

ΠΛΗΡΕΣ ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΜΕΝΟ ΒΟΗΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Άλγεβρα • Γεωμετρία • Θεωρία • Λυμένα παραδείγματα
Συχνά λάθη • Άλυτες ασκήσεις με λύσεις στο τέλος



$$E = \pi r^2$$

εφω

$$\sqrt{2}$$

ημω

π

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Σ

$$y = \alpha/x$$



MATHGREECE.COM

Το δωρεάν ψηφιακό φροντιστήριο μαθηματικών

Τάσος Κοβατσίδης

Πρόλογος

Αγαπητή μαθήτριά, αγαπητέ μαθητή,

το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου γράφτηκε με έναν στόχο: να σε συνοδεύει σε κάθε βήμα της χρονιάς στα Μαθηματικά της Β' Γυμνασίου, σαν ένας καθηγητής που κάθεται δίπλα σου. Δεν είναι μια σύνοψη και δεν είναι ένα «πλάνο μελέτης». Είναι ένα πλήρες βοήθημα που ακολουθεί την ύλη της τάξης σου μάθημα προς μάθημα, εξηγεί τη θεωρία με απλά λόγια και πολλές εικόνες, και σε βάζει αμέσως να δουλέψεις.

Το βιβλίο χωρίζεται, όπως και η ύλη σου, σε **δύο μέρη**: το **Μέρος Α' (Άλγεβρα)** με τέσσερα κεφάλαια και το **Μέρος Β' (Γεωμετρία)** με άλλα τέσσερα. Κάθε κεφάλαιο ξεκινά με μια έγχρωμη σελίδα-εισαγωγή, και κάθε μάθημα ξεκινά σε νέα σελίδα, με τον αριθμό του μαθήματος σε έγχρωμο πλαίσιο. Στο πάνω μέρος **κάθε σελίδας** θα βλέπεις πάντα σε ποιο κεφάλαιο και σε ποιο μάθημα βρίσκεσαι, ώστε να μη χάνεσαι ποτέ.

Μέσα σε κάθε μάθημα θα βρεις: τη θεωρία οργανωμένη σε μικρές ενότητες, ορισμούς και κανόνες σε πλαίσια, πολλά **λυμένα παραδείγματα** που προχωρούν από τα εύκολα στα πιο απαιτητικά, τα σημεία όπου χρειάζεται **προσοχή**, τα **συχνά λάθη** που βλέπω χρόνια στα γραπτά των μαθητών (μαζί με τη σωστή εκδοχή τους) και, στο τέλος, **άλυτες ασκήσεις** για να δοκιμάσεις τον εαυτό σου. Οι λύσεις όλων των ασκήσεων βρίσκονται συγκεντρωμένες στο τέλος του βιβλίου. Η συμβουλή μου: πρώτα προσπάθησε μόνος σου, και μόνο μετά κοίτα τη λύση.

Τα Μαθηματικά δεν μαθαίνονται διαβάζοντας, μαθαίνονται **γράφοντας**. Να έχεις πάντα δίπλα σου μολύβι, χαρτί, χάρακα και, όπου χρειάζεται, μοιρογνωμόνιο και κομπιουτεράκι.



Το βιβλίο αυτό είναι κομμάτι του **mathgreece.com**, ενός πλήρους και **δωρεάν** ψηφιακού φροντιστηρίου μαθηματικών. Εκεί θα βρεις βιντεομαθήματα για κάθε ενότητα, σημειώσεις, κουίζ, podcasts και παιχνίδια γνώσεων. Ότι διαβάζεις εδώ, μπορείς να το δεις και να το ακούσεις εκεί.
www.mathgreece.com

Καλή μελέτη και καλή επιτυχία!

Τάσος Κοβατσίδης

mathgreece.com

Πώς να χρησιμοποιήσεις το βιβλίο

Σε κάθε μάθημα θα συναντήσεις τα παρακάτω «πλαίσια». Το καθένα έχει τον δικό του ρόλο — μάθε να τα αναγνωρίζεις από το χρώμα τους:

 Ορισμός

Εδώ γράφεται ο **ορισμός** μιας νέας έννοιας. Πρέπει να τον ξέρεις με ακρίβεια — συχνά ζητείται και στις γραπτές εξετάσεις.

 Κανόνες / Ιδιότητα / Τύπος

Τα πλαίσια με το έντονο περίγραμμα περιέχουν **κανόνες, ιδιότητες και τύπους** που θα χρησιμοποιείς συνεχώς στις ασκήσεις.

Παράδειγμα 1.2.3 — Λυμένο παράδειγμα

Η εκφώνηση του παραδείγματος.

ΛΥΣΗ Η πλήρης, αναλυτική λύση — γραμμένη όπως ακριβώς θα έπρεπε να τη γράψεις κι εσύ στο τετράδιο ή στο διαγώνισμα.

 Προσοχή!

Σημεία όπου οι μαθητές «σκοντάφτουν». Διάβασέ τα με ιδιαίτερη προσοχή.

 Συχνό λάθος Λάθος

Έτσι γράφει ο μαθητής που κάνει το λάθος...

 Σωστό

...κι έτσι είναι το σωστό.

Εξήγηση: γιατί γίνεται το λάθος και πώς να το αποφύγεις.

 Η συμβουλή του καθηγητή

Πρακτικές συμβουλές, «κόλπα» και τρόποι σκέψης από την εμπειρία της τάξης.

 Θυμάμαι από παλιότερα

Όσα χρειάζεται να θυμηθείς από προηγούμενες τάξεις για να καταλάβεις το νέο μάθημα.

 Λίγη ιστορία

Μικρές ιστορίες για τους ανθρώπους και τις ιδέες πίσω από τα Μαθηματικά.



Τα ροζ πλαίσια σε στέλνουν στο **mathgreece.com**, όπου κάθε μάθημα συνοδεύεται από βίντεο, κουίζ και επιπλέον υλικό — όλα δωρεάν.

www.mathgreece.com

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ Α' · ΑΛΓΕΒΡΑ

Κεφάλαιο 1ο · Εξισώσεις – Ανισώσεις	7
1.1 Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις.....	8
1.2 Εξισώσεις α' βαθμού	15
1.3 Επίλυση τύπων	21
1.4 Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων	25
1.5 Ανισώσεις α' βαθμού	30
Κεφάλαιο 2ο · Πραγματικοί αριθμοί	36
2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού	37
2.2 Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί	42
2.3 Προβλήματα με τετραγωνικές ρίζες	47
Κεφάλαιο 3ο · Συνάρτησεις	52
3.1 Η έννοια της συνάρτησης	53
3.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης.....	57
3.3 Η συνάρτηση $y = ax$	62
3.4 Η συνάρτηση $y = ax + \beta$	66
3.5 Η συνάρτηση $y = a/x$ – Η υπερβολή	70
Κεφάλαιο 4ο · Περιγραφική Στατιστική	75
4.1 Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα.....	76
4.2 Γραφικές παραστάσεις	80
4.3 Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.....	84
4.4 Ομαδοποίηση παρατηρήσεων	87
4.5 Μέση τιμή – Διάμεσος.....	90

ΜΕΡΟΣ Β' · ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Κεφάλαιο 1ο · Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο θεώρημα.....	95
1.1 Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας.....	96
1.2 Μονάδες μέτρησης επιφανειών	99
1.3 Εμβαδά επίπεδων σχημάτων	102
1.4 Πυθαγόρειο θεώρημα.....	107
Κεφάλαιο 2ο · Τριγωνομετρία – Διανύσματα	114
2.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας.....	115
2.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας	119
2.3 Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης.....	122
2.4 Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° και 60°	126
2.5 Η έννοια του διανύσματος	129
2.6 Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων	132
2.7 Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες	135
Κεφάλαιο 3ο · Μέτρηση κύκλου.....	139
3.1 Εγγεγραμμένες γωνίες.....	140
3.2 Κανονικά πολύγωνα.....	144
3.3 Μήκος κύκλου.....	148

3.4	Μήκος τόξου.....	151
3.5	Εμβαδόν κυκλικού δίσκου	154
3.6	Εμβαδόν κυκλικού τομέα	158

Κεφάλαιο 4ο · Γεωμετρικά στερεά – Μέτρηση στερεών 163

4.1	Ευθείες και επίπεδα στον χώρο	164
4.2	Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου.....	167
4.3	Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου	171
4.4	Η πυραμίδα και τα στοιχεία της	175
4.5	Ο κώνος και τα στοιχεία του.....	179
4.6	Η σφαίρα και τα στοιχεία της.....	182
4.7	Γεωγραφικές συντεταγμένες.....	185

Λύσεις των ασκήσεων..... 189

1

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο

Εξισώσεις – Ανισώσεις

$$x + 3 = 7$$

$$2x - 1 > 5$$


$$x = ;$$

Στο κεφάλαιο αυτό μαθαίνουμε να «μιλάμε» τη γλώσσα της Άλγεβρας. Θα χρησιμοποιήσουμε γράμματα για να παραστήσουμε αριθμούς, θα απλοποιούμε παραστάσεις, θα λύνουμε εξισώσεις και ανισώσεις πρώτου βαθμού και — το πιο σημαντικό — θα τις χρησιμοποιούμε για να λύνουμε πραγματικά προβλήματα.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 1.1** Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις
- 1.2** Εξισώσεις α' βαθμού
- 1.3** Επίλυση τύπων
- 1.4** Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων
- 1.5** Ανισώσεις α' βαθμού

ΜΑΘΗΜΑ

1.1

Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις

Στο μάθημα αυτό κάνουμε το πρώτο μεγάλο βήμα από την Αριθμητική στην Άλγεβρα: μαθαίνουμε να χρησιμοποιούμε γράμματα στη θέση αριθμών, να γράφουμε αλγεβρικές παραστάσεις και να τις απλοποιούμε.

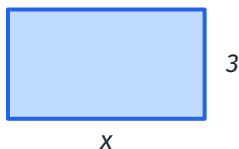
Τι είναι η μεταβλητή

Σκέψου ένα ταξί που χρεώνει **3 €** για την επιβίβαση και **0,80 €** για κάθε χιλιόμετρο. Αν η διαδρομή είναι 5 km, πληρώνεις $3 + 0,80 \cdot 5 = 7$ €. Αν είναι 12 km, πληρώνεις $3 + 0,80 \cdot 12 = 12,60$ €. Ο «κανόνας» είναι κάθε φορά ο ίδιος· αλλάζει μόνο ο αριθμός των χιλιομέτρων. Αντί να γράφουμε ξανά και ξανά τον υπολογισμό, παριστάνουμε τον αριθμό των χιλιομέτρων με ένα γράμμα, π.χ. x , και γράφουμε σύντομα:

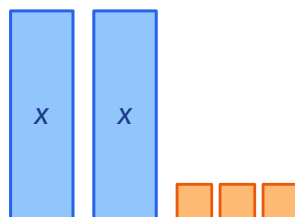
$$\text{Κόστος} = 3 + 0,8x$$

Ορισμός · Μεταβλητή

Ένα γράμμα (όπως x , y , α , β , ω) που χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε έναν **οποιοδήποτε αριθμό** από ένα σύνολο αριθμών λέγεται **μεταβλητή**.



Περίμετρος: $x + 3 + x + 3$



Δύο «πλακίδια» x και τρία μονάδας: $2x + 3$

Αλγεβρικές παραστάσεις

Ορισμός · Αλγεβρική παράσταση

Μια έκφραση που περιέχει **αριθμούς και μεταβλητές** συνδεδεμένους με πράξεις λέγεται **αλγεβρική παράσταση**. Παραδείγματα: $2x + 3$, $5\alpha - 2\beta$, $x^2 - 4x + 1$, $\frac{y+1}{2}$.

Μια παράσταση που περιέχει μόνο αριθμούς (π.χ. $3 \cdot 4 - 2$) λέγεται **αριθμητική παράσταση**.

► Πώς γράφουμε τον πολλαπλασιασμό

Στην Άλγεβρα συνήθως **παραλείπουμε το σύμβολο του πολλαπλασιασμού** ανάμεσα σε αριθμό και γράμμα ή ανάμεσα σε γράμματα:

Γράφουμε	Σημαίνει
$3x$	$3 \cdot x$
$\alpha\beta$	$\alpha \cdot \beta$
$5xy$	$5 \cdot x \cdot y$
x	$1 \cdot x$
$-x$	$(-1) \cdot x$

Ο αριθμός που γράφεται μπροστά από τα γράμματα λέγεται **συντελεστής**. Στο $7x$ ο συντελεστής είναι 7, στο $-x$ είναι -1 και στο x είναι 1 (που δεν γράφεται).

⚠ Προσοχή!

Ανάμεσα σε δύο **αριθμούς** το σύμβολο του πολλαπλασιασμού **δεν** παραλείπεται: το $3 \cdot 5$ δεν μπορεί να γραφτεί 35! Επίσης γράφουμε πρώτα τον αριθμό και μετά τα γράμματα: $3x$ και όχι $x3$.

📖 Αριθμητική τιμή μιας παράστασης

Όταν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές μιας παράστασης με συγκεκριμένους αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις, το αποτέλεσμα λέγεται **αριθμητική τιμή** της παράστασης για τις τιμές αυτές.

☆ Βήματα για την αριθμητική τιμή

- 1 Γράφουμε ξανά την παράσταση και στη θέση κάθε μεταβλητής βάζουμε τον αριθμό **μέσα σε παρένθεση** (ιδιαίτερα αν είναι αρνητικός).
- 2 Κάνουμε τις πράξεις με τη σωστή **σειρά**: δυνάμεις $\rightarrow$ πολλαπλασιασμοί/διαιρέσεις $\rightarrow$ προσθέσεις/αφαιρέσεις.

Παράδειγμα 1.1.1

Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης $A = 3x^2 - 5x + 2$ για $x = -2$.

ΛΥΣΗ

Αντικαθιστούμε το x με (-2) :

$$A = 3 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 2 = 3 \cdot 4 + 10 + 2 = 12 + 10 + 2 = 24$$

⊗ Συχνό λάθος

✗ Λάθος

$$-2^2 = 4$$

✓ Σωστό

$$(-2)^2 = 4, \text{ ενώ } -2^2 = -4$$

Στο -2^2 η δύναμη αφορά μόνο το 2 και το πρόσημο μένει μπροστά. Γι' αυτό, όταν αντικαθιστούμε αρνητικό αριθμό, τον βάζουμε **πάντα** σε παρένθεση.

📖 Όμοιοι όροι – Αναγωγή ομοίων όρων

Στην παράσταση $5x + 3y - 2x + 7$ οι προσθετέοι $5x, 3y, -2x, 7$ λέγονται **όροι** της παράστασης.

📖 Ορισμός · Όμοιοι όροι

Όροι που έχουν **ακριβώς το ίδιο γράμμα (ή γράμματα)**, με τους ίδιους εκθέτες, λέγονται **όμοιοι**.
Π.χ. οι $5x$ και $-2x$ είναι όμοιοι· οι $3x$ και $3x^2$ **δεν** είναι· οι $4\alpha\beta$ και $-\beta\alpha$ είναι όμοιοι (αφού $\beta\alpha = \alpha\beta$).

Τους όμοιους όρους μπορούμε να τους «μαζέψουμε» σε έναν, προσθέτοντας τους συντελεστές τους. Αυτό στηρίζεται στην **επιμεριστική ιδιότητα**: $5x - 2x = (5-2)x = 3x$. Η διαδικασία λέγεται **αναγωγή ομοίων όρων**.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x & x & x & x & x \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline x & x \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & x & x \\ \hline \end{array}$$

$5x - 2x = 3x$: από 5 «πλακίδια» x αφαιρούμε 2 και μένουν 3.

Παράδειγμα 1.1.2

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις: α) $7\alpha + 2\beta - 3\alpha + \beta$ β) $4x - 5 + x - 2x + 8$ γ) $2x^2 + 3x - x^2 - 5x$

ΛΥΣΗ

α) Ομαδοποιούμε τους όμοιους όρους: $(7\alpha - 3\alpha) + (2\beta + \beta) = 4\alpha + 3\beta$.

β) $(4x + x - 2x) + (-5 + 8) = 3x + 3$.

γ) $(2x^2 - x^2) + (3x - 5x) = x^2 - 2x$. Οι όροι x^2 και x δεν είναι όμοιοι, γι' αυτό σταματάμε εδώ.

⊗ Συχνό λάθος

✗ Λάθος

$$3x + 2y = 5xy \quad \text{ή} \quad 2x + 3 = 5x$$

✓ Σωστό

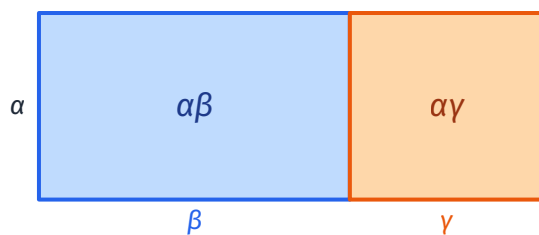
Οι $3x + 2y$ και $2x + 3$ **δεν** απλοποιούνται άλλο.

Προσθέτουμε μόνο όμοιους όρους. «3 μήλα + 2 πορτοκάλια» δεν κάνουν «5 μηλοπορτοκάλια»!

📖 Επιμεριστική ιδιότητα – Απαλοιφή παρενθέσεων

☆ Επιμεριστική ιδιότητα

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \alpha(\beta - \gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$$



Το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

☆ Κανόνες απαλοιφής παρενθέσεων

- Αν μπροστά από την παρένθεση υπάρχει $+$, τη βγάζουμε και οι όροι μένουν **όπως είναι**:
 $+(\alpha - \beta + \gamma) = \alpha - \beta + \gamma$.
- Αν μπροστά από την παρένθεση υπάρχει $-$, τη βγάζουμε και **αλλάζουμε το πρόσημο σε όλους** τους όρους της: $-(\alpha - \beta + \gamma) = -\alpha + \beta - \gamma$.
- Αν μπροστά υπάρχει **αριθμός**, πολλαπλασιάζουμε με αυτόν **κάθε** όρο της παρένθεσης (προσέχοντας τα πρόσημα).

Παράδειγμα 1.1.3

Να απλοποιηθεί η παράσταση $B = 3(2x - 1) - (4x - 5) + 2(x + 3)$.

ΛΥΣΗ

$$B = 6x - 3 - 4x + 5 + 2x + 6$$

$$B = (6x - 4x + 2x) + (-3 + 5 + 6) = 4x + 8$$

Παράδειγμα 1.1.4

Να απλοποιηθεί η $\Gamma = -2(3\alpha - \beta) - 4(\beta - 2\alpha) + 5\beta$ και να βρεθεί η τιμή της για $\alpha = -1, \beta = \frac{1}{2}$.

ΛΥΣΗ

$$\Gamma = -6\alpha + 2\beta - 4\beta + 8\alpha + 5\beta = 2\alpha + 3\beta$$

$$\text{Για } \alpha = -1, \beta = \frac{1}{2}: \Gamma = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot \frac{1}{2} = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}.$$

💡 Συμβουλή

Πάντα πρώτα **απλοποιούμε** και μετά αντικαθιστούμε. Οι πράξεις γίνονται λιγότερες και τα λάθη σπανιότερα.

⊗ Συχνό λάθος

✗ Λάθος

$$-(3x - 2) = -3x - 2$$

✓ Σωστό

$$-(3x - 2) = -3x + 2$$

Το «-» μπροστά από την παρένθεση αλλάζει το πρόσημο σε **όλους** τους όρους, όχι μόνο στον πρώτο.

⊗ Συχνό λάθος

✗ Λάθος

$$2(x + 5) = 2x + 5$$

✓ Σωστό

$$2(x + 5) = 2x + 10$$

Ο αριθμός μπροστά από την παρένθεση πολλαπλασιάζει **κάθε** όρο της.

📖 Από τη φυσική γλώσσα στη γλώσσα της Άλγεβρας

Μια από τις πιο χρήσιμες δεξιότητες είναι να «μεταφράζουμε» λεκτικές φράσεις σε αλγεβρικές παραστάσεις. Αν x είναι ένας αριθμός:

Φράση	Παράσταση
Το διπλάσιο του αριθμού	$2x$
Το μισό του αριθμού	$\frac{x}{2}$
Ο αριθμός αυξημένος κατά 7	$x + 7$
Ο αριθμός ελαττωμένος κατά 4	$x - 4$
Το τριπλάσιο του αριθμού μειωμένο κατά 1	$3x - 1$
Το τριπλάσιο του (αριθμού μειωμένου κατά 1)	$3(x - 1)$
Ο επόμενος ακέραιος (αν x ακέραιος)	$x + 1$
Το τετράγωνο του αριθμού	x^2
Ο αντίθετος του αριθμού	$-x$
Ο αντίστροφος του αριθμού ($x \neq 0$)	$\frac{1}{x}$
Το 20% του αριθμού	$0,2x$

Παράδειγμα 1.1.5

Με σπιρτόξυλα φτιάχνουμε τετράγωνα στη σειρά, όπως στο σχήμα. Πόσα σπέρτα χρειάζονται για n τετράγωνα; Πόσα για 25 τετράγωνα;



4 τετράγωνα – 13 σπέρτα

ΛΥΣΗ

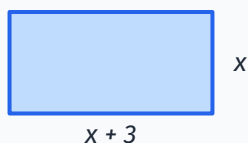
Για 1 τετράγωνο χρειαζόμαστε 4 σπέρτα. Κάθε νέο τετράγωνο «δανείζεται» μία πλευρά από το προηγούμενο, άρα χρειάζεται 3 επιπλέον σπέρτα. Επομένως:

Τετράγωνα	1	2	3	4	n
Σπέρτα	4	7	10	13	$3n + 1$

Για $n = 25$: $3 \cdot 25 + 1 = 76$ σπέρτα.

Παράδειγμα 1.1.6

Ένα ορθογώνιο έχει μήκος κατά 3 cm μεγαλύτερο από το πλάτος του. Αν το πλάτος είναι x cm, να εκφραστούν η περίμετρος και το εμβαδόν του.



ΛΥΣΗ

Μήκος: $x + 3$. Περίμετρος: $\Pi = 2x + 2(x + 3) = 2x + 2x + 6 = 4x + 6$ cm.

Εμβαδόν: $E = x(x + 3) = x^2 + 3x$ cm².



Θέλεις να δεις αυτό το μάθημα και σε **βίντεο**, βήμα-βήμα; Στο **mathgreece.com** θα βρεις ολοκληρωμένο, **δωρεάν** φροντιστήριο για όλη την ύλη της Β' Γυμνασίου.
www.mathgreece.com

✎ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να γράψεις με τη βοήθεια μεταβλητής: α) το πενταπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2, β) το μισό ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 3, γ) το άθροισμα δύο διαδοχικών ακεραίων, δ) την αξία x τετραδίων των 1,20 € και y στυλό των 0,60 €.
- 2 Να βρεις την αριθμητική τιμή της $A = 2x^2 - 3x + 4$ για α) $x = 3$, β) $x = -1$, γ) $x = 0$.
- 3 Να απλοποιήσεις: α) $8x - 3x + x$ β) $5\alpha - 2\beta + \alpha + 6\beta$ γ) $-y + 4 - 3y - 9$ δ) $x^2 + 2x - 3x^2 + x$.
- 4 Να κάνεις απαλοιφή παρενθέσεων και αναγωγή ομοίων όρων: α) $4(x - 2) + 3(2x + 1)$ β) $-(5\alpha - 3) + 2(\alpha - 4)$ γ) $3(2y - 1) - 2(y - 5) - (y + 1)$.
- 5 Να απλοποιήσεις την $K = 2(3x - y) - 3(x - 2y) + x$ και μετά να βρεις την τιμή της για $x = 2, y = -1$.
- 6 Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές; α) $3x + 4x = 7x$ β) $2x + 5 = 7x$ γ) $-(x - 1) = -x - 1$ δ) $x \cdot x = x^2$ ε) $5x - x = 5$.
- 7 Σε ένα πάρκινγκ η πρώτη ώρα κοστίζει 4 € και κάθε επόμενη ώρα 2,5 €. Να γράψεις μια παράσταση για το κόστος στάθμευσης n ωρών ($n \geq 1$) και να βρεις πόσο κοστίζουν 6 ώρες.
- 8 Ένα τρίγωνο έχει πλευρές x , $2x - 1$ και $x + 4$ (σε cm). Να βρεις την περίμετρό του ως παράσταση και την τιμή της όταν $x = 5$.
- 9 Με σπέρτα φτιάχνουμε τρίγωνα στη σειρά (το καθένα μοιράζεται μια πλευρά με το προηγούμενο). Πόσα σπέρτα χρειάζονται για n τρίγωνα; Για 30 τρίγωνα;
- 10 Να δείξεις ότι η τιμή της παράστασης $\Lambda = 5(x + 2) - 3(x + 4) - 2(x - 1)$ **δεν εξαρτάται** από το x .

ΜΑΘΗΜΑ

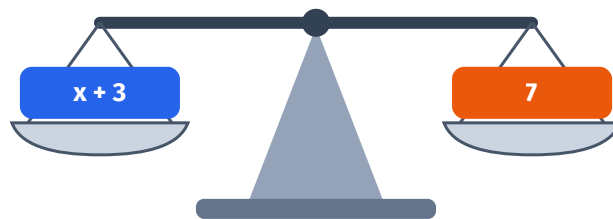
1.2

Εξισώσεις α' βαθμού

Η εξίσωση είναι ίσως το πιο ισχυρό εργαλείο της Άλγεβρας. Εδώ θα μάθουμε μια σίγουρη, βήμα-βήμα μέθοδο για να λύνουμε κάθε εξίσωση πρώτου βαθμού — ακόμα και με παρενθέσεις και κλάσματα.

Η έννοια της εξίσωσης

Μια ζυγαριά ισορροπεί όταν τα δύο της μέρη έχουν το ίδιο βάρος. Στο σχήμα, στο αριστερό τάσι βρίσκεται ένα κουτί άγνωστου βάρους x μαζί με βαρίδι 3 kg, και στο δεξί βαρίδι 7 kg. Η ισορροπία μεταφράζεται στην ισότητα $x + 3 = 7$.



Η ζυγαριά ισορροπεί: $x + 3 = 7$

Ορισμός · Εξίσωση

Μια ισότητα που περιέχει έναν άγνωστο αριθμό (συνήθως x) λέγεται **εξίσωση με έναν άγνωστο**. Η παράσταση αριστερά του « $=$ » λέγεται **πρώτο μέλος** και η παράσταση δεξιά **δεύτερο μέλος**.

Λύση ή **ρίζα** της εξίσωσης λέγεται ο αριθμός που, αν τον βάλουμε στη θέση του αγνώστου, την επαληθεύει (κάνει την ισότητα αληθή). **Επιλύω** μια εξίσωση σημαίνει βρίσκω όλες τις λύσεις της.

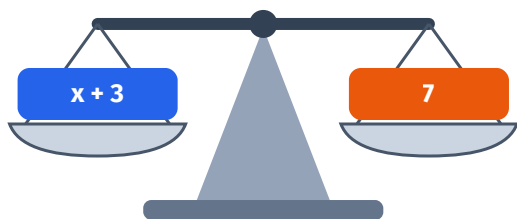
Για παράδειγμα, το 4 είναι λύση της $x + 3 = 7$, αφού $4 + 3 = 7$. Το 5 δεν είναι λύση, αφού $5 + 3 = 8 \neq 7$.

Οι δύο «χρυσοί» κανόνες

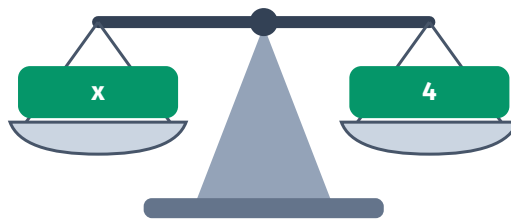
Η ζυγαριά εξακολουθεί να ισορροπεί αν κάνουμε **την ίδια αλλαγή και στα δύο τάσια**. Αυτή η απλή ιδέα δίνει τις ιδιότητες των ισοτήτων:

☆ Ιδιότητες των ισοτήτων

- Αν **προσθέσουμε** ή **αφαιρέσουμε** τον ίδιο αριθμό και από τα δύο μέλη μιας ισότητας, προκύπτει πάλι ισότητα: αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma = \beta - \gamma$.
- Αν **πολλαπλασιάσουμε** ή **διαιρέσουμε** και τα δύο μέλη με τον ίδιο αριθμό (στη διαίρεση **μη μηδενικό**), προκύπτει πάλι ισότητα: αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha\gamma = \beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$ ($\gamma \neq 0$).



Αφαιρούμε 3 και από τα δύο μέρη...



...και βρίσκουμε $x = 4$.

Στην πράξη, οι κανόνες αυτοί εφαρμόζονται ως εξής:

☆ Πρακτικοί κανόνες

- **Μεταφορά όρου:** ένας όρος μπορεί να «περάσει» από το ένα μέλος στο άλλο **αλλάζοντας πρόσημο**. Από $x + 3 = 7$ παίρνουμε $x = 7 - 3$.
- **Διαίρεση με τον συντελεστή:** αν $ax = b$ με $a \neq 0$, διαιρούμε και τα δύο μέλη με a : $x = \frac{b}{a}$. Από $5x = 20$ παίρνουμε $x = \frac{20}{5} = 4$.

📖 Η μέθοδος σε 5 βήματα

☆ Επίλυση εξίσωσης α' βαθμού

- 1 **Απαλοιφή παρονομαστών** (αν υπάρχουν κλάσματα): πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
- 2 **Απαλοιφή παρενθέσεων** (επιμεριστική ιδιότητα).
- 3 **Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους:** τους όρους με x στο πρώτο μέλος, τους αριθμούς στο δεύτερο (όποιος αλλάζει μέλος, αλλάζει πρόσημο).
- 4 **Αναγωγή ομοίων όρων** — καταλήγουμε στη μορφή $ax = b$.
- 5 **Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου** (αν $a \neq 0$).

Παράδειγμα 1.2.1

Να λυθεί η εξίσωση $7x - 4 = 3x + 12$.

ΛΥΣΗ

$$7x - 3x = 12 + 4$$

$$4x = 16$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{16}{4}$$

$$x = 4$$

Επαλήθευση: $7 \cdot 4 - 4 = 24$ και $3 \cdot 4 + 12 = 24$. ✓

Παράδειγμα 1.2.2

Να λυθεί η εξίσωση $3(x - 2) - 2(2x + 1) = 5 - (x - 3)$.

ΛΥΣΗ

$$3x - 6 - 4x - 2 = 5 - x + 3$$

$$3x - 4x + x = 5 + 3 + 6 + 2$$

$$0x = 16$$

Δεν υπάρχει αριθμός που πολλαπλασιαζόμενος με 0 να δίνει 16. Η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

Ειδικές περιπτώσεις: αδύνατη και ταυτότητα

Αφού φέρουμε την εξίσωση στη μορφή $ax = b$, διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

Μορφή	Τι συμβαίνει	Λύσεις
$ax = b$ με $a \neq 0$	διαιρούμε με a	μία λύση: $x = \frac{b}{a}$
$0x = b$ με $b \neq 0$	κανένας αριθμός δεν την επαληθεύει	αδύνατη
$0x = 0$	κάθε αριθμός την επαληθεύει	ταυτότητα (αόριστη)

Παράδειγμα 1.2.3

Να λυθεί η εξίσωση $2(x + 3) - x = x + 6$.

ΛΥΣΗ

$$2x + 6 - x = x + 6$$

$$2x - x - x = 6 - 6$$

$$0x = 0$$

Κάθε αριθμός επαληθεύει την εξίσωση: είναι **ταυτότητα**. (Δοκίμασε π.χ. $x = 10$: $26 - 10 = 16$ και $10 + 6 = 16$.)

Εξισώσεις με κλάσματα

Όταν μια εξίσωση έχει παρονομαστές, το πρώτο βήμα είναι να τους «διώξουμε». Βρίσκουμε το **Ε.Κ.Π.** όλων των παρονομαστών και πολλαπλασιάζουμε **κάθε όρο** (και των δύο μελών) με αυτό.

Παράδειγμα 1.2.4

Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x-1}{2} - \frac{x+2}{3} = \frac{x}{6} - 1$.

ΛΥΣΗ

Ε.Κ.Π.(2, 3, 6) = 6. Πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο με 6:

$$6 \cdot \frac{x-1}{2} - 6 \cdot \frac{x+2}{3} = 6 \cdot \frac{x}{6} - 6 \cdot 1$$

$$3(x-1) - 2(x+2) = x - 6$$

$$3x - 3 - 2x - 4 = x - 6$$

$$3x - 2x - x = -6 + 3 + 4$$

$$0x = 1$$

Η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

Παράδειγμα 1.2.5

Να λυθεί η εξίσωση $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-3}{4} = 2$.

ΛΥΣΗ

Ε.Κ.Π.(3, 4) = 12:

$$4(2x+1) - 3(x-3) = 24$$

$$8x + 4 - 3x + 9 = 24$$

$$5x = 24 - 4 - 9$$

$$5x = 11 \quad x = \frac{11}{5}$$

⊗ Συχνό λάθος

× Λάθος

$$\frac{x-3}{4} \text{ επί } 12 \rightarrow -3x - 3$$

✓ Σωστό

$$-\frac{x-3}{4} \cdot 12 = -3(x-3) = -3x + 9$$

Η κλασματική γραμμή λειτουργεί σαν παρένθεση. Όταν ο αριθμητής έχει πολλούς όρους, τον βάζουμε **πάντα σε παρένθεση** πριν πολλαπλασιάσουμε — αλλιώς χάνεται το πρόσημο.

⊗ Συχνό λάθος

✗ Λάθος

$$\frac{x}{2} + 3 = 5 \Rightarrow x + 3 = 10$$

✓ Σωστό

$$\frac{x}{2} + 3 = 5 \Rightarrow x + 6 = 10$$

Πολλαπλασιάζουμε **όλους** τους όρους με το Ε.Κ.Π., και αυτούς που δεν έχουν παρονομαστή!

⚠ Προσοχή!

Στο βήμα «διαιρώ με τον συντελεστή», αν ο συντελεστής είναι αρνητικός, το πρόσημο φεύγει μαζί του: $-3x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{-3} = -4$. Και από $-x = 5$ παίρνουμε $x = -5$.

💡 Η συμβουλή του καθηγητή

Η επαλήθευση κοστίζει μισό λεπτό και σε γλιτώνει από χαμένες μονάδες. Αντικατάστησε τη λύση στην **αρχική** εξίσωση: αν τα δύο μέλη βγαίνουν ίσα, είσαι σίγουρος.

Παράδειγμα 1.2.6 — Παραμετρική

Να βρεθεί ο αριθμός λ , ώστε η εξίσωση $\lambda x + 3 = 2x - \lambda$ να έχει λύση $x = 2$.

ΛΥΣΗ

Αφού το 2 είναι λύση, επαληθεύει την εξίσωση. Βάζουμε $x = 2$:

$$2\lambda + 3 = 4 - \lambda \Rightarrow 3\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$



Για περισσότερες λυμένες ασκήσεις, **κουίζ αυτοαξιολόγησης** και σημειώσεις, μπες στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών.
www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να εξετάσεις αν ο αριθμός -2 είναι λύση των εξισώσεων: α) $3x + 7 = 1$ β) $x^2 - x = 2$ γ) $5 - x = 2x + 11$.
- 2 Να λύσεις τις εξισώσεις: α) $x + 9 = 4$ β) $6x = -42$ γ) $-x = 8$ δ) $\frac{x}{5} = -3$ ε) $8 - x = 11$.
- 3 Να λύσεις: α) $5x - 3 = 2x + 9$ β) $4 - 3x = 2x - 11$ γ) $9x + 2 = 4x + 2$.
- 4 Να λύσεις: α) $2(x - 3) + 5 = 3(x + 1)$ β) $4(2x - 1) - 3(x + 2) = 5$ γ) $7 - 2(x - 4) = 3 - (x + 1)$.
- 5 Να εξετάσεις αν οι εξισώσεις είναι αδύνατες ή ταυτότητες: α) $3(x + 2) - x = 2(x + 3)$ β) $5x - (2x - 1) = 3(x + 1)$.
- 6 Να λύσεις: α) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$ β) $\frac{x+1}{4} = \frac{x-2}{3}$ γ) $x - \frac{x-1}{2} = \frac{x+5}{3}$.

