματίζει η $O\delta$ με την αντικείμενη Ox' της Ox είναι $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.
↔ εκφώνηση σελ. 101
- 2 Βρίσκουμε το μέσο M του AB (μεσοκάθετος). Στη συνέχεια βρίσκουμε τα μέσα K, Λ των AM και MB με τον ίδιο τρόπο. Τα $AK, KM, M\Lambda, \Lambda B$ είναι ίσα.
↔ εκφώνηση σελ. 101
- 3 Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο της $B\Gamma$, που την τέμνει στο μέσο M . Πάνω στη μεσοκάθετο παίρνουμε (με τον διαβήτη) σημείο A με $MA = v$. Το $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο: $AB = A\Gamma$ (A σημείο της μεσοκαθέτου) και $AM \perp B\Gamma$ με $AM = v$. Υπάρχουν δύο λύσεις, συμμετρικές ως προς τη $B\Gamma$.
↔ εκφώνηση σελ. 101
- 4 Το M ανήκει στη μεσοκάθετο του OA και στην Ox' είναι η τομή τους. Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο του OA (Πρόβλημα 2) και βρίσκουμε το σημείο τομής της με την Ox . (Το πρόβλημα έχει λύση όταν η μεσοκάθετος τέμνει την ημιευθεία Ox , δηλαδή όταν $\hat{xOA} < 90^\circ$, που ισχύει αν η $\hat{xOy}$ είναι οξεία.)
↔ εκφώνηση σελ. 101

Μάθημα 3.18 Βασικές κατασκευές τριγώνων

- 1 Ακολουθούμε το Πρόβλημα 3. Υπάρχει γιατί $|4 - 3| = 1 < 5 < 7 = 4 + 3$. (Το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$, όπως θα δεις στη B' Λυκείου με το Πυθαγόρειο θεώρημα.)
↔ εκφώνηση σελ. 103
- 2 Πρόβλημα 2 με $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \omega$. Έχει λύση αν $2\omega < 180^\circ$, δηλαδή $\omega < 90^\circ$ (οξεία).
↔ εκφώνηση σελ. 103
- 3 Αν M το μέσο της $B\Gamma$, το τρίγωνο $AM\Gamma$ έχει πλευρές $M\Gamma = \frac{\alpha}{2}$, $AM = \mu_\alpha$, $A\Gamma = \beta$, οπότε το κατασκευάζουμε πρώτο (Πρόβλημα 3). Έπειτα προεκτείνουμε τη GM κατά $MB = \frac{\alpha}{2}$. Λύση υπάρχει όταν τα $\frac{\alpha}{2}, \mu_\alpha, \beta$ σχηματίζουν τρίγωνο: $|\beta - \mu_\alpha| < \frac{\alpha}{2} < \beta + \mu_\alpha$.
↔ εκφώνηση σελ. 103

Διαγώνισμα Κεφαλαίου 3

- 01 α) Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. β) α) Λ , β) Σ , γ) Λ ($8 > 7$), δ) Σ , ε) Σ ($3 < 4 < 7$).
- 02 α) Τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ έχουν $AB = A\Gamma$, $AE = A\Delta$ και $\hat{A}$ κοινή: ίσα (ΠΓΠ), άρα $BE = \Gamma\Delta$. β) Από την ίδια ιδιότητα (απέναντι από τις ίσες $AE, A\Delta$): $\hat{ABE} = \hat{A\Gamma\Delta}$. γ) Αφού $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{ABE} = \hat{A\Gamma\Delta}$, αφαιρώντας: $\hat{OB\Gamma} = \hat{O\Gamma B}$. Το τρίγωνο $OB\Gamma$ έχει δύο γωνίες ίσες, άρα είναι ισοσκελές: $OB = O\Gamma$.
- 03 α) $PA = PB$ (εφαπτόμενα τμήματα) και $OA = OB$ (ακτίνες): τα P, O ισαπέχουν από τα A, B , άρα η PO είναι η μεσοκάθετος της AB . β) Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα: $MA = MB$. γ) Η PO διχοτομεί την $\hat{APB}$: $\hat{APO} = 35^\circ$.
- 04 α) Τα $AB\Delta, AE\Delta$ έχουν $AB = AE$, $A\Delta$ κοινή, $\hat{B\hat{A}\Delta} = \hat{\Delta\hat{A}E}$: ίσα (ΠΓΠ), άρα $\Delta B = \Delta E$ και β) $\hat{A\hat{E}\Delta} = \hat{B}$. γ) $A\Gamma > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{\Gamma}$ (§3.11). Η $\hat{\Delta E\Gamma}$ είναι παραπληρωματική της $\hat{A\hat{E}\Delta} = \hat{B}$, δηλαδή $\hat{\Delta E\Gamma} = 180^\circ - \hat{B}$. Επειδή $\hat{B} + \hat{\Gamma} < 180^\circ$ (§3.10), έχουμε $\hat{\Gamma} < 180^\circ - \hat{B} = \hat{\Delta E\Gamma}$. Άρα στο τρίγωνο $\Delta E\Gamma$, απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία $\hat{\Delta E\Gamma}$: $\Delta\Gamma > \Delta E = \Delta B$, δηλαδή $\Delta\Gamma > \Delta B$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Παράλληλες ευθείες