- 7** Να λύσεις την εξίσωση $\frac{3x-1}{5} - \frac{x+2}{2} = \frac{x-4}{10}$.
- 8** Να λύσεις: α) $0,5x + 1,2 = 0,3x + 2$ β) $2,4 - 0,2(x-1) = 1,6$.
- 9** Να βρεις τον αριθμό α , ώστε η εξίσωση $3x - \alpha = 2\alpha + x$ να έχει λύση το $x = 6$.
- 10** Ένας μαθητής έλυσε έτσι: $\frac{x}{3} - \frac{x-2}{6} = 1 \Rightarrow 2x - x - 2 = 6 \Rightarrow x = 8$. Να βρεις το λάθος και να λύσεις σωστά.

ΜΑΘΗΜΑ

1.3

Επίλυση τύπων

Οι τύποι της Φυσικής, της Γεωμετρίας ή της καθημερινότητας είναι στην ουσία εξισώσεις με πολλά γράμματα. Εδώ μαθαίνουμε να «λύνουμε έναν τύπο ως προς» το γράμμα που μας ενδιαφέρει.

Τι σημαίνει «λύνω έναν τύπο»

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $E = \alpha\beta$. Αν ξέρουμε το εμβαδόν και τη μία πλευρά και ψάχνουμε την άλλη, θα θέλαμε έναν τύπο που να δίνει **κατευθείαν** το β . Διαιρώντας και τα δύο μέλη με α βρίσκουμε:

$$E = \alpha\beta \Rightarrow \beta = \frac{E}{\alpha}$$

Ορισμός · Επίλυση τύπου

Λύνω έναν τύπο **ως προς ένα γράμμα** σημαίνει ότι τον μετασχηματίζω, ώστε το γράμμα αυτό να βρίσκεται **μόνο του στο ένα μέλος** και όλα τα άλλα στο άλλο μέλος. Ο τύπος αντιμετωπίζεται σαν εξίσωση με άγνωστο το γράμμα που μας ενδιαφέρει· όλα τα άλλα γράμματα τα χειριζόμαστε σαν να ήταν γνωστοί αριθμοί.

Η συμβουλή του καθηγητή

Ένα πολύ καλό «κόλπο»: αν διστάζεις, φτιάξε μια αριθμητική εξίσωση με την ίδια μορφή. Π.χ. για να λύσεις το $v = \frac{s}{t}$ ως προς t , σκέψου το $5 = \frac{20}{t}$. Εκεί ξέρεις αμέσως ότι $t = \frac{20}{5}$. Άρα και $t = \frac{s}{v}$.



Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1.3.1

Η περίμετρος ορθογωνίου είναι $\Pi = 2\alpha + 2\beta$. Να λυθεί ο τύπος ως προς β . Πόσο είναι το β αν $\Pi = 30$ cm και $\alpha = 9$ cm;

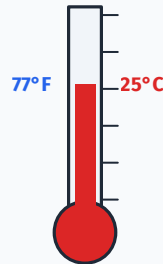
ΛΥΣΗ

$$2\alpha + 2\beta = \Pi \Rightarrow 2\beta = \Pi - 2\alpha \Rightarrow \beta = \frac{\Pi - 2\alpha}{2}$$

Για $\Pi = 30$ και $\alpha = 9$: $\beta = \frac{30 - 18}{2} = 6 \text{ cm}$.

Παράδειγμα 1.3.2

Η σχέση μεταξύ βαθμών Κελσίου (C) και Φαρενάιτ (F) είναι $F = 1,8C + 32$. Να λυθεί ως προς C και να βρεθεί ποια θερμοκρασία σε °C αντιστοιχεί σε 77 °F.

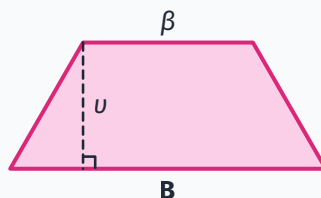
**ΛΥΣΗ**

$$1,8C + 32 = F \Rightarrow 1,8C = F - 32 \Rightarrow C = \frac{F - 32}{1,8}$$

Για $F = 77$: $C = \frac{77 - 32}{1,8} = \frac{45}{1,8} = 25 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Παράδειγμα 1.3.3

Το εμβαδόν τραπεζίου είναι $E = \frac{(B + \beta)v}{2}$. Να λυθεί ως προς v και ως προς β .

**ΛΥΣΗ**

Ως προς v : πολλαπλασιάζουμε με 2: $2E = (B + \beta)v$, άρα $v = \frac{2E}{B + \beta}$.

Ως προς β : από $2E = (B + \beta)v$ διαιρούμε με v : $\frac{2E}{v} = B + \beta$, άρα $\beta = \frac{2E}{v} - B$.

Παράδειγμα 1.3.4 — Πιο απαιτητικό

Να λυθεί ο τύπος $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\gamma}$ ως προς γ (όλα τα γράμματα θετικά).

ΛΥΣΗ

Πολλαπλασιάζουμε με το Ε.Κ.Π. $\alpha\beta\gamma$:

$$\beta\gamma + \alpha\gamma = \alpha\beta \Rightarrow \gamma(\alpha + \beta) = \alpha\beta \Rightarrow \gamma = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

Παρατήρησε ότι βγάλαμε το γ **κοινό παράγοντα** — μια τεχνική που χρειάζεται όταν ο άγνωστος εμφανίζεται σε περισσότερους όρους.

⚠ Προσοχή!

Όταν διαιρούμε με μια παράσταση γραμμάτων (π.χ. με α ή με $\alpha + \beta$), πρέπει αυτή να είναι **διάφορη του μηδενός**. Στους γεωμετρικούς και φυσικούς τύπους τα μεγέθη είναι συνήθως θετικά, οπότε δεν υπάρχει πρόβλημα, αλλά καλό είναι να το σημειώνουμε.

⊗ Συχνό λάθος

✗ **Λάθος**

$$\Pi = 2\alpha + 2\beta \Rightarrow \beta = \Pi - 2\alpha - 2$$

✓ **Σωστό**

$$2\beta = \Pi - 2\alpha \Rightarrow \beta = \frac{\Pi - 2\alpha}{2}$$

Ο συντελεστής 2 πολλαπλασιάζει το β — δεν προστίθεται. Άρα «φεύγει» με **διαίρεση**, και διαιρείται **ολόκληρο** το δεύτερο μέλος.

⊗ Συχνό λάθος

✗ **Λάθος**

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = v \cdot s$$

✓ **Σωστό**

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow vt = s \Rightarrow t = \frac{s}{v}$$

Έλεγξε το αποτέλεσμα με αριθμούς: 100 km σε 2 h σημαίνει $v = 50$. Με τον λάθος τύπο θα βρίσκαμε $t = 5000$ h!

📖 Χρήσιμοι τύποι που θα συναντήσεις

Τύπος	Λυμένος ως προς...
$s = v \cdot t$ (διάστημα)	$v = \frac{s}{t}, t = \frac{s}{v}$
$E = \frac{\beta \cdot v}{2}$ (τρίγωνο)	$\beta = \frac{2E}{v}, v = \frac{2E}{\beta}$
$\rho = \frac{m}{V}$ (πυκνότητα)	$m = \rho V, V = \frac{m}{\rho}$
$T = K + \frac{K \cdot \varepsilon}{100}$ (τελικό ποσό)	$K = \frac{100T}{100 + \varepsilon}$
$\Pi = 2\pi r$ (μήκος κύκλου)	$r = \frac{\Pi}{2\pi}$



Κόλλησες κάπου; Στο **mathgreece.com** υπάρχουν βιντεομαθήματα, podcasts και παιχνίδια γνώσεων για κάθε ενότητα — όλα **δωρεάν**.

www.mathgreece.com

 Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να λύσεις τον τύπο $E = \alpha \cdot \beta$ ως προς α .
- 2 Να λύσεις τον τύπο $s = v \cdot t$ ως προς t και να βρεις σε πόσο χρόνο ένα αυτοκίνητο με ταχύτητα 80 km/h διανύει 260 km.
- 3 Να λύσεις τον τύπο $y = 3x - 5$ ως προς x .
- 4 Ο τύπος $E = \frac{\beta \cdot v}{2}$ δίνει το εμβαδόν τριγώνου. Να τον λύσεις ως προς v και να βρεις το ύψος τριγώνου με εμβαδόν 42 cm² και βάση 12 cm.
- 5 Να λύσεις τον τύπο $T = K(1 + \varepsilon)$ ως προς ε .
- 6 Να λύσεις τον τύπο $M = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$ ως προς γ . Ποιον βαθμό πρέπει να πάρει ένας μαθητής στο τρίτο διαγώνισμα, αν πήρε 16 και 17 στα δύο πρώτα και θέλει μέσο όρο 17;
- 7 Να λύσεις τον τύπο $F = \frac{9}{5}C + 32$ ως προς C και να μετατρέψεις τους 104 °F σε °C.
- 8 Να λύσεις τον τύπο $\alpha x + \beta = \gamma x$ ως προς x (με $\gamma \neq \alpha$).
- 9 Ένα ταξί χρεώνει $K = 3,2 + 0,9x$ €, όπου x τα χιλιόμετρα. Να λύσεις τον τύπο ως προς x και να βρεις πόσα km διανύσαμε αν πληρώσαμε 15,80 €.

ΜΑΘΗΜΑ

1.4

Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

Εδώ η Άλγεβρα αποκτά νόημα: «μεταφράζουμε» ένα πρόβλημα της ζωής σε εξίσωση, τη λύνουμε και ερμηνεύουμε το αποτέλεσμα. Είναι η πιο χρήσιμη δεξιότητα του κεφαλαίου.

 Η μέθοδος

☆ Τα 5 βήματα για κάθε πρόβλημα

- 1 Διαβάζω προσεκτικά το πρόβλημα (και δεύτερη φορά!) και ξεχωρίζω τι ξέρω και τι ζητάω.
- 2 Ονομάζω τον άγνωστο με x , γράφοντας καθαρά τι παριστάνει (π.χ. «έστω x η ηλικία του Νίκου σε έτη»).
- 3 Εκφράζω με τη βοήθεια του x όλα τα άλλα άγνωστα μεγέθη.
- 4 Σχηματίζω την εξίσωση, «μεταφράζοντας» τη σχέση που δίνει το πρόβλημα, και τη λύνω.
- 5 Ελέγχω αν η λύση είναι δεκτή (π.χ. μια ηλικία δεν μπορεί να είναι αρνητική, ο αριθμός ατόμων πρέπει να είναι φυσικός) και γράφω την απάντηση με λόγια.

⚠ Προσοχή!

Το πιο συνηθισμένο πρόβλημα των μαθητών δεν είναι η επίλυση της εξίσωσης, αλλά το βήμα 2: η **επιλογή του αγνώστου**. Συνήθως συμφέρει να ονομάσουμε x το μικρότερο ή το «βασικό» μέγεθος, από το οποίο εξαρτώνται τα υπόλοιπα.

 Προβλήματα αριθμών

Παράδειγμα 1.4.1

Το άθροισμα τριών διαδοχικών ακεραίων είναι 87. Ποιοι είναι οι αριθμοί;

ΛΥΣΗ

Έστω x ο μικρότερος. Οι επόμενοι είναι $x + 1$ και $x + 2$. Έχουμε:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 87 \Rightarrow 3x + 3 = 87 \Rightarrow 3x = 84 \Rightarrow x = 28$$

Οι αριθμοί είναι **28, 29, 30**. Έλεγχος: $28 + 29 + 30 = 87$ ✓

Παράδειγμα 1.4.2

Αν στο τριπλάσιο ενός αριθμού προσθέσουμε 8, βρίσκουμε όσο αν από το πενταπλάσιό του αφαιρέσουμε 6. Ποιος είναι ο αριθμός;

ΛΥΣΗ

$$3x + 8 = 5x - 6 \Rightarrow -2x = -14 \Rightarrow x = 7$$

Ο αριθμός είναι το 7. (Έλεγχος: $21 + 8 = 29$ και $35 - 6 = 29$.)

Προβλήματα ηλικιών

Στα προβλήματα ηλικιών βοηθάει πολύ ένας **πίνακας** με τις ηλικίες «τώρα» και «μετά από / πριν από» κάποια χρόνια.

Παράδειγμα 1.4.3

Η μητέρα είναι σήμερα 40 ετών και η κόρη της 12. Σε πόσα χρόνια η ηλικία της μητέρας θα είναι διπλάσια από της κόρης;

ΛΥΣΗ

Έστω ότι αυτό θα συμβεί σε x χρόνια.

	Σήμερα	Σε x χρόνια
Μητέρα	40	$40 + x$
Κόρη	12	$12 + x$

$$40 + x = 2(12 + x) \Rightarrow 40 + x = 24 + 2x \Rightarrow x = 16$$

Σε **16 χρόνια** (μητέρα 56, κόρη 28 — πράγματι $56 = 2 \cdot 28$).

Προβλήματα με χρήματα και ποσοστά

Παράδειγμα 1.4.4

Ένα μπουφάν πωλείται με έκπτωση 25% στην τιμή των 63 €. Ποια ήταν η αρχική του τιμή;

ΛΥΣΗ

Έστω x € η αρχική τιμή. Η έκπτωση είναι $0,25x$, άρα:

$$x - 0,25x = 63 \Rightarrow 0,75x = 63 \Rightarrow x = \frac{63}{0,75} = 84$$

Η αρχική τιμή ήταν **84 €**.

Συχνό λάθος

Λάθος

$$63 + 25\% \text{ του } 63 = 78,75 \text{ €}$$

Σωστό

$$0,75x = 63, \text{ άρα } x = 84 \text{ €}$$

Το 25% υπολογίζεται στην **αρχική** τιμή, όχι στην τελική!

Παράδειγμα 1.4.5

Σε ένα κουτί υπάρχουν κέρματα των 50 λεπτών και του 1 €, συνολικά 30 κέρματα με συνολική αξία 21 €. Πόσα είναι από το κάθε είδος;

**ΛΥΣΗ**

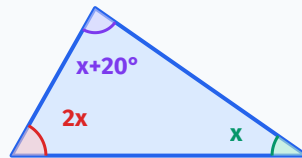
Έστω x τα κέρματα του 1 €. Τότε τα κέρματα των 0,50 € είναι $30 - x$.

$$1 \cdot x + 0,5(30 - x) = 21 \Rightarrow x + 15 - 0,5x = 21 \Rightarrow 0,5x = 6 \Rightarrow x = 12$$

12 κέρματα του 1 € και **18** των 50 λεπτών. Έλεγχος: $12 + 9 = 21$ € ✓

Γεωμετρικά προβλήματα**Παράδειγμα 1.4.6**

Σε ένα τρίγωνο η μία γωνία είναι διπλάσια από τη δεύτερη, και η τρίτη είναι κατά 20° μεγαλύτερη από τη δεύτερη. Να βρεθούν οι γωνίες.

**ΛΥΣΗ**

Έστω x η δεύτερη γωνία. Τότε οι γωνίες είναι $2x$, x , $x + 20^\circ$, και το άθροισμά τους είναι 180° :

$$2x + x + x + 20 = 180 \Rightarrow 4x = 160 \Rightarrow x = 40$$

Οι γωνίες είναι **80° , 40° , 60°** .

Παράδειγμα 1.4.7

Ένα ορθογώνιο οικόπεδο έχει περίμετρο 140 m και το μήκος του είναι κατά 10 m μεγαλύτερο από το διπλάσιο του πλάτους. Να βρεθεί το εμβαδόν του.

ΛΥΣΗ

Πλάτος x , μήκος $2x + 10$:

$$2x + 2(2x + 10) = 140 \Rightarrow 6x + 20 = 140 \Rightarrow x = 20$$

Πλάτος 20 m, μήκος 50 m, εμβαδόν $20 \cdot 50 = 1000 \text{ m}^2$.

Προβλήματα κίνησης

Θυμάμαι από τη Φυσική

Για κίνηση με σταθερή ταχύτητα: διάστημα = ταχύτητα × χρόνος, δηλαδή $s = v \cdot t$.

Παράδειγμα 1.4.8

Δύο πόλεις Α και Β απέχουν 330 km. Από την Α ξεκινά αυτοκίνητο με 70 km/h προς τη Β και ταυτόχρονα από τη Β ξεκινά λεωφορείο με 40 km/h προς την Α. Σε πόσες ώρες θα συναντηθούν;



ΛΥΣΗ

Έστω ότι συναντώνται μετά από x ώρες. Το αυτοκίνητο έχει διανύσει $70x$ km και το λεωφορείο $40x$ km. Μαζί καλύπτουν όλη την απόσταση:

$$70x + 40x = 330 \Rightarrow 110x = 330 \Rightarrow x = 3$$

Θα συναντηθούν μετά από **3 ώρες**.

Η συμβουλή του καθηγητή

Σε κάθε πρόβλημα κάνε ένα **πρόχειρο σχήμα** ή έναν **πίνακα**. Οι καλοί λύτες δεν είναι αυτοί που «βλέπουν» την εξίσωση αμέσως· είναι αυτοί που οργανώνουν τα δεδομένα τους.



Εξάσκηση χωρίς τέλος: στο **mathgreece.com** θα βρεις επιπλέον φυλλάδια ασκήσεων και διαγωνίσματα για τη Β' Γυμνασίου, εντελώς **δωρεάν**.
www.mathgreece.com

Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 54 και ο ένας είναι διπλάσιος του άλλου. Να βρεις τους αριθμούς.
- 2 Να βρεις τέσσερις διαδοχικούς άρτιους αριθμούς με άθροισμα 100.
- 3 Ο πατέρας είναι 45 ετών και ο γιος του 15. Πριν από πόσα χρόνια ο πατέρας ήταν τετραπλάσιος σε ηλικία από τον γιο;
- 4 Ένα κινητό τηλέφωνο κοστίζει 320 € μαζί με ΦΠΑ 24%. Πόσο κοστίζει χωρίς ΦΠΑ;
- 5 Σε μια τάξη 27 μαθητών τα κορίτσια είναι 5 περισσότερα από τα αγόρια. Πόσα είναι τα αγόρια;
- 6 Η περίμετρος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι 50 cm και κάθε μία από τις ίσες πλευρές είναι κατά 4 cm μεγαλύτερη από τη βάση. Να βρεις τις πλευρές.

- 7** Ένας ποδηλάτης και ένας πεζός ξεκινούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο προς αντίθετες κατευθύνσεις, με ταχύτητες 18 km/h και 5 km/h. Μετά από πόσο χρόνο θα απέχουν 46 km;
- 8** Ένας κουμπαράς έχει 40 κέρματα των 2 € και των 20 λεπτών, συνολικής αξίας 26 €. Πόσα είναι τα κέρματα των 2 €;
- 9** Η Μαρία διάβασε την πρώτη μέρα το $\frac{1}{3}$ ενός βιβλίου, τη δεύτερη το $\frac{1}{4}$ και της έμειναν 75 σελίδες. Πόσες σελίδες έχει το βιβλίο;
- 10** Μια βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 6 ώρες και μια δεύτερη σε 3 ώρες. Αν ανοίξουν μαζί, σε πόσο χρόνο θα τη γεμίσουν;
- 11** Σε ένα τρίγωνο ABΓ είναι $\hat{B} = \hat{A} + 15^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 3\hat{A}$. Να βρεις τις γωνίες.

ΜΑΘΗΜΑ

1.5

Ανισώσεις α' βαθμού

Η ανίσωση μοιάζει πολύ με την εξίσωση — με μία σημαντική διαφορά, που θα την ξεχωρίσουμε με κόκκινο. Εδώ οι λύσεις δεν είναι ένας αριθμός, αλλά ολόκληρα «κομμάτια» της ευθείας των αριθμών.

Διάταξη αριθμών – τα σύμβολα

Σύμβολο	Διαβάζεται	Παράδειγμα
$\alpha < \beta$	α μικρότερο του β	$-3 < 2$
$\alpha > \beta$	α μεγαλύτερο του β	$5 > -1$
$\alpha \leq \beta$	α μικρότερο ή ίσο του β	$4 \leq 4$
$\alpha \geq \beta$	α μεγαλύτερο ή ίσο του β	$7 \geq 2$

Στην ευθεία των αριθμών, από δύο αριθμούς **μεγαλύτερος είναι αυτός που βρίσκεται δεξιότερα**. Έτσι $-5 < -2$, παρόλο που το 5 είναι μεγαλύτερο από το 2!

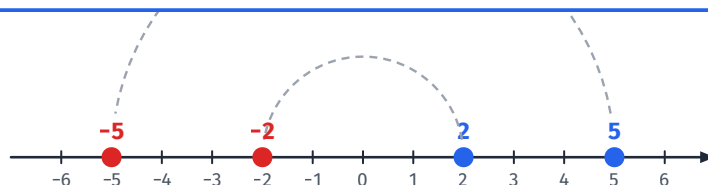


Το -2 βρίσκεται δεξιότερα από το -5, άρα $-2 > -5$.

Ιδιότητες της διάταξης

☆ Ιδιότητες ανισοτήτων

- Αν **προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε** τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη μιας ανισότητας, η φορά **μένει ίδια**: αν $\alpha < \beta$, τότε $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.
- Αν **πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε** με τον ίδιο **θετικό** αριθμό, η φορά **μένει ίδια**: αν $\alpha < \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha\gamma < \beta\gamma$.
- Αν **πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε** με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό, η φορά **αλλάζει**: αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$.



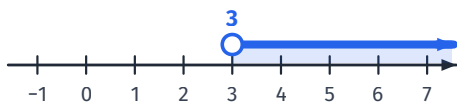
$2 < 5$, όμως πολλαπλασιάζοντας με -1 : $-2 > -5$. Ο πολλαπλασιασμός με αρνητικό «καθρεφτίζει» τους αριθμούς και αντιστρέφει τη διάταξη.

Η ανίσωση και οι λύσεις της

Ορισμός · Ανίσωση

Μια ανισότητα που περιέχει άγνωστο λέγεται **ανίσωση**. Λύσεις της είναι όλοι οι αριθμοί που την επαληθεύουν. Για παράδειγμα, η $x + 2 > 5$ επαληθεύεται από το 4, το 3,5, το 100... δηλαδή από **κάθε αριθμό μεγαλύτερο του 3**. Γράφουμε: $x > 3$.

Τις λύσεις μιας ανίσωσης τις παριστάνουμε πάνω στην ευθεία των αριθμών:



$x > 3$: ανοιχτός κύκλος — το 3 δεν είναι λύση



$x \leq 3$: γεμάτος κύκλος — το 3 είναι λύση

Επίλυση ανίσωσης α' βαθμού

☆ Μέθοδος

Ακολουθούμε **ακριβώς τα ίδια βήματα** με την εξίσωση (απαλοιφή παρονομαστών, παρενθέσεων, χωρισμός γνωστών–αγνώστων, αναγωγή) και καταλήγουμε στη μορφή $ax > \beta$ (ή $<$, $\leq$, $\geq$). Στο τελευταίο βήμα:

- αν $a > 0$, διαιρούμε με a και η φορά **μένει ίδια**,
- αν $a < 0$, διαιρούμε με a και η φορά **αλλάζει**.

Παράδειγμα 1.5.1

Να λυθεί η ανίσωση $5x - 3 < 2x + 9$ και να παρασταθούν οι λύσεις στην ευθεία.



ΛΥΣΗ

$$5x - 2x < 9 + 3 \Rightarrow 3x < 12 \Rightarrow x < 4$$

Λύσεις: όλοι οι αριθμοί **μικρότεροι του 4**.

Παράδειγμα 1.5.2

Να λυθεί η ανίσωση $2(x - 1) - 5x \geq 7$.



ΛΥΣΗ

$$2x - 2 - 5x \geq 7 \Rightarrow -3x \geq 9 \Rightarrow x \leq -3$$

Διαιρέσαμε με το **αρνητικό** -3 , γι' αυτό η φορά άλλαξε από $\geq$ σε $\leq$.

⊗ Συχνό λάθος

× Λάθος

$$-3x \geq 9 \Rightarrow x \geq -3$$

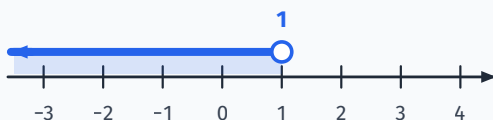
✓ Σωστό

$$-3x \geq 9 \Rightarrow x \leq -3$$

Το **συχνότερο λάθος** στις ανισώσεις! Έλεγξε με έναν αριθμό: για $x = 0$ έχουμε $0 \geq 9$, που είναι ψευδές — άρα το 0 δεν μπορεί να είναι λύση, όπως θα έλεγε η λάθος απάντηση.

Παράδειγμα 1.5.3

Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{2} > 1$.



ΛΥΣΗ

Πολλαπλασιάζουμε με το Ε.Κ.Π. 6 (θετικό, η φορά μένει ίδια):

$$2(x + 2) - 3(x - 1) > 6 \Rightarrow 2x + 4 - 3x + 3 > 6 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow x < 1$$

📖 Συναλήθευση ανισώσεων

Πολλές φορές ζητάμε τους αριθμούς που επαληθεύουν **ταυτόχρονα** δύο ανισώσεις. Λύνουμε κάθε ανίσωση χωριστά, παριστάνουμε τις λύσεις στην **ίδια** ευθεία και κρατάμε το **κοινό** τους κομμάτι.

Παράδειγμα 1.5.4 — Συναλήθευση

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων $3x - 1 > 5$ και $x + 4 \leq 9$.

ΛΥΣΗ

$$3x - 1 > 5 \Rightarrow 3x > 6 \Rightarrow x > 2 \quad \text{και} \quad x + 4 \leq 9 \Rightarrow x \leq 5.$$

Κοινές λύσεις: $2 < x \leq 5$.



Παράδειγμα 1.5.5

Ποιοι **ακέραιοι** αριθμοί επαληθεύουν ταυτόχρονα τις $2x + 3 \geq -1$ και $5 - x > 2$;

ΛΥΣΗ

$2x \geq -4 \Rightarrow x \geq -2$ και $-x > -3 \Rightarrow x < 3$. Άρα $-2 \leq x < 3$.

Οι ακέραιοι είναι: **-2, -1, 0, 1, 2**. (Το 3 δεν περιλαμβάνεται.)

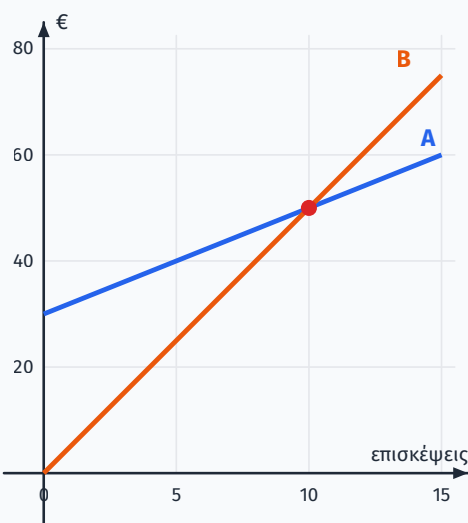
⚠ Προσοχή!

Ειδικές περιπτώσεις: η ανίσωση $0x > 5$ είναι **αδύνατη** (καμία λύση), ενώ η $0x > -2$ αληθεύει για **κάθε** αριθμό x , αφού $0 > -2$.

📖 Πρόβλημα με ανίσωση

Παράδειγμα 1.5.6

Ένα γυμναστήριο προσφέρει δύο πακέτα: Α) 30 € τον μήνα συν 2 € ανά επίσκεψη, Β) 5 € ανά επίσκεψη χωρίς πάγιο. Από πόσες επισκέψεις τον μήνα και πάνω συμφέρει το πακέτο Α;



ΛΥΣΗ

Για x επισκέψεις: Α κοστίζει $30 + 2x$, Β κοστίζει $5x$. Το Α συμφέρει όταν:

$$30 + 2x < 5x \Rightarrow -3x < -30 \Rightarrow x > 10$$

Από **11 επισκέψεις** και πάνω συμφέρει το πακέτο Α (για 10 επισκέψεις τα πακέτα κοστίζουν το ίδιο, 50 €).



Θέλεις να ελέγξεις αν το κατάλαβες; Λύσε τα **διαδραστικά κουίζ** του μαθήματος στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν ψηφιακό φροντιστήριο.

www.mathgreece.com

✎ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να συμπληρώσεις με $<$ ή $>$: α) $-7 ; \dots ; -4$ β) $0 ; \dots ; -0,5$ γ) $-\frac{1}{2} ; \dots ; -\frac{1}{3}$ δ) $-2,1 ; \dots ; -2,01$.
- 2 Αν $\alpha < \beta$, να συμπληρώσεις: α) $\alpha + 3 ; \dots ; \beta + 3$ β) $4\alpha ; \dots ; 4\beta$ γ) $-2\alpha ; \dots ; -2\beta$ δ) $\frac{\alpha}{-5} ; \dots ; \frac{\beta}{-5}$.
- 3 Να λύσεις τις ανισώσεις και να παραστήσεις τις λύσεις: α) $x - 4 > 1$ β) $3x \leq -6$ γ) $-2x < 8$ δ) $5 - x \geq 2$.
- 4 Να λύσεις: α) $4x + 7 \geq x - 5$ β) $3(x - 2) < 5x + 4$.
- 5 Να λύσεις: $\frac{x}{2} - \frac{x-3}{4} \leq 2$.
- 6 Να λύσεις: $\frac{2x-1}{3} - 1 > \frac{x+1}{2}$.
- 7 Να βρεις τις κοινές λύσεις των $2x - 3 < 7$ και $3x + 1 > -8$.
- 8 Να βρεις τους ακέραιους που επαληθεύουν ταυτόχρονα τις $x + 2 > 0$ και $3x - 4 \leq 5$.
- 9 Να εξετάσεις τις ανισώσεις: α) $2(x + 1) > 2x + 5$ β) $3x - (x - 4) > 2x$.
- 10 Ένας μαθητής έχει βαθμούς 14 και 16 σε δύο διαγωνίσματα. Τι βαθμό πρέπει να γράψει στο τρίτο, ώστε ο μέσος όρος να είναι τουλάχιστον 17;
- 11 Ένα ταξί χρεώνει 3 € σημαία και 0,75 € ανά km. Πόσα km το πολύ μπορούμε να διανύσουμε με 18 €;

ΚΕΦ.

1

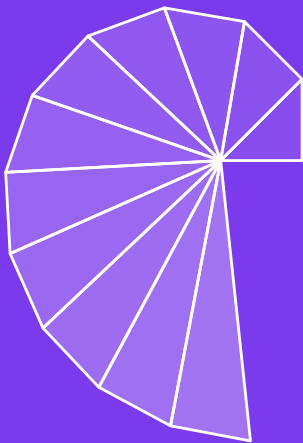
Σε μια ματιά — Ανακεφαλαίωση Κεφαλαίου 1

Έννοια	Τι πρέπει να θυμάμαι
Αναγωγή ομοίων όρων	Προσθέτω μόνο όρους με το ίδιο γράμμα: $5x - 2x = 3x$
Απαλοιφή παρένθεσης με «-»	Αλλάζουν όλα τα πρόσημα: $-(\alpha - \beta) = -\alpha + \beta$
Εξίσωση $ax = b$	$a \neq 0$: $x = \frac{b}{a}$ · $0x = b \neq 0$: αδύνατη · $0x = 0$: ταυτότητα
Κλάσματα	Πολλαπλασιάζω κάθε όρο με το Ε.Κ.Π. — αριθμητές σε παρένθεση
Επίλυση τύπου	Το γράμμα που θέλω μένει μόνο του, σαν άγνωστος εξίσωσης
Προβλήματα	Άγνωστος → εξίσωση → λύση → έλεγχος → απάντηση
Ανίσωση	Ίδια βήματα με εξίσωση· διαίρεση με αρνητικό αλλάζει τη φορά
Συναλήθευση	Κρατώ το κοινό κομμάτι των λύσεων στην ευθεία



Πριν από το διαγώνισμα του κεφαλαίου, λύσε τα **επαναληπτικά κουίζ** και δες τα βιντεομαθήματα των εξισώσεων και ανισώσεων στο **mathgreece.com** — δωρεάν!

www.mathgreece.com



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

- 2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού
- 2.2 Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί
- 2.3 Προβλήματα με τετραγωνικές ρίζες

ΜΑΘΗΜΑ

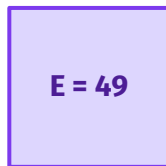
2.1

Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

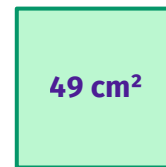
Ξέρουμε να υψώνουμε έναν αριθμό στο τετράγωνο. Τώρα θα μάθουμε την «αντίστροφη» διαδικασία: δοθέντος ενός αριθμού, να βρίσκουμε ποιος θετικός αριθμός, αν υψωθεί στο τετράγωνο, μας τον δίνει.

📖 Από το εμβαδόν στην πλευρά

Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν 49 cm^2 . Πόση είναι η πλευρά του; Ψάχνουμε έναν θετικό αριθμό x με $x^2 = 49$. Επειδή $7^2 = 49$, η πλευρά είναι 7 cm . Λέμε ότι το 7 είναι η **τετραγωνική ρίζα** του 49 και γράφουμε $\sqrt{49} = 7$.


 $x = ;$

Ποια είναι η πλευρά;


 7

$\sqrt{49} = 7$, αφού $7^2 = 49$

📖 Ορισμός · Τετραγωνική ρίζα

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός θετικού αριθμού a συμβολίζεται $\sqrt{a}$ και είναι ο **θετικός** αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον a .

Ορίζουμε ακόμη $\sqrt{0} = 0$.

$$\sqrt{a} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a \text{ και } x \geq 0$$

Το σύμβολο $\sqrt{}$ λέγεται **ριζικό** και ο αριθμός κάτω από αυτό λέγεται **υπόριζο**.

⚠ Προσοχή!

1. Η τετραγωνική ρίζα είναι **πάντα θετική ή μηδέν**. Παρόλο που και το $(-7)^2 = 49$, γράφουμε $\sqrt{49} = 7$ και **όχι** -7 .
2. Ρίζα **αρνητικού** αριθμού δεν ορίζεται: το $\sqrt{-9}$ δεν υπάρχει, αφού κανένας αριθμός υψωμένος στο τετράγωνο δεν δίνει αρνητικό.

📖 Τέλεια τετράγωνα

Οι αριθμοί που είναι τετράγωνα ακεραίων λέγονται **τέλεια τετράγωνα**. Αξίζει να τους ξέρεις απέξω — θα σε γλιτώσουν από πολύ κόπο:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

v	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
v^2	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

Από τον πίνακα διαβάζουμε αμέσως: $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{144} = 12$, $\sqrt{225} = 15$, $\sqrt{400} = 20$, κ.ο.κ.

💡 Κόλπο

Ένα τέλειο τετράγωνο **ποτέ** δεν τελειώνει σε 2, 3, 7 ή 8. Έτσι, αμέσως ξέρεις ότι οι $\sqrt{72}$, $\sqrt{153}$, $\sqrt{487}$, $\sqrt{1008}$ δεν είναι ακέραιοι. Επίσης: αν ο α έχει «ζευγάρι μηδενικά» στο τέλος, $\sqrt{3600} = 60$, $\sqrt{90000} = 300$.

📖 Ρίζες δεκαδικών και κλασμάτων

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \quad \sqrt{0,16} = 0,4 \quad \sqrt{0,0049} = 0,07 \quad \sqrt{1,44} = 1,2$$

Πράγματι, $(\frac{3}{5})^2 = \frac{9}{25}$ και $0,4^2 = 0,16$.

⊗ Συχνό λάθος

✗ Λάθος

$$\sqrt{0,9} = 0,3$$

✓ Σωστό

$$\sqrt{0,09} = 0,3, \text{ ενώ το } \sqrt{0,9} \approx 0,949$$

Το $0,3^2 = 0,09$ (δύο δεκαδικά ψηφία!). Ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων διπλασιάζεται στο τετράγωνο.