Μάθημα 4.1–4.2 Τέμνουσα δύο ευθειών και αίτημα παραλληλίας

- 1 Τέσσερις γωνίες (οι οξείες) είναι 48° και οι άλλες τέσσερις (οι αμβλείες) 132° .
↔ εκφώνηση σελ. 111
- 2 $x + y = 180^\circ$ και $x - y = 40^\circ \Rightarrow x = 110^\circ, y = 70^\circ$.
↔ εκφώνηση σελ. 111
- 3 Η AB είναι τέμνουσα των παραλλήλων ε , ΒΓ: η γωνία της ε με την AB (από τη μεριά του B) και η $\hat{B}$ είναι εντός εναλλάξ, άρα ίσες. Όμοια με τέμνουσα την ΑΓ. (Αυτή είναι η βασική ιδέα της απόδειξης του αθροίσματος γωνιών τριγώνου, §4.6!)
↔ εκφώνηση σελ. 111
- 4 $\hat{EAB} = \hat{ABG}$ (εντός εναλλάξ, $\Delta E \parallel B\Gamma$, τέμνουσα ΒΔ) και $\hat{ABG} = \hat{EBA}$ (ΒΔ διχοτόμος). Άρα $\hat{EAB} = \hat{EBA}$, οπότε το ΕΒΔ είναι ισοσκελές με $EB = ED$.
↔ εκφώνηση σελ. 111
- 5 Οι διχοτόμοι είναι παράλληλες και τέμνονται από την ε , άρα σχηματίζουν εντός εναλλάξ γωνίες ίσες: τα μισά των δύο εντός εναλλάξ γωνιών είναι ίσα, άρα και οι ίδιες οι γωνίες είναι ίσες. Επομένως $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.
↔ εκφώνηση σελ. 111
- 6 Αν α, β οι δύο γωνίες, τότε $\alpha + \beta = 180^\circ$. Στο τρίγωνο που σχηματίζουν οι διχοτόμοι με την τέμνουσα, οι δύο γωνίες είναι $\frac{\alpha}{2}$ και $\frac{\beta}{2}$, με άθροισμα 90° : άρα η τρίτη γωνία (στο M) είναι $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ (§4.6). Χωρίς §4.6: φέρνουμε από το M παράλληλη προς τις δύο ευθείες, όπως στο Παράδειγμα 2, και βρίσκουμε $\hat{M} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$.
↔ εκφώνηση σελ. 111

Μάθημα 4.3–4.4 Κατασκευή παράλληλης - Γωνίες με παράλληλες πλευρές

- 1 Υπάρχουν δύο τέτοιες ευθείες, μία σε κάθε ημιεπίπεδο της ε . Από το A περνά αυτή που βρίσκεται στο ημιεπίπεδο του A (και είναι η μοναδική παράλληλη από το A).
↔ εκφώνηση σελ. 113
- 2 Δεν μπορεί να είναι ίσες (τετραπλάσια), άρα είναι παραπληρωματικές: $x + 4x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$. Οι γωνίες είναι 36° και 144° .
↔ εκφώνηση σελ. 114
- 3 Είναι δύο ευθείες παράλληλες στην ε , μία σε κάθε ημιεπίπεδό της, σε απόσταση 2 cm.
↔ εκφώνηση σελ. 114

Μάθημα 4.5 Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

- 1 Στο περίκεντρο του τριγώνου ABΓ, δηλαδή στο σημείο τομής των μεσοκαθέτων των AB, BΓ.
↔ εκφώνηση σελ. 117
- 2 Στο έγκεντρο (τομή των διχοτόμων). Το μεγαλύτερο κυκλικό παρτέρι είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος.
↔ εκφώνηση σελ. 117

- 3 $\hat{I}\hat{B}\hat{\Gamma} = 25^\circ$, $\hat{I}\hat{\Gamma}\hat{B} = 35^\circ$. Στο τρίγωνο $IB\Gamma$: $\hat{B}\hat{I}\hat{\Gamma} = 180^\circ - 25^\circ - 35^\circ = 120^\circ$. (Γενικά $\hat{B}\hat{I}\hat{\Gamma} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$, εδώ $\hat{A} = 60^\circ$.)

↔ εκφώνηση σελ. 117

- 4 Έστω ότι το O ανήκει στη διάμεσο AM . Αν $O \neq M$, η ευθεία OM είναι η μεσοκάθετος της $B\Gamma$ (περνά από το μέσο M και από το O που ισαπέχει από τα B, Γ). Το A ανήκει στην ευθεία OM , δηλαδή στη μεσοκάθετο της $B\Gamma$, άρα $AB = AG$. Αν $O \equiv M$, το περίκεντρο είναι το μέσο της $B\Gamma$ και το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο A .

↔ εκφώνηση σελ. 117

Μάθημα 4.6–4.7 Άθροισμα γωνιών τριγώνου - Γωνίες με κάθετες πλευρές

- 1 $2x + 3x + 4x = 180^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$: **$40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$** .

↔ εκφώνηση σελ. 121

- 2 $x + (x + 20^\circ) = 90^\circ \Rightarrow x = 35^\circ$: **35° και 55°** .

↔ εκφώνηση σελ. 121

- 3 $\hat{A}_{\varepsilon\zeta} = \hat{B} + \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Gamma} = 110^\circ - 45^\circ = 65^\circ$, $\hat{A} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

↔ εκφώνηση σελ. 121

- 4 Η 100° (αμβλεία) δεν μπορεί να είναι γωνία βάσης ($2 \cdot 100^\circ > 180^\circ$), άρα είναι η γωνία κορυφής και οι άλλες δύο είναι **40°** η καθεμία. Για 50° : αν είναι γωνία κορυφής, οι άλλες είναι $65^\circ, 65^\circ$ · αν είναι γωνία βάσης, οι γωνίες είναι $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$.

↔ εκφώνηση σελ. 121

- 5 Τα τρίγωνα $MAB, MA\Gamma$ είναι ισοσκελή: $\hat{M}\hat{A}\hat{B} = \hat{B}$ και $\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}$. Άρα $\hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Επειδή $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$, έχουμε $2\hat{A} = 180^\circ$, δηλαδή **$\hat{A} = 90^\circ$** .

↔ εκφώνηση σελ. 121

- 6 Έστω $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ (οξείες). $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = 90^\circ - \hat{B}$, $\hat{B}\hat{A}\hat{E} = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$. Τότε $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{E} = \hat{B}\hat{A}\hat{E} - \hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = 90^\circ - \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} - 90^\circ + \hat{B} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.

↔ εκφώνηση σελ. 121

- 7 Δεν μπορεί να είναι ίσες, άρα παραπληρωματικές: $x + 2x = 180^\circ \Rightarrow$ **60° και 120°** .

↔ εκφώνηση σελ. 121

Μάθημα 4.8 Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου

- 1 (α) $5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$. (β) $10 \cdot 180^\circ = 1800^\circ$.

↔ εκφώνηση σελ. 123

- 2 $\hat{\Delta} = 360^\circ - 285^\circ = 75^\circ$, εξωτερική: **105°** .

↔ εκφώνηση σελ. 124

- 3 Κάθε εξωτερική γωνία είναι 40° , άρα $n = 360^\circ : 40^\circ = 9$.

↔ εκφώνηση σελ. 124

- 4 Έστω $AB\Gamma\Delta$ και οι διχοτόμοι των $\hat{A}, \hat{B}$ τέμνονται στο K . Στο τρίγωνο AKB : $\hat{A}\hat{K}\hat{B} = 180^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{B}}{2} = \frac{360^\circ - \hat{A} - \hat{B}}{2} = \frac{\hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2}$.

↔ εκφώνηση σελ. 124

- 5 $(n - 2) \cdot 180^\circ = 3 \cdot 360^\circ \Rightarrow n - 2 = 6 \Rightarrow n = 8$.

↔ εκφώνηση σελ. 124

Διαγώνισμα Κεφαλαίου 4

- Θ1 α) Βλ. θεωρία §4.6. β) α) Δ (παραπληρωματικές), β) Δ (από τις πλευρές), γ) Σ, δ) Δ (ίσες ή παραπληρωματικές).
- Θ2 α) $\hat{A} = 180^\circ - 70^\circ - 30^\circ = 80^\circ$. β) $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ είναι εξωτερική του $\triangle A\hat{B}\Delta$: $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = \hat{B} + \hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$. γ) $\hat{B}\hat{A}\hat{H} = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$, άρα $\hat{H}\hat{A}\hat{\Delta} = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ (= \frac{70^\circ - 30^\circ}{2} \checkmark)$.
- Θ3 α) Έστω Ax η προέκταση της BA και At η ημιευθεία της ε προς το μέρος του Γ . Τότε $x\hat{A}t = \hat{B}$ (αντίστοιχες, $\varepsilon \parallel B\Gamma$, τέμνουσα AB) και $t\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}$ (εντός εναλλάξ, τέμνουσα $A\Gamma$). Αφού $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, η At διχοτομεί την εξωτερική γωνία $x\hat{A}\hat{\Gamma}$. β) $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 65^\circ$, άρα η ε σχηματίζει γωνίες 65° με την AB και με την $A\Gamma$ (και 115° τις παραπληρωματικές).
- Θ4 α) $\varphi + \varphi_{\varepsilon\zeta} = 180^\circ$ και $\varphi = 4\varphi_{\varepsilon\zeta} \Rightarrow \varphi_{\varepsilon\zeta} = 36^\circ$. Άρα $\nu = 360^\circ : 36^\circ = 10$. β) $\delta = \frac{10 \cdot 7}{2} = 35$. γ) $(10 - 2) \cdot 180^\circ = 1440^\circ$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία

Μάθημα 5.1–5.2 Τετράπλευρα - Το παραλληλόγραμμα

- 1 $2(x + 2x) = 36 \Rightarrow x = 6$. Πλευρές: 6, 12, 6, 12 cm. ↔ εκφώνηση σελ. 132
- 2 $AG = 2 \cdot OA = 10$ cm, $OD = \frac{BD}{2} = 7$ cm. ↔ εκφώνηση σελ. 132
- 3 $\hat{\Delta}\hat{E}\hat{A} = \hat{E}\hat{A}\hat{B}$ (εντός εναλλάξ, $AB \parallel \Gamma\Delta$) και $\hat{E}\hat{A}\hat{B} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{E}$ (διχοτόμος). Άρα $\hat{\Delta}\hat{E}\hat{A} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{E}$ και το $\triangle A\hat{D}\hat{E}$ είναι ισοσκελές με $\Delta A = \Delta E$. ↔ εκφώνηση σελ. 132
- 4 Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AEB$ και $\triangle \Gamma Z\Delta$ έχουν υποτείνουσες $AB = \Gamma\Delta$ και $\hat{A}\hat{B}\hat{E} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{Z}$ (εντός εναλλάξ, $AB \parallel \Gamma\Delta$), άρα είναι ίσα: $AE = \Gamma Z$. Επίσης $AE \parallel \Gamma Z$ (κάθετες στην ίδια ευθεία $B\Delta$). Άρα το $\triangle A\hat{E}\hat{\Gamma}\hat{Z}$ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες: είναι παραλληλόγραμμα.
- 5 $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow A\hat{D} \parallel B\Gamma$ (εντός επί τα αυτά παραπληρωματικές, τέμνουσα AB). $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow AB \parallel \Gamma\Delta$ (τέμνουσα $B\Gamma$). Άρα είναι παραλληλόγραμμα (ορισμός). ↔ εκφώνηση σελ. 132
- 6 Οι διαγώνιοι $A\Delta$, $B\Gamma$ διχοτομούνται στο M , άρα το $\triangle A\hat{B}\hat{M}\hat{\Delta}$ είναι παραλληλόγραμμα. Επομένως $B\Delta = A\Gamma = \beta$. Στο τρίγωνο $\triangle A\hat{B}\hat{\Delta}$: $A\hat{D} < AB + B\Delta \Rightarrow 2\mu_\alpha < \gamma + \beta$. ↔ εκφώνηση σελ. 132