📖 Ιδιότητες

☆ Βασικές ιδιότητες (για $\alpha, \beta \geq 0$)

- $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$ και $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$
- $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ π.χ. $\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10$
- $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ ($\beta > 0$) π.χ. $\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$

⊗ Συχνό λάθος

✗ Λάθος

$$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

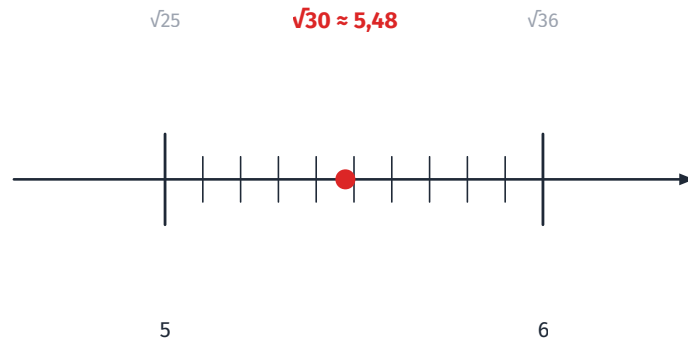
✓ Σωστό

$$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Η ρίζα **δεν** «μοιράζεται» σε άθροισμα ή διαφορά! Ισχύει $\sqrt{\alpha + \beta} \neq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ (εκτός αν κάποιος είναι 0). Πρώτα κάνουμε την πράξη μέσα στο ριζικό.

📖 Εκτίμηση και υπολογισμός ρίζας

Τι κάνουμε όταν ο αριθμός δεν είναι τέλειο τετράγωνο, π.χ. $\sqrt{30}$; Αφού $25 < 30 < 36$, θα είναι $5 < \sqrt{30} < 6$. Πιο κοντά στο 5,5 μάλιστα, αφού $5,5^2 = 30,25$. Με κομπιουτεράκι (πλήκτρο $\sqrt{}$) βρίσκουμε $\sqrt{30} \approx 5,477$.



Το $\sqrt{30}$ βρίσκεται ανάμεσα στο 5 και στο 6.

☆ Πώς εκτιμώ μια ρίζα $\sqrt{\alpha}$

- 1 Βρίσκω τα δύο διαδοχικά τέλεια τετράγωνα ανάμεσα στα οποία βρίσκεται ο α .
- 2 Παίρνω τις ρίζες τους: ανάμεσά τους βρίσκεται η $\sqrt{\alpha}$.
- 3 Για καλύτερη ακρίβεια δοκιμάζω δεκαδικούς (π.χ. $5,4^2$; $5,5^2$;).

📖 Η εξίσωση $x^2 = \alpha$

Η εξίσωση $x^2 = 49$ έχει **δύο** λύσεις: $x = 7$ και $x = -7$, αφού και τα δύο υψωμένα στο τετράγωνο δίνουν 49.
Γενικά:

☆ Λύσεις της $x^2 = \alpha$

- Αν $\alpha > 0$: δύο λύσεις, $x = \sqrt{\alpha}$ ή $x = -\sqrt{\alpha}$ (γράφουμε $x = \pm\sqrt{\alpha}$).
- Αν $\alpha = 0$: μία λύση, $x = 0$.
- Αν $\alpha < 0$: καμία λύση (αδύνατη).

⊗ Συχνό λάθος

✗ **Λάθος**

$$x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$

✓ **Σωστό**

$$x^2 = 25 \Rightarrow x = 5 \text{ ή } x = -5$$

Μην μπερδεύεις την ρίζα (που είναι μόνο θετική) με τις λύσεις της εξίσωσης (που είναι δύο).

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 2.1.1

Να υπολογιστούν: α) $\sqrt{81} - \sqrt{36}$ β) $3\sqrt{16} + \sqrt{0,25}$ γ) $\sqrt{6^2 + 8^2}$ δ) $(\sqrt{7})^2 - \sqrt{7^2}$

ΛΥΣΗ

α) $9 - 6 = 3$ β) $3 \cdot 4 + 0,5 = 12,5$ γ) $\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ δ) $7 - 7 = 0$

Παράδειγμα 2.1.2

Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $x^2 = 121$ β) $2x^2 - 50 = 0$ γ) $x^2 + 9 = 0$ δ) $3x^2 = 15$

ΛΥΣΗ

α) $x = \pm 11$. β) $2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$. γ) $x^2 = -9$: **αδύνατη**. δ) $x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$.

Παράδειγμα 2.1.3

Ένα τετράγωνο οικόπεδο έχει εμβαδόν 1.225 m^2 . Πόσα μέτρα συρματοπλέγμα χρειάζονται για να περιφραχτεί;

ΛΥΣΗ

Πλευρά: $a = \sqrt{1225} = 35 \text{ m}$ (αφού $35^2 = 1225$). Περίμετρος: $4 \cdot 35 = 140 \text{ m}$.

Παράδειγμα 2.1.4

Να βρεθούν οι διαδοχικοί ακέραιοι ανάμεσα στους οποίους βρίσκεται καθένας από τους: $\sqrt{50}$, $\sqrt{90}$, $\sqrt{3}$.

ΛΥΣΗ

$49 < 50 < 64 \Rightarrow 7 < \sqrt{50} < 8$. $81 < 90 < 100 \Rightarrow 9 < \sqrt{90} < 10$. $1 < 3 < 4 \Rightarrow 1 < \sqrt{3} < 2$.

Λίγη ιστορία

Το σύμβολο $\sqrt{}$ εμφανίστηκε τον 16ο αιώνα. Πιστεύεται ότι προέρχεται από ένα παραμορφωμένο γράμμα «r», από τη λατινική λέξη *radix*, που σημαίνει «ρίζα». Η οριζόντια γραμμή προστέθηκε αργότερα από τον Ντεκάρτ.



Θέλεις να δεις αυτό το μάθημα και σε **βίντεο**, βήμα-βήμα; Στο **mathgreece.com** θα βρεις ολοκληρωμένο, **δωρεάν** φροντιστήριο για όλη την ύλη της Β' Γυμνασίου.
www.mathgreece.com

 Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να υπολογίσεις: α) $\sqrt{64}$ β) $\sqrt{169}$ γ) $\sqrt{0,81}$ δ) $\sqrt{\frac{49}{100}}$ ε) $\sqrt{10000}$ στ) $\sqrt{0,0001}$
- 2 Να υπολογίσεις: α) $2\sqrt{25} - 3\sqrt{4}$ β) $\sqrt{144} : \sqrt{9}$ γ) $\sqrt{3^2 + 4^2}$ δ) $\sqrt{13^2 - 12^2}$
- 3 Ποιες ισότητες είναι σωστές; α) $\sqrt{36} = \pm 6$ β) $\sqrt{16 + 9} = 4 + 3$ γ) $\sqrt{4 \cdot 9} = 6$ δ) $(\sqrt{11})^2 = 11$ ε) $\sqrt{(-5)^2} = 5$
- 4 Να βρεις ανάμεσα σε ποιους διαδοχικούς ακεραίους βρίσκονται: α) $\sqrt{20}$ β) $\sqrt{75}$ γ) $\sqrt{130}$ δ) $\sqrt{2}$
- 5 Να λύσεις τις εξισώσεις: α) $x^2 = 64$ β) $x^2 - 3 = 0$ γ) $4x^2 = 1$ δ) $x^2 + 1 = 0$ ε) $5x^2 = 0$
- 6 Να υπολογίσεις χωρίς κομπιουτεράκι: α) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ β) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ γ) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$ δ) $\sqrt{0,04 \cdot 900}$
- 7 Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν $2,25 \text{ m}^2$. Να βρεις την πλευρά και την περίμετρό του.
- 8 Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις 18 cm και 8 cm . Πόση πρέπει να είναι η πλευρά τετραγώνου με το ίδιο εμβαδόν;
- 9 Να βρεις τον θετικό αριθμό x αν: α) $\sqrt{x} = 9$ β) $\sqrt{x + 3} = 4$ γ) $\sqrt{2x} = 10$
- 10 Με κομπιουτεράκι να υπολογίσεις με προσέγγιση εκατοστού: $\sqrt{7}$, $\sqrt{45}$, $\sqrt{200}$.

ΜΑΘΗΜΑ

2.2

Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί

Υπάρχουν αριθμοί που δεν μπορούν να γραφτούν ως κλάσμα — ούτε με όσα δεκαδικά ψηφία κι αν γράψουμε. Η ανακάλυψή τους συγκλόνισε τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς. Εδώ γνωρίζουμε τους άρρητους και το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

🕒 Θυμάμαι από παλιότερα

Ρητοί λέγονται οι αριθμοί που γράφονται με τη μορφή κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ , ν ακέραιοι και $\nu \neq 0$.

Π.χ. $5 = \frac{5}{1}$, $-0,75 = -\frac{3}{4}$, $0,333... = \frac{1}{3}$. Κάθε ρητός, γραμμένος ως δεκαδικός, είναι είτε

τερματιζόμενος (π.χ. 0,75) είτε **περιοδικός** (π.χ. $0,\overline{3} = 0,333..., 1,\overline{245}$).

📖 Ένας αριθμός που «δεν χωράει» στα κλάσματα

Πόση είναι η διαγώνιος ενός τετραγώνου με πλευρά 1; Θα δούμε στη Γεωμετρία (Πυθαγόρειο θεώρημα) ότι το τετράγωνό της είναι $1^2 + 1^2 = 2$. Άρα η διαγώνιος είναι $\sqrt{2}$. Ποιος αριθμός όμως είναι αυτός;

Δοκιμή	1,4	1,41	1,414	1,4142	1,41421
Τετράγωνο	1,96	1,9881	1,999396	1,99996164	1,9999899...

Πλησιάζουμε όλο και περισσότερο το 2, χωρίς όμως να το φτάνουμε ποτέ. Έχει αποδειχτεί ότι το $\sqrt{2} = 1,41421356...$ έχει **άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά**. Επομένως δεν είναι ρητός.

📖 Ορισμός · Άρρητος αριθμός

Ένας αριθμός που **δεν είναι ρητός**, δηλαδή δεν μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα ακεραίων, λέγεται **άρρητος**. Η δεκαδική του μορφή έχει άπειρα ψηφία χωρίς περίοδο.

Παραδείγματα: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{7}$, $\pi = 3,14159...$

⚠ Προσοχή!

Η τετραγωνική ρίζα ενός φυσικού που **δεν είναι τέλειο τετράγωνο** είναι πάντα άρρητος:

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{99}$ κλπ. Αντίθετα $\sqrt{49} = 7$ ή $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ είναι ρητοί!

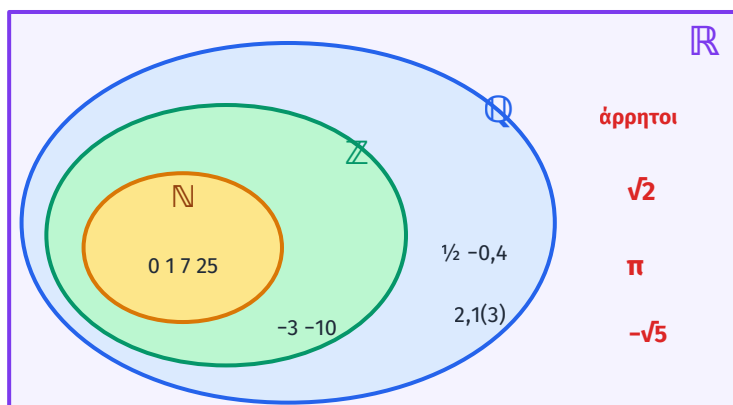
🏛 Λίγη ιστορία

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι «τα πάντα είναι αριθμοί» — εννοώντας λόγους ακεραίων. Η ανακάλυψη ότι η διαγώνιος του τετραγώνου είναι «ασύμμετρη» προς την πλευρά του (δηλαδή ότι το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος) αποδίδεται στον **Ίππασο τον Μεταποντίνο** και, σύμφωνα με τον θρύλο, προκάλεσε τόση αναστάτωση, ώστε κρατήθηκε μυστική για χρόνια.

Οι πραγματικοί αριθμοί

Ορισμός · Πραγματικοί αριθμοί

Οι ρητοί μαζί με τους άρρητους αποτελούν το σύνολο των **πραγματικών αριθμών**, που συμβολίζεται με $\mathbb{R}$.



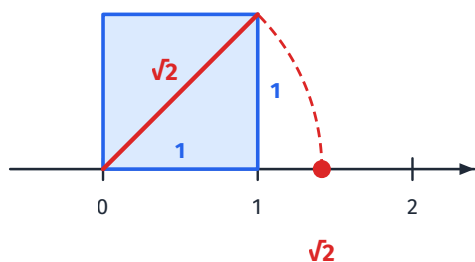
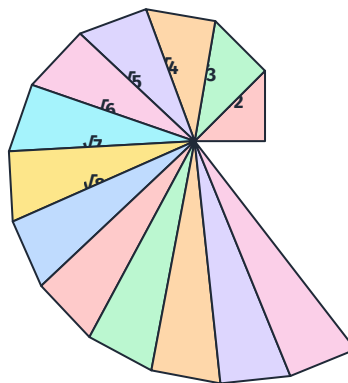
Τα σύνολα αριθμών: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ – κάθε σύνολο περιέχεται στο επόμενο.

Σύμβολο	Σύνολο	Παραδείγματα
$\mathbb{N}$	Φυσικοί	0, 1, 2, 3, ...
$\mathbb{Z}$	Ακέραιοι	..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
$\mathbb{Q}$	Ρητοί	$\frac{2}{3}$, -1,5, $0,\overline{6}$, 4
—	Άρρητοι	$\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, π
$\mathbb{R}$	Πραγματικοί	όλοι οι παραπάνω

Οι πραγματικοί αριθμοί πάνω στην ευθεία

Σε **κάθε** σημείο της ευθείας των αριθμών αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός και, αντίστροφα, σε κάθε πραγματικό αριθμό αντιστοιχεί ένα σημείο. Οι ρητοί μόνοι τους αφήνουν «τρύπες» στην ευθεία· οι άρρητοι τις γεμίζουν.

Μπορούμε μάλιστα να τοποθετήσουμε **ακριβώς** το $\sqrt{2}$ στην ευθεία με κανόνα και διαβήτη: κατασκευάζουμε τετράγωνο πλευράς 1 πάνω στο τμήμα $[0, 1]$, και με κέντρο το 0 και ακτίνα τη διαγώνιο γράφουμε τόξο που τέμνει την ευθεία στο σημείο $\sqrt{2}$.

Κατασκευή του $\sqrt{2}$ στην ευθείαΗ «σπείρα του Θεόδωρου»: κάθε νέα υποτείνουσα είναι $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$

Σύγκριση και πράξεις

Για να συγκρίνουμε πραγματικούς αριθμούς, τους γράφουμε σε δεκαδική μορφή (προσεγγιστικά) ή συγκρίνουμε τα τετράγωνά τους (αν είναι θετικοί): αφού $10 < 11$, είναι $\sqrt{10} < \sqrt{11}$. Γενικά, για θετικούς α, β : $\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta}$.

Οι πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς έχουν **όλες τις γνωστές ιδιότητες** (αντιμεταθετική, προσεταιριστική, επιμεριστική κ.λπ.), όπως και στους ρητούς.

Παράδειγμα 2.2.1

Να χαρακτηρίσετε ως ρητό ή άρρητο κάθε αριθμό: $\sqrt{36}, \sqrt{12}, \frac{22}{7}, \pi, 0,\overline{12}, -\sqrt{\frac{9}{16}}, \sqrt{0,1}, 2 + \sqrt{3}$.

ΛΥΣΗ

Αριθμός	Είδος	Αιτιολογία
$\sqrt{36}$	ρητός	$= 6$
$\sqrt{12}$	άρρητος	12 δεν είναι τέλειο τετράγωνο
$\frac{22}{7}$	ρητός	κλάσμα ακεραίων (προσέγγιση του π , όχι το π !)
π	άρρητος	3,14159...
$0,\overline{12}$	ρητός	περιοδικός δεκαδικός
$-\sqrt{\frac{9}{16}}$	ρητός	$= -\frac{3}{4}$
$\sqrt{0,1}$	άρρητος	$0,1 = \frac{1}{10}$, όχι τετράγωνο ρητού
$2 + \sqrt{3}$	άρρητος	ρητός + άρρητος = άρρητος

⊗ Συχνό λάθος

✗ Λάθος

$$\pi = 3,14 \quad \text{ή} \quad \pi = \frac{22}{7}$$

✓ Σωστό

$$\pi \approx 3,14 \quad \text{και} \quad \pi \approx \frac{22}{7}$$

Ο π είναι άρρητος· οι αριθμοί 3,14 και $\frac{22}{7}$ είναι απλώς **προσεγγίσεις** του, γι' αυτό γράφουμε « $\approx$ » και όχι « $=$ ».

Παράδειγμα 2.2.2

Να διαταχθούν από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο: $\sqrt{5}$, ; 2,3, ; $\frac{9}{4}$, ; $-\sqrt{3}$, ; -1,8, ; $\pi - 1$.



ΛΥΣΗ

Προσεγγίσεις: $\sqrt{5} \approx 2,236$, $\frac{9}{4} = 2,25$, $-\sqrt{3} \approx -1,732$, $\pi - 1 \approx 2,142$.

Διάταξη: $-1,8 < -\sqrt{3} < \pi - 1 < \sqrt{5} < \frac{9}{4} < 2,3$.

Παράδειγμα 2.2.3

Να βρεθεί ένας ρητός και ένας άρρητος αριθμός ανάμεσα στο 3 και στο 4.

ΛΥΣΗ

Ρητός: $3,5 = \frac{7}{2}$. Άρρητος: $\sqrt{10}$, αφού $9 < 10 < 16$, άρα $3 < \sqrt{10} < 4$. (Και ο π είναι μια καλή απάντηση!)



Για περισσότερες λυμένες ασκήσεις, **κουίζ αυτοαξιολόγησης** και σημειώσεις, μπες στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών.
www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να γράψεις ποιοι από τους αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι: $\sqrt{81}$, $\sqrt{8}$, $-\frac{5}{3}$, $\sqrt{1,21}$, $0,7$, $\sqrt{15}$, π .
- 2 Να συμπληρώσεις με « $\in$ » ή « $\notin$ »: α) -4 ; ... ; $\mathbb{N}$ β) $\sqrt{25}$; ... ; $\mathbb{N}$ γ) $\frac{1}{3}$; ... ; $\mathbb{Q}$ δ) $\sqrt{3}$; ... ; $\mathbb{Q}$ ε) $\sqrt{3}$; ... ; $\mathbb{R}$
- 3 Να συγκρίνεις: α) $\sqrt{17}$ και 4 β) $\sqrt{30}$ και $\sqrt{29}$ γ) $-\sqrt{2}$ και -1,5 δ) π και $\sqrt{10}$

- 4 Να διατάξεις από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο: $\sqrt{2}$, ; 1,5, ; $\frac{4}{3}$, ; $-\sqrt{2}$, ; 0.
- 5 Να βρεις δύο άρρητους αριθμούς ανάμεσα στο 5 και στο 6.
- 6 Να εξηγήσεις γιατί ο $\sqrt{50}$ είναι άρρητος, ενώ ο $\sqrt{\frac{50}{2}}$ είναι ρητός.
- 7 Σωστό ή Λάθος; α) Κάθε ακέραιος είναι ρητός. β) Κάθε πραγματικός είναι ρητός. γ) Ο 0,1010010001... (το πλήθος των μηδενικών αυξάνει) είναι άρρητος. δ) Το άθροισμα δύο άρρητων είναι πάντα άρρητος.
- 8 Να σχεδιάσεις σε ευθεία το σημείο που αντιστοιχεί στον $\sqrt{2}$ και μετά στον $-\sqrt{2}$.
- 9 Ποιος είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος από τον $\sqrt{60}$; Και ο μικρότερος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος από τον $-\sqrt{60}$;

ΜΑΘΗΜΑ

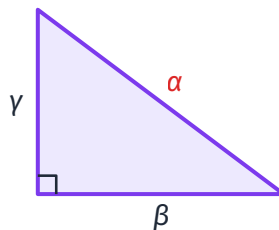
2.3

Προβλήματα με τετραγωνικές ρίζες

Στο μάθημα αυτό εφαρμόζουμε όσα μάθαμε για τις ρίζες και τους πραγματικούς αριθμούς σε προβλήματα — πολλά από αυτά γεωμετρικά, που συνδέονται με το Πυθαγόρειο θεώρημα (Μέρος Β', Μάθημα 1.4).

🕒 **Θυμάμαι: Πυθαγόρειο θεώρημα**

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Αναλυτικά το θεώρημα θα το δούμε στο Μέρος Β' (Μάθημα 1.4).



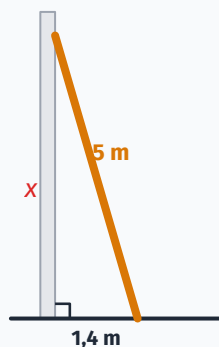
$$\alpha = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$$

☆ **Στρατηγική**

- 1 Κάνω **σχήμα** και σημειώνω τα δεδομένα.
- 2 Εντοπίζω ορθογώνιο τρίγωνο ή τετράγωνο εμβαδόν που οδηγεί σε εξίσωση της μορφής $x^2 = \alpha$.
- 3 Λύνω, κρατώντας **μόνο τη θετική λύση** όταν ο άγνωστος είναι μήκος.
- 4 Αν η ρίζα δεν βγαίνει ακριβής, δίνω και **προσέγγιση** (π.χ. με δύο δεκαδικά).

Παράδειγμα 2.3.1

Μια σκάλα μήκους 5 m ακουμπά σε τοίχο. Η βάση της απέχει 1,4 m από τον τοίχο. Σε τι ύψος φτάνει η σκάλα;

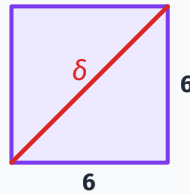


ΛΥΣΗ

Έστω x το ύψος. Από το Πυθαγόρειο: $x^2 + 1,4^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 1,96 = 23,04 \Rightarrow x = \sqrt{23,04} = 4,8$ m.
(Η λύση $-4,8$ απορρίπτεται, αφού το x είναι μήκος.)

Παράδειγμα 2.3.2

Να βρεθεί η διαγώνιος τετραγώνου πλευράς 6 cm.

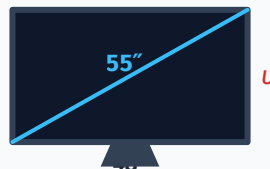
**ΛΥΣΗ**

$$\delta^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \Rightarrow \delta = \sqrt{72} \approx 8,49 \text{ cm.}$$

Γενικά, ένα τετράγωνο πλευράς a έχει διαγώνιο $\delta = a\sqrt{2}$ (εδώ $6\sqrt{2} \approx 6 \cdot 1,414 \approx 8,49$).

Παράδειγμα 2.3.3

Μια τηλεόραση «55 ιντσών» έχει διαγώνιο οθόνης 55 ίντσες και πλάτος 48 ίντσες. Πόσο είναι το ύψος της οθόνης; (1 ίντσα $\approx 2,54$ cm)

**ΛΥΣΗ**

$$\nu^2 = 55^2 - 48^2 = 3025 - 2304 = 721 \Rightarrow \nu = \sqrt{721} \approx 26,85 \text{ ίντσες} \approx 68,2 \text{ cm.}$$

Παράδειγμα 2.3.4

Ένα τετράγωνο έχει το ίδιο εμβαδόν με ένα ορθογώνιο διαστάσεων $12 \text{ m} \times 3 \text{ m}$. Πόση είναι η πλευρά του τετραγώνου; Ποιο από τα δύο σχήματα έχει μικρότερη περίμετρο;

ΛΥΣΗ

Εμβαδόν 36 m^2 , πλευρά $\sqrt{36} = 6 \text{ m}$. Περίμετροι: τετράγωνο 24 m, ορθογώνιο 30 m. Μικρότερη περίμετρο έχει το **τετράγωνο**.

 Ωραία παρατήρηση

Από όλα τα ορθογώνια με το ίδιο εμβαδόν, το τετράγωνο έχει τη μικρότερη περίμετρο. Γι' αυτό, π.χ., ένα τετράγωνο οικόπεδο χρειάζεται τον λιγότερο φράχτη.

Παράδειγμα 2.3.5

Ένας κύβος έχει ολική επιφάνεια 150 cm^2 . Να βρεθεί η ακμή του.

ΛΥΣΗ

Ο κύβος έχει 6 ίσες τετράγωνες έδρες: $6\alpha^2 = 150 \Rightarrow \alpha^2 = 25 \Rightarrow \alpha = 5 \text{ cm}$.

Παράδειγμα 2.3.6 — Από τη Φυσική

Η απόσταση σε μέτρα που διανύει ένα σώμα που πέφτει ελεύθερα σε t δευτερόλεπτα είναι περίπου $s = 5t^2$. Σε πόσο χρόνο ένα κέρμα που πέφτει από ύψος 80 m φτάνει στο έδαφος;

ΛΥΣΗ

$5t^2 = 80 \Rightarrow t^2 = 16 \Rightarrow t = 4 \text{ s}$ (απορρίπτουμε το -4).

 Συχνό λάθος**× Λάθος**

$$x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x = 3 + 4 = 7$$

✓ Σωστό

$$x^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow x = 5$$

Η ρίζα αθροίσματος δεν είναι άθροισμα ριζών! Πρώτα υπολογίζουμε το άθροισμα, μετά παίρνουμε ρίζα.

 Προσοχή!

Όταν το αποτέλεσμα είναι άρρητος, π.χ. $\sqrt{72}$, στο διαγώνισμα γράψε **και** την ακριβή τιμή ($\sqrt{72}$) **και** μια προσέγγιση ($\approx 8,49$). Η ακριβής τιμή είναι η «σωστή» απάντηση· η προσέγγιση βοηθάει στην ερμηνεία.



Κόλλησες κάπου; Στο **mathgreece.com** υπάρχουν βιντεομαθήματα, podcasts και παιχνίδια γνώσεων για κάθε ενότητα — όλα **δωρεάν**.
www.mathgreece.com

 Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1** Ένα τετράγωνο χωράφι έχει εμβαδόν 2.500 m^2 . Πόσα μέτρα είναι η περιμέτρος του;
- 2** Ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές 9 cm και 12 cm. Να βρεις την υποτείνουσα.
- 3** Ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα 26 cm και μία κάθετη 10 cm. Να βρεις την άλλη κάθετη.

- 4 Να βρεις τη διαγώνιο ορθογωνίου με διαστάσεις 2 m και 3 m (ακριβώς και με προσέγγιση εκατοστού).
- 5 Ένας χαρταετός είναι δεμένος με σπάγκο 50 m, τεντωμένο. Ο χαρταετός βρίσκεται ακριβώς πάνω από σημείο που απέχει 30 m από το παιδί. Σε τι ύψος πετάει; (Αγνόησε το ύψος του παιδιού.)
- 6 Η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι 10 cm. Να βρεις την πλευρά και το εμβαδόν του.
- 7 Ένας κύκλος έχει εμβαδόν $E = \pi r^2 = 78,5 \text{ cm}^2$. Με $\pi \approx 3,14$, να βρεις την ακτίνα του.
- 8 Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά 8 cm. Να βρεις το ύψος του (ακριβώς και προσεγγιστικά).

Σε μια ματιά — Ανακεφαλαίωση Κεφαλαίου 20

Πριν προχωρήσεις στο επόμενο κεφάλαιο ή πριν από το διαγώνισμα, έλεγξε ότι θυμάσαι όλα τα παρακάτω. Αν κάτι δεν σου είναι ξεκάθαρο, γύρνα στο αντίστοιχο μάθημα.

Έννοια	Τι πρέπει να θυμάμαι
Τετραγωνική ρίζα	$\sqrt{\alpha} = x \Leftrightarrow x^2 = \alpha, x \geq 0$ — η ρίζα δεν είναι ποτέ αρνητική
Ιδιότητες	$\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}, \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}},$ αλλά $\sqrt{\alpha+\beta} \neq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$
Εξίσωση $x^2 = \alpha$	$\alpha > 0: x = \pm\sqrt{\alpha} \cdot \alpha = 0: x = 0 \cdot \alpha < 0: \text{αδύνατη}$
Άρρητοι	δεν γράφονται ως κλάσμα· άπειρα δεκαδικά χωρίς περίοδο ($\sqrt{2}, \pi$)
Πραγματικοί	ρητοί + άρρητοι· γεμίζουν όλη την ευθεία
Προβλήματα	σχήμα $\rightarrow$ Πυθαγόρειο ή εμβαδόν $\rightarrow x^2 = \alpha \rightarrow$ κρατώ τη θετική λύση

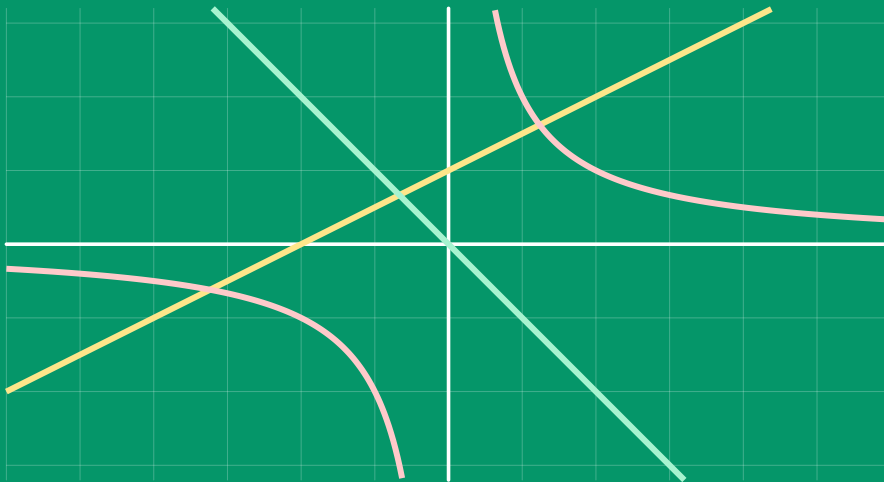


Πριν από το διαγώνισμα του κεφαλαίου, λύσε τα **επαναληπτικά κουίζ** και δες τα βιντεομαθήματα στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο.
www.mathgreece.com

3

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο

Συναρτήσεις



Πώς αλλάζει το κόστος όταν αγοράζουμε περισσότερα; Πώς μεταβάλλεται ο χρόνος ενός ταξιδιού όταν αυξάνουμε την ταχύτητα; Οι συναρτήσεις περιγράφουν τέτοιες σχέσεις με έναν τύπο, έναν πίνακα ή μια εικόνα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μάθουμε να τις «διαβάζουμε» και να τις σχεδιάζουμε σε σύστημα αξόνων.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 3.1** Η έννοια της συνάρτησης
- 3.2** Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης
- 3.3** Η συνάρτηση $y = ax$
- 3.4** Η συνάρτηση $y = ax + \beta$
- 3.5** Η συνάρτηση $y = a/x$ – Η υπερβολή

ΜΑΘΗΜΑ

3.1

Η έννοια της συνάρτησης

Η συνάρτηση είναι ίσως η σημαντικότερη ιδέα όλων των Μαθηματικών: περιγράφει πώς ένα μέγεθος «εξαρτάται» από ένα άλλο. Θα τη συναντάς σε κάθε τάξη από εδώ και πέρα.

Ποσά που εξαρτώνται το ένα από το άλλο

Στο κυλικείο ένα κουλούρι κοστίζει 0,60 €. Το ποσό y που πληρώνουμε εξαρτάται από το πλήθος x των κουλουριών που αγοράζουμε:

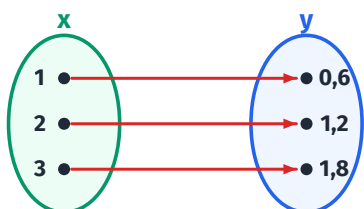
Κουλούρια x	1	2	3	4	5
Κόστος y (€)	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00

Για **κάθε** τιμή του x υπάρχει **μία μόνο** τιμή του y , που βρίσκεται με τον τύπο $y = 0,6x$. Λέμε ότι το y είναι **συνάρτηση** του x .

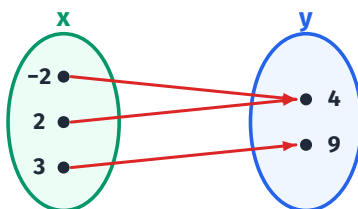
Ορισμός · Συνάρτηση

Συνάρτηση είναι μια διαδικασία (έναν κανόνα) με την οποία **κάθε** τιμή μιας μεταβλητής x αντιστοιχίζεται σε **μία μόνο** τιμή μιας άλλης μεταβλητής y .

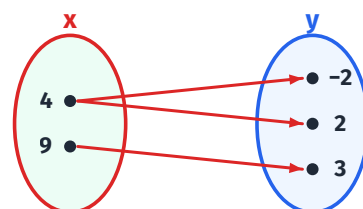
Η x λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** (τη διαλέγουμε ελεύθερα) και η y **εξαρτημένη μεταβλητή** (η τιμή της εξαρτάται από την τιμή του x).



Συνάρτηση ✓



Συνάρτηση ✓ ($y = x^2$)



ΟΧΙ συνάρτηση ✗

Προσοχή!

Το κρίσιμο είναι ότι από **κάθε** τιμή του x ξεκινά **ακριβώς ένα** βέλος. Δεν πειράζει αν σε μία τιμή του y «καταλήγουν» δύο βέλη (μεσαίο διάγραμμα). Πειράζει όμως αν από μια τιμή του x ξεκινούν δύο βέλη (δεξί διάγραμμα: το 4 αντιστοιχίζεται και στο -2 και στο 2).

Τρόποι περιγραφής μιας συνάρτησης

Μια συνάρτηση μπορεί να δοθεί με διάφορους τρόπους — και πρέπει να μπορούμε να περνάμε από τον έναν στον άλλο:

Τρόπος	Παράδειγμα
Με λόγια	«Το κόστος είναι 0,60 € επί τον αριθμό των κουλουριών»
Με τύπο	$y = 0,6x$
Με πίνακα τιμών	$x: 1, 2, 3 \rightarrow y: 0,6 \cdot 1, 2 \cdot 1,8$
Με διάγραμμα βελών	όπως παραπάνω
Με γραφική παράσταση	σημεία ή γραμμή σε σύστημα αξόνων (Μάθημα 3.2)

Πίνακας τιμών από τύπο

Παράδειγμα 3.1.1

Δίνεται η συνάρτηση $y = 3x - 2$. Να συμπληρωθεί ο πίνακας τιμών για $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

ΛΥΣΗ

Αντικαθιστούμε κάθε τιμή του x στον τύπο: για $x = -2$: $y = 3(-2) - 2 = -8$, για $x = -1$: $y = -5$, κ.ο.κ.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 3x - 2$	-8	-5	-2	1	4	7

Παράδειγμα 3.1.2

Για τη συνάρτηση $y = x^2 - 4$ να βρεθούν: α) η τιμή της y όταν $x = -3$, β) οι τιμές του x για τις οποίες $y = 0$.

ΛΥΣΗ

α) $y = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$.

β) $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ ή $x = -2$.

Παρατήρηση: σε **δύο** διαφορετικά x αντιστοιχεί το ίδιο y — αυτό επιτρέπεται.

Από το πρόβλημα στον τύπο

Παράδειγμα 3.1.3

Ένας υδραυλικός χρεώνει 25 € για την επίσκεψη και 18 € για κάθε ώρα εργασίας. α) Να εκφραστεί το κόστος y ως συνάρτηση των ωρών x . β) Πόσο κοστίζουν 3 ώρες; γ) Πόσες ώρες δούλεψε αν πληρώσαμε 115 €;

ΛΥΣΗ

α) $y = 25 + 18x$. β) $y = 25 + 54 = 79$ €. γ) $25 + 18x = 115 \Rightarrow 18x = 90 \Rightarrow x = 5$ ώρες.

Παράδειγμα 3.1.4

Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 20 cm. Να εκφραστεί το εμβαδόν του E ως συνάρτηση του πλάτους x .

ΛΥΣΗ

Μήκος + πλάτος = 10, άρα μήκος = $10 - x$. Εμβαδόν: $E = x(10 - x) = 10x - x^2$, με $0 < x < 10$.

x	1	2	3	4	5	6
E	9	16	21	24	25	24

Βλέπουμε ότι το μεγαλύτερο εμβαδόν το έχει το **τετράγωνο** ($x = 5$).

⊗ Συχνό λάθος

× Λάθος

Στη $y = 2x + 1$ «για $x = -3$ είναι $y = 2 - 3 + 1 = 0$ »

✓ Σωστό

$y = 2(-3) + 1 = -6 + 1 = -5$

Το $2x$ σημαίνει $2 \times x$. Αντικαθιστούμε **με παρένθεση**.

💡 Για τους πιο περίεργους

Σε πολλά βιβλία θα δεις και τον συμβολισμό $f(x)$: η $f(x) = 3x - 2$ είναι ακριβώς η $y = 3x - 2$, και το $f(4)$ σημαίνει «την τιμή της συνάρτησης όταν $x = 4$ », δηλαδή $f(4) = 10$. Θα τον χρησιμοποιείς πολύ στο Λύκειο.



Εξάσκηση χωρίς τέλος: στο **mathgreece.com** θα βρεις επιπλέον φυλλάδια ασκήσεων και διαγωνίσματα για τη Β' Γυμνασίου, εντελώς δωρεάν.
www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Για τη συνάρτηση $y = 5 - 2x$ να συμπληρώσεις πίνακα τιμών για $x = -2, -1, 0, 1, 2$.
- 2 Ποια από τα παρακάτω διαγράμματα ορίζουν συνάρτηση από το A στο B; (α) $1 \rightarrow a, 2 \rightarrow a, 3 \rightarrow b$ (β) $1 \rightarrow a, 1 \rightarrow b, 2 \rightarrow c$ (γ) $1 \rightarrow a, 2 \rightarrow b$ (το 3 δεν αντιστοιχίζεται πουθενά)
- 3 Ένα κινητό τηλέφωνο χρεώνει πάγιο 12 € τον μήνα και 0,05 € ανά μήνυμα. Να γράφεις τον τύπο του μηνιαίου κόστους y για x μηνύματα. Πόσο κοστίζουν 140 μηνύματα;
- 4 Για τη συνάρτηση $y = x^2 + 1$ να βρεις τα y για $x = -2, 0, 3$ και τα x για τα οποία $y = 10$.
- 5 Ένα αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα 90 km/h. Να εκφράσεις την απόσταση s (km) ως συνάρτηση του χρόνου t (h) και να βρεις σε πόσο χρόνο διανύει 315 km.
- 6 Ένα δοχείο περιέχει 40 λίτρα νερό και αδειάζει με ρυθμό 2,5 λίτρα το λεπτό. Να εκφράσεις την ποσότητα y του νερού ως συνάρτηση του χρόνου x (σε λεπτά). Σε πόσα λεπτά θα αδειάσει;
- 7 Ο Γιάννης είναι 3 χρόνια μεγαλύτερος από τη Μαρία. Να εκφράσεις την ηλικία y του Γιάννη ως συνάρτηση της ηλικίας x της Μαρίας.

- 8** Να εκφράσεις την περίμετρο Π ενός τετραγώνου ως συνάρτηση της πλευράς του x , καθώς και το εμβαδόν του E . Είναι το E συνάρτηση της Π ;

ΜΑΘΗΜΑ
3.2

Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης

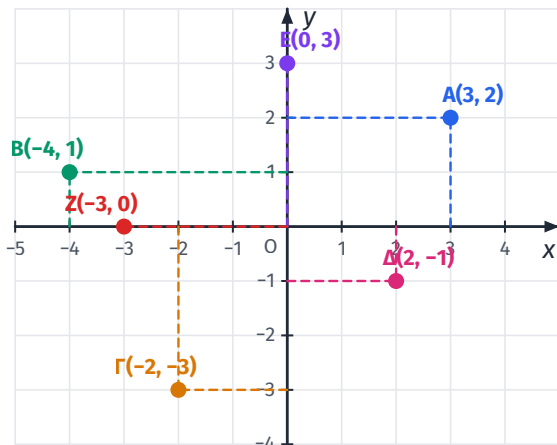
Με δύο κάθετες «αριθμογραμμές» μπορούμε να δώσουμε σε κάθε σημείο του επιπέδου μια «διεύθυνση» από δύο αριθμούς. Αυτή η ιδέα του Ντεκάρτ ένωσε την Άλγεβρα με τη Γεωμετρία και μας επιτρέπει να «βλέπουμε» τις συναρτήσεις.

Το ορθοκανονικό σύστημα αξόνων

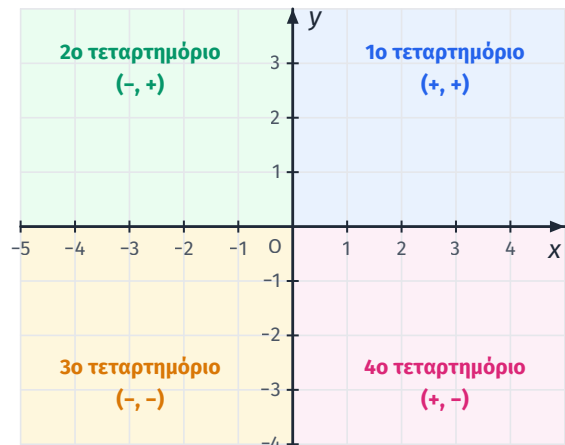
Σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες που τέμνονται στο σημείο O (αρχή των αξόνων): τον οριζόντιο **άξονα των τετμημένων** x' και τον κατακόρυφο **άξονα των τεταγμένων** y' . Όταν οι δύο άξονες έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης, το σύστημα λέγεται **ορθοκανονικό**.

Ορισμός · Συντεταγμένες σημείου

Κάθε σημείο M του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος αριθμών (x, y) : το x λέγεται **τετμημένη** και το y **τεταγμένη** του σημείου. Γράφουμε $M(x, y)$. Η σειρά μετράει: **πρώτα** το x (οριζόντια), **μετά** το y (κατακόρυφα).



Σημεία και συντεταγμένες



Τα τέσσερα τεταρτημόρια και τα πρόσημα

☆ Χρήσιμες παρατηρήσεις

- Τα σημεία του άξονα x' έχουν **τεταγμένη 0**: $(x, 0)$.
- Τα σημεία του άξονα y' έχουν **τετμημένη 0**: $(0, y)$.
- Η αρχή των αξόνων είναι το $O(0, 0)$.
- Τα σημεία δεν ανήκουν σε κανένα τεταρτημόριο αν βρίσκονται πάνω στους άξονες.

⊗ Συχνό λάθος

✗ Λάθος

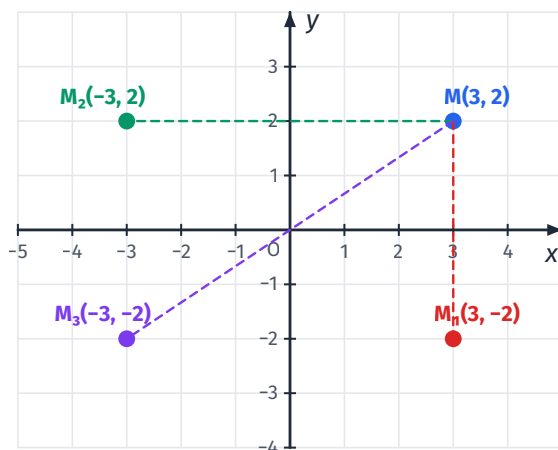
Το σημείο $(2, 5)$: «2 πάνω, 5 δεξιά»

✓ Σωστό

$(2, 5)$: 2 μονάδες **δεξιά**, 5 μονάδες **πάνω**

Θυμήσου: πρώτα «περπατάμε» στον διάδρομο (οριζόντια), μετά ανεβαίνουμε τη σκάλα (κατακόρυφα).

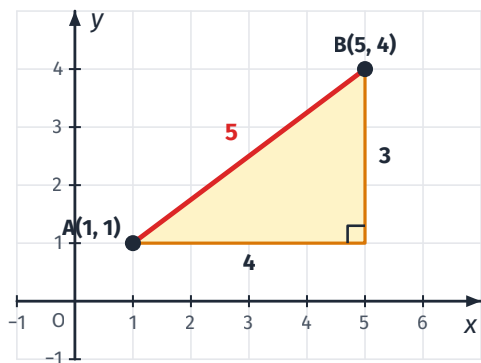
📖 Συμμετρικά σημεία

☆ Συμμετρικά του σημείου $M(\alpha, \beta)$

Ως προς	Συμμετρικό	Τι αλλάζει
τον άξονα $x'x$	$(\alpha, -\beta)$	το πρόσημο του y
τον άξονα $y'y$	$(-\alpha, \beta)$	το πρόσημο του x
την αρχή O	$(-\alpha, -\beta)$	και τα δύο πρόσημα

📖 Απόσταση δύο σημείων

Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ βρίσκεται με το Πυθαγόρειο θεώρημα, αφού σχηματίζεται ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές $|x_2 - x_1|$ και $|y_2 - y_1|$:



$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{Στο σχήμα: } (AB) = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Ορισμός · Γραφική παράσταση

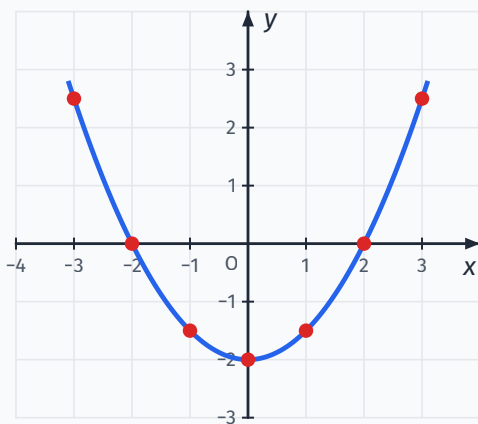
Το σύνολο των σημείων (x, y) του επιπέδου, όπου y είναι η τιμή της συνάρτησης για το αντίστοιχο x , λέγεται **γραφική παράσταση** της συνάρτησης.

☆ Πώς σχεδιάζω τη γραφική παράσταση

- 1 Φτιάχνω **πίνακα τιμών** για αρκετές τιμές του x .
- 2 Τοποθετώ τα σημεία (x, y) στο σύστημα αξόνων.
- 3 Αν το x μπορεί να πάρει **κάθε** τιμή (όχι μόνο ακέραιες), ενώνω τα σημεία με μια συνεχή γραμμή.

Παράδειγμα 3.2.1

Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{x^2}{2} - 2$ για $-3 \leq x \leq 3$.



ΛΥΣΗ

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	2,5	0	-1,5	-2	-1,5	0	2,5

Τοποθετούμε τα σημεία και τα ενώνουμε με καμπύλη. Η γραμμή που προκύπτει λέγεται **παραβολή** (θα τη μελετήσεις στην Γ' Γυμνασίου).

Παράδειγμα 3.2.2 — Ανάγνωση γραφικής παράστασης

Η θερμοκρασία σε μια πόλη μετρήθηκε κάθε 3 ώρες. Από τη γραφική παράσταση να βρεθούν: α) η θερμοκρασία στις 9:00, β) πότε ήταν μέγιστη, γ) πότε ήταν 12 °C.



ΛΥΣΗ

α) 14 °C. β) Στις 15:00 (20 °C). γ) Στις 6:00 και περίπου στις 21:00 (ανάμεσα στις μετρήσεις).

⚠ Προσοχή!

Μια γραμμή στο επίπεδο είναι γραφική παράσταση συνάρτησης μόνο αν κάθε **κατακόρυφη** ευθεία την τέμνει **το πολύ σε ένα** σημείο (αφού σε κάθε x αντιστοιχεί ένα μόνο y). Ένας κύκλος, π.χ., δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.



Θέλεις να ελέγξεις αν το κατάλαβες; Λύσε τα **διαδραστικά κουίζ** του μαθήματος στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν ψηφιακό φροντιστήριο.
www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να σχεδιάσεις σε σύστημα αξόνων τα σημεία A(2, 3), B(-1, 4), Γ(-3, -2), Δ(4, -1), E(0, -2), Ζ(5, 0) και να γράψεις σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το καθένα.
- 2 Να βρεις τα συμμετρικά του M(-2, 5) ως προς τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την αρχή O.
- 3 Αν το σημείο A($\alpha - 3$, 2) βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$, να βρεις το α .
- 4 Να βρεις την απόσταση των σημείων: α) A(1, 2) και B(7, 10) β) Γ(-2, 3) και Δ(1, -1) γ) O(0, 0) και E(5, 12).

- 5** Τα σημεία $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $\Gamma(5, 4)$, $\Delta(1, 4)$ είναι κορυφές ορθογωνίου. Να βρεις την περίμετρο, το εμβαδόν και τη διαγώνιό του.
- 6** Να κάνεις πίνακα τιμών και να σχεδιάσεις τη γραφική παράσταση της $y = 2x - 1$ για x από -2 έως 3 . Τι σχήμα σχηματίζουν τα σημεία;
- 7** Ανήκει το σημείο $A(3, 8)$ στη γραφική παράσταση της $y = x^2 - 1$; Και το $B(-2, 5)$;
- 8** Να βρεις το κ ώστε το σημείο $M(2, \kappa)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της $y = 3x - 4$.

ΜΑΘΗΜΑ

3.3

Η συνάρτηση $y = ax$

Η απλούστερη και πιο «καθημερινή» συνάρτηση: περιγράφει ποσά ανάλογα, όπως η τιμή και η ποσότητα, η απόσταση και ο χρόνος. Η γραφική της παράσταση είναι πάντα μια ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων.

🕒 Θυμάμαι από παλιότερα

Δύο ποσά x και y λέγονται **ανάλογα** όταν, αν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές του ενός με έναν αριθμό, πολλαπλασιάζονται και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου με τον ίδιο αριθμό. Τότε ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι σταθερός.

📖 Ανάλογα ποσά και η συνάρτηση $y = ax$

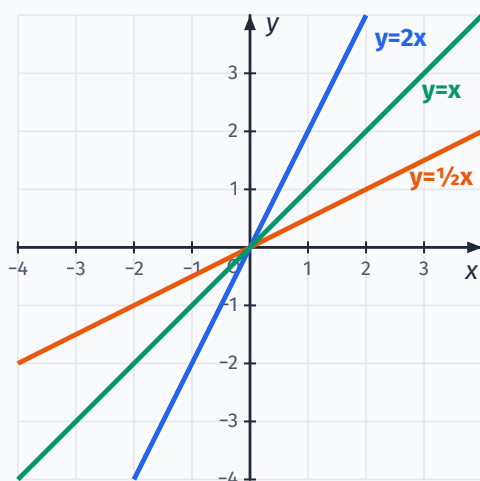
Αν τα ποσά x, y είναι ανάλογα, τότε $\frac{y}{x} = a$ (σταθερό), δηλαδή $y = ax$. Ο σταθερός αριθμός a λέγεται **συντελεστής αναλογίας**.

☆ Η γραφική παράσταση της $y = ax$

Είναι **ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων** $O(0, 0)$. Για να τη σχεδιάσουμε αρκούν **δύο σημεία**: το $O(0, 0)$ και ένα ακόμη, π.χ. το $(1, a)$.

Παράδειγμα 3.3.1

Να σχεδιαστούν στο ίδιο σύστημα αξόνων οι ευθείες $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x$ και $y = x$.



ΛΥΣΗ

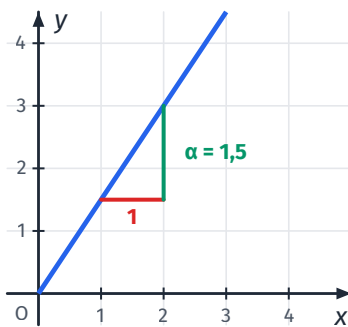
x	0	2
$y = 2x$	0	4
$y = \frac{1}{2}x$	0	1
$y = x$	0	2

Η ευθεία $y = x$ λέγεται **διχοτόμος** της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

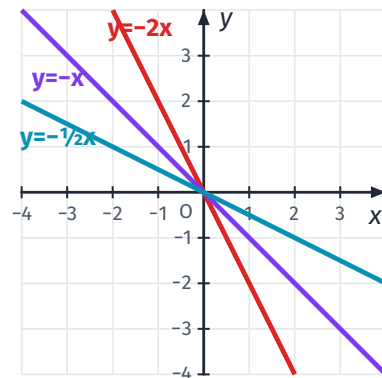
Κλίση της ευθείας

Ορισμός · Κλίση

Ο αριθμός α στην $y = ax$ λέγεται **κλίση** της ευθείας. Δείχνει πόσο «ανεβαίνει» (ή «κατεβαίνει») η ευθεία όταν προχωράμε **1 μονάδα δεξιά**.



1 βήμα δεξιά $\rightarrow$ α βήματα πάνω



Αρνητική κλίση: η ευθεία «κατεβαίνει»

☆ Τι μας λέει η κλίση

- Αν $\alpha > 0$: η ευθεία «ανεβαίνει» (από αριστερά προς τα δεξιά) και βρίσκεται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο.
- Αν $\alpha < 0$: η ευθεία «κατεβαίνει» και βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.
- Όσο μεγαλύτερο το $|\alpha|$, τόσο πιο «απότομη» είναι η ευθεία.
- Αν $\alpha = 0$: η $y = 0$ είναι ο ίδιος ο άξονας x' .

Η κλίση υπολογίζεται και από **οποιοδήποτε** σημείο (x_0, y_0) της ευθείας (με $x_0 \neq 0$): $\alpha = \frac{y_0}{x_0}$.

Παράδειγμα 3.3.2

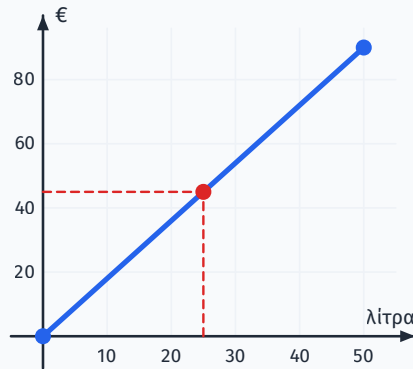
Μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(4, -6)$. Να βρεθεί η εξίσωσή της και να εξεταστεί αν διέρχεται από το $B(-2, 3)$.

ΛΥΣΗ

$\alpha = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$, άρα $y = -\frac{3}{2}x$. Για $x = -2$: $y = -\frac{3}{2} \cdot (-2) = 3$ ✓. Το Β ανήκει στην ευθεία.

Παράδειγμα 3.3.3

Το βενζινάδικο πουλά τη βενζίνη 1,80 € το λίτρο. α) Να γραφτεί ο τύπος του κόστους y για x λίτρα. β) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση για $0 \leq x \leq 50$. γ) Πόσα λίτρα παίρνουμε με 45 €;



ΛΥΣΗ

α) $y = 1,8x$. β) Ευθύγραμμο τμήμα από το $(0, 0)$ έως το $(50, 90)$. γ) $1,8x = 45 \Rightarrow x = 25$ λίτρα.

⚠ Παρατήρηση

Εδώ το x παίρνει τιμές μόνο από 0 έως 50, γι' αυτό η γραφική παράσταση είναι **τμήμα** ευθείας και όχι ολόκληρη ευθεία.

⊗ Συχνό λάθος

✗ Λάθος

Η $y = 3x$ διέρχεται από το $(3, 1)$

✓ Σωστό

Διέρχεται από το $(1, 3)$

Για $x = 3$ η $y = 3x$ δίνει $y = 9$, όχι 1. Έλεγξε πάντα αντικαθιστώντας: το σημείο ανήκει αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τον τύπο.



Θέλεις να δεις αυτό το μάθημα και σε **βίντεο**, βήμα-βήμα; Στο **mathgreece.com** θα βρεις ολοκληρωμένο, **δωρεάν** φροντιστήριο για όλη την ύλη της Β' Γυμνασίου.
www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να σχεδιάσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες $y = 3x$, $y = -3x$, $y = \frac{1}{3}x$.
- 2 Να βρεις την κλίση της ευθείας που διέρχεται από το O και το $M(-5, 10)$ και να γράψεις την εξίσωσή της.
- 3 Ποια από τα σημεία $A(2, 5)$, $B(-4, -10)$, $\Gamma(1, 2,5)$, $\Delta(-2, 4)$ ανήκουν στην ευθεία $y = 2,5x$;

- 4** Για ποια τιμή του λ η ευθεία $y = (\lambda - 2)x$ διέρχεται από το σημείο $(3, 6)$;
- 5** Ένα αυτοκίνητο καταναλώνει 6 λίτρα στα 100 km. Να γράψεις την κατανάλωση y (λίτρα) ως συνάρτηση των km x . Πόσα λίτρα χρειάζονται για 350 km;
- 6** Τα ποσά x, y είναι ανάλογα και για $x = 8$ είναι $y = 20$. Να βρεις τον τύπο και να συμπληρώσεις:
 $x = 2 \rightarrow y = ;$, $y = 35 \rightarrow x = ;$
- 7** Να εξετάσεις αν τα ποσά του πίνακα είναι ανάλογα: x : 2, 5, 8 και y : 7, 17,5, 28.
- 8** Ποια ευθεία είναι πιο «απότομη»: η $y = -4x$ ή η $y = 3x$;

ΜΑΘΗΜΑ

3.4

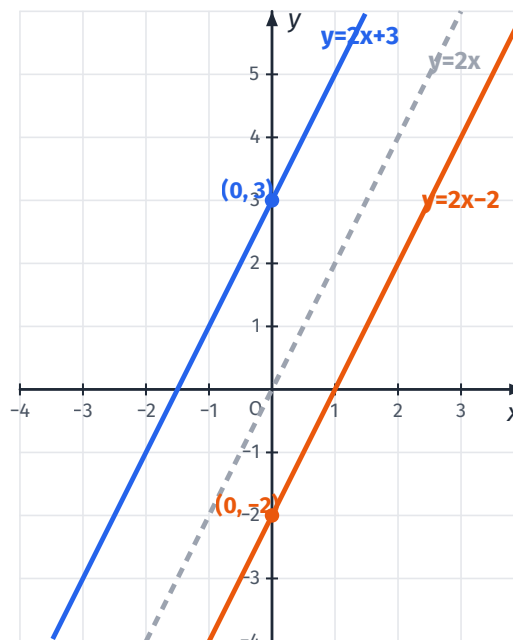
Η συνάρτηση $y = ax + \beta$

Αν «σηκώσουμε» ή «κατεβάσουμε» την ευθεία $y = ax$ κατά β μονάδες, παίρνουμε την ευθεία $y = ax + \beta$. Είναι η πιο συνηθισμένη συνάρτηση στις εφαρμογές: σταθερό κόστος + κόστος ανά μονάδα.

📖 Από την $y = ax$ στην $y = ax + \beta$

Συγκρίνουμε τις συναρτήσεις $y = 2x$ και $y = 2x + 3$. Για κάθε x , η δεύτερη δίνει τιμή **κατά 3 μεγαλύτερη**:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x$	-4	-2	0	2	4
$y = 2x + 3$	-1	1	3	5	7



Οι $y = 2x + 3$ και $y = 2x - 2$ είναι παράλληλες στην $y = 2x$.

☆ Η γραφική παράσταση της $y = ax + \beta$

- Είναι **ευθεία** παράλληλη προς την ευθεία $y = ax$.
- Ο αριθμός a είναι η **κλίση** της· ο αριθμός β είναι η **τεταγμένη επί την αρχή**, δηλαδή η ευθεία τέμνει τον άξονα y στο σημείο $(0, \beta)$.
- Ευθείες με την **ίδια κλίση** είναι **παράλληλες**.

📖 Σχεδίαση με δύο σημεία – Τομή με τους άξονες

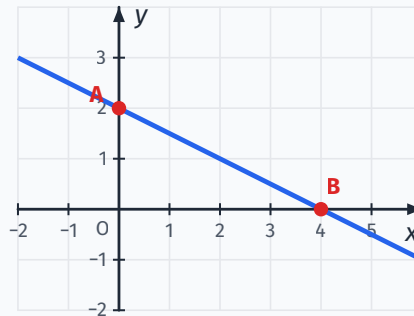
Αφού η γραφική παράσταση είναι ευθεία, αρκούν **δύο σημεία**. Τα πιο βολικά είναι συχνά τα σημεία **τομής με τους άξονες**:

☆ Σημεία τομής με τους άξονες

- Με τον άξονα y : βάζουμε $x = 0 \rightarrow$ σημείο $(0, \beta)$.
- Με τον άξονα x : βάζουμε $y = 0$ και λύνουμε την εξίσωση $ax + \beta = 0$.

Παράδειγμα 3.4.1

Να βρεθούν τα σημεία τομής της ευθείας $y = -\frac{1}{2}x + 2$ με τους άξονες και να σχεδιαστεί.



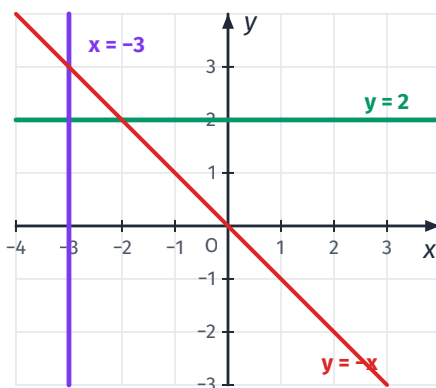
ΛΥΣΗ

$x = 0 \Rightarrow y = 2$: σημείο $A(0, 2)$.

$y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x + 2 = 0 \Rightarrow x = 4$: σημείο $B(4, 0)$.

Η ευθεία μαζί με τους άξονες σχηματίζει ορθογώνιο τρίγωνο OAB με εμβαδόν $\frac{2 \cdot 4}{2} = 4$ τ.μ.

📖 Ειδικές ευθείες



☆ Οριζόντιες και κατακόρυφες

- Η $y = \beta$ (κλίση 0) είναι **οριζόντια** ευθεία που περνά από το $(0, \beta)$. Η $y = 0$ είναι ο άξονας x .
- Η $x = \kappa$ είναι **κατακόρυφη** ευθεία που περνά από το $(\kappa, 0)$. **Δεν** είναι γραφική παράσταση συνάρτησης! Η $x = 0$ είναι ο άξονας y .
- Η $y = -x$ είναι η διχοτόμος της 2ης και 4ης γωνίας.

📖 Η εξίσωση $ax + by = \gamma$

Μια εξίσωση όπως $2x + 3y = 6$ λέγεται **γραμμική εξίσωση**. Οι λύσεις της είναι ζεύγη (x, y) και, σχεδιασμένες, σχηματίζουν **ευθεία**. Λύνοντας ως προς y : $3y = -2x + 6 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2$.

Η συμβουλή του καθηγητή

Για την $ax + \beta y = \gamma$ ο γρηγορότερος τρόπος σχεδίασης είναι: βάζω $x = 0$ (βρίσκω y), βάζω $y = 0$ (βρίσκω x), ενώνω τα δύο σημεία. Για την $2x + 3y = 6$: $(0, 2)$ και $(3, 0)$.

Παράδειγμα 3.4.2

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην $y = 3x - 1$ και διέρχεται από το σημείο $M(2, 1)$.

ΛΥΣΗ

Παράλληλη, άρα ίδια κλίση: $y = 3x + \beta$. Αφού περνά από το $M(2, 1)$: $1 = 3 \cdot 2 + \beta \Rightarrow \beta = -5$. Άρα $y = 3x - 5$.

Παράδειγμα 3.4.3

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(3, 7)$.

ΛΥΣΗ

Αναζητούμε $y = ax + \beta$. Από τα δύο σημεία:

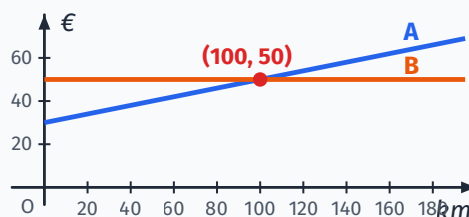
$$3 = \alpha + \beta \quad 7 = 3\alpha + \beta$$

Αφαιρώντας: $4 = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 2$, οπότε $\beta = 1$. Άρα $y = 2x + 1$.

Γενικά, η κλίση της ευθείας που περνά από δύο σημεία είναι $\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 3}{3 - 1} = 2$.

Παράδειγμα 3.4.4 — Σύγκριση προσφορών

Μια εταιρεία ενοικίασης αυτοκινήτων χρεώνει 30 € την ημέρα συν 0,20 € ανά km. Μια άλλη χρεώνει 50 € την ημέρα χωρίς χρέωση ανά km. Πότε συμφέρει η πρώτη;

**ΛΥΣΗ**

Κόστος για μία ημέρα και x km: A: $y = 0,2x + 30$, B: $y = 50$.

Τέμνονται όταν $0,2x + 30 = 50 \Rightarrow x = 100$. Για λιγότερα από 100 km συμφέρει η πρώτη, για περισσότερα η δεύτερη.

⊗ Συχνό λάθος

✗ Λάθος

Η $y = 2x - 3$ τέμνει τον $y'y$ στο $(-3, 0)$

✓ Σωστό

Τον τέμνει στο $(0, -3)$ Πάνω στον άξονα $y'y$ είναι $x = 0$. Η τετμημένη είναι 0, όχι η τεταγμένη!

⊗ Συχνό λάθος

✗ Λάθος

Η $y = 5 - 2x$ έχει κλίση 5

✓ Σωστό

Έχει κλίση -2 (γράφεται $y = -2x + 5$)Κλίση είναι ο συντελεστής του x , όποια θέση κι αν έχει μέσα στον τύπο.Για περισσότερες λυμένες ασκήσεις, **κουίζ αυτοαξιολόγησης** και σημειώσεις, μπες στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών.**www.mathgreece.com**

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να βρεις την κλίση και το σημείο τομής με τον $y'y$ για τις ευθείες: α) $y = 4x - 1$ β) $y = 3 - x$ γ) $y = \frac{x}{2}$ δ) $y = -5$
- 2 Να σχεδιάσεις την ευθεία $y = 2x - 4$ βρίσκοντας τα σημεία τομής της με τους άξονες.
- 3 Ποιες από τις ευθείες είναι παράλληλες; $\varepsilon_1: y = 3x + 1$, $\varepsilon_2: y = 1 + 3x$, $\varepsilon_3: y = -3x + 1$, $\varepsilon_4: y = 3x - 7$, $\varepsilon_5: y = x + 3$.
- 4 Να βρεις την εξίσωση της ευθείας με κλίση -2 που διέρχεται από το σημείο $(1, 5)$.
- 5 Να βρεις την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(0, 4)$ και $B(2, 0)$.
- 6 Να σχεδιάσεις τις ευθείες $3x + 2y = 6$ και $x - y = -1$ και να βρεις το σημείο τομής τους από το σχήμα. Να το επαληθεύσεις.
- 7 Να βρεις το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία $y = -3x + 6$ με τους άξονες.
- 8 Να γράψεις την εξίσωση: α) της οριζόντιας ευθείας που περνά από το $(4, -2)$ β) της κατακόρυφης ευθείας που περνά από το ίδιο σημείο.
- 9 Ένα κερί έχει αρχικό ύψος 24 cm και λιώνει $1,5\text{ cm}$ την ώρα. Να εκφράσεις το ύψος y ως συνάρτηση του χρόνου x (σε ώρες). Μετά από πόσες ώρες θα σβήσει;
- 10 Για ποια τιμή του μ η ευθεία $y = (2\mu - 1)x + 3$ είναι παράλληλη στην $y = 5x$;

ΜΑΘΗΜΑ

3.5

Η συνάρτηση $y = \alpha/x$ – Η υπερβολή

Όταν το ένα ποσό μεγαλώνει και το άλλο μικραίνει με τέτοιο τρόπο ώστε το γινόμενο τους να μένει σταθερό, έχουμε αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Η γραφική τους παράσταση είναι μια όμορφη καμπύλη με δύο κλάδους: η υπερβολή.

📖 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Θέλουμε να μοιράσουμε 120 € σε ίσα μερίδια. Αν τα άτομα είναι x , το καθένα παίρνει $y = \frac{120}{x}$ €:

Άτομα x	1	2	3	4	5	6	8	10
Μερίδιο y (€)	120	60	40	30	24	20	15	12

Όταν το x διπλασιάζεται, το y υποδιπλασιάζεται· όταν το x τριπλασιάζεται, το y γίνεται το ένα τρίτο. Το γινόμενο $x \cdot y = 120$ μένει σταθερό.

📖 Ορισμός · Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Δύο ποσά x και y λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα** όταν το **γινόμενο** των αντίστοιχων τιμών τους είναι σταθερό: $x \cdot y = \alpha$, δηλαδή $y = \frac{\alpha}{x}$ ($\alpha \neq 0, x \neq 0$).

⊗ Συχνό λάθος

✗ Λάθος

«Όταν το ένα ποσό αυξάνεται και το άλλο μειώνεται, είναι αντιστρόφως ανάλογα»

✓ Σωστό

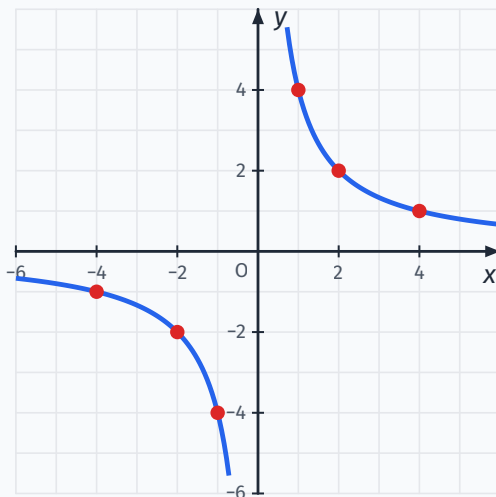
Πρέπει επιπλέον το **γινόμενο** τους να είναι σταθερό.

Π.χ. όσο μεγαλώνει η απόσταση που έχεις διανύσει, μειώνεται αυτή που απομένει — αλλά αυτά τα ποσά **δεν** είναι αντιστρόφως ανάλογα (το άθροισμά τους είναι σταθερό, όχι το γινόμενο).

Η γραφική παράσταση: υπερβολή

Παράδειγμα 3.5.1

Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $y = \frac{4}{x}$.



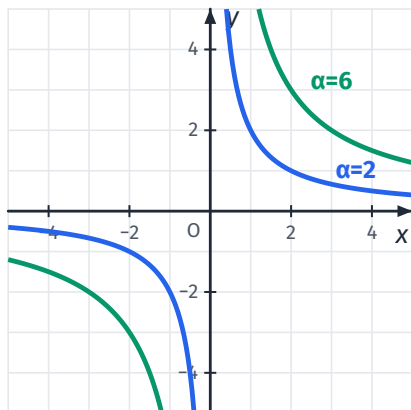
ΛΥΣΗ

x	-4	-2	-1	-0,5	0,5	1	2	4
y	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1

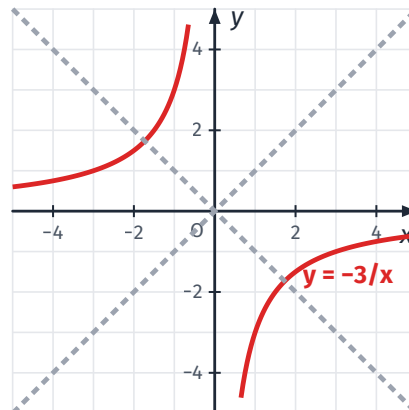
Τοποθετούμε τα σημεία και τα ενώνουμε με δύο ξεχωριστές καμπύλες. Για $x = 0$ η συνάρτηση **δεν ορίζεται** (δεν διαιρούμε με το μηδέν).