Μάθημα 5.3 Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμα

- 1 Αν $\hat{A}\hat{O}\hat{B} = 50^\circ$, στο ισοσκελές $\triangle OAB$: $\hat{O}\hat{A}\hat{B} = 65^\circ$, οπότε η $A\Gamma$ σχηματίζει 65° με την AB και 25° με την $A\Delta$. ↔ εκφώνηση σελ. 134

- 2 Οι διχοτόμοι δύο διαδοχικών γωνιών, π.χ. $\hat{A}$, $\hat{B}$, σχηματίζουν τρίγωνο με γωνίες $\frac{\hat{A}}{2}$, $\frac{\hat{B}}{2}$, άρα η τρίτη γωνία είναι $180^\circ - \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Έτσι το τετράπλευρο που σχηματίζουν έχει τέσσερις (άρα τρεις) ορθές γωνίες: είναι **ορθογώνιο**.

↔ εκφώνηση σελ. 134

- 3 Το ΑΔΜΕ έχει τρεις ορθές γωνίες ($\hat{A}$, $\hat{\Delta}$, $\hat{E}$), άρα είναι ορθογώνιο. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες: **ΔΕ = ΑΜ**.

↔ εκφώνηση σελ. 134

- 4 Διχοτομούνται $\Rightarrow$ παραλληλόγραμμο (κριτήριο iv). Παραλληλόγραμμο με ίσες διαγώνιους $\Rightarrow$ **ορθογώνιο**.

↔ εκφώνηση σελ. 134

Μάθημα 5.4–5.5 Ο ρόμβος και το τετράγωνο

- 1 Πλευρά: **10 cm**. Η μικρή διαγώνιος ενώνει τις κορυφές των αμβλειών γωνιών· χωρίζει τον ρόμβο σε δύο ισοσκελή τρίγωνα με γωνία κορυφής 60° (οξεία γωνία ρόμβου), δηλαδή ισόπλευρα: μικρή διαγώνιος = **10 cm**.

↔ εκφώνηση σελ. 137

- 2 Διχοτομούνται $\Rightarrow$ παραλληλόγραμμο· παραλληλόγραμμο με κάθετες διαγώνιους $\Rightarrow$ **ρόμβος**.

↔ εκφώνηση σελ. 137

- 3 Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΘ, ΒΖΕ, ΓΗΖ, ΔΘΗ έχουν τις κάθετες πλευρές ίσες ($AE = BZ = \dots$ και $A\Theta = BE = \dots$ ως διαφορές ίσων), άρα είναι ίσα: $EZ = ZH = H\Theta = \Theta E$ (ρόμβος). Επίσης $\hat{A}\hat{E}\hat{\Theta} + \hat{B}\hat{E}\hat{Z} = \hat{A}\hat{E}\hat{\Theta} + \hat{A}\hat{\Theta}\hat{E} = 90^\circ$, άρα $\hat{\Theta}\hat{E}\hat{Z} = 90^\circ$. Ρόμβος με ορθή γωνία: **τετράγωνο**.

↔ εκφώνηση σελ. 138

- 4 Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με $AB > BG$. Οι διχοτόμοι των $\hat{A}$, $\hat{B}$ τέμνονται στο Κ, των $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ στο Λ, των $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$ στο Μ και των $\hat{\Delta}$, $\hat{A}$ στο Ν. Από την άσκηση 2 της §5.3 το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο. Το τρίγωνο ΑΚΒ έχει γωνίες 45° , 45° , άρα $AK = BK$. Τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΛΓ έχουν $AD = BG$ και τις προσκείμενες γωνίες 45° και 45° , άρα είναι ίσα (ΓΠΓ): $AN = BL$. Τα Ν, Λ βρίσκονται πάνω στα ΑΚ, ΒΚ αντίστοιχα (αφού $AD < AB$), οπότε $KN = AK - AN = BK - BL = KL$. Ορθογώνιο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες: **τετράγωνο**.

↔ εκφώνηση σελ. 138

Μάθημα 5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα: το θεώρημα των μέσων

- 1 Κάθε πλευρά του νέου τριγώνου είναι το μισό μιας πλευράς: 4, 5, 6. Περίμετρος **15 cm** (το μισό της αρχικής).

↔ εκφώνηση σελ. 141

- 2 Αν Δ, Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, κάθε πλευρά των τριγώνων ΑΔΕ, ΔΒΖ, ΕΖΓ, ΖΕΔ ισούται με το μισό μιας πλευράς του ΑΒΓ (θεώρημα μέσων ή ορισμός μέσου). Π.χ. ΑΔΕ: $\frac{\gamma}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$. ΔΒΖ: $\frac{\gamma}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ κ.λπ. Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ).

↔ εκφώνηση σελ. 141

- 3 Παραλληλόγραμμο (Varignon) με πλευρές ίσες με $\frac{AG}{2}$ και $\frac{BA}{2}$. Επειδή $AG = BA$, όλες οι πλευρές είναι ίσες: **ρόμβος**.

↔ εκφώνηση σελ. 141

- 4 Από το Θ. ΙΙ: η ΜΔ (από το μέσο της ΒΓ, // ΑΒ) περνά από το μέσο της ΑΓ, άρα Δ μέσο της ΑΓ· όμοια Ε μέσο της ΑΒ. Από το Θ. Ι: **$\Delta E = \frac{BG}{2}$** .

↔ εκφώνηση σελ. 141

- 5 Φέρνουμε από το Μ την $MK \parallel BE$ (Κ στην ΑΓ). Στο τρίγωνο BEΓ, από το μέσο Μ της ΒΓ, η $MK \parallel BE$, άρα (Θ. ΙΙ) Κ μέσο της ΕΓ: $EK = KG$. Στο τρίγωνο ΑΜΚ, από το μέσο Ν της ΑΜ, η $NE \parallel MK$, άρα Ε μέσο της ΑΚ: $AE = EK$. Επομένως $AE = EK = KG$, δηλαδή $AE = \frac{AG}{3}$.