☆ Ιδιότητες της υπερβολής $y = \frac{\alpha}{x}$

- Αποτελείται από **δύο κλάδους** που δεν ενώνονται.
- Αν $\alpha > 0$: οι κλάδοι βρίσκονται στο **1ο και 3ο** τεταρτημόριο. Αν $\alpha < 0$: στο **2ο και 4ο**.
- Οι κλάδοι πλησιάζουν όλο και περισσότερο τους άξονες, χωρίς ποτέ να τους συναντούν (δεν τέμνει κανέναν άξονα).
- Είναι **συμμετρική ως προς την αρχή** O : αν το (κ, λ) ανήκει στην υπερβολή, ανήκει και το $(-\kappa, -\lambda)$.
- Έχει επίσης άξονες συμμετρίας τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$.



$\alpha > 0$: 1ο και 3ο τεταρτημόριο



$\alpha < 0$: 2ο και 4ο τεταρτημόριο — συμμετρίες ως προς $y = \pm x$

⚠ Προσοχή!

Όσο μεγαλύτερο είναι το $|\alpha|$, τόσο πιο «μακριά» από την αρχή των αξόνων βρίσκονται οι κλάδοι.

📖 Εφαρμογές

Παράδειγμα 3.5.2

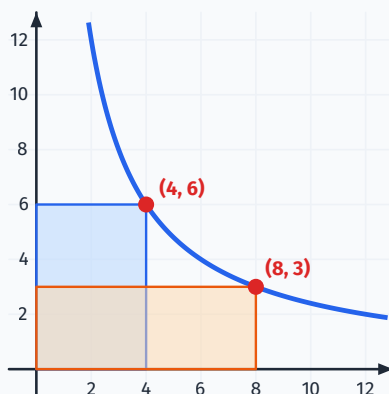
Το σημείο $M(-3, 2)$ ανήκει στην υπερβολή $y = \frac{\alpha}{x}$. Να βρεθεί το α και να εξεταστεί αν το $N(6, -1)$ ανήκει στην ίδια υπερβολή.

ΛΥΣΗ

$2 = \frac{\alpha}{-3} \Rightarrow \alpha = -6$, άρα $y = -\frac{6}{x}$. Για $x = 6$: $y = -1$ ✓. Το N ανήκει.

Παράδειγμα 3.5.3

Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 24 cm^2 . Να εκφραστεί το μήκος y ως συνάρτηση του πλάτους x και να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση.



ΛΥΣΗ

$xy = 24 \Rightarrow y = \frac{24}{x}$, με $x > 0$. Επειδή μήκη είναι θετικά, κρατάμε **μόνο τον κλάδο του 1ου τεταρτημορίου**.

Παράδειγμα 3.5.4

Για να τελειώσουν ένα έργο, 6 εργάτες χρειάζονται 15 ημέρες. Σε πόσες ημέρες θα το τελειώσουν 9 εργάτες (με τον ίδιο ρυθμό);

ΛΥΣΗ

Εργάτες και ημέρες είναι αντιστρόφως ανάλογα: $x \cdot y = 6 \cdot 15 = 90$. Για $x = 9$: $y = \frac{90}{9} = 10$ ημέρες.

🔗 Η συμβουλή του καθηγητή

Γρήγορο κριτήριο για πίνακα τιμών: **σταθερός λόγος** $\frac{y}{x} \rightarrow$ ανάλογα ($y = ax$, ευθεία από το O)·
σταθερό γινόμενο $xy \rightarrow$ αντιστρόφως ανάλογα ($y = \frac{a}{x}$, υπερβολή).



Κόλλησες κάπου; Στο **mathgreece.com** υπάρχουν βιντεομαθήματα, podcasts και παιχνίδια γνώσεων για κάθε ενότητα — όλα **δωρεάν**.
www.mathgreece.com

✎ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να εξετάσεις ποιοι πίνακες δίνουν αντιστρόφως ανάλογα ποσά: (α) x : 1, 2, 4 — y : 12, 6, 3 (β) x : 1, 2, 3 — y : 10, 8, 6 (γ) x : 2, 5, 10 — y : 5, 2, 1.
- 2 Να σχεδιάσεις τη γραφική παράσταση της $y = \frac{6}{x}$ για $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.
- 3 Η υπερβολή $y = \frac{a}{x}$ διέρχεται από το $(4, -2)$. Να βρεις το a . Σε ποια τεταρτημόρια βρίσκεται;
- 4 Ποια από τα σημεία $A(2, 5)$, $B(-5, -2)$, $\Gamma(10, 1)$, $\Delta(-1, 10)$ ανήκουν στην υπερβολή $y = \frac{10}{x}$;
- 5 Ένα αυτοκίνητο διανύει μια απόσταση 240 km. Να εκφράσεις τον χρόνο t ως συνάρτηση της ταχύτητας v . Πόσος χρόνος χρειάζεται με 60 km/h και πόσος με 80 km/h;
- 6 Μια βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 12 ώρες. Πόσες ίδιες βρύσες χρειάζονται για να τη γεμίσουν σε 3 ώρες;
- 7 Να βρεις το συμμετρικό του σημείου $A(2, 3)$ της υπερβολής $y = \frac{6}{x}$ ως προς την αρχή O και να ελέγξεις ότι ανήκει κι αυτό στην υπερβολή.
- 8 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσεις τις $y = \frac{4}{x}$ και $y = x$. Να βρεις τα σημεία τομής τους.

ΚΕΦ.

3

Σε μια ματιά — Ανακεφαλαίωση Κεφαλαίου 30

Πριν προχωρήσεις στο επόμενο κεφάλαιο ή πριν από το διαγώνισμα, έλεγξε ότι θυμάσαι όλα τα παρακάτω. Αν κάτι δεν σου είναι ξεκάθαρο, γύρνα στο αντίστοιχο μάθημα.

Έννοια	Τι πρέπει να θυμάμαι
Συνάρτηση	κάθε $x \rightarrow$ ένα μόνο y
Συντεταγμένες	$M(x, y)$: πρώτα οριζόντια, μετά κατακόρυφα· απόσταση $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$
$y = ax$	ευθεία από το O · κλίση a · ανάλογα ποσά
$y = ax + b$	ευθεία με κλίση a , τέμνει τον y στο $(0, b)$ · ίδια κλίση = παράλληλες
$y = b, x = \kappa$	οριζόντια / κατακόρυφη ευθεία
$y = \frac{a}{x}$	υπερβολή· $xy = a$ · αντιστρόφως ανάλογα ποσά



Πριν από το διαγώνισμα του κεφαλαίου, λύσε τα **επαναληπτικά κουίζ** και δες τα βιντεομαθήματα στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο.
www.mathgreece.com

4

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο

Περιγραφική Στατιστική



Ζούμε σε έναν κόσμο γεμάτο δεδομένα: βαθμοί, δημοσκοπήσεις, θερμοκρασίες, πωλήσεις, αθλητικά στατιστικά. Η Περιγραφική Στατιστική μάς διδάσκει πώς να τα συλλέγουμε σωστά, να τα οργανώνουμε σε πίνακες, να τα παρουσιάζουμε με διαγράμματα και να τα συνοψίζουμε με λίγους αριθμούς, όπως η μέση τιμή και η διάμεσος.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 4.1 Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα
- 4.2 Γραφικές παραστάσεις
- 4.3 Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων
- 4.4 Ομαδοποίηση παρατηρήσεων
- 4.5 Μέση τιμή – Διάμεσος

ΜΑΘΗΜΑ

4.1

Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα

Η Στατιστική είναι η επιστήμη που συλλέγει, οργανώνει, παρουσιάζει και ερμηνεύει δεδομένα. Από τις δημοσκοπήσεις και τον καιρό μέχρι τον αθλητισμό και την υγεία, η Στατιστική είναι παντού.

 Πληθυσμός και άτομα

Ο διευθυντής ενός σχολείου θέλει να μάθει πόσες ώρες την εβδομάδα ασχολούνται οι μαθητές του με αθλήματα. Το σύνολο όλων των μαθητών του σχολείου είναι ο **πληθυσμός** της έρευνας και κάθε μαθητής είναι ένα **άτομο** του πληθυσμού.

 Ορισμός · Πληθυσμός – Άτομα

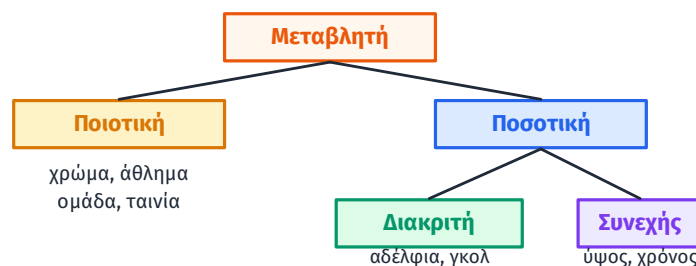
Πληθυσμός λέγεται το σύνολο των στοιχείων (ανθρώπων, ζώων, αντικειμένων κ.λπ.) που μελετάμε ως προς ένα χαρακτηριστικό. Κάθε στοιχείο του πληθυσμού λέγεται **άτομο**.

 Προσοχή!

Στη Στατιστική η λέξη «άτομο» δεν σημαίνει απαραίτητα άνθρωπο! Αν μελετάμε τα αυτοκίνητα μιας πόλης, κάθε αυτοκίνητο είναι ένα άτομο. Αν μελετάμε τις λάμπες που παρήγαγε ένα εργοστάσιο, κάθε λάμπα είναι ένα άτομο.

 Μεταβλητές Ορισμός · Μεταβλητή

Το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο εξετάζουμε τον πληθυσμό λέγεται **μεταβλητή**. Οι τιμές που μπορεί να πάρει λέγονται **τιμές της μεταβλητής**.



Μεταβλητή	Είδος	Πιθανές τιμές
Αγαπημένο άθλημα	ποιοτική	ποδόσφαιρο, μπάσκετ, βόλεϊ...
Χρώμα ματιών	ποιοτική	καστανά, μπλε, πράσινα...
Αριθμός αδελφών	ποσοτική διακριτή	0, 1, 2, 3, ...
Βαθμός σε διαγώνισμα (ακέραιος)	ποσοτική διακριτή	0, 1, ..., 20
Ύψος μαθητή	ποσοτική συνεχής	π.χ. 1,52 m, 1,635 m...
Χρόνος σε αγώνα δρόμου	ποσοτική συνεχής	π.χ. 12,4 s

💡 Πώς ξεχωρίζω τις μεταβλητές

Ρώτα τον εαυτό σου: «Οι τιμές είναι αριθμοί;» Αν όχι → **ποιοτική**. Αν ναι: «Τις μετρώ με όργανο (μέτρο, ζυγαριά, χρονόμετρο) ή τις μετρώ μία-μία (1, 2, 3...);» Μέτρηση με όργανο → **συνεχής**, καταμέτρηση → **διακριτή**.

⊗ Συχνό λάθος

✗ Λάθος

Ο ταχυδρομικός κώδικας είναι ποσοτική μεταβλητή

✓ Σωστό

Είναι **ποιοτική**

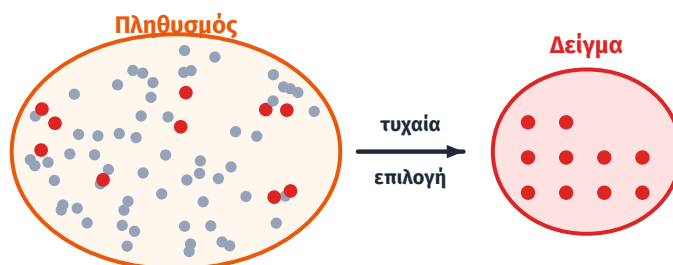
Αν και γράφεται με ψηφία, δεν έχει νόημα να τον προσθέσουμε ή να βρούμε μέσο όρο. Το ίδιο ισχύει για αριθμούς τηλεφώνου ή τα νούμερα στις φανέλες των παικτών.

📖 Απογραφή και δειγματοληψία

Για να μάθουμε τις τιμές της μεταβλητής, μπορούμε να εξετάσουμε **όλα** τα άτομα του πληθυσμού: αυτό λέγεται **απογραφή** (όπως η απογραφή πληθυσμού που κάνει η ΕΛΣΤΑΤ κάθε 10 χρόνια). Συχνά όμως αυτό είναι αδύνατο ή πολύ ακριβό. Τότε εξετάζουμε ένα μικρότερο μέρος του πληθυσμού.

📋 Ορισμός · Δείγμα

Ένα μέρος (υποσύνολο) του πληθυσμού που εξετάζουμε, για να βγάλουμε συμπεράσματα για ολόκληρο τον πληθυσμό, λέγεται **δείγμα**. Η διαδικασία επιλογής του δείγματος λέγεται **δειγματοληψία**. Ο αριθμός των ατόμων του δείγματος λέγεται **μέγεθος** του δείγματος.



Από τον πληθυσμό επιλέγουμε τυχαία ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα.

☆ Αντιπροσωπευτικό δείγμα

Για να είναι αξιόπιστα τα συμπεράσματα, το δείγμα πρέπει να είναι **αντιπροσωπευτικό**: να «μοιάζει» με τον πληθυσμό. Αυτό επιτυγχάνεται συνήθως με **τυχαία επιλογή**, όπου κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, και με αρκετά **μεγάλο** μέγεθος.

Παράδειγμα 4.1.1

Θέλουμε να μάθουμε πόση ώρα την ημέρα βλέπουν τηλεόραση οι μαθητές Γυμνασίου μιας πόλης. Να κριθεί αν τα παρακάτω δείγματα είναι κατάλληλα: α) οι μαθητές της Α1 τάξης ενός σχολείου, β) τα μέλη ενός ομίλου σκακιού, γ) 300 μαθητές που επιλέγονται με κλήρωση από τους καταλόγους όλων των Γυμνασίων.

ΛΥΣΗ

α) Όχι: είναι μία μόνο τάξη μίας ηλικίας και ενός σχολείου. β) Όχι: οι σκακιστές ίσως έχουν διαφορετικές συνήθειες από τους άλλους μαθητές. γ) **Ναι**: τυχαία επιλογή από όλο τον πληθυσμό και ικανοποιητικό μέγεθος.

Παράδειγμα 4.1.2

Να βρεθούν ο πληθυσμός, τα άτομα και η μεταβλητή (και το είδος της) στις έρευνες: α) Η διάρκεια ζωής των μπαταριών που παρήγαγε ένα εργοστάσιο τον Μάρτιο. β) Το κόμμα που θα ψηφίσουν οι ψηφοφόροι μιας χώρας.

ΛΥΣΗ

α) Πληθυσμός: οι μπαταρίες του Μαρτίου· άτομο: κάθε μπαταρία· μεταβλητή: διάρκεια ζωής (ποσοτική συνεχής). Εδώ η απογραφή είναι αδύνατη, γιατί για να μετρήσουμε τη διάρκεια ζωής πρέπει να «καταστρέψουμε» τη μπαταρία! Χρειάζεται δείγμα.

β) Πληθυσμός: οι ψηφοφόροι· άτομο: κάθε ψηφοφόρος· μεταβλητή: κόμμα (ποιοτική). Οι δημοσκοπήσεις χρησιμοποιούν δείγματα 1.000–2.000 ατόμων.



Εξάσκηση χωρίς τέλος: στο **mathgreece.com** θα βρεις επιπλέον φυλλάδια ασκήσεων και διαγωνίσματα για τη Β' Γυμνασίου, εντελώς **δωρεάν**.

www.mathgreece.com

✎ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να χαρακτηρίσεις τις μεταβλητές ως ποιοτικές, ποσοτικές διακριτές ή ποσοτικές συνεχείς: α) η μάρκα κινητού, β) το βάρος ενός νεογέννητου, γ) ο αριθμός των γκολ σε ένα ματς, δ) η εθνικότητα, ε) η θερμοκρασία, στ) ο αριθμός παπουτσιών.
- 2 Σε ποιες περιπτώσεις θα κάναμε απογραφή και σε ποιες δειγματοληψία; α) Τα ύψη των 25 μαθητών μιας τάξης, β) η ποιότητα του νερού μιας λίμνης, γ) η γνώμη των Ελλήνων για ένα νέο νόμο.

- 3 Ένας δημοσιογράφος ρωτά 50 άτομα που βγαίνουν από ένα γυμναστήριο πόσο συχνά αθλούνται, για να βγάλει συμπέρασμα για όλους τους κατοίκους της πόλης. Είναι σωστή η μέθοδός του;
- 4 Να γράψεις τον πληθυσμό, το άτομο και τη μεταβλητή: «Μελετάμε τον αριθμό των σελίδων των βιβλίων μιας δημοτικής βιβλιοθήκης».
- 5 Να δώσεις ένα δικό σου παράδειγμα έρευνας όπου η απογραφή είναι αδύνατη.

ΜΑΘΗΜΑ
4.2

Γραφικές παραστάσεις

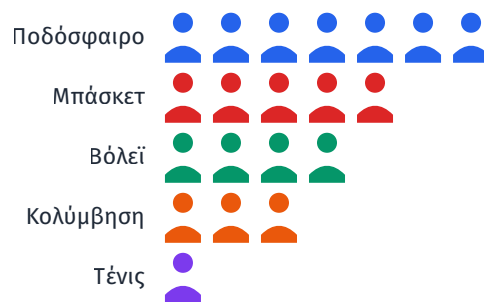
Μια καλή εικόνα αξίζει όσο χίλιοι αριθμοί. Τα στατιστικά διαγράμματα μας βοηθούν να δούμε με μια ματιά τι λένε τα δεδομένα. Εδώ μαθαίνουμε να τα διαβάζουμε και να τα κατασκευάζουμε.

Τα δεδομένα που συλλέγουμε τα οργανώνουμε πρώτα σε **πίνακα** και μετά τα παρουσιάζουμε με **διαγράμματα**. Θα χρησιμοποιούμε σε όλο το μάθημα το εξής παράδειγμα: ρωτήσαμε 40 μαθητές ποιο είναι το αγαπημένο τους άθλημα.

Άθλημα	Ποδόσφαιρο	Μπάσκετ	Βόλεϊ	Κολύμβηση	Τένις
Μαθητές	14	10	8	6	2

Εικονόγραμμα

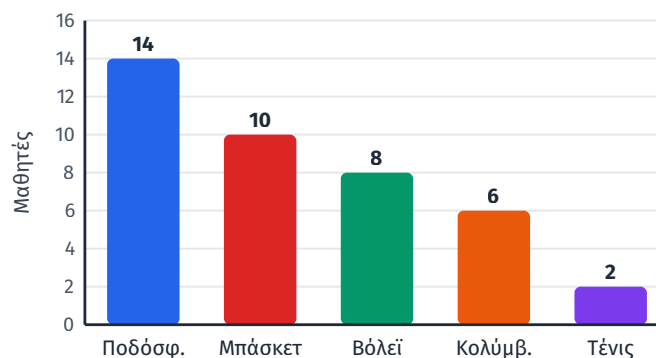
Στο **εικονόγραμμα** κάθε τιμή παριστάνεται με επαναλαμβανόμενα σύμβολα (εικονίδια). Πάντα δίνουμε το **κλειδί**: πόσα άτομα αντιστοιχούν σε ένα εικονίδιο.



Κλειδί: κάθε ανθρωπάκι = 2 μαθητές

Ραβδόγραμμα

Στο **ραβδόγραμμα** κάθε τιμή της μεταβλητής παριστάνεται με ένα ορθογώνιο (ράβδο). Όλες οι ράβδοι έχουν το **ίδιο πλάτος** και **ύψος ανάλογο** της συχνότητας. Οι ράβδοι απέχουν μεταξύ τους.



Ραβδόγραμμα: αγαπημένο άθλημα 40 μαθητών

⚠ Προσοχή!

Ο κατακόρυφος άξονας πρέπει να ξεκινά από το **μηδέν**. Αν ξεκινά από άλλη τιμή, οι διαφορές φαίνονται μεγαλύτερες από ό,τι είναι — ένα συνηθισμένο «κόλπο» παραπλάνησης σε διαφημίσεις!

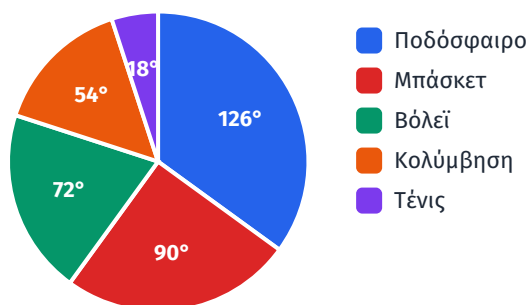
📖 Κυκλικό διάγραμμα

Στο **κυκλικό διάγραμμα** ο κυκλικός δίσκος χωρίζεται σε **κυκλικούς τομείς**, καθένας από τους οποίους αντιστοιχεί σε μια τιμή. Το μέγεθος κάθε τομέα (η γωνία του) είναι ανάλογο της συχνότητας. Είναι κατάλληλο όταν θέλουμε να δείξουμε **πώς μοιράζεται το σύνολο**.

☆ Υπολογισμός της γωνίας κάθε τομέα

$$\text{γωνία} = \frac{\text{συχνότητα}}{\text{σύνολο}} \times 360^\circ$$

Άθλημα	Μαθητές	Γωνία
Ποδόσφαιρο	14	$\frac{14}{40} \cdot 360^\circ = 126^\circ$
Μπάσκετ	10	90°
Βόλεϊ	8	72°
Κολύμβηση	6	54°
Τένις	2	18°
Σύνολο	40	360°

**💡 Η συμβουλή του καθηγητή**

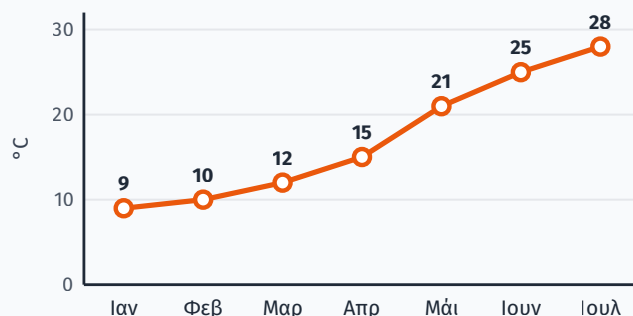
Έλεγχος ορθότητας: το άθροισμα όλων των γωνιών πρέπει να είναι **ακριβώς 360°**. Για να σχεδιάσεις, χρησιμοποίησε μοιρογνωμόνιο, ξεκινώντας από μια ακτίνα και «χτίζοντας» τους τομείς τον έναν μετά τον άλλο.

📖 Χρονόγραμμα (διάγραμμα γραμμής)

Όταν η μεταβλητή εξελίσσεται **στον χρόνο** (π.χ. θερμοκρασία ανά μήνα, πωλήσεις ανά έτος), χρησιμοποιούμε το **χρονόγραμμα**: τοποθετούμε τα σημεία (χρόνος, τιμή) και τα ενώνουμε με ευθύγραμμο τμήματα.

Παράδειγμα 4.2.1

Το χρονόγραμμα δείχνει τη μέση μηνιαία θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$) μιας πόλης από τον Ιανουάριο ως τον Ιούλιο. α) Ποιος μήνας ήταν ο ψυχρότερος; β) Μεταξύ ποιων διαδοχικών μηνών είχαμε τη μεγαλύτερη αύξηση;



ΛΥΣΗ

α) Ο Ιανουάριος (9°C). β) Μεταξύ Απριλίου και Μαΐου: από 15 σε 21°C , αύξηση 6°C .

 Ποιο διάγραμμα να διαλέξω;

Διάγραμμα	Κατάλληλο για...
Εικονόγραμμα	απλή, εντυπωσιακή παρουσίαση (π.χ. σε αφίσες)
Ραβδόγραμμα	σύγκριση τιμών ποιοτικών ή διακριτών μεταβλητών
Κυκλικό	το «μερίδιο» κάθε κατηγορίας στο σύνολο
Χρονόγραμμα	την εξέλιξη ενός μεγέθους με τον χρόνο
Ιστόγραμμα	ομαδοποιημένα δεδομένα (Μάθημα 4.4)

 Συχνό λάθος

× Λάθος

Κυκλικό διάγραμμα για τη θερμοκρασία κάθε μήνα

✓ Σωστό

Χρονόγραμμα

Οι θερμοκρασίες των μηνών δεν είναι «κομμάτια» ενός συνόλου· δεν έχει νόημα να τις προσθέσουμε. Θέλουμε να δούμε την εξέλιξη στον χρόνο.



Θέλεις να ελέγξεις αν το κατάλαβες; Λύσε τα **διαδραστικά κουίζ** του μαθήματος στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν ψηφιακό φροντιστήριο.

www.mathgreece.com

 Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Σε 30 μαθητές ρωτήθηκε ο αγαπημένος τους τρόπος μετακίνησης: με τα πόδια 12, με λεωφορείο 9, με αυτοκίνητο 6, με ποδήλατο 3. Να κατασκευάσεις ραβδόγραμμα.
- 2 Με τα δεδομένα της προηγούμενης άσκησης, να υπολογίσεις τις γωνίες κυκλικού διαγράμματος.
- 3 Σε κυκλικό διάγραμμα, ο τομέας «Αγγλικά» έχει γωνία 90° . Αν ρωτήθηκαν 120 μαθητές, πόσοι προτίμησαν Αγγλικά;
- 4 Σε εικονόγραμμα, κάθε σύμβολο αντιστοιχεί σε 50 βιβλία. Πόσα σύμβολα χρειάζονται για 275 βιβλία;
- 5 Οι πωλήσεις παγωτών (σε κιβώτια) ενός περιπτέρου τους μήνες Απρ–Σεπ ήταν: 20, 35, 60, 80, 75, 40. Να κάνεις χρονόγραμμα και να σχολιάσεις.
- 6 Ποιο διάγραμμα είναι καταλληλότερο για: α) το ποσοστό των ψήφων κάθε κόμματος, β) τον πληθυσμό μιας χώρας από το 1950 ως σήμερα, γ) τον αριθμό των μαθητών κάθε τάξης ενός σχολείου;

ΜΑΘΗΜΑ

4.3

Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων

Όταν έχουμε πολλές παρατηρήσεις, τις οργανώνουμε σε έναν πίνακα που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται κάθε τιμή. Οι σχετικές συχνότητες μάς επιτρέπουν επιπλέον να συγκρίνουμε ομάδες διαφορετικού μεγέθους.

Συχνότητα

Ρωτήσαμε 25 μαθητές πόσα αδέλφια έχουν και πήραμε τις απαντήσεις (παρατηρήσεις):

1, 2, 0, 1, 1, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 4, 1, 0, 2, 1, 1, 3, 2, 0, 1, 2, 1, 1

Ορισμός · Συχνότητα

Ο αριθμός που δείχνει **πόσες φορές** εμφανίζεται μια τιμή x_i της μεταβλητής λέγεται **συχνότητα** της τιμής και συμβολίζεται με v_i . Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων είναι ίσο με το πλήθος n των παρατηρήσεων.

Για να μετρήσουμε χωρίς λάθη, χρησιμοποιούμε **διαλογή**: για κάθε παρατήρηση σημειώνουμε μια γραμμούλα στην αντίστοιχη τιμή (και κάθε πέμπτη τη «δένουμε» διαγώνια).

Σχετική συχνότητα

Ορισμός · Σχετική συχνότητα

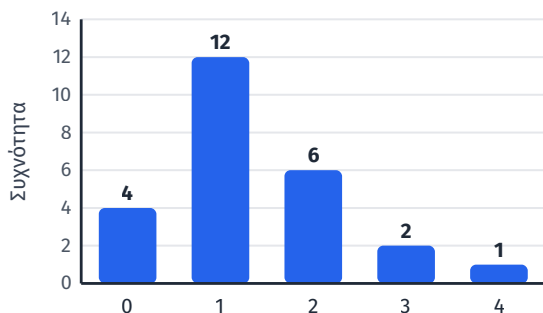
Το πηλίκο της συχνότητας v_i μιας τιμής δια του πλήθους n των παρατηρήσεων λέγεται **σχετική συχνότητα**:

$$f_i = \frac{v_i}{n} \quad \text{και σε ποσοστό:} \quad f_i\% = \frac{v_i}{n} \cdot 100$$

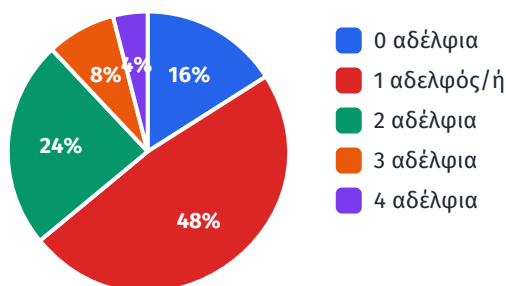
Αδέλφια x_i	Διαλογή	Συχνότητα v_i	Σχ. συχνότητα f_i	$f_i\%$
0		4	0,16	16%
1	+ +	12	0,48	48%
2	+	6	0,24	24%
3		2	0,08	8%
4		1	0,04	4%
Σύνολο		25	1	100%

☆ Ιδιότητες

- Κάθε σχετική συχνότητα είναι αριθμός από 0 έως 1: $0 \leq f_i \leq 1$.
- Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων είναι 1 (ή 100%).
- Το άθροισμα των συχνοτήτων είναι n .



Ραβδόγραμμα συχνοτήτων

Κυκλικό με τις $f_i\%$

Στο κυκλικό διάγραμμα η γωνία κάθε τομέα είναι $f_i \cdot 360^\circ$. Για 1 αδελφό: $0,48 \cdot 360^\circ = 172,8^\circ$.

📖 Γιατί χρειαζόμαστε τις σχετικές συχνοότητες;

Παράδειγμα 4.3.1

Στο σχολείο A, 45 από τους 150 μαθητές φορούν γυαλιά. Στο σχολείο B, 36 από τους 90. Σε ποιο σχολείο είναι μεγαλύτερο το ποσοστό των μαθητών με γυαλιά;

ΛΥΣΗ

Σχολείο A: $\frac{45}{150} = 0,30 = 30\%$. Σχολείο B: $\frac{36}{90} = 0,40 = 40\%$.

Παρόλο που στο A οι μαθητές με γυαλιά είναι **περισσότεροι** σε αριθμό, το **ποσοστό** είναι μεγαλύτερο στο B. Οι σχετικές συχνότητες επιτρέπουν σύγκριση ομάδων με διαφορετικό μέγεθος.

⊗ Συχνό λάθος

× Λάθος

$$f_i = \frac{v}{v_i}$$

✓ Σωστό

$$f_i = \frac{v_i}{v}$$

Πάντα «το κομμάτι προς το σύνολο». Γι' αυτό η σχετική συχνότητα δεν ξεπερνά ποτέ το 1.

Παράδειγμα 4.3.2

Να συμπληρωθεί ο πίνακας, αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $n = 50$.

x_i	n_i	f_i	$f_i\%$
A	...	0,3	...
B	20	...	...
Γ	...	...	20%
Δ	...	...	...
Σύνολο	50	1	100%

ΛΥΣΗ

A: $n_1 = 0,3 \cdot 50 = 15$, $f_1\% = 30\%$. B: $f_2 = \frac{20}{50} = 0,4 = 40\%$. Γ: $f_3 = 0,2$, $n_3 = 0,2 \cdot 50 = 10$. Δ: $n_4 = 50 - 15 - 20 - 10 = 5$, $f_4 = 0,1 = 10\%$.



Θέλεις να δεις αυτό το μάθημα και σε **βίντεο**, βήμα-βήμα; Στο **mathgreece.com** θα βρεις ολοκληρωμένο, **δωρεάν** φροντιστήριο για όλη την ύλη της Β' Γυμνασίου.
www.mathgreece.com

✎ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- Οι βαθμοί 20 μαθητών σε ένα τεστ (κλίμακα 1–5) ήταν: 3, 4, 5, 3, 2, 4, 4, 3, 5, 1, 3, 4, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 3, 4. Να κατασκευάσεις πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων (%).
- Με τα δεδομένα της άσκησης 1, να βρεις το ποσοστό των μαθητών που πήραν τουλάχιστον 4.
- Σε έρευνα 200 ατόμων, η σχετική συχνότητα όσων προτιμούν τσάι είναι 0,15. Πόσα άτομα προτιμούν τσάι; Ποια γωνία αντιστοιχεί στο κυκλικό διάγραμμα;
- Σε μια τάξη 28 μαθητών, τα κορίτσια είναι 16. Σε μια άλλη τάξη 25 μαθητών, τα κορίτσια είναι 15. Σε ποια τάξη είναι μεγαλύτερο το ποσοστό των κοριτσιών;
- Ένας πίνακας έχει σχετικές συχνότητες 0,25, 0,4, x και 0,15. Να βρεις το x .
- Σε κυκλικό διάγραμμα οι γωνίες τριών τομέων είναι 120° , 90° και 60° . Ποια είναι η γωνία του τέταρτου τομέα και ποια η σχετική συχνότητα κάθε τομέα;

ΜΑΘΗΜΑ

4.4

Ομαδοποίηση παρατηρήσεων

Όταν η μεταβλητή είναι συνεχής (ή παίρνει πολλές διαφορετικές τιμές), ένας πίνακας με κάθε τιμή χωριστά θα ήταν τεράστιος και άχρηστος. Τότε ομαδοποιούμε τις τιμές σε διαστήματα, τις κλάσεις.

Κλάσεις

Μετρήσαμε τα ύψη (σε cm) 30 μαθητών της Β' Γυμνασίου:

152, 158, 147, 163, 155, 160, 149, 166, 157, 151, 162, 154, 170, 159, 145, 156, 161, 153, 164, 158, 150, 167, 155, 162, 148, 159, 165, 157, 152, 160

Ορισμός · Κλάσεις

Χωρίζουμε το εύρος των τιμών σε διαστήματα ίσου πλάτους, τις **κλάσεις**. Γράφουμε κάθε κλάση στη μορφή $[α, β)$, που σημαίνει ότι περιλαμβάνει το $α$ αλλά **όχι** το $β$ (το $β$ ανήκει στην επόμενη κλάση). Η διαφορά $β - α$ λέγεται **πλάτος** της κλάσης.

☆ Κέντρο κλάσης

Το μέσο του διαστήματος $[α, β)$ λέγεται **κέντρο** (ή κεντρική τιμή) της κλάσης: $x_i = \frac{α + β}{2}$. Χρησιμοποιείται ως «αντιπρόσωπος» όλων των τιμών της κλάσης.

Κλάσεις (cm)	Κέντρο x_i	Συχνότητα n_i	$f_i\%$
[145, 150)	147,5	4	13,3
[150, 155)	152,5	6	20
[155, 160)	157,5	9	30
[160, 165)	162,5	7	23,3
[165, 170)	167,5	3	10
[170, 175)	172,5	1	3,3
Σύνολο		30	≈100

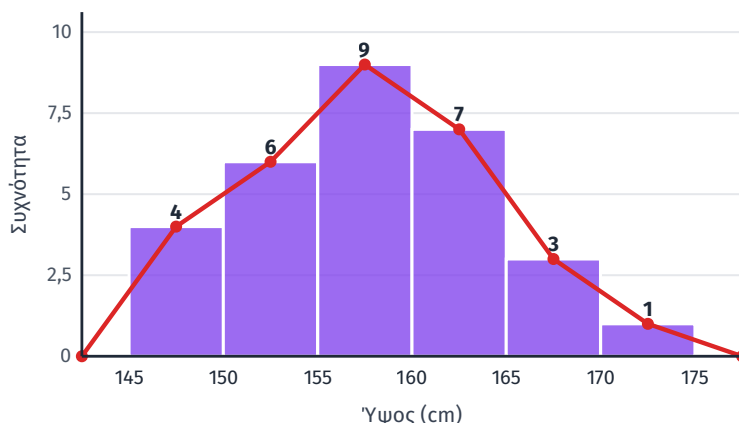
⚠ Προσοχή!

Το 150 ανήκει στην κλάση $[150, 155)$ και **όχι** στην $[145, 150)$. Πρόσεξε ιδιαίτερα τις τιμές που πέφτουν πάνω στα όρια.

Ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων

Τα ομαδοποιημένα δεδομένα παριστάνονται με **ιστόγραμμα**: ορθογώνια που **εφάπτονται** μεταξύ τους (γιατί οι κλάσεις είναι συνεχόμενες), με βάση το πλάτος της κλάσης και ύψος τη συχνότητα.

Αν ενώσουμε τα μέσα των πάνω πλευρών των ορθογωνίων (και προσθέσουμε δύο «κλάσεις» μηδενικής συχνότητας στις άκρες), παίρνουμε το **πολύγωνο συχνοτήτων**.



Ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων (κόκκινο) για τα ύψη 30 μαθητών

⊗ Συχνό λάθος

× Λάθος

Ιστόγραμμα με κενά ανάμεσα στα ορθογώνια

✓ Σωστό

Τα ορθογώνια του ιστογράμματος **εφάπτονται**

Τα κενά είναι για το ραβδόγραμμα (διακριτές/ποιοτικές τιμές). Στις κλάσεις δεν υπάρχει «κενό» ανάμεσα στο τέλος της μιας και την αρχή της επόμενης.

📖 Πώς επιλέγω τις κλάσεις

☆ Βήματα

- 1 Βρίσκω τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή. Η διαφορά τους λέγεται **εύρος R**.
- 2 Αποφασίζω το πλήθος k των κλάσεων (συνήθως 5 έως 8).
- 3 Πλάτος κλάσης: $c \approx \frac{R}{k}$, στρογγυλεμένο προς τα πάνω σε «βολικό» αριθμό.
- 4 Ξεκινώ από μια τιμή λίγο μικρότερη ή ίση με την ελάχιστη.

Παράδειγμα 4.4.1

Για τα ύψη του πίνακα: ελάχιστη τιμή 145, μέγιστη 170. Πώς προκύπτουν οι κλάσεις που χρησιμοποιήσαμε;

ΛΥΣΗ

Εύρος $R = 170 - 145 = 25$. Με πλάτος 5 χρειάζονται $\frac{25}{5} = 5$ κλάσεις, αλλά επειδή η τιμή 170 πρέπει να ανήκει σε κάποια κλάση (και η $[165, 170)$ δεν την περιέχει), προσθέτουμε την $[170, 175)$. Έτσι έχουμε 6 κλάσεις.

Παράδειγμα 4.4.2

Από το ιστόγραμμα των υψών να βρεθεί: α) πόσοι μαθητές έχουν ύψος τουλάχιστον 160 cm, β) τι ποσοστό έχει ύψος κάτω από 155 cm.

ΛΥΣΗ

α) $7 + 3 + 1 = 11$ μαθητές. β) $4 + 6 = 10$ από 30, δηλαδή $\frac{10}{30} \approx 33,3\%$.



Για περισσότερες λυμένες ασκήσεις, **κουίζ αυτοαξιολόγησης** και σημειώσεις, μπες στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών.

www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν 20 μαθητές για να λύσουν ένα πρόβλημα ήταν: 12, 7, 15, 9, 11, 18, 5, 13, 10, 14, 8, 16, 12, 6, 11, 19, 9, 13, 10, 12. Να τους ομαδοποιήσεις σε κλάσεις [5, 8), [8, 11), [11, 14), [14, 17), [17, 20) και να βρεις τις συχνότητες.
- 2 Να βρεις τα κέντρα των κλάσεων της άσκησης 1 και να σχεδιάσεις το ιστόγραμμα.
- 3 Σε ποια κλάση ανήκει η τιμή 40 αν οι κλάσεις είναι [30, 40), [40, 50), [50, 60);
- 4 Ένα ιστόγραμμα έχει κλάσεις πλάτους 10 και ύψη 2, 5, 8, 4, 1 με πρώτη κλάση [20, 30). Πόσες είναι οι παρατηρήσεις; Ποιο ποσοστό είναι μικρότερο του 40;
- 5 Οι κλάσεις ενός πίνακα έχουν κέντρα 15, 25, 35, 45. Ποιες είναι οι κλάσεις;

ΜΑΘΗΜΑ

4.5

Μέση τιμή – Διάμεσος

Πώς περιγράφουμε ένα ολόκληρο σύνολο δεδομένων με έναν μόνο αριθμό; Με τα μέτρα θέσης: τη μέση τιμή και τη διάμεσο. Θα δούμε πώς υπολογίζονται και πότε προτιμάμε το καθένα.

 Μέση τιμή
 Ορισμός · Μέση τιμή

Η **μέση τιμή** (ή μέσος όρος) $\bar{x}$ ενός συνόλου n παρατηρήσεων είναι το άθροισμα των παρατηρήσεων διαιρεμένο με το πλήθος τους:

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n}$$

Παράδειγμα 4.5.1

Οι βαθμοί της Ελένης στα διαγωνίσματα του τριμήνου ήταν 16, 18, 15, 19, 17. Ποιος είναι ο μέσος όρος της;

ΛΥΣΗ

$$\bar{x} = \frac{16 + 18 + 15 + 19 + 17}{5} = \frac{85}{5} = 17$$

► **Μέση τιμή από πίνακα συχνοτήτων**

Όταν οι τιμές επαναλαμβάνονται, πολλαπλασιάζουμε κάθε τιμή με τη συχνότητά της:

☆ **Τύπος**

$$\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k}{n}$$

Παράδειγμα 4.5.2

Να βρεθεί ο μέσος αριθμός αδελφών των 25 μαθητών του Μαθήματος 4.3.

ΛΥΣΗ

x_i	0	1	2	3	4	Σύνολο
v_i	4	12	6	2	1	25
$x_i v_i$	0	12	12	6	4	34

$$\bar{x} = \frac{34}{25} = 1,36 \text{ αδέλφια}$$

Η μέση τιμή μπορεί να μην είναι μία από τις τιμές της μεταβλητής — κανείς δεν έχει 1,36 αδελφία!

► Μέση τιμή ομαδοποιημένων δεδομένων

Χρησιμοποιούμε τα **κέντρα** των κλάσεων ως τιμές x_i . Το αποτέλεσμα είναι **προσέγγιση** της πραγματικής μέσης τιμής.

Παράδειγμα 4.5.3

Να βρεθεί η μέση τιμή των υψών του Μαθήματος 4.4.

ΛΥΣΗ

$$\bar{x} \approx \frac{147,5 \cdot 4 + 152,5 \cdot 6 + 157,5 \cdot 9 + 162,5 \cdot 7 + 167,5 \cdot 3 + 172,5 \cdot 1}{30} = \frac{4735}{30} \approx 157,8 \text{ cm.}$$

📖 Διάμεσος

📖 Ορισμός · Διάμεσος

Γράφουμε τις παρατηρήσεις σε **αύξουσα σειρά**. **Διάμεσος** δ λέγεται:

- αν το πλήθος n είναι **περιττό**: η **μεσαία** παρατήρηση,
- αν το n είναι **άρτιο**: ο **μέσος όρος των δύο μεσαίων** παρατηρήσεων.

Η διάμεσος χωρίζει τα δεδομένα στη μέση: το πολύ οι μισές παρατηρήσεις είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ οι μισές μεγαλύτερες.



Παράδειγμα 4.5.4

Να βρεθεί η διάμεσος των αριθμών: α) 8, 3, 12, 5, 9, 7, 4 β) 21, 15, 30, 18, 25, 12

ΛΥΣΗ

α) Σε αύξουσα σειρά: 3, 4, 5, **7**, 8, 9, 12. Πλήθος 7 (περιττό), μεσαία η 4η: $\delta = 7$.

β) 12, 15, **18**, **21**, 25, 30. Πλήθος 6 (άρτιο), μεσαίες η 3η και η 4η: $\delta = \frac{18 + 21}{2} = 19,5$.

⊗ Συχνό λάθος

✗ Λάθος

Διάμεσος των 8, 3, 12, 5, 9 είναι το 12 (η μεσαία στη σειρά που δόθηκαν)

✓ Σωστό

Πρώτα ταξινομούμε: 3, 5, **8**, 9, 12 → $\delta = 8$

Το πιο συχνό λάθος! Η διάμεσος βρίσκεται **μόνο αφού** γράψουμε τα δεδομένα σε αύξουσα σειρά.

🔍 Κόλπο

Για να βρεις γρήγορα τη θέση της διαμέσου: αν n περιττό, είναι η θέση $\frac{n+1}{2}$. αν n άρτιο, οι θέσεις $\frac{n}{2}$ και $\frac{n}{2} + 1$. Π.χ. για 25 παρατηρήσεις, η 13η.

Παράδειγμα 4.5.5

Να βρεθεί η διάμεσος του αριθμού αδελφών (πίνακας του 4.3: τιμές 0, 1, 2, 3, 4 με συχνότητες 4, 12, 6, 2, 1).

ΛΥΣΗ

$n = 25$, άρα διάμεσος είναι η 13η παρατήρηση. Οι 4 πρώτες είναι 0 και οι επόμενες 12 (θέσεις 5–16) είναι 1. Η 13η είναι 1: $\delta = 1$.

📖 Μέση τιμή ή διάμεσος;

Παράδειγμα 4.5.6

Σε μια μικρή εταιρεία οι μηνιαίοι μισθοί (€) των 7 εργαζομένων είναι: 900, 950, 950, 1000, 1050, 1100, 6000 (ο διευθυντής). Να βρεθούν η μέση τιμή και η διάμεσος. Ποια περιγράφει καλύτερα τον «τυπικό» μισθό;

ΛΥΣΗ

$$\bar{x} = \frac{11950}{7} \approx 1707 \text{ €}, \text{ ενώ } \delta = 1000 \text{ €}.$$

Ο μέσος όρος «τραβήχτηκε» προς τα πάνω από τον έναν πολύ μεγάλο μισθό: 6 από τους 7 εργαζόμενους παίρνουν λιγότερα από τον μέσο όρο! Εδώ τον «τυπικό» μισθό τον περιγράφει καλύτερα η **διάμεσος**.

☆ Σύγκριση

	Μέση τιμή	Διάμεσος
Χρησιμοποιεί	όλες τις τιμές	μόνο τη θέση της μεσαίας
Επηρεάζεται από ακραίες τιμές;	ναι, πολύ	ελάχιστα
Πότε την προτιμώ	δεδομένα χωρίς ακραίες τιμές	όταν υπάρχουν ακραίες τιμές

📖 Χρήσιμες ιδιότητες της μέσης τιμής

- Αν προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό c σε όλες τις παρατηρήσεις, η μέση τιμή αυξάνεται κατά c .
- Αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις παρατηρήσεις με λ , και η μέση τιμή πολλαπλασιάζεται με λ .
- Το άθροισμα όλων των παρατηρήσεων είναι $n \cdot \bar{x}$.

Παράδειγμα 4.5.7

Ο μέσος όρος 4 διαγωνισμάτων ενός μαθητή είναι 15. Τι βαθμό πρέπει να πάρει στο 5ο διαγώνισμα για να γίνει ο μέσος όρος 16;

ΛΥΣΗ

Άθροισμα 4 βαθμών: $4 \cdot 15 = 60$. Για μέσο όρο 16 σε 5 διαγωνίσματα χρειάζεται άθροισμα $5 \cdot 16 = 80$. Άρα πρέπει να πάρει $80 - 60 = 20$.



Κόλλησες κάπου; Στο **mathgreece.com** υπάρχουν βιντεομαθήματα, podcasts και παιχνίδια γνώσεων για κάθε ενότητα — όλα δωρεάν.

www.mathgreece.com

✎ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να βρεις τη μέση τιμή και τη διάμεσο των: 14, 9, 11, 20, 9, 15, 12.
- 2 Να βρεις τη μέση τιμή και τη διάμεσο των: $3,5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 1,5 \cdot 5$.
- 3 Ο πίνακας δίνει τα γκολ που πέτυχε μια ομάδα σε 20 αγώνες: 0 γκολ: 3 αγώνες, 1: 7, 2: 5, 3: 4, 4: 1. Να βρεις τη μέση τιμή και τη διάμεσο.
- 4 Η μέση τιμή των αριθμών 8, 12, x , 15, 10 είναι 11. Να βρεις το x .
- 5 Η μέση ηλικία 5 φίλων είναι 14 χρόνια. Μπαίνει στην παρέα ένας ακόμη 20 ετών. Ποια είναι η νέα μέση ηλικία;
- 6 Να βρεις τη μέση τιμή του πίνακα της άσκησης 1 του Μαθήματος 4.4 (χρόνοι), χρησιμοποιώντας τα κέντρα των κλάσεων.
- 7 Οι τιμές (σε χιλιάδες €) 9 σπιτιών μιας γειτονιάς είναι: 120, 135, 140, 150, 155, 160, 170, 180, 850. Ποιο μέτρο θέσης περιγράφει καλύτερα την «τυπική» τιμή; Να το υπολογίσεις.
- 8 Αν σε όλους τους βαθμούς μιας τάξης προσθέσουμε 2 μονάδες «bonus», τι θα συμβεί στη μέση τιμή και στη διάμεσο;

Σε μια ματιά — Ανακεφαλαίωση Κεφαλαίου 40

Πριν προχωρήσεις στο επόμενο κεφάλαιο ή πριν από το διαγώνισμα, έλεγξε ότι θυμάσαι όλα τα παρακάτω. Αν κάτι δεν σου είναι ξεκάθαρο, γύρνα στο αντίστοιχο μάθημα.

Έννοια	Τι πρέπει να θυμάμαι
Πληθυσμός – Δείγμα	το δείγμα πρέπει να είναι αντιπροσωπευτικό (τυχαία επιλογή)
Μεταβλητές	ποιοτικές · ποσοτικές διακριτές · ποσοτικές συνεχείς
Διαγράμματα	ραβδόγραμμα, κυκλικό (γωνία = $f \cdot 360^\circ$), χρονόγραμμα, ιστόγραμμα
Συχνότητες	v_i : σχετική $f_i = \frac{v_i}{v}$ · άθροισμα όλων των $f_i = 1$
Κλάσεις	$[\alpha, \beta)$, κέντρο $\frac{\alpha + \beta}{2}$, ιστόγραμμα χωρίς κενά
Μέση τιμή	$\bar{x} = \frac{\text{άθροισμα}}{v}$ — επηρεάζεται από ακραίες τιμές
Διάμεσος	μεσαία τιμή αφού ταξινομήσω

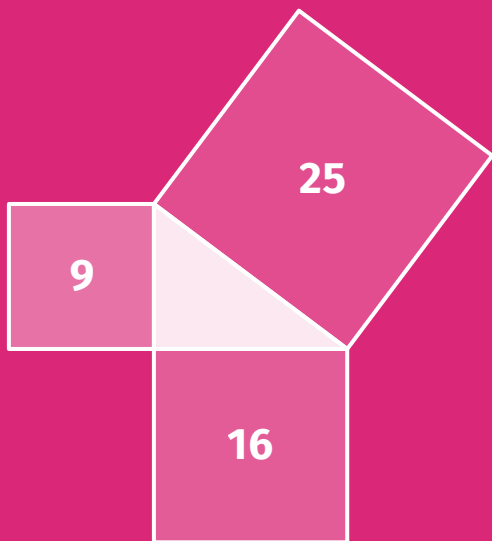


Πριν από το διαγώνισμα του κεφαλαίου, λύσε τα **επαναληπτικά κουίζ** και δες τα βίντεομαθήματα στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο.
www.mathgreece.com

1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο θεώρημα



Το Μέρος Β' ξεκινά με τη μέτρηση επιφανειών. Θα μάθουμε τι είναι το εμβαδόν, πώς μετατρέπουμε μονάδες επιφάνειας και θα βρούμε τους τύπους για τα εμβαδά των βασικών σχημάτων. Το ταξίδι ολοκληρώνεται με το διασημότερο θεώρημα της Γεωμετρίας: το Πυθαγόρειο θεώρημα.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 1.1 Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας
- 1.2 Μονάδες μέτρησης επιφανειών
- 1.3 Εμβαδά επίπεδων σχημάτων
- 1.4 Πυθαγόρειο θεώρημα

ΜΑΘΗΜΑ

1.1

Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

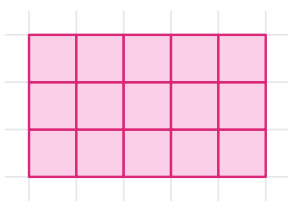
Πόσο «χώρο» πιάνει ένα σχήμα πάνω στο επίπεδο; Η απάντηση είναι ένας αριθμός: το εμβαδόν του. Εδώ καταλαβαίνουμε τι ακριβώς μετράει το εμβαδόν και πώς το βρίσκουμε συγκρίνοντας με μια μονάδα.

Μέτρηση επιφάνειας

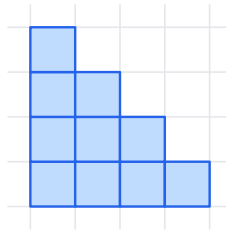
Για να μετρήσουμε ένα μήκος, το συγκρίνουμε με μια μονάδα μήκους (π.χ. το εκατοστό). Με τον ίδιο τρόπο, για να μετρήσουμε μια επιφάνεια, τη συγκρίνουμε με μια **μονάδα επιφάνειας**, συνήθως ένα τετράγωνο με πλευρά 1 μονάδα μήκους.

Ορισμός · Εμβαδόν

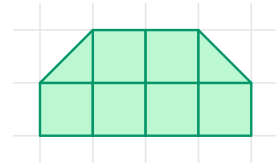
Ο θετικός αριθμός που εκφράζει **πόσες φορές χωράει η μονάδα επιφάνειας** σε μια επίπεδη επιφάνεια λέγεται **εμβαδόν** της επιφάνειας.



Εμβαδόν: 15 τετραγωνάκια



Εμβαδόν: 10 τετραγωνάκια



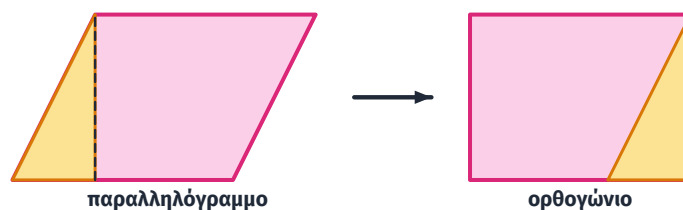
Δύο μισά = ένα ολόκληρο: εμβαδόν 7

Ισοδύναμα σχήματα

Ορισμός · Ισοδύναμα σχήματα

Δύο σχήματα που έχουν **το ίδιο εμβαδόν** λέγονται **ισοδύναμα** (ή ισεμβαδικά), ακόμη κι αν έχουν διαφορετική μορφή.

Αν «κόψουμε» ένα σχήμα σε κομμάτια και τα ξαναβάλουμε με άλλη σειρά (χωρίς επικαλύψεις και κενά), το νέο σχήμα έχει **το ίδιο εμβαδόν**. Αυτή η ιδέα είναι το κλειδί για όλους τους τύπους εμβαδών που θα δούμε.



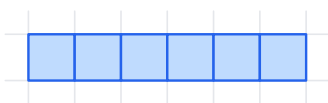
Μετακινώντας το κίτρινο τρίγωνο, το παραλληλόγραμμο γίνεται ορθογώνιο με το ίδιο εμβαδόν.

⚠ Προσοχή!

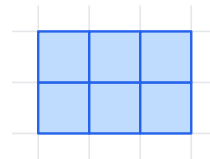
Ισοδύναμα δεν σημαίνει ίσα! Δύο **ίσα** σχήματα (που ταυτίζονται αν τα τοποθετήσουμε το ένα πάνω στο άλλο) είναι πάντα ισοδύναμα, αλλά δύο ισοδύναμα σχήματα δεν είναι απαραίτητα ίσα.

📖 Εμβαδόν και περίμετρος: δύο διαφορετικά πράγματα

Η **περίμετρος** μετράει το μήκος του «φράχτη» γύρω από ένα σχήμα (σε cm, m...), ενώ το **εμβαδόν** μετράει την επιφάνεια που περικλείει (σε cm², m²...).



Εμβαδόν 6, περίμετρος 14



Εμβαδόν 6, περίμετρος 10

⊗ Συχνό λάθος**✗ Λάθος**

«Σχήματα με το ίδιο εμβαδόν έχουν την ίδια περίμετρο»

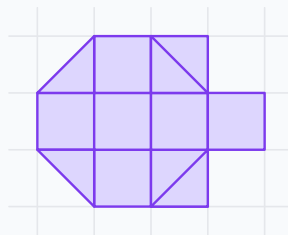
✓ Σωστό

Μπορεί να έχουν **διαφορετική** περίμετρο

Και τα δύο σχήματα πάνω έχουν εμβαδόν 6, αλλά περιμέτρους 14 και 10. Ούτε το αντίστροφο ισχύει.

Παράδειγμα 1.1.1

Να βρεθεί το εμβαδόν του σχήματος, αν κάθε τετραγωνάκι έχει εμβαδόν 1 cm².

**ΛΥΣΗ**

Μετράμε 8 ολόκληρα τετραγωνάκια και 4 μισά (τρίγωνα), δηλαδή $8 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 10 \text{ cm}^2$.



Εξάσκηση χωρίς τέλος: στο **mathgreece.com** θα βρεις επιπλέον φυλλάδια ασκήσεων και διαγωνίσματα για τη Β' Γυμνασίου, εντελώς **δωρεάν**.

www.mathgreece.com

 Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Σε τετραγωνισμένο χαρτί να σχεδιάσεις τρία διαφορετικά σχήματα με εμβαδόν 8 τετραγωνάκια το καθένα. Έχουν την ίδια περίμετρο;
- 2 Ένα ορθογώνιο αποτελείται από 4 σειρές των 7 τετραγωνακίων. Πόσο είναι το εμβαδόν του σε τετραγωνάκια;
- 3 Σωστό ή Λάθος; α) Δύο ίσα τρίγωνα έχουν ίσα εμβαδά. β) Δύο τρίγωνα με ίσα εμβαδά είναι ίσα. γ) Αν κόψουμε ένα σχήμα και ανασυνθέσουμε τα κομμάτια, το εμβαδόν δεν αλλάζει.
- 4 Να σχεδιάσεις σε τετραγωνισμένο χαρτί ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 4 και 6 τετραγωνάκια. Πόσο είναι το εμβαδόν του; (Υπόδειξη: είναι το μισό ενός ορθογωνίου.)

ΜΑΘΗΜΑ

1.2

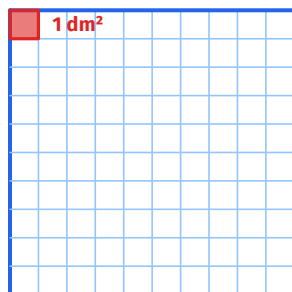
Μονάδες μέτρησης επιφανειών

Το εμβαδόν μετριέται σε τετραγωνικές μονάδες. Εδώ μαθαίνουμε τις βασικές μονάδες, πώς σχετίζονται και — το πιο σημαντικό — πώς μετατρέπουμε από τη μία στην άλλη χωρίς λάθη.

Το τετραγωνικό μέτρο και οι υποδιαιρέσεις του

Ορισμός · Τετραγωνικό μέτρο

Βασική μονάδα μέτρησης επιφανειών είναι το **τετραγωνικό μέτρο** (m^2): το εμβαδόν ενός τετραγώνου με πλευρά 1 m.



$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$$

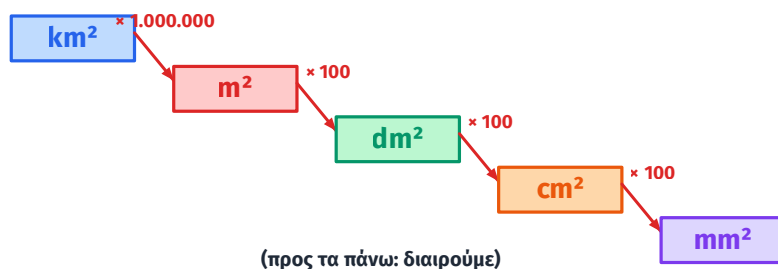
$$1 \text{ m}^2 = 10 \text{ dm} \times 10 \text{ dm} = 100 \text{ dm}^2$$

Μονάδα	Σύμβολο	Τετράγωνο πλευράς	Σε m^2
τετραγωνικό χιλιόμετρο	km^2	1 km	1.000.000 m^2
στρέμμα	—	—	1.000 m^2
τετραγωνικό μέτρο	m^2	1 m	1 m^2
τετραγωνική παλάμη (δεκατόμετρο)	dm^2	1 dm	0,01 m^2
τετραγωνικό εκατοστόμετρο	cm^2	1 cm	0,0001 m^2
τετραγωνικό χιλιοστόμετρο	mm^2	1 mm	0,000001 m^2

Το **στρέμμα** δεν είναι τετράγωνο συγκεκριμένης πλευράς· χρησιμοποιείται στην Ελλάδα για τη μέτρηση οικοπέδων και χωραφιών: 1 στρέμμα = 1000 m^2 .

Μετατροπές

Αφού $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$, ένα τετράγωνο $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ χωρίζεται σε $10 \times 10 = 100$ τετράγωνα του 1 dm^2 . Γενικά, κάθε φορά που κατεβαίνουμε μία «βαθμίδα», ο αριθμός πολλαπλασιάζεται με **100** (και όχι με 10, όπως στα μήκη!).



Η «σκάλα» των μονάδων επιφάνειας

☆ Κανόνας μετατροπής

- Από **μεγαλύτερη** σε **μικρότερη** μονάδα: **πολλαπλασιάζω** με 100 για κάθε σκαλοπάτι.
- Από **μικρότερη** σε **μεγαλύτερη** μονάδα: **διαιρώ** με 100 για κάθε σκαλοπάτι.
- Μεταξύ m^2 και km^2 : $1 km^2 = 1000 m \times 1000 m = 1.000.000 m^2$.

⊗ Συχνό λάθος

× **Λάθος**

$$1 m^2 = 100 cm^2$$

✓ **Σωστό**

$$1 m^2 = 10.000 cm^2$$

Το 1 m είναι 100 cm, άρα το τετράγωνο έχει $100 \times 100 = 10.000$ τετραγωνάκια του $1 cm^2$. Τα «τετράγωνα» μεγέθη υψώνουν και τον συντελεστή στο τετράγωνο.

Παράδειγμα 1.2.1

Να μετατραπούν: α) $3,5 m^2$ σε cm^2 β) $4.800 cm^2$ σε m^2 γ) 2,4 στρέμματα σε m^2 δ) $75.000 m^2$ σε km^2

ΛΥΣΗ

α) $3,5 \cdot 10.000 = 35.000 cm^2$. β) $4.800 : 10.000 = 0,48 m^2$. γ) $2,4 \cdot 1000 = 2.400 m^2$. δ) $75.000 : 1.000.000 = 0,075 km^2$.

Παράδειγμα 1.2.2

Ένα ορθογώνιο οικόπεδο έχει διαστάσεις 50 m και 36 m. Πόσα στρέμματα είναι;

ΛΥΣΗ

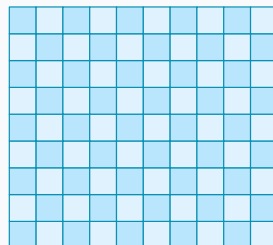
Εμβαδόν $50 \cdot 36 = 1.800 m^2 = 1,8$ στρέμματα.

💡 Η συμβουλή του καθηγητή

Πριν κάνεις πράξεις με εμβαδά (ή μήκη), φέρε **όλα** τα μεγέθη στην **ίδια μονάδα**. Π.χ. ένα ορθογώνιο $2 m \times 35 cm$: γράψε $200 cm \times 35 cm = 7.000 cm^2$ ή $2 m \times 0,35 m = 0,7 m^2$.

Παράδειγμα 1.2.3

Για να στρώσουμε ένα δωμάτιο $4 \text{ m} \times 3,6 \text{ m}$ χρησιμοποιούμε τετράγωνα πλακάκια πλευράς 40 cm . Πόσα πλακάκια χρειάζονται;

**ΛΥΣΗ**

Εμβαδόν δωματίου: $4 \cdot 3,6 = 14,4 \text{ m}^2 = 144.000 \text{ cm}^2$. Εμβαδόν πλακακιού: $40 \cdot 40 = 1.600 \text{ cm}^2$. Πλήθος: $144.000 : 1.600 = 90$ πλακάκια.

(Η αλλιώς: κατά μήκος χωράνε $400 : 40 = 10$ και κατά πλάτος $360 : 40 = 9$, άρα $10 \cdot 9 = 90$.)



Θέλεις να ελέγξεις αν το κατάλαβες; Λύσε τα **διαδραστικά κουίζ** του μαθήματος στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν ψηφιακό φροντιστήριο.
www.mathgreece.com

Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1** Να μετατρέψεις σε m^2 : α) 25.000 cm^2 β) 350 dm^2 γ) $0,04 \text{ km}^2$ δ) $3,2$ στρέμματα ε) 85.000 mm^2
- 2** Να μετατρέψεις: α) $1,2 \text{ m}^2$ σε cm^2 β) 6 cm^2 σε mm^2 γ) $0,5 \text{ dm}^2$ σε cm^2 δ) $2,5 \text{ km}^2$ σε στρέμματα
- 3** Να διατάξεις από το μικρότερο στο μεγαλύτερο: $0,3 \text{ m}^2$, 2.900 cm^2 , 31 dm^2 , 300.000 mm^2 .
- 4** Ένα χωράφι έχει εμβαδόν $6,5$ στρέμματα. Πόσα m^2 είναι; Αν πουλιέται 12 € το m^2 , πόσο κοστίζει;
- 5** Ένας τοίχος $5 \text{ m} \times 2,8 \text{ m}$ βάφεται. Ένα λίτρο χρώμα καλύπτει 7 m^2 . Πόσα λίτρα χρειάζονται για δύο χέρια βάψιμο;
- 6** Πόσα τετράγωνα πλακάκια πλευράς 25 cm χρειάζονται για ένα μπάνιο $2 \text{ m} \times 1,5 \text{ m}$;

ΜΑΘΗΜΑ
1.3

Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

Σε αυτό το μάθημα βρίσκουμε τους τύπους για τα εμβαδά των βασικών σχημάτων. Το ωραίο είναι ότι όλοι προκύπτουν από έναν μόνο: τον τύπο του ορθογωνίου, «κόβοντας και ράβοντας» σχήματα.

📖 Ορθογώνιο και τετράγωνο



☆ Ορθογώνιο

$$E = \alpha \cdot \beta$$

μήκος × πλάτος



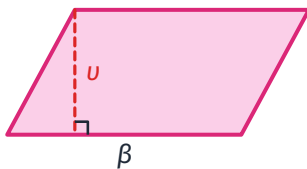
☆ Τετράγωνο

$$E = \alpha^2$$

πλευρά × πλευρά

📖 Παραλληλόγραμμο

Όπως είδαμε στο Μάθημα 1.1, ένα παραλληλόγραμμο μετατρέπεται σε ορθογώνιο με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος.



☆ Παραλληλόγραμμο

$$E = \beta \cdot \upsilon$$

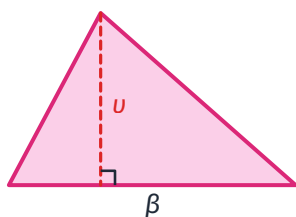
βάση × αντίστοιχο ύψος

⚠ Προσοχή!

Το **ύψος** είναι η **κάθετη** απόσταση ανάμεσα στις παράλληλες πλευρές — όχι η πλάγια πλευρά! Ένα παραλληλόγραμμο έχει δύο ύψη, ένα για κάθε ζεύγος πλευρών, και πρέπει να πολλαπλασιάζουμε κάθε βάση με το **δικό της** ύψος.

📖 Τρίγωνο

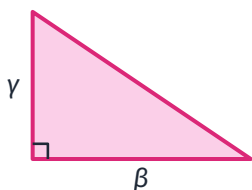
Δύο ίσα τρίγωνα, βαλμένα κατάλληλα το ένα δίπλα στο άλλο, σχηματίζουν παραλληλόγραμμο. Άρα το τρίγωνο έχει το **μισό** εμβαδόν από ένα παραλληλόγραμμο με την ίδια βάση και ύψος.



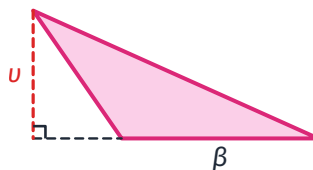
☆ Τρίγωνο

$$E = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \upsilon = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$$

Οποιαδήποτε πλευρά μπορεί να είναι βάση, αρκεί να πάρουμε το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτήν.



Ορθογώνιο τρίγωνο: $E = \frac{\beta \cdot \gamma}{2}$

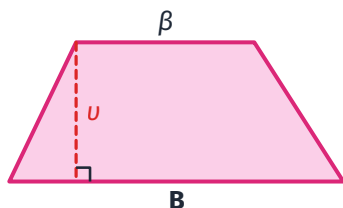


Αμβλυγώνιο: το ύψος πέφτει έξω από το τρίγωνο

Στο **ορθογώνιο τρίγωνο** η μία κάθετη πλευρά είναι ύψος προς την άλλη, άρα $E = \frac{1}{2} \cdot (\text{κάθετη}_1) \cdot (\text{κάθετη}_2)$.

📖 Τραπεζίο

Δύο ίσα τραπέζια, το ένα «ανάποδα», σχηματίζουν παραλληλόγραμμο με βάση $B + \beta$ και ύψος υ . Άρα:

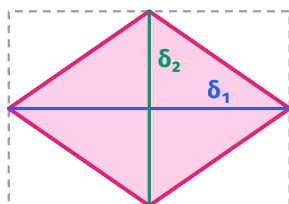


☆ Τραπεζίο

$$E = \frac{(B + \beta) \cdot \upsilon}{2}$$

ημιάθροισμα βάσεων × ύψος

📖 Ρόμβος (και κάθε τετράπλευρο με κάθετες διαγώνιες)



☆ Ρόμβος

$$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$

Ο ρόμβος είναι το μισό του ορθογωνίου που έχει πλευρές τις διαγωνίους του.

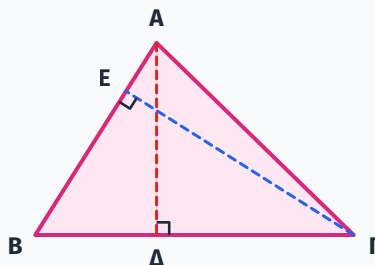
Συνοπτικός πίνακας

Σχήμα	Εμβαδόν
Ορθογώνιο	$E = \alpha\beta$
Τετράγωνο	$E = \alpha^2$
Παραλληλόγραμμο	$E = \beta \cdot v$
Τρίγωνο	$E = \frac{1}{2} \beta \cdot v$
Ορθογώνιο τρίγωνο	$E = \frac{1}{2} \beta \gamma$ (κάθετες)
Τραπεζίο	$E = \frac{(B + \beta)v}{2}$
Ρόμβος	$E = \frac{\delta_1 \delta_2}{2}$

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1.3.1

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΒΓ = 12 cm και ύψος ΑΔ = 5 cm. Αν ΑΒ = 10 cm, να βρεθεί το ύψος ΓΕ που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΒ.



ΛΥΣΗ

$E = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ cm}^2$. Το ίδιο εμβαδόν με βάση την ΑΒ: $\frac{10 \cdot \Gamma\text{Ε}}{2} = 30 \Rightarrow \Gamma\text{Ε} = 6 \text{ cm}$.

💡 Ιδέα

Η ιδέα «υπολογίζω το εμβαδόν με δύο τρόπους και εξισώνω» χρησιμοποιείται συχνά για να βρίσκουμε ύψη.

Παράδειγμα 1.3.2

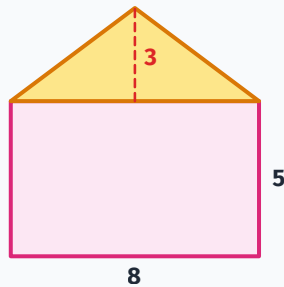
Ένα τραπέζιο έχει βάσεις 14 cm και 8 cm και εμβαδόν 77 cm². Να βρεθεί το ύψος του.

ΛΥΣΗ

$$\frac{(14 + 8)v}{2} = 77 \Rightarrow 11v = 77 \Rightarrow v = 7 \text{ cm.}$$

Παράδειγμα 1.3.3 — Σύνθετο σχήμα

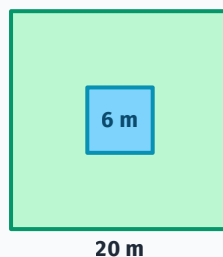
Να βρεθεί το εμβαδόν του σχήματος (διαστάσεις σε m).

**ΛΥΣΗ**

Χωρίζουμε σε ορθογώνιο 8×5 και τρίγωνο με βάση 8 και ύψος 3: $E = 8 \cdot 5 + \frac{8 \cdot 3}{2} = 40 + 12 = 52 \text{ m}^2$.

Παράδειγμα 1.3.4 — Με αφαίρεση

Ένας κήπος σχήματος τετραγώνου με πλευρά 20 m έχει στο κέντρο του τετράγωνη πισίνα πλευράς 6 m. Πόσο είναι το εμβαδόν του γκαζόν γύρω από την πισίνα;

**ΛΥΣΗ**

Αφαιρούμε: $20^2 - 6^2 = 400 - 36 = 364 \text{ m}^2$.

⊗ Συχνό λάθος**× Λάθος**

Εμβαδόν τριγώνου: $E = \beta \cdot v$

✓ Σωστό

$$E = \frac{\beta \cdot v}{2}$$

Μην ξεχνάς το «μισό» στο τρίγωνο (και στο τραπέζιο, και στον ρόμβο)!

⊗ Συχνό λάθος

× Λάθος

Τραπεζίο με βάσεις 10, 6 και πλάγια πλευρά 5:

$$E = \frac{(10+6) \cdot 5}{2}$$

✓ Σωστό

Χρειάζεται το **ύψος**, όχι η πλάγια πλευρά

Η πλάγια πλευρά είναι μεγαλύτερη από το ύψος (εκτός αν το τραπέζιο είναι ορθογώνιο).



Θέλεις να δεις αυτό το μάθημα και σε **βίντεο**, βήμα-βήμα; Στο **mathgreece.com** θα βρεις ολοκληρωμένο, **δωρεάν** φροντιστήριο για όλη την ύλη της Β' Γυμνασίου.

www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να βρεις το εμβαδόν: α) ορθογωνίου $12 \text{ cm} \times 7,5 \text{ cm}$ β) τετραγώνου πλευράς $2,4 \text{ m}$ γ) τριγώνου με βάση 9 cm και ύψος 6 cm .
- 2 Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 96 cm^2 και μήκος 12 cm . Να βρεις την περίμετρό του.
- 3 Ένα παραλληλόγραμμο έχει πλευρές 10 cm και 6 cm . Το ύψος προς τη μεγάλη πλευρά είναι $4,8 \text{ cm}$. Να βρεις το εμβαδόν και το ύψος προς τη μικρή πλευρά.
- 4 Ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές 8 cm και 15 cm και υποτείνουσα 17 cm . Να βρεις το εμβαδόν και το ύψος προς την υποτείνουσα.
- 5 Ένα τραπέζιο έχει βάσεις 18 m και 12 m και ύψος 8 m . Να βρεις το εμβαδόν του.
- 6 Ένας ρόμβος έχει διαγωνίους 16 cm και 12 cm . Να βρεις το εμβαδόν του.
- 7 Ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο έχουν ίδιο εμβαδόν. Το ορθογώνιο έχει διαστάσεις 25 cm και 16 cm . Πόση είναι η πλευρά του τετραγώνου;
- 8 Ένα σχήμα «Γ» αποτελείται από ορθογώνιο 10×2 και από ορθογώνιο 2×6 που ακουμπά στη μία άκρη του (σε cm). Να βρεις το εμβαδόν του.
- 9 Αν διπλασιάσουμε τη βάση ενός τριγώνου και κρατήσουμε το ίδιο ύψος, τι γίνεται το εμβαδόν; Αν διπλασιάσουμε και τη βάση και το ύψος;
- 10 Ένα χωράφι σχήματος τραπέζιου έχει βάσεις 120 m και 80 m και απόσταση βάσεων 60 m . Πόσα στρέμματα είναι;

ΜΑΘΗΜΑ

1.4

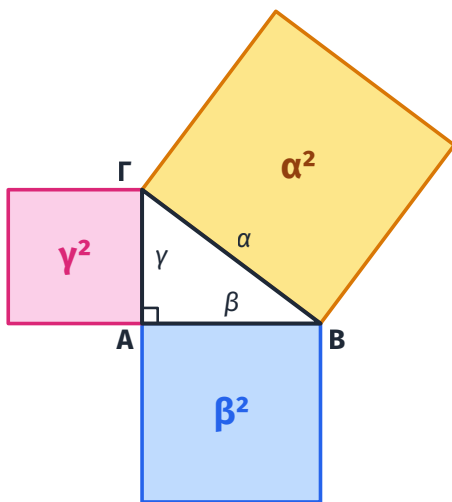
Πυθαγόρειο θεώρημα

Ένα από τα πιο διάσημα θεωρήματα όλων των εποχών: συνδέει τις τρεις πλευρές κάθε ορθογωνίου τριγώνου. Θα το αποδείξουμε με εμβάδα, θα δούμε το αντίστροφό του και θα το εφαρμόσουμε σε πολλά προβλήματα.

 Το θεώρημα

 Θυμάμαι

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, η πλευρά απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται **υποτείνουσα** και είναι η μεγαλύτερη πλευρά. Οι δύο άλλες λέγονται **κάθετες πλευρές**.



☆ Πυθαγόρειο θεώρημα

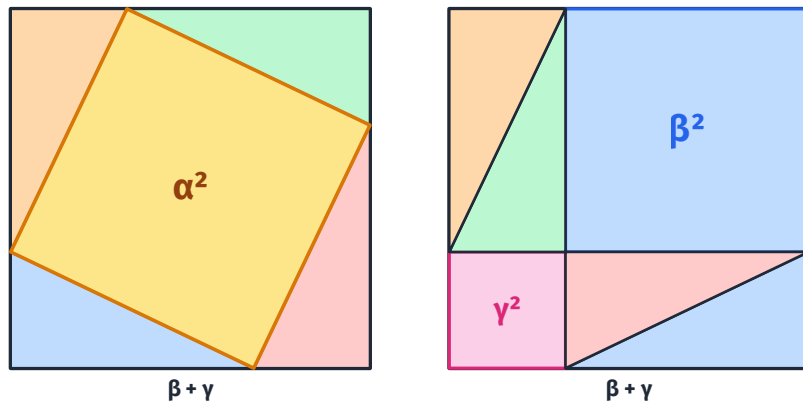
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το **τετράγωνο της υποτείνουσας** είναι ίσο με το **άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών**.

$$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Το εμβαδόν του κίτρινου τετραγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων

Για το τρίγωνο του σχήματος με κάθετες 3 και 4: $\alpha^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, άρα $\alpha = 5$.

Μια απόδειξη με εμβαδά



Δύο ίσα τετράγωνα πλευράς $\beta + \gamma$. Αν αφαιρέσουμε και από τα δύο τα 4 ίσα χρωματιστά τρίγωνα, μένει αριστερά το α^2 και δεξιά τα $\beta^2 + \gamma^2$.

Και τα δύο μεγάλα τετράγωνα έχουν πλευρά $\beta + \gamma$, άρα ίσα εμβαδά. Περιέχουν και τα δύο **τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα**. Αυτό που απομένει πρέπει επομένως να είναι ίσο: αριστερά το τετράγωνο α^2 , δεξιά τα τετράγωνα β^2 και γ^2 . Έτσι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

Υπολογισμός πλευράς

☆ Οι τρεις μορφές του θεωρήματος

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \quad \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

Για την **υποτείνουσα** προσθέτουμε· για μια **κάθετη** αφαιρούμε (από το τετράγωνο της υποτείνουσας).

Παράδειγμα 1.4.1

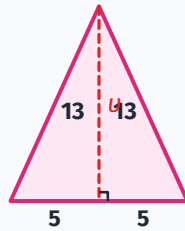
Ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα 13 cm και μία κάθετη πλευρά 5 cm. Να βρεθούν η άλλη κάθετη και το εμβαδόν του.

ΛΥΣΗ

$$\beta^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow \beta = 12 \text{ cm. Εμβαδόν: } \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ cm}^2.$$

Παράδειγμα 1.4.2

Να βρεθεί το ύψος ισοσκελούς τριγώνου με βάση 10 cm και ίσες πλευρές 13 cm.

**ΛΥΣΗ**

Το ύψος προς τη βάση είναι και διάμεσος, άρα τη χωρίζει σε 5 + 5. Από το ορθογώνιο τρίγωνο: $v^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow v = 12$ cm.

⊗ Συχνό λάθος**× Λάθος**

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ με β την υποτείνουσα

✓ Σωστό

Το α στον τύπο είναι **πάντα η υποτείνουσα**

Πριν εφαρμόσεις το θεώρημα, βρες ποια πλευρά είναι απέναντι από την ορθή γωνία. Σε ένα τρίγωνο ΔΕΖ με $\hat{E} = 90^\circ$, γράφουμε $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + EZ^2$.

⊗ Συχνό λάθος**× Λάθος**

$\beta = \sqrt{13^2 + 5^2}$ για κάθετη

✓ Σωστό

$\beta = \sqrt{13^2 - 5^2}$

Η κάθετη είναι μικρότερη από την υποτείνουσα, άρα πρέπει να αφαιρέσουμε. Αν βρεις κάθετη μεγαλύτερη από την υποτείνουσα, κάτι πήγε λάθος!

📖 Το αντίστροφο θεώρημα**☆ Αντίστροφο του Πυθαγορείου**

Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της **μεγαλύτερης** πλευράς ισούται με το άθροισμα των τετράγωνων των δύο άλλων, τότε το τρίγωνο είναι **ορθογώνιο** (και η ορθή γωνία βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά).

Παράδειγμα 1.4.3

Να εξεταστεί αν είναι ορθογώνια τα τρίγωνα με πλευρές: α) 8, 15, 17 β) 6, 9, 11.

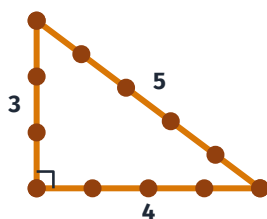
ΛΥΣΗ

α) $17^2 = 289$ και $8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$: ίσα, άρα **ορθογώνιο**.

β) $11^2 = 121$ και $6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117$: διαφορετικά, άρα **δεν** είναι ορθογώνιο.

🏛️ Λίγη ιστορία

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι «αρπεδονάπτες» (σχοινοτεντωτές) χρησιμοποιούσαν ένα σχοινί με 12 ίσα διαστήματα, δεμένο σε τρίγωνο με πλευρές 3, 4, 5, για να χαράζουν ορθές γωνίες στα χωράφια μετά τις πλημμύρες του Νείλου. Το θεώρημα φέρει το όνομα του **Πυθαγόρα από τη Σάμο** (6ος αι. π.Χ.), αν και ήταν γνωστό, σε ειδικές περιπτώσεις, και στους Βαβυλώνιους.



Το «σχοινί των 12 κόμπων» σχηματίζει ορθογώνιο τρίγωνο 3–4–5

📖 Πυθαγόρειες τριάδες

Τριάδες φυσικών αριθμών (β, γ, α) με $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ λέγονται **Πυθαγόρειες τριάδες**. Αξίζει να θυμάσαι τις πιο συνηθισμένες:

Τριάδα	3, 4, 5	5, 12, 13	8, 15, 17	7, 24, 25	20, 21, 29
Πολλαπλάσια	6, 8, 10 · 9, 12, 15	10, 24, 26	16, 30, 34	14, 48, 50	—

💡 Κόλπο που κερδίζει χρόνο

Αν πολλαπλασιάσεις μια Πυθαγόρεια τριάδα με τον ίδιο αριθμό, παίρνεις πάλι Πυθαγόρεια τριάδα. Έτσι, αν δεις κάθετες 30 και 40, ξέρεις αμέσως ότι η υποτείνουσα είναι 50 ($= 10 \times 5$).

📖 Εφαρμογές

Παράδειγμα 1.4.4

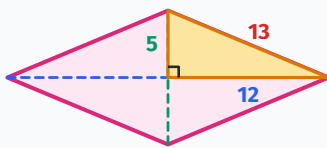
Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές 9 m και 12 m. Πόσο είναι η διαγώνιός του;

ΛΥΣΗ

$$\delta^2 = 81 + 144 = 225 \Rightarrow \delta = 15 \text{ m.}$$

Παράδειγμα 1.4.5

Ένας ρόμβος έχει διαγωνίους 24 cm και 10 cm. Να βρεθεί η πλευρά και η περίμετρός του.



ΛΥΣΗ

Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται. Σχηματίζονται ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες 12 και 5: $\alpha^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow \alpha = 13$ cm. Περίμετρος $4 \cdot 13 = 52$ cm.

Παράδειγμα 1.4.6

Ένα πλοίο ταξιδεύει 30 ναυτικά μίλια προς βορρά και μετά 40 μίλια προς ανατολή. Πόσο απέχει από το σημείο αναχώρησης;

ΛΥΣΗ

Οι δύο διαδρομές είναι κάθετες: $d = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50$ μίλια.

Παράδειγμα 1.4.7

Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά 6 cm. Να βρεθεί το ύψος και το εμβαδόν του.

ΛΥΣΗ

$$v^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \Rightarrow v = \sqrt{27} \approx 5,2 \text{ cm. } E = \frac{6 \cdot \sqrt{27}}{2} = 3\sqrt{27} \approx 15,6 \text{ cm}^2.$$



Για περισσότερες λυμένες ασκήσεις, **κουίζ αυτοαξιολόγησης** και σημειώσεις, μπες στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών.

www.mathgreece.com

✎ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να βρεις την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες: α) 6 και 8 β) 12 και 16 γ) 1 και 2.
- 2 Ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα 25 cm και μία κάθετη 7 cm. Να βρεις την άλλη κάθετη, την περίμετρο και το εμβαδόν.
- 3 Ποια από τα τρίγωνα με πλευρές α) 9, 12, 15 β) 10, 11, 15 γ) 12, 35, 37 δ) 5, 5, 7 είναι ορθογώνια;
- 4 Μια σκάλα μήκους 6,5 m ακουμπά σε τοίχο σε ύψος 6 m. Πόσο απέχει η βάση της από τον τοίχο;
- 5 Ένα τετράγωνο έχει διαγώνιο 8 cm. Να βρεις το εμβαδόν του.

- 6** Ισοσκελές τρίγωνο έχει ίσες πλευρές 17 cm και βάση 16 cm. Να βρεις το εμβαδόν του.
- 7** Ένα ορθογώνιο τραπέζιο έχει βάσεις 14 cm και 8 cm και ύψος 8 cm. Να βρεις τη μη κάθετη πλευρά του.
- 8** Οι διαγώνιοι ενός ρόμβου είναι 16 cm και 30 cm. Να βρεις την περίμετρο και το εμβαδόν του.
- 9** Μια τηλεόραση έχει οθόνη 80 cm × 60 cm. Πόσες ίντσες είναι η διαγώνιος; (1 ίντσα $\approx$ 2,54 cm)
- 10** Από ένα σημείο A ξεκινά ποδηλάτης και διανύει 5 km ανατολικά, 3 km βόρεια και άλλα 7 km ανατολικά. Πόσο απέχει από το A;

ΚΕΦ.

1

Σε μια ματιά — Ανακεφαλαίωση Κεφαλαίου 10

Πριν προχωρήσεις στο επόμενο κεφάλαιο ή πριν από το διαγώνισμα, έλεγξε ότι θυμάσαι όλα τα παρακάτω. Αν κάτι δεν σου είναι ξεκάθαρο, γύρνα στο αντίστοιχο μάθημα.

Έννοια	Τι πρέπει να θυμάμαι
Μονάδες επιφάνειας	$\times 100$ ανά βαθμίδα· $1 \text{ m}^2 = 10.000 \text{ cm}^2$ · $1 \text{ στρέμμα} = 1.000 \text{ m}^2$
Ορθογώνιο / Τετράγωνο	$\alpha\beta / \alpha^2$
Παραλληλόγραμμο	$\beta \cdot v$
Τρίγωνο	$\frac{\beta \cdot v}{2}$
Τραπεζίο	$\frac{(B + \beta)v}{2}$
Ρόμβος	$\frac{\delta_1 \delta_2}{2}$
Πυθαγόρειο	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ (α = υποτείνουσα) — και το αντίστροφο

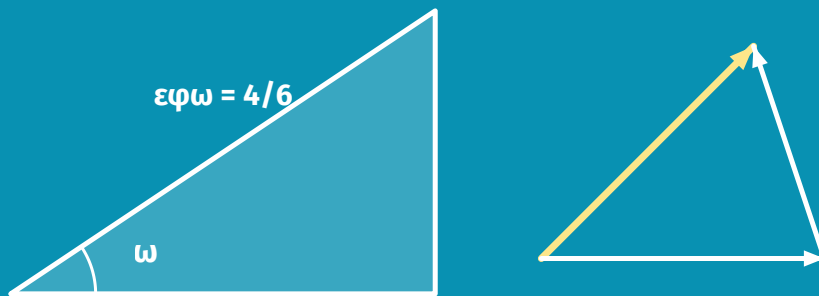


Πριν από το διαγώνισμα του κεφαλαίου, λύσε τα **επαναληπτικά κουίζ** και δες τα βιντεομαθήματα στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο.
www.mathgreece.com

2

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο

Τριγωνομετρία – Διανύσματα



Η Τριγωνομετρία μας επιτρέπει να μετράμε αποστάσεις και ύψη που δεν μπορούμε να φτάσουμε: το ύψος ενός βουνού, το πλάτος ενός ποταμού, την κλίση ενός δρόμου. Στη συνέχεια γνωρίζουμε τα διανύσματα, που περιγράφουν μεγέθη με κατεύθυνση, όπως η δύναμη και η ταχύτητα.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 2.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας
- 2.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας
- 2.3 Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης
- 2.4 Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° και 60°
- 2.5 Η έννοια του διανύσματος
- 2.6 Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων
- 2.7 Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

ΜΑΘΗΜΑ

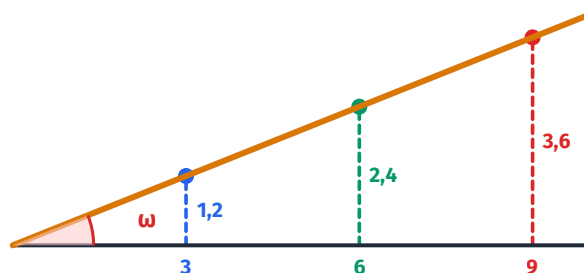
2.1

Εφαπτομένη οξείας γωνίας

Πόσο «απότομος» είναι ένας δρόμος; Πόσο ψηλό είναι ένα δέντρο, αν ξέρουμε μόνο πόσο απέχουμε από αυτό και υπό ποια γωνία βλέπουμε την κορυφή του; Η Τριγωνομετρία απαντά — και ξεκινάμε με την εφαπτομένη.

Η κλίση ενός δρόμου

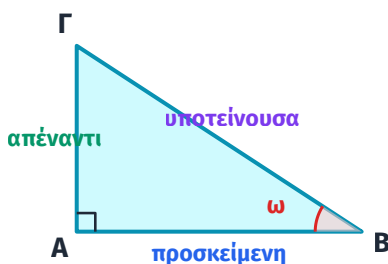
Μια πινακίδα γράφει «κλίση 10%». Αυτό σημαίνει ότι για κάθε 100 m οριζόντιας απόστασης ο δρόμος ανεβαίνει 10 m. Η κλίση είναι δηλαδή ένας **λόγος**: κατακόρυφη ανύψωση προς οριζόντια απόσταση.



$$\frac{1,2}{3} = \frac{2,4}{6} = \frac{3,6}{9} = 0,4: \text{ ο λόγος είναι ο ίδιος σε όποιο σημείο κι αν μετρήσουμε.}$$

Όσο κι αν προχωρήσουμε στον δρόμο, ο λόγος «ύψος προς οριζόντια απόσταση» μένει ίδιος, γιατί τα τρίγωνα που σχηματίζονται είναι **όμοια**. Ο λόγος αυτός εξαρτάται **μόνο από τη γωνία** ω και όχι από το μέγεθος του τριγώνου.

Ορισμός



Ορισμός · Εφαπτομένη

Σε ορθογώνιο τρίγωνο, **εφαπτομένη** μιας οξείας γωνίας ω λέγεται ο λόγος της **απέναντι** κάθετης πλευράς προς την **προσκειμένη** κάθετη πλευρά:

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκειμένη κάθετη}}$$

$$\text{Στο σχήμα: } \epsilon\phi\hat{B} = \frac{AG}{AB}.$$

Προσοχή!

Οι λέξεις «απέναντι» και «προσκειμένη» αλλάζουν ανάλογα με τη γωνία που εξετάζουμε! Για τη γωνία $\hat{B}$ η AG είναι απέναντι, ενώ για τη γωνία $\hat{A}$ η AG είναι προσκειμένη. Γι' αυτό $\epsilon\phi\hat{A} = \frac{AB}{AG}$ — ο αντίστροφος αριθμός.

Η εφαπτομένη και η κλίση ευθείας

Αν μια ευθεία $y = ax$ σχηματίζει γωνία ω με τον άξονα $x'x$, τότε για $x = 1$ ανεβαίνει κατά a . Άρα $\epsilon\varphi\omega = \frac{a}{1} = a$: η **κλίση** μιας ευθείας είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

Πίνακας τιμών – Κομπιουτεράκι

Οι τιμές της εφαπτομένης έχουν υπολογιστεί για κάθε γωνία. Στο κομπιουτεράκι (σε λειτουργία **DEG**) πατάμε το πλήκτρο **tan**. Μερικές τιμές:

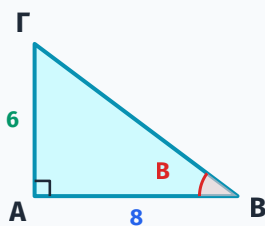
ω	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	70°	80°
$\epsilon\varphi\omega$	0,176	0,364	0,577	0,839	1,000	1,192	1,732	2,747	5,671

Αντίστροφα, αν γνωρίζουμε την εφαπτομένη, βρίσκουμε τη γωνία από τον πίνακα ή με τα πλήκτρα **SHIFT tan** ($\tan^{-1}$). Π.χ. αν $\epsilon\varphi\omega = 1$, τότε $\omega = 45^\circ$.

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 2.1.1

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $AB = 8$ cm και $A\Gamma = 6$ cm. Να βρεθούν οι $\epsilon\varphi\hat{B}$ και $\epsilon\varphi\hat{\Gamma}$.



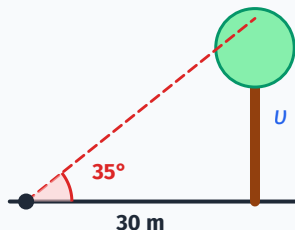
ΛΥΣΗ

$$\epsilon\varphi\hat{B} = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{6}{8} = 0,75 \text{ και } \epsilon\varphi\hat{\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{8}{6} \approx 1,33.$$

Παρατήρησε ότι $\epsilon\varphi\hat{B} \cdot \epsilon\varphi\hat{\Gamma} = 1$. Αυτό ισχύει πάντα για τις δύο οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου.

Παράδειγμα 2.1.2 — Γωνία ανύψωσης

Από απόσταση 30 m από τη βάση ενός δέντρου, βλέπουμε την κορυφή του υπό γωνία 35° . Πόσο ψηλό είναι το δέντρο; ($\epsilon\phi 35^\circ \approx 0,700$)

**ΛΥΣΗ**

Από το ορθογώνιο τρίγωνο: $\epsilon\phi 35^\circ = \frac{v}{30} \Rightarrow v = 30 \cdot \epsilon\phi 35^\circ \approx 30 \cdot 0,7 = 21 \text{ m.}$

Παράδειγμα 2.1.3

Μια ράμπα για αμαξίδια πρέπει να έχει κλίση το πολύ 8%. Ποια είναι η μέγιστη γωνία της με το έδαφος; Πόσο μήκος οριζόντιας απόστασης χρειάζεται για να ανέβει 0,6 m;

ΛΥΣΗ

$\epsilon\phi \omega = 0,08$. Από κομπιουτεράκι: $\omega \approx 4,6^\circ$. Για ανύψωση 0,6 m: $\frac{0,6}{x} = 0,08 \Rightarrow x = 7,5 \text{ m.}$

Παράδειγμα 2.1.4

Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $y = 2x$ με τον άξονα $x'x$.

ΛΥΣΗ

$\epsilon\phi \omega = 2 \Rightarrow \omega \approx 63,4^\circ$ (με SHIFT tan).

⊗ Συχνό λάθος**× Λάθος**

$$\epsilon\phi \hat{B} = \frac{\text{προσκειμένη}}{\text{απέναντι}}$$

✓ Σωστό

$$\epsilon\phi \hat{B} = \frac{\text{απέναντι}}{\text{προσκειμένη}}$$

Ένα μνημονικό: «η Εφαπτομένη Είναι απέναντι Επί προσκειμένη» — με την απέναντι στον αριθμητή.

⊗ Συχνό λάθος**× Λάθος**

Το κομπιουτεράκι δίνει $\tan(45) = 1,62$

✓ Σωστό

Σε λειτουργία DEG: $\tan(45) = 1$

Αν το κομπιουτεράκι είναι σε RAD ή GRAD, οι τιμές είναι λάθος. Έλεγξε ότι στην οθόνη φαίνεται D ή DEG.



Κόλλησες κάπου; Στο **mathgreece.com** υπάρχουν βιντεομαθήματα, podcasts και παιχνίδια γνώσεων για κάθε ενότητα — όλα δωρεάν.
www.mathgreece.com

✎ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $AB = 12$ και $A\Gamma = 5$. Να βρεις $\epsilon\phi\hat{B}$ και $\epsilon\phi\hat{\Gamma}$.
- 2 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $AB = 20$ cm και $\epsilon\phi\hat{B} = 0,35$. Να βρεις την $A\Gamma$.
- 3 Μια σκάλα βλέπει την κορυφή ενός κτιρίου υπό γωνία 50° από απόσταση 24 m. Πόσο ψηλό είναι το κτίριο; ($\epsilon\phi 50^\circ \approx 1,192$)
- 4 Ένας δρόμος έχει κλίση 15%. Πόσα μέτρα ανεβαίνει ένα αυτοκίνητο για οριζόντια μετατόπιση 400 m; Ποια γωνία σχηματίζει ο δρόμος με το οριζόντιο επίπεδο;
- 5 Να βρεις τη γωνία ω (με κομπιουτεράκι) αν: α) $\epsilon\phi\omega = 0,5$ β) $\epsilon\phi\omega = 3$ γ) $\epsilon\phi\omega = 1$.
- 6 Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις 15 cm και 8 cm. Ποια γωνία σχηματίζει η διαγώνιος με τη μεγάλη πλευρά;
- 7 Η σκιά ενός στύλου ύψους 6 m έχει μήκος 4 m. Υπό ποια γωνία πέφτουν οι ακτίνες του ήλιου;
- 8 Να βρεις την κλίση της ευθείας που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 30° και να γράψεις την εξίσωσή της αν περνά από την αρχή των αξόνων.

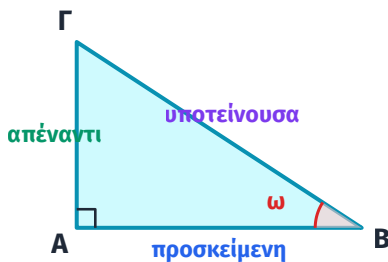
ΜΑΘΗΜΑ

2.2

Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

Η εφαπτομένη συνδέει τις δύο κάθετες πλευρές. Τι γίνεται όμως όταν στο πρόβλημα εμφανίζεται η υποτείνουσα — π.χ. το μήκος μιας σκάλας ή ενός σχοινιού; Τότε χρειαζόμαστε το ημίτονο και το συνημίτονο.

Ορισμοί



Ορισμός · Ημίτονο και συνημίτονο

Σε ορθογώνιο τρίγωνο, για μια οξεία γωνία ω :

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\text{Στο σχήμα: } \eta\mu\hat{B} = \frac{AG}{BG}, ; \sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{AB}{BG}.$$

Όπως και η εφαπτομένη, το ημίτονο και το συνημίτονο εξαρτώνται **μόνο από τη γωνία**, όχι από το μέγεθος του τριγώνου.

☆ Σημαντικές ιδιότητες

- Επειδή η υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη πλευρά: $0 < \eta\mu\omega < 1$ και $0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1$.
- Για τις δύο οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου: $\eta\mu\hat{B} = \sigma\upsilon\nu\hat{G}$ και $\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \eta\mu\hat{G}$ (αφού η απέναντι της μιας είναι η προσκειμένη της άλλης).
- $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$.
- $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ (από το Πυθαγόρειο θεώρημα).

💡 Μνημονικός κανόνας

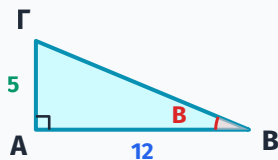
Ένα παλιό μνημονικό: **Η-Α-Υ, Σ-Π-Υ, Ε-Α-Π**: **Η**μίτονο = **Α**πέναντι/**Υ**ποτείνουσα, **Σ**υνημίτονο = **Π**ροσκειμένη/**Υ**ποτείνουσα, **Ε**φαπτομένη = **Α**πέναντι/**Π**ροσκειμένη.

Ποιον λόγο να χρησιμοποιήσω;

Ξέρω / ζητώ	Χρησιμοποιώ
απέναντι και υποτείνουσα	$\eta\mu\omega$
προσκειμένη και υποτείνουσα	$\sigma\upsilon\nu\omega$
απέναντι και προσκειμένη	$\epsilon\phi\omega$

Παράδειγμα 2.2.1

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $AB = 12$, $A\Gamma = 5$. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\hat{B}$.



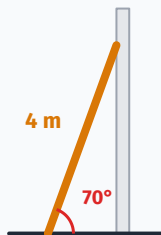
ΛΥΣΗ

Υποτείνουσα: $B\Gamma = \sqrt{144 + 25} = 13$.

$$\eta\mu\hat{B} = \frac{5}{13} \approx 0,385 \quad \sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{12}{13} \approx 0,923 \quad \epsilon\varphi\hat{B} = \frac{5}{12} \approx 0,417$$

Παράδειγμα 2.2.2

Μια σκάλα μήκους 4 m ακουμπά σε τοίχο σχηματίζοντας με το έδαφος γωνία 70° . Σε τι ύψος φτάνει και πόσο απέχει η βάση της από τον τοίχο; ($\eta\mu 70^\circ \approx 0,940$, $\sigma\upsilon\nu 70^\circ \approx 0,342$)



ΛΥΣΗ

Ύψος (απέναντι): $v = 4 \cdot \eta\mu 70^\circ \approx 3,76$ m. Απόσταση (προσκεείμενη): $d = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu 70^\circ \approx 1,37$ m.

Παράδειγμα 2.2.3

Ένας χαρταετός είναι δεμένος με σπάγκο 60 m που σχηματίζει γωνία 40° με το έδαφος. Σε τι ύψος βρίσκεται; ($\eta\mu 40^\circ \approx 0,643$)

ΛΥΣΗ

$v = 60 \cdot \eta\mu 40^\circ \approx 38,6$ m (συν το ύψος του χεριού του παιδιού!).

Παράδειγμα 2.2.4

Αν $\eta\mu\omega = 0,6$, να βρεθούν $\sigma\upsilon\nu\omega$ και $\epsilon\varphi\omega$.

ΛΥΣΗ

Φτιάχνουμε ορθογώνιο τρίγωνο με απέναντι 3 και υποτείνουσα 5 (αφού $\frac{3}{5} = 0,6$). Η προσκείμενη:
 $\sqrt{25 - 9} = 4$.

$$\text{συν}\omega = \frac{4}{5} = 0,8, ; \text{εφ}\omega = \frac{3}{4} = 0,75.$$

⊗ Συχνό λάθος

× Λάθος

$$\eta\mu\omega = 1,2$$

✓ Σωστό

Αδύνατο: $0 < \eta\mu\omega < 1$ για οξεία γωνία

Αν βρεις ημίτονο ή συνημίτονο μεγαλύτερο από 1, έχεις βάλει λάθος πλευρά στον παρονομαστή (πρέπει να είναι η υποτείνουσα).

⊗ Συχνό λάθος

× Λάθος

$$\eta\mu\hat{B} = \frac{A\Gamma}{AB}$$

✓ Σωστό

$$\eta\mu\hat{B} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$

Ο παρονομαστής στο ημίτονο και στο συνημίτονο είναι **πάντα η υποτείνουσα**.



Εξάσκηση χωρίς τέλος: στο **mathgreece.com** θα βρεις επιπλέον φυλλάδια ασκήσεων και διαγωνίσματα για τη Β' Γυμνασίου, εντελώς **δωρεάν**.

www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $AB = 8$, $B\Gamma = 17$. Να βρεις $A\Gamma$ και όλους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της $\hat{B}$.
- 2 Σε ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα είναι 20 cm και μία οξεία γωνία 30° . Να βρεις τις κάθετες πλευρές. ($\eta\mu 30^\circ = 0,5$, $\text{συν} 30^\circ \approx 0,866$)
- 3 Ένα αεροπλάνο απογειώνεται με γωνία 15° και διανύει 2.000 m σε ευθεία. Σε τι ύψος βρίσκεται; ($\eta\mu 15^\circ \approx 0,259$)
- 4 Αν $\text{συν}\omega = \frac{5}{13}$, να βρεις $\eta\mu\omega$ και $\text{εφ}\omega$.
- 5 Μια ράμπα μήκους 5 m ανεβαίνει σε ύψος 1 m. Να βρεις τη γωνία της με το έδαφος.
- 6 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $\eta\mu\hat{B} = 0,8$. Πόσο είναι το $\text{συν}\hat{\Gamma}$;
- 7 Να ελέγξεις ότι $\eta\mu^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1$ για το τρίγωνο με πλευρές 7, 24, 25.
- 8 Ποιο είναι μεγαλύτερο: το $\eta\mu\omega$ ή η $\text{εφ}\omega$, για μια οξεία γωνία; Να εξηγήσεις.

ΜΑΘΗΜΑ

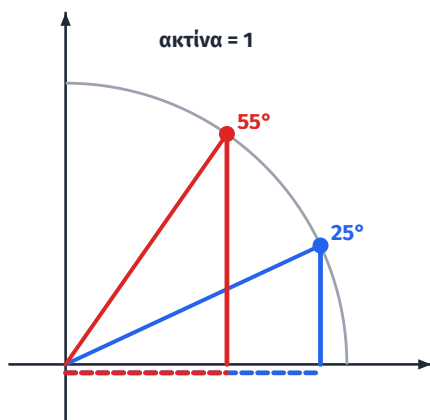
2.3

Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης

Τι συμβαίνει στους τριγωνομετρικούς αριθμούς όταν η γωνία μεγαλώνει; Η απάντηση γίνεται ολοφάνερη αν τοποθετήσουμε τις γωνίες μέσα σε έναν κύκλο με ακτίνα 1.

📖 Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. Για μια οξεία γωνία ω , φέρνουμε ακτίνα που σχηματίζει γωνία ω με τον άξονα $x'x$. Αν $M(x, y)$ είναι το άκρο της, τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται η υποτείνουσα είναι 1, οπότε:



☆ Στον κύκλο ακτίνας 1

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{1} = y$$

$$\sigma\upsilon\eta\omega = \frac{x}{1} = x$$

Το ημίτονο είναι το «ύψος» του σημείου M και το συνημίτονο η «οριζόντια απόσταση» του.