↔ εκφώνηση σελ. 141

Μάθημα 5.7–5.8 Βαρύκεντρο και ορθόκεντρο τριγώνου

1 $B\Theta = \frac{2}{3}BN \Rightarrow BN = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12 \text{ cm.}$

↔ εκφώνηση σελ. 144

- 2 Το ορθόκεντρο είναι η κορυφή Α (τα δύο ύψη είναι οι κάθετες πλευρές). Επειδή $H \equiv A$, το τρίγωνο «ΗΒΓ» ταυτίζεται με το ΑΒΓ και έχει ορθόκεντρο πάλι το Α (εκφυλισμένη περίπτωση της ορθοκεντρικής τετράδας).

↔ εκφώνηση σελ. 144

- 3 $\Theta B = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}ΓΚ = \Theta Γ$ και $\Theta N = \Theta K$. Τα τρίγωνα ΘBK και $\Theta ΓN$ έχουν $\Theta B = \Theta Γ$, $\Theta K = \Theta N$ και $\hat{B}\hat{\Theta}K = \hat{G}\hat{\Theta}N$ (κατακορυφήν): ίσα (ΠΓΠ), άρα $BK = ΓN$, δηλαδή $\frac{AB}{2} = \frac{AG}{2}$: $AB = AG$.

↔ εκφώνηση σελ. 145

- 4 Από την §3.12: $\mu_\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$, $\mu_\beta < \frac{\alpha + \gamma}{2}$, $\mu_\gamma < \frac{\alpha + \beta}{2}$. Προσθέτοντας: $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \alpha + \beta + \gamma$.

↔ εκφώνηση σελ. 145

- 5 Έστω Μ το μέσο της ΒΓ και Μ' η προβολή του. Στο τραπέζιο ΒΒ'Γ'Γ' η ΜΜ' είναι διάμεσος: $2MM' = BB' + ΓΓ'$. Έστω Δ το μέσο του ΑΘ, με προβολή Δ'. Επειδή $ΑΔ = ΔΘ = ΘΜ$, στο τραπέζιο ΑΑ'Θ'Θ': $2ΔΔ' = AA' + ΘΘ'$ και στο ΔΔ'Μ'Μ: $2ΘΘ' = ΔΔ' + ΜΜ'$. Από αυτές: $4ΘΘ' = 2ΔΔ' + 2ΜΜ' = AA' + ΘΘ' + BB' + ΓΓ'$, άρα $3ΘΘ' = AA' + BB' + ΓΓ'$.

↔ εκφώνηση σελ. 145

Μάθημα 5.9 Η διάμεσος του ορθογώνιου τριγώνου

- 1 Υποτείνουσα: 13 cm· ακτίνα περιγεγραμμένου: 6,5 cm.

↔ εκφώνηση σελ. 147

- 2 ΑΒ απέναντι από την 30° , άρα $BΓ = 2 \cdot 5 = 10 \text{ cm}$ και $AM = 5 \text{ cm}$.

↔ εκφώνηση σελ. 148

- 3 Το Μ είναι μέσο της ΒΓ και $AM = \frac{BΓ}{2}$, άρα $\hat{A} = 90^\circ$ (Θ. ΙΙ) και $\hat{\Gamma} = 55^\circ$.

↔ εκφώνηση σελ. 148

- 4 $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$. Η ΑΒ είναι απέναντι από την 30° , άρα $BΓ = 2AB$.

↔ εκφώνηση σελ. 148

- 5 Έστω ΑΜ η διάμεσος: $AM = MΓ = \frac{BΓ}{2}$, άρα $\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = 15^\circ$ και η εξωτερική γωνία $\hat{A}\hat{M}\hat{B} = 30^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΜ, η ΑΔ είναι απέναντι από τη γωνία 30° , άρα $AD = \frac{AM}{2} = \frac{BΓ}{4}$.

↔ εκφώνηση σελ. 148

Μάθημα 5.10–5.11 Τραπεζίο και ισοσκελές τραπέζιο

1 $\frac{15 + \beta}{2} = 12 \Rightarrow \beta = 9 \text{ cm.}$

↔ εκφώνηση σελ. 152

2 Οι γωνίες της ίδιας βάσης είναι ίσες: 70° , 70° , και οι άλλες δύο παραπληρωματικές: **110° , 110°** .

↔ εκφώνηση σελ. 152

3 $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ (εντός επί τα αυτά). Στο τρίγωνο ΑΕΔ: $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = 180^\circ - \frac{\hat{A} + \hat{\Delta}}{2} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

↔ εκφώνηση σελ. 152

4 Από την απόδειξη της ιδιότητας (ii), τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΑΔ είναι ίσα, άρα $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{B} = \hat{\Delta}\hat{B}\hat{A}$: το ΟΑΒ είναι ισοσκελές, **ΟΑ = ΟΒ**. Επειδή ΑΓ = ΒΔ, αφαιρώντας: **ΟΓ = ΟΔ**.

↔ εκφώνηση σελ. 152

5 Έστω ΓΔ = ΑΔ = α, ΑΒ = 2α. Φέρνουμε ΓΗ ⊥ ΑΒ: ΑΗΓΔ τετράγωνο, οπότε ΓΗ = α και ΗΒ = α. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΗΒ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{B} = 45^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

↔ εκφώνηση σελ. 152

Μάθημα 5.12 Αξιοσημείωτα σημεία και κύκλοι τριγώνου (ανακεφαλαίωση)

1 (α)–(3), (β)–(4), (γ)–(1), (δ)–(2).

↔ εκφώνηση σελ. 154

2 Η ΑΙ είναι η διχοτόμος της $\hat{A}$. Αφού $I \in AM$, η διχοτόμος από το Α ταυτίζεται με τη διάμεσο ΑΜ. Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά ΜΔ = ΑΜ: τα τρίγωνα ΜΑΓ, ΜΔΒ είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα ΒΔ = ΑΓ και $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{A} = \hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{A}\hat{M}$. Το τρίγωνο ΑΒΔ έχει δύο γωνίες ίσες, άρα **ΑΒ = ΒΔ = ΑΓ: ισοσκελές**.

↔ εκφώνηση σελ. 154

3 Το κέντρο ταυτίζεται με το βαρύκεντρο, άρα $R = A\Theta = \frac{2}{3}v$ και $\rho = \Theta M = \frac{1}{3}v$. (Παρατήρησε ότι $R = 2\rho$.)

↔ εκφώνηση σελ. 154

Διαγώνισμα Κεφαλαίου 5

Θ1 α) Βλ. θεωρία §5.6, Θεώρημα Ι. β) α) Λ (π.χ. ισοσκελές τραπέζιο), β) Σ, γ) Λ (ημιάθροισμα), δ) Σ.

Θ2 α) $AE = \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} = Z\Gamma$ και $AE \parallel Z\Gamma$, άρα **παραλληλόγραμμο**. β) Στο τρίγωνο ΔΛΓ: Ζ μέσο της ΔΓ και $ZK \parallel \Gamma\Delta$ ($AZ \parallel E\Gamma$), άρα Κ μέσο της ΔΛ: ΔΚ = ΚΛ. Στο τρίγωνο ΒΑΚ: Ε μέσο της ΑΒ και $EL \parallel AK$, άρα Λ μέσο της ΒΚ: ΚΛ = ΛΒ. Επομένως **ΔΚ = ΚΛ = ΛΒ**.

Θ3 α) $AM = MB = \frac{B\Gamma}{2}$ (§5.9) και $\hat{B} = 60^\circ$, άρα το ΑΜΒ είναι **ισόπλευρο**. β) $AB = MB = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow B\Gamma = 8 \text{ cm.}$ γ) $MN \parallel AB$ (μέσα πλευρών) και $AB \perp A\Gamma$, άρα **$MN \perp A\Gamma$** . $MN = \frac{AB}{2} = 2 \text{ cm.}$

Θ4 α) $AM = \frac{AB}{2} = \Gamma\Delta$ και $AM \parallel \Gamma\Delta \Rightarrow AM\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με $A\Delta = \Gamma\Delta$ (διαδοχικές ίσες) $\Rightarrow$ **ρόμβος**. Όμοια το ΜΒΓΔ. β) Από τους ρόμβους $M\Gamma = A\Delta = \Gamma B = MB$, άρα το ΜΒΓ είναι ισόπλευρο: $\hat{B} = 60^\circ = \hat{A}$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 120^\circ$. γ) $MA = MB = M\Gamma$, δηλαδή στο τρίγωνο ΑΓΒ η διάμεσος $\Gamma M = \frac{AB}{2}$, άρα $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = 90^\circ$ (§5.9): **$A\Gamma \perp B\Gamma$** .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 Εγγεγραμμένα σχήματα

Μάθημα 6.1–6.2 Εγγεγραμμένη γωνία

1 Τόξο: 76° , επίκεντρο: 76° .

↔ εκφώνηση σελ. 161

2 Κάθε γωνία είναι το μισό του απέναντι τόξου: $\hat{\Gamma} = 50^\circ$, $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 70^\circ$.

↔ εκφώνηση σελ. 161

3 Η γωνία απέναντι από τη διάμετρο βαίνει σε ημικύκλιο, άρα είναι ορθή. **Ναι**, ισχύει και το αντίστροφο: αν $\hat{A} = 90^\circ$, τότε βαίνει σε τόξο 180° , δηλαδή η ΒΓ είναι διάμετρος (ή: το μέσο της υποτείνουσας είναι το περίκεντρο, §5.9).

↔ εκφώνηση σελ. 161

4 $\widehat{BM} = \widehat{MG}$, άρα οι εγγεγραμμένες $\widehat{BAM}$ και $\widehat{MAG}$ που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες: η **ΑΜ είναι διχοτόμος**.

↔ εκφώνηση σελ. 161

5 $\hat{ABG} = 90^\circ$ (βαίνει σε ημικύκλιο του πρώτου κύκλου) και $\hat{ABD} = 90^\circ$ (στο δεύτερο). Οι γωνίες αυτές είναι εφεξής με άθροισμα 180° , άρα οι ΒΓ, ΒΔ είναι αντικείμενες: **Γ, Β, Δ συνευθειακά**.

↔ εκφώνηση σελ. 161

6 Στο ορθογώνιο ΡΒΓ, $MP = MB$, άρα $\hat{MPB} = \hat{B} = \hat{ABG}$. Η $\hat{ABG} = \hat{ADG}$ (ίδιο τόξο $\widehat{AG}$). Η προέκταση της ΜΡ τέμνει την ΑΔ στο Ν, με $\hat{APN} = \hat{MPB}$ (κατακορυφήν) $= \hat{ADP}$. Στο τρίγωνο ΑΡΔ: $\hat{PAD} + \hat{ADP} = 90^\circ$ (ορθή στο Ρ), άρα $\hat{PAN} + \hat{APN} = 90^\circ$, οπότε $\hat{ANP} = 90^\circ$: **PM ⊥ AD**.

↔ εκφώνηση σελ. 161

Μάθημα 6.3 Γωνία χορδής και εφαπτομένης - Γωνία δύο τεμνουσών

1 $\frac{70^\circ + 50^\circ}{2} = 60^\circ$.

↔ εκφώνηση σελ. 164

2 $\frac{130^\circ - 40^\circ}{2} = 45^\circ$.

↔ εκφώνηση σελ. 164

3 Έστω ε η εφαπτομένη στο Μ. Η γωνία χορδής-εφαπτομένης που σχηματίζει η ΜΑ με την ε ισούται με την εγγεγραμμένη $\widehat{MBA}$, που βαίνει στο τόξο $\widehat{MA}$. Επειδή $\widehat{MA} = \widehat{MB}$, είναι $\widehat{MBA} = \widehat{MAB}$. Άρα η ε και η ΑΒ σχηματίζουν με την τέμνουσα ΜΑ δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, οπότε **ε // ΑΒ**.

↔ εκφώνηση σελ. 164

4 $\hat{PAD} = \hat{PAB} + \hat{BAD}$ και $\hat{PAB} = \hat{\Gamma}$ (χορδής-εφαπτομένης). Η $\hat{PDA}$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΔΓ: $\hat{PDA} = \hat{\Gamma} + \hat{DAG}$. Αφού $\hat{BAD} = \hat{DAG}$, έχουμε $\hat{PAD} = \hat{PDA}$, άρα το ΡΑΔ είναι ισοσκελές: **PA = PD**.

↔ εκφώνηση σελ. 164

Μάθημα 6.4 Τόξο που δέχεται γνωστή γωνία

1 Δύο τόξα με χορδή ΑΒ, συμμετρικά ως προς την ΑΒ, που δέχονται γωνία 60° (χωρίς τα Α, Β). Κάθε τόξο είναι 300° (η χορδή ΑΒ αντιστοιχεί στο υπόλοιπο τόξο των 120°).

↔ εκφώνηση σελ. 167

- 2 Για κάθε τέτοια χορδή, $OM \perp PM$ (το απόστημα πηγαίνει στο μέσο), δηλαδή το M βλέπει το σταθερό τμήμα OP υπό ορθή γωνία. Ο τόπος είναι ο **κύκλος με διάμετρο OP** (μαζί με τα O, P, που αντιστοιχούν στη διάμετρο από το P και στη χορδή κάθετη στην OP).

↔ εκφώνηση σελ. 167

- 3 Η θέση του βρίσκεται στο τόξο με χορδή AB που δέχεται 40° και στο τόξο με χορδή BG που δέχεται 70° . Σχεδιάζει τα δύο τόξα (κατάλληλα ημιεπίπεδα) στον χάρτη· η **τομή** τους (εκτός από το B) είναι η θέση του σκάφους.

↔ εκφώνηση σελ. 167

Μάθημα 6.5 Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο

- 1 $\hat{B} = 100^\circ, \hat{\Gamma} = 60^\circ, \hat{\Delta} = 80^\circ$ (= εξωτερική στο B).

↔ εκφώνηση σελ. 169

- 2 Ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο· εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο. Ρόμβος και ορθογώνιο: **τετράγωνο**.

↔ εκφώνηση σελ. 169

- 3 $3x + x + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$. $\hat{B} = 90^\circ$, άρα $\hat{\Delta} = 90^\circ$.

↔ εκφώνηση σελ. 169

- 4 Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο ABΓΔ: η εξωτερική γωνία στο B, $\hat{A\hat{B}\hat{D}}$, ισούται με την απέναντι εσωτερική $\hat{A\hat{\Gamma}\hat{\Gamma}'}$. Στο εγγεγραμμένο ABΔ'Δ: $\hat{A\hat{B}\hat{D}} + \hat{A\hat{\Delta}\hat{\Delta}'} = 180^\circ$. Άρα $\hat{A\hat{\Gamma}\hat{\Gamma}'} + \hat{\Gamma\hat{\Delta}\hat{\Delta}'} = 180^\circ$: οι ΓΓ', ΔΔ' σχηματίζουν με την τέμνουσα ΓΔ εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές, δηλαδή $\Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta'$.

↔ εκφώνηση σελ. 169

Μάθημα 6.6 Το εγγράψιμο τετράπλευρο

- 1 (α) ✓, (β) ×, (γ) ✓, (δ) ×.

↔ εκφώνηση σελ. 172

- 2 Στο ισοσκελές τραπέζιο ABΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$): $\hat{A} = \hat{B}$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ (εντός επί τα αυτά). Άρα $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$: δύο απέναντι γωνίες παραπληρωματικές, άρα **εγγράψιμο**.

↔ εκφώνηση σελ. 173

- 3 Έστω $AB \perp \Gamma\Delta$ οι χορδές, που τέμνονται στο P, ώστε τα άκρα να διαδέχονται στον κύκλο με σειρά A, Γ, B, Δ. Οι εφαπτόμενες στα A και Γ τέμνονται σε σημείο K με $\hat{K} = 180^\circ - \widehat{A\Gamma}$ (στο τετράπλευρο OAKΓ οι γωνίες στα A, Γ είναι ορθές και $\hat{A\hat{O}\hat{\Gamma}} = \widehat{A\Gamma}$). Όμοια οι εφαπτόμενες στα B, Δ τέμνονται στο Λ (απέναντι κορυφή) με $\hat{\Lambda} = 180^\circ - \widehat{B\Delta}$. Η γωνία των χορδών είναι $\hat{A\hat{P}\hat{\Gamma}} = \frac{\widehat{A\Gamma} + \widehat{B\Delta}}{2} = 90^\circ$, άρα $\widehat{A\Gamma} + \widehat{B\Delta} = 180^\circ$. Επομένως $\hat{K} + \hat{\Lambda} = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$: δύο απέναντι γωνίες παραπληρωματικές, το τετράπλευρο είναι **εγγράψιμο**.

↔ εκφώνηση σελ. 173

- 4 Έστω H το ορθόκεντρο. Το BΔHZ είναι εγγράψιμο ($\hat{\Lambda} = \hat{Z} = 90^\circ$, απέναντι), άρα $\hat{H\hat{\Delta}\hat{Z}} = \hat{H\hat{B}\hat{Z}} = \hat{E\hat{B}\hat{A}} = 90^\circ - \hat{A}$. Όμοια το ΓΔHE είναι εγγράψιμο, άρα $\hat{H\hat{\Delta}\hat{E}} = \hat{H\hat{\Gamma}\hat{E}} = \hat{Z\hat{\Gamma}\hat{A}} = 90^\circ - \hat{A}$. Επομένως $\hat{H\hat{\Delta}\hat{Z}} = \hat{H\hat{\Delta}\hat{E}}$: η **ΑΔ διχοτομεί τη ΖΔΕ**· όμοια για τις άλλες.

↔ εκφώνηση σελ. 173

Μάθημα 6.7 Κατασκευές με γεωμετρικούς τόπους

- 1 $M \in T_1$ (δύο παράλληλες της ε σε απόσταση 2 cm) και $M \in T_2$ (μεσοκάθετος του AB). Αν η μεσοκάθετος δεν είναι παράλληλη στην ε , υπάρχουν 2 λύσεις· αν είναι παράλληλη, καμία ή άπειρες.
 $\hookrightarrow$ εκφώνηση σελ. 176
- 2 Η κορυφή της ορθής γωνίας βλέπει την υποτείνουσα $B\Gamma = \alpha$ υπό 90° : ανήκει στον κύκλο διαμέτρου $B\Gamma$. Απέχει u από τη $B\Gamma$: ανήκει στις παράλληλες σε απόσταση u . Λύση υπάρχει όταν $u \leq \frac{\alpha}{2}$ (η ακτίνα του κύκλου).
 $\hookrightarrow$ εκφώνηση σελ. 176
- 3 Το κέντρο ισαπέχει ρ από τις δύο ευθείες: ανήκει σε μια διχοτόμο τους (ισαπέχει) και σε μια παράλληλη σε απόσταση ρ από τη μία ευθεία. Οι τομές δίνουν 4 λύσεις (μία σε καθεμία από τις τέσσερις γωνίες).
 $\hookrightarrow$ εκφώνηση σελ. 176
- 4 Το A βλέπει τη $B\Gamma = \alpha$ υπό γωνία ω (τόποι: τόξα) και απέχει από το μέσο M της $B\Gamma$ απόσταση μ_α (τόπος: κύκλος (M, μ_α)). Το A είναι τομή των δύο τόπων. Λύση υπάρχει όταν ο κύκλος (M, μ_α) τέμνει τα τόξα.
 $\hookrightarrow$ εκφώνηση σελ. 176

Διαγώνισμα Κεφαλαίου 6

- Θ1 α) Βλ. θεωρία §6.5. β) α) Λ (το μισό), β) Σ, γ) Λ (μόνο το τετράγωνο), δ) Σ.
- Θ2 α) $\widehat{\Gamma A} = 360^\circ - 80^\circ - 140^\circ = 140^\circ$. $\hat{\Gamma} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$, $\hat{A} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$, $\hat{B} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$. β) $\widehat{PAB} = \hat{\Gamma} = 40^\circ$ (χορδής-εφαπτομένης). Η $\widehat{AB\Gamma} = 70^\circ$ είναι εξωτερική του τριγώνου PAB, άρα $\hat{P} = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.
- Θ3 α) $\widehat{H\Delta\Gamma} + \widehat{H\Gamma\epsilon} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ (απέναντι γωνίες): **εγγράψιμο**. β) Η AB φαίνεται από τα Δ, Ε υπό ορθή γωνία: $\widehat{A\Delta B} = \widehat{A\epsilon B} = 90^\circ \Rightarrow$ **εγγράψιμο** (κύκλος διαμέτρου AB). γ) Στο εγγράψιμο ABΔΕ, η εξωτερική γωνία στο Δ, $\widehat{\Gamma\Delta\epsilon}$, ισούται με την απέναντι εσωτερική $\widehat{B\Delta\epsilon} = \hat{A}$.
- Θ4 α) Ο κύκλος με διάμετρο AB (κέντρο το μέσο K, ακτίνα 4 cm), **χωρίς τα A, B**. β) Οι παράλληλες της AB σε απόσταση 3 cm < 4 cm τέμνουν τον κύκλο σε 2 σημεία η καθεμία: **4 σημεία**. γ) **Όχι**: κάθε σημείο του κύκλου απέχει από την AB το πολύ όσο η ακτίνα, 4 cm.



Τελείωσες; Συγχαρητήρια!

Για επανάληψη πριν από τις εξετάσεις, βρες στο **mathgreece.com** επαναληπτικά βίντεο, διαγωνίσματα και κουίζ — ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

www.mathgreece.com

Συνέχισε τη μελέτη σου στο **mathgreece.com**

Το βοήθημα που κρατάς είναι μέρος ενός μεγαλύτερου εγχειρήματος: της δημιουργίας ενός **πλήρους και ολοκληρωμένου δωρεάν φροντιστηρίου μαθηματικών** στα ελληνικά, ανοιχτού σε κάθε μαθητή, ανεξάρτητα από το πού μένει ή από το αν μπορεί να πληρώσει ιδιαίτερα μαθήματα.

Βιντεομαθήματα

για κάθε ενότητα της θεωρίας

Σημειώσεις & τυπολόγια

έτοιμα για επανάληψη

Κουίζ αυτοαξιολόγησης

με άμεση διόρθωση

Διαγωνίσματα

για προετοιμασία εξετάσεων

Podcasts & παιχνίδια γνώσεων

μάθηση με άλλο τρόπο

Γυμνάσιο · Λύκειο · Πανεπιστήμιο

όλα σε ένα μέρος



www.mathgreece.com

Σκάνανε τον κωδικό και ξεκίνα τώρα — δωρεάν