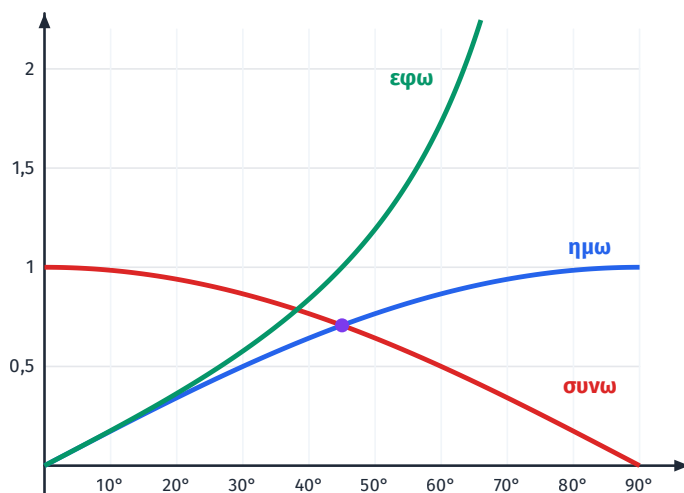
Συμπαγής γραμμή: ημίτονο · διακεκομμένη: συνημίτονο

📖 Πώς μεταβάλλονται

Από το σχήμα βλέπουμε ότι όσο η γωνία μεγαλώνει από 0° προς 90° , το σημείο M ανεβαίνει (το y μεγαλώνει) και πλησιάζει τον άξονα $y'y$ (το x μικραίνει).

☆ Μεταβολές για $0^\circ < \omega < 90^\circ$

- Όσο **αυξάνεται** η γωνία ω , το **ημίτονο αυξάνεται** (από 0 προς 1).
- Όσο **αυξάνεται** η γωνία ω , το **συνημίτονο μειώνεται** (από 1 προς 0).
- Όσο **αυξάνεται** η γωνία ω , η **εφαπτομένη αυξάνεται** (από 0 και γίνεται όσο μεγάλη θέλουμε).



Πώς αλλάζουν ημω (μπλε), συνω (κόκκινο) και εφω (πράσινο) για γωνίες από 0° έως 90°

Για τις «ακραίες» γωνίες ορίζουμε (συνεχίζοντας την ιδέα του κύκλου): $\eta\mu 0^\circ = 0$, $\sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1$, $\epsilon\phi 0^\circ = 0$, $\eta\mu 90^\circ = 1$, $\sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0$, ενώ η $\epsilon\phi 90^\circ$ **δεν ορίζεται**.

Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών

ω	$\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\epsilon\phi\omega$
5°	0,087	0,996	0,087
10°	0,174	0,985	0,176
15°	0,259	0,966	0,268
20°	0,342	0,940	0,364
25°	0,423	0,906	0,466
30°	0,500	0,866	0,577
35°	0,574	0,819	0,700
40°	0,643	0,766	0,839
45°	0,707	0,707	1,000
50°	0,766	0,643	1,192
55°	0,819	0,574	1,428
60°	0,866	0,500	1,732
65°	0,906	0,423	2,145
70°	0,940	0,342	2,747
75°	0,966	0,259	3,732
80°	0,985	0,174	5,671
85°	0,996	0,087	11,430

⚠ Προσοχή!

Παρατήρησε στον πίνακα: $\eta\mu 20^\circ = \sigma\upsilon\nu 70^\circ$, $\eta\mu 35^\circ = \sigma\upsilon\nu 55^\circ$... Γενικά $\eta\mu \omega = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega)$, αφού οι γωνίες ω και $90^\circ - \omega$ είναι οι δύο οξείες γωνίες του ίδιου ορθογωνίου τριγώνου.

📖 Λυμένα παραδείγματα**Παράδειγμα 2.3.1**

Χωρίς κομπιουτεράκι, να συγκριθούν: α) $\eta\mu 40^\circ$ και $\eta\mu 65^\circ$ β) $\sigma\upsilon\nu 25^\circ$ και $\sigma\upsilon\nu 50^\circ$ γ) $\epsilon\phi 70^\circ$ και $\epsilon\phi 30^\circ$.

ΛΥΣΗ

α) $\eta\mu 40^\circ < \eta\mu 65^\circ$ (το ημίτονο αυξάνεται). β) $\sigma\upsilon\nu 25^\circ > \sigma\upsilon\nu 50^\circ$ (το συνημίτονο μειώνεται). γ) $\epsilon\phi 70^\circ > \epsilon\phi 30^\circ$.

Παράδειγμα 2.3.2

Να βρεθεί η οξεία γωνία ω αν: α) $\eta\mu \omega = 0,5$ β) $\sigma\upsilon\nu \omega = 0,940$ γ) $\epsilon\phi \omega = 2,747$.

ΛΥΣΗ

Από τον πίνακα (ή SHIFT sin / cos / tan): α) $\omega = 30^\circ$ β) $\omega = 20^\circ$ γ) $\omega = 70^\circ$.

Παράδειγμα 2.3.3

Να εξηγηθεί γιατί δεν υπάρχει οξεία γωνία με $\eta\mu \omega = 0,8$ και $\sigma\upsilon\nu \omega = 0,8$.

ΛΥΣΗ

Θα έπρεπε $\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 0,64 + 0,64 = 1,28 \neq 1$. Άρα αδύνατο. (Πράγματι, $\eta\mu \omega = \sigma\upsilon\nu \omega$ μόνο για $\omega = 45^\circ$, όπου η κοινή τιμή είναι $\approx 0,707$.)

⊗ Συχνό λάθος**× Λάθος**

«Αφού $\eta\mu 30^\circ = 0,5$, τότε $\eta\mu 60^\circ = 1$ »

✓ Σωστό

$\eta\mu 60^\circ \approx 0,866$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί **δεν** είναι ανάλογοι της γωνίας. Ο διπλασιασμός της γωνίας δεν διπλασιάζει το ημίτονο.



Θέλεις να ελέγξεις αν το κατάλαβες; Λύσε τα **διαδραστικά κουίζ** του μαθήματος στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν ψηφιακό φροντιστήριο.
www.mathgreece.com

 Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να συγκρίνεις (χωρίς πίνακα): α) $\eta\mu 12^\circ$ και $\eta\mu 21^\circ$ β) $\sigma\upsilon\nu 80^\circ$ και $\sigma\upsilon\nu 8^\circ$ γ) $\epsilon\phi 44^\circ$ και $\epsilon\phi 46^\circ$ δ) $\eta\mu 30^\circ$ και $\sigma\upsilon\nu 30^\circ$.
- 2 Να διατάξεις από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο: $\eta\mu 50^\circ$, $\eta\mu 10^\circ$, $\eta\mu 80^\circ$, $\eta\mu 35^\circ$.
- 3 Να βρεις τις οξείες γωνίες με: α) $\eta\mu \omega = 0,342$ β) $\sigma\upsilon\nu \omega = 0,5$ γ) $\epsilon\phi \omega = 1,192$.
- 4 Αν $\eta\mu \omega = \sigma\upsilon\nu 32^\circ$, να βρεις την οξεία γωνία ω .
- 5 Μπορεί να ισχύει $\sigma\upsilon\nu \omega = 1,05$; Και $\epsilon\phi \omega = 5$; Να εξηγήσεις.
- 6 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Ποια κάθετη πλευρά είναι μεγαλύτερη; Να το εξηγήσεις με ημίτονα.

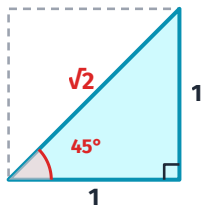
ΜΑΘΗΜΑ
2.4

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30°, 45° και 60°

Για τρεις «ειδικές» γωνίες μπορούμε να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ακριβώς, χωρίς κομπιουτεράκι, χρησιμοποιώντας ένα τετράγωνο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Αυτές οι τιμές πρέπει να είναι πάντα «στις άκρες των δαχτύλων» σου.

Η γωνία 45°: από το τετράγωνο

Παίρνουμε τετράγωνο πλευράς 1 και φέρνουμε μια διαγώνιό του. Σχηματίζεται ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο με οξείες γωνίες 45° και υποτείνουσα $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.



$$\eta\mu 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

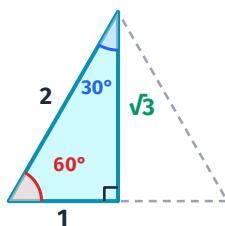
$$\sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\epsilon\varphi 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

(Πολλαπλασιάσαμε αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt{2}$: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$.)

Οι γωνίες 30° και 60°: από το ισόπλευρο τρίγωνο

Παίρνουμε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2. Όλες οι γωνίες του είναι 60°. Το ύψος του το χωρίζει σε δύο ορθογώνια τρίγωνα με γωνίες 30°, 60°, 90°, υποτείνουσα 2, μικρή κάθετη 1 και ύψος $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.



$$\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon\varphi 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon\varphi 60^\circ = \sqrt{3}$$

Ο πίνακας που πρέπει να ξέρεις

Τριγωνομετρικοί αριθμοί των 30°, 45°, 60°

	30°	45°	60°
ημ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συν	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Πώς να το θυμάσαι

Για το ημίτονο, γράψε $\frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ για 30°, 45°, 60° (και $\sqrt{1} = 1$). Το συνημίτονο είναι η ίδια σειρά **ανάποδα**. Η εφαπτομένη είναι ημ/συν.

Προσοχή!

Η σημαντικότερη παρατήρηση για τις ασκήσεις: σε ορθογώνιο τρίγωνο με γωνία 30°, **η απέναντι κάθετη είναι το μισό της υποτείνουσας** (αφού $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$).

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 2.4.1

Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = 2\eta\mu 30^\circ + \epsilon\phi 45^\circ - 4\sigma\upsilon\nu^2 60^\circ$.

ΛΥΣΗ

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 1 - 1 = 1$$

Παράδειγμα 2.4.2

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $\hat{B} = 30^\circ$ και ΒΓ = 14 cm. Να βρεθούν οι κάθετες πλευρές και το εμβαδόν.

ΛΥΣΗ

$$ΑΓ = 14 \cdot \eta\mu 30^\circ = 7 \text{ cm και } ΑΒ = 14 \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ = 14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3} \approx 12,12 \text{ cm.}$$

$$Ε = \frac{7 \cdot 7\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{2} \approx 42,4 \text{ cm}^2.$$

Παράδειγμα 2.4.3

Ένας ήλιος βρίσκεται 60° πάνω από τον ορίζοντα. Ένας στύλος ρίχνει σκιά 3 m. Πόσο ψηλός είναι;

ΛΥΣΗ

$$\varepsilon\phi 60^\circ = \frac{v}{3} \Rightarrow v = 3\sqrt{3} \approx 5,2 \text{ m.}$$

Παράδειγμα 2.4.4

Ένα ορθογώνιο έχει διαγώνιο 10 cm που σχηματίζει γωνία 45° με μία πλευρά. Τι σχήμα είναι και πόσο το εμβαδόν του;

ΛΥΣΗ

Οι πλευρές είναι $10\sigma\upsilon\nu 45^\circ = 10\eta\mu 45^\circ = 5\sqrt{2}$: είναι **τετράγωνο**. $E = (5\sqrt{2})^2 = 50 \text{ cm}^2$.

⊗ Συχνό λάθος

× Λάθος

$$\eta\mu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

✓ Σωστό

$$\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Θυμήσου: η γωνία 30° είναι μικρή, άρα το ημίτονό της είναι το μικρότερο από τα τρία ($0,5 < 0,707 < 0,866$).



Θέλεις να δεις αυτό το μάθημα και σε **βίντεο**, βήμα-βήμα; Στο **mathgreece.com** θα βρεις ολοκληρωμένο, **δωρεάν** φροντιστήριο για όλη την ύλη της Β' Γυμνασίου.

www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να υπολογίσεις: α) $\eta\mu 30^\circ + \sigma\upsilon\nu 60^\circ$ β) $\varepsilon\phi 45^\circ - \eta\mu^2 45^\circ$ γ) $\varepsilon\phi 30^\circ \cdot \varepsilon\phi 60^\circ$ δ) $\eta\mu^2 60^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 60^\circ$
- 2 Σε ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα είναι 18 cm και μία γωνία 60°. Να βρεις τις κάθετες πλευρές.
- 3 Ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές 6 cm. Να βρεις την υποτείνουσα.
- 4 Να βρεις το ύψος ισόπλευρου τριγώνου πλευράς 10 cm.
- 5 Μια σκάλα 6 m σχηματίζει γωνία 60° με το έδαφος. Σε τι ύψος φτάνει;
- 6 Να βρεις την οξεία γωνία ω αν: α) $2\eta\mu\omega = 1$ β) $\varepsilon\phi\omega = \sqrt{3}$ γ) $\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\omega = 1$.
- 7 Να αποδείξεις ότι $\eta\mu 60^\circ = 2\eta\mu 30^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ$.

ΜΑΘΗΜΑ

2.5

Η έννοια του διανύσματος

Για να περιγράψουμε μια μετακίνηση ή μια δύναμη δεν αρκεί ένας αριθμός: χρειάζεται και κατεύθυνση. Τα διανύσματα είναι το μαθηματικό εργαλείο γι' αυτή τη δουλειά και θα τα συναντάς διαρκώς στη Φυσική.

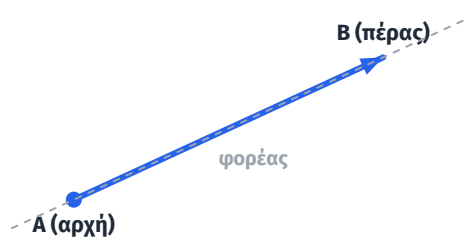
Μονόμετρα και διανυσματικά μεγέθη

Το «5 km» δεν φτάνει για να ξέρουμε πού θα βρεθούμε· το «5 km **βόρεια**» φτάνει. Μεγέθη όπως η μάζα, η θερμοκρασία ή ο χρόνος περιγράφονται πλήρως με έναν αριθμό και λέγονται **μονόμετρα**. Μεγέθη όπως η μετατόπιση, η ταχύτητα ή η δύναμη χρειάζονται και **κατεύθυνση** και λέγονται **διανυσματικά**.

Ορισμός και στοιχεία του διανύσματος

Ορισμός · Διάνυσμα

Ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται **διατεταγμένα** (το ένα είναι η αρχή και το άλλο το πέρας) λέγεται **διάνυσμα**. Το διάνυσμα με αρχή A και πέρας B συμβολίζεται $\vec{AB}$ και σχεδιάζεται με ένα βέλος στο πέρας.



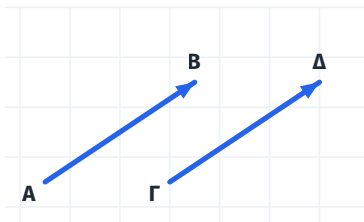
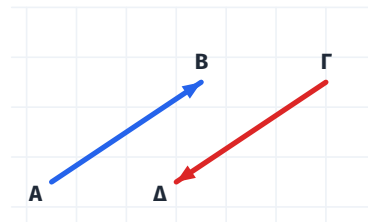
Το διάνυσμα $\vec{AB}$

☆ Τα στοιχεία ενός διανύσματος

- **Φορέας:** η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται.
- **Διεύθυνση:** ο φορέας του (ή οποιαδήποτε παράλληλη ευθεία). Διανύσματα με παράλληλους φορείς έχουν την ίδια διεύθυνση.
- **Φορά:** από την αρχή προς το πέρας (το «πού δείχνει» το βέλος).
- **Μέτρο:** το μήκος του τμήματος AB, συμβολίζεται $|\vec{AB}|$. Είναι πάντα θετικός αριθμός ή μηδέν.

Συχνά συμβολίζουμε τα διανύσματα και με ένα μικρό γράμμα: $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{u}$.

Ίσα και αντίθετα διανύσματα

Ίσα διανύσματα: $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$ Αντίθετα: $\vec{AB} = -\vec{\Gamma\Delta}$

Ορισμός · Ίσα διανύσματα

Δύο διανύσματα λέγονται **ίσα** όταν έχουν την **ίδια διεύθυνση**, την **ίδια φορά** και το **ίδιο μέτρο**. Ένα διάνυσμα μπορεί να «μετακινηθεί» παράλληλα οπουδήποτε στο επίπεδο χωρίς να αλλάξει.

Ορισμός · Αντίθετα διανύσματα

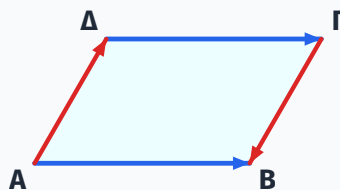
Δύο διανύσματα λέγονται **αντίθετα** όταν έχουν την **ίδια διεύθυνση** και το **ίδιο μέτρο**, αλλά **αντίθετη φορά**. Το αντίθετο του $\vec{a}$ συμβολίζεται $-\vec{a}$. Ειδικότερα $\vec{BA} = -\vec{AB}$.

Ένα διάνυσμα του οποίου η αρχή και το πέρας ταυτίζονται, όπως το $\vec{AA}$, λέγεται **μηδενικό διάνυσμα** ($\vec{0}$) και έχει μέτρο 0.

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 2.5.1

Στο παραλληλόγραμμο ABΓΔ να βρεθούν: α) ένα διάνυσμα ίσο με το $\vec{AB}$, β) ένα διάνυσμα αντίθετο του $\vec{AD}$, γ) αν ισχύει $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$.



ΛΥΣΗ

α) $\vec{\Delta\Gamma} = \vec{AB}$ (απέναντι πλευρές: ίσες, παράλληλες, ίδια φορά). β) $\vec{\Gamma B} = -\vec{AD}$. γ) **Όχι**: $\vec{\Gamma\Delta}$ έχει αντίθετη φορά, άρα $\vec{\Gamma\Delta} = -\vec{AB}$.

Παράδειγμα 2.5.2

Σε τετραγωνισμένο χαρτί (κάθε τετράγωνο 1 cm) το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ «πηγαίνει» 4 τετραγωνάκια δεξιά και 3 πάνω. Πόσο είναι το μέτρο του;

ΛΥΣΗ

Από το Πυθαγόρειο: $|\vec{\alpha}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$.

⊗ Συχνό λάθος

× Λάθος

$$\vec{AB} = \vec{BA}$$

✓ Σωστό

$$\vec{AB} = -\vec{BA} \text{ (ίσα μέτρα όμως: } |\vec{AB}| = |\vec{BA}| \text{)}$$

Για τα ευθύγραμμα τμήματα $AB = BA$, για τα διανύσματα όμως η σειρά των γραμμάτων καθορίζει τη φορά.

⊗ Συχνό λάθος

× Λάθος

Δύο διανύσματα με ίσα μέτρα είναι ίσα

✓ Σωστό

Πρέπει να έχουν **και** ίδια διεύθυνση και φορά

Ένα διάνυσμα 3 cm προς τα βόρεια δεν είναι ίσο με ένα διάνυσμα 3 cm προς τα ανατολικά.



Για περισσότερες λυμένες ασκήσεις, **κουίζ αυτοαξιολόγησης** και σημειώσεις, μπες στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών.
www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να χαρακτηρίσεις ως μονόμετρο ή διανυσματικό: α) το βάρος β) η μάζα γ) η ταχύτητα δ) η θερμοκρασία ε) η δύναμη στ) το εμβαδόν.
- 2 Στο τετράγωνο ABΓΔ με κέντρο O, να γράψεις: α) δύο ίσα διανύσματα β) δύο αντίθετα διανύσματα γ) δύο διανύσματα με ίσα μέτρα που δεν είναι ούτε ίσα ούτε αντίθετα.
- 3 Σε τετραγωνισμένο χαρτί, το διάνυσμα $\vec{u}$ πηγαίνει 6 μονάδες δεξιά και 8 κάτω. Να βρεις το μέτρο του.
- 4 Αν $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$, τι σχήμα είναι το ABΔΓ (όταν τα σημεία δεν είναι συνευθειακά);
- 5 Ένα σημείο M είναι μέσο του AB. Να συγκρίνεις τα διανύσματα $\vec{AM}$ και $\vec{MB}$, και τα $\vec{MA}$ και $\vec{MB}$.

ΜΑΘΗΜΑ

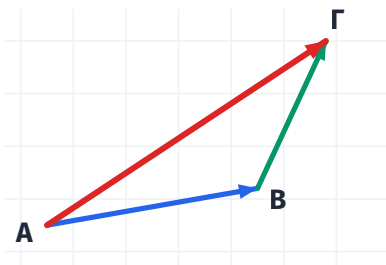
2.6

Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων

Αν περπατήσεις 3 km ανατολικά και μετά 4 km βόρεια, πού θα βρεθείς; Η «συνολική» μετατόπιση είναι το άθροισμα των δύο διανυσμάτων — και, όπως θα δούμε, δεν είναι 7 km!

Ο κανόνας του τριγώνου

Μια μετακίνηση από το Α στο Β και στη συνέχεια από το Β στο Γ έχει το ίδιο αποτέλεσμα με την απευθείας μετακίνηση από το Α στο Γ.



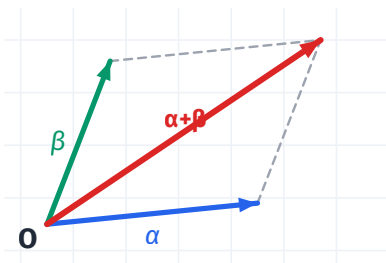
Κανόνας τριγώνου

☆ Άθροισμα διανυσμάτων

$$\vec{AB} + \vec{BG} = \vec{AG}$$

Για να προσθέσουμε δύο διανύσματα, τοποθετούμε την **αρχή του δεύτερου** στο **πέρας του πρώτου**. Το άθροισμα ξεκινά από την αρχή του πρώτου και καταλήγει στο πέρας του δεύτερου.

Ο κανόνας του παραλληλογράμμου



Κανόνας παραλληλογράμμου

☆ Με κοινή αρχή

Αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν **κοινή αρχή** O, κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο με πλευρές αυτά τα δύο διανύσματα. Το άθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι η **διαγώνιος** που ξεκινά από το O.

Στη Φυσική, έτσι βρίσκουμε τη **συνισταμένη** δύο δυνάμεων.

Ιδιότητες της πρόσθεσης

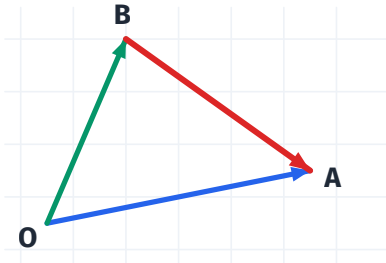
- Αντιμεταθετική: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$
- Προσεταιριστική: $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$
- $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$

Για περισσότερα διανύσματα, τα τοποθετούμε το ένα μετά το άλλο («κεφάλι-ουρά»): $\vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GL} = \vec{AL}$.

Διαφορά διανυσμάτων

Ορισμός · Διαφορά

Η διαφορά $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ ορίζεται ως το άθροισμα του $\vec{\alpha}$ με το **αντίθετο** του $\vec{\beta}$: $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$.



Με κοινή αρχή: $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$

☆ Πρακτικός κανόνας

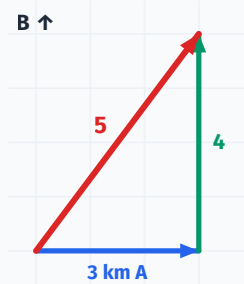
Αν δύο διανύσματα έχουν κοινή αρχή O, η διαφορά τους είναι το διάνυσμα που ενώνει τα πέρατά τους, με φορά **προς το πέρας του πρώτου**:

$$\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$$

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 2.6.1

Ένας πεζοπόρος βαδίζει 3 km ανατολικά και μετά 4 km βόρεια. Πόση είναι η συνολική μετατόπισή του και ποια η διεύθυνσή της;



ΛΥΣΗ

Το άθροισμα είναι η υποτείνουσα: $|\vec{AG}| = \sqrt{9 + 16} = 5$ km (ενώ η απόσταση που **περπάτησε** είναι 7 km).

Γωνία με την ανατολή: $\epsilon\phi\omega = \frac{4}{3} \Rightarrow \omega \approx 53^\circ$ (βορειοανατολικά).

Παράδειγμα 2.6.2

Να απλοποιηθούν: α) $\vec{AB} + \vec{GA}$ β) $\vec{KL} + \vec{MK} + \vec{LM}$ γ) $\vec{OA} - \vec{OB} + \vec{AG}$

ΛΥΣΗ

α) $\vec{GA} + \vec{AB} = \vec{GB}$. β) $\vec{MK} + \vec{KL} + \vec{LM} = \vec{MM} = \vec{0}$. γ) $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$, άρα $\vec{BA} + \vec{AG} = \vec{BG}$.

 Τεχνική

Στις απλοποιήσεις, αναδιάταξε τους όρους ώστε το **πέρας** κάθε διανύσματος να είναι η **αρχή** του επόμενου: τα «εσωτερικά» γράμματα «διαγράφονται».

 Συχνό λάθος

× Λάθος

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \text{ πάντα}$$

✓ Σωστό

Ισχύει μόνο όταν τα διανύσματα έχουν **ίδια διεύθυνση και φορά**

Γενικά $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ (τριγωνική ανισότητα). Στο παράδειγμα: $5 < 3 + 4$.



Κόλλησες κάπου; Στο **mathgreece.com** υπάρχουν βιντεομαθήματα, podcasts και παιχνίδια γνώσεων για κάθε ενότητα — όλα δωρεάν.

www.mathgreece.com

 Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να απλοποιήσεις: α) $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta}$ β) $\vec{\Delta\epsilon} + \vec{\Gamma\Delta}$ γ) $\vec{AB} - \vec{A\Gamma}$ δ) $\vec{AB} + \vec{BA}$
- 2 Δύο δυνάμεις 6 N και 8 N ασκούνται στο ίδιο σημείο κάθετα μεταξύ τους. Να βρεις το μέτρο της συνισταμένης.
- 3 Δύο δυνάμεις 5 N και 12 N ασκούνται στο ίδιο σημείο. Ποια είναι η συνισταμένη αν α) έχουν ίδια διεύθυνση και φορά, β) αντίθετη φορά, γ) είναι κάθετες;
- 4 Στο παραλληλόγραμμο ABΓΔ να εκφράσεις το $\vec{A\Gamma}$ και το $\vec{\Delta B}$ με τη βοήθεια των $\vec{AB}$ και $\vec{A\Delta}$.
- 5 Ένα πλοίο κινείται βόρεια με 12 km/h, ενώ το ρεύμα το παρασύρει ανατολικά με 5 km/h. Πόση είναι η πραγματική του ταχύτητα;
- 6 Να δείξεις ότι για οποιαδήποτε σημεία A, B, Γ: $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma A} = \vec{0}$.

ΜΑΘΗΜΑ

2.7

Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

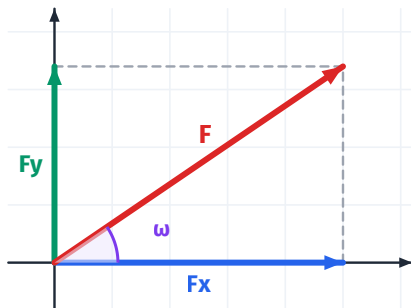
Είδαμε πώς δύο διανύσματα «συνθέτονται» σε ένα. Τώρα κάνουμε το αντίστροφο: «σπάμε» ένα διάνυσμα σε δύο κάθετα κομμάτια, ένα οριζόντιο και ένα κατακόρυφο. Εδώ η Τριγωνομετρία και τα διανύσματα συναντιούνται.

Συνιστώσες

Κάθε διάνυσμα $\vec{F}$ μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ενός διανύσματος $\vec{F}_x$ πάνω στον άξονα $x'x$ και ενός διανύσματος $\vec{F}_y$ πάνω στον άξονα $y'y$:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

Τα $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ λέγονται **κάθετες συνιστώσες** του $\vec{F}$. Βρίσκονται αν από το πέρας του $\vec{F}$ φέρουμε κάθετες προς τους δύο άξονες (κανόνες παραλληλογράμμου «ανάποδα»).



☆ Μέτρα των συνιστωσών

Αν το $\vec{F}$ σχηματίζει γωνία ω με τον άξονα $x'x$:

$$F_x = F \cdot \sin \omega$$

$$F_y = F \cdot \eta \mu \omega$$

και αντίστροφα: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$, $\epsilon \phi \omega = \frac{F_y}{F_x}$.

Συντεταγμένες διανύσματος

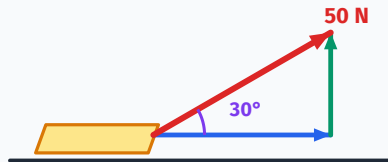
Σε σύστημα αξόνων, ένα διάνυσμα που «πηγαίνει» x μονάδες οριζόντια και y μονάδες κατακόρυφα γράφεται $\vec{\alpha} = (x, y)$. Οι αριθμοί x, y είναι οι (αλγεβρικές τιμές των) συνιστωσών του και το μέτρο του είναι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, τότε $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ — «πέρας μείον αρχή».

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 2.7.1

Ένα παιδί τραβά ένα έλκηθρο με δύναμη 50 N, μέσω σχοινιού που σχηματίζει γωνία 30° με το έδαφος. Να βρεθούν η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης.



ΛΥΣΗ

$$F_x = 50 \cdot \sin 30^\circ = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3} \approx 43,3 \text{ N (αυτή κινεί το έλκηθρο)}.$$

$$F_y = 50 \cdot \eta\mu 30^\circ = 25 \text{ N (αυτή το «σηκώνει» ελαφρώς)}.$$

Παράδειγμα 2.7.2

Ένα αεροπλάνο πετά με ταχύτητα 600 km/h σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία 20° με τον ορίζοντα. Πόσο ανεβαίνει σε μία ώρα; ($\eta\mu 20^\circ \approx 0,342$)

ΛΥΣΗ

Κατακόρυφη συνιστώσα: $600 \cdot \eta\mu 20^\circ \approx 205 \text{ km/h}$. Άρα σε 1 ώρα θα ανέβαινε περίπου 205 km... αν μπορούσε! Στην πράξη ανεβαίνει έτσι μόνο για λίγα λεπτά. Σε 1 λεπτό: $\approx 3,4 \text{ km}$.

Παράδειγμα 2.7.3

Δίνονται τα σημεία A(1, 2) και B(4, 6). Να βρεθούν οι συντεταγμένες και το μέτρο του $\vec{AB}$.

ΛΥΣΗ

$$\vec{AB} = (4 - 1, 6 - 2) = (3, 4), |\vec{AB}| = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Παράδειγμα 2.7.4

Ένα διάνυσμα έχει συνιστώσες $F_x = 6$ και $F_y = 6$. Να βρεθεί το μέτρο του και η γωνία με τον άξονα x' .

ΛΥΣΗ

$$F = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2} \approx 8,49, \quad \varepsilon\varphi\omega = 1 \Rightarrow \omega = 45^\circ.$$

⊗ Συχνό λάθος

✗ Λάθος

$$F_x = F \cdot \eta\mu\omega \text{ (με } \omega \text{ τη γωνία από τον } x'x\text{)}$$

✓ Σωστό

$$F_x = F \cdot \sigma\upsilon\nu\omega$$

Η συνιστώσα που είναι **προσκειμένη** στη γωνία παίρνει το **σνημίτονο**. Αν η γωνία μετρείται από τον κατακόρυφο άξονα, οι ρόλοι αντιστρέφονται!



Εξάσκηση χωρίς τέλος: στο **mathgreece.com** θα βρεις επιπλέον φυλλάδια ασκήσεων και διαγωνίσματα για τη Β' Γυμνασίου, εντελώς **δωρεάν**.

www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Δύναμη 20 N σχηματίζει γωνία 60° με τον οριζόντιο άξονα. Να βρεις τις συνιστώσες της.
- 2 Ένα διάνυσμα έχει συνιστώσες 5 και 12. Να βρεις το μέτρο του και τη γωνία με τον άξονα $x'x$.
- 3 Να βρεις τις συντεταγμένες και το μέτρο του $\vec{KL}$, αν $K(-2, 1)$ και $L(4, -7)$.
- 4 Ένα σώμα βάρους 100 N βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας 30° . Να βρεις τη συνιστώσα του βάρους παράλληλα στο επίπεδο ($B \cdot \eta\mu 30^\circ$) και κάθετα σε αυτό ($B \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ$).
- 5 Ένας κολυμβητής κολυμπά με 2 m/s κάθετα στην όχθη ενός ποταμού, ενώ το ρεύμα έχει ταχύτητα 1,5 m/s. Να βρεις την πραγματική ταχύτητά του και τη γωνία της με την όχθη.

Σε μια ματιά — Ανακεφαλαίωση Κεφαλαίου 20

Πριν προχωρήσεις στο επόμενο κεφάλαιο ή πριν από το διαγώνισμα, έλεγξε ότι θυμάσαι όλα τα παρακάτω. Αν κάτι δεν σου είναι ξεκάθαρο, γύρνα στο αντίστοιχο μάθημα.

Έννοια	Τι πρέπει να θυμάμαι
Εφαπτομένη	$\frac{\text{απέναντι}}{\text{προσκειμένη}} = \kappa\lambda\iota\sigma\eta$
Ημίτονο	$\frac{\text{απέναντι}}{\text{υποτείνουσα}}, 0 < \eta\mu\omega < 1$
Συνημίτονο	$\frac{\text{προσκειμένη}}{\text{υποτείνουσα}}, 0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1$
Μεταβολές	$\omega \uparrow \Rightarrow \eta\mu\omega \uparrow, \sigma\upsilon\nu\omega \downarrow, \epsilon\phi\omega \uparrow$
30°, 45°, 60°	ημ: $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ · συν: αντίστροφη σειρά · εφ: $\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \sqrt{3}$
Διάνυσμα	διεύθυνση, φορά, μέτρο· $\vec{AB} = -\vec{BA}$
Άθροισμα	$\vec{AB} + \vec{BG} = \vec{AG}$ · κανόνας παραλληλογράμμου
Συνιστώσες	$F_x = F\sigma\upsilon\nu\omega, F_y = F\eta\mu\omega$

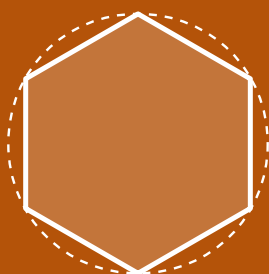
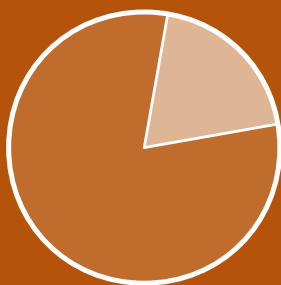


Πριν από το διαγώνισμα του κεφαλαίου, λύσε τα **επαναληπτικά κουίζ** και δες τα βιντεομαθήματα στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο.
www.mathgreece.com

3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Μέτρηση κύκλου



$$L = 2\pi r$$

$$E = \pi r^2$$

Ο κύκλος είναι ίσως το πιο τέλει σχήμα. Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε τις γωνίες μέσα σε έναν κύκλο, τα κανονικά πολύγωνα που εγγράφονται σε αυτόν, και μαθαίνουμε να υπολογίζουμε μήκη και εμβαδά κύκλων, τόξων και τομέων — με πρωταγωνιστή τον περίφημο αριθμό π .

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 3.1 Εγγεγραμμένες γωνίες
- 3.2 Κανονικά πολύγωνα
- 3.3 Μήκος κύκλου
- 3.4 Μήκος τόξου
- 3.5 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου
- 3.6 Εμβαδόν κυκλικού τομέα

ΜΑΘΗΜΑ

3.1

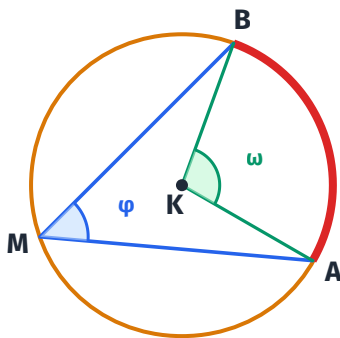
Εγγεγραμμένες γωνίες

Ξεκινάμε τη μελέτη του κύκλου με τις γωνίες που «ζουν» μέσα του. Θα ανακαλύψουμε μια απλή αλλά εντυπωσιακή σχέση ανάμεσα στην εγγεγραμμένη και την επίκεντρη γωνία.

🕒 Θυμάμαι από παλιότερα

Κύκλος (K, ρ) με κέντρο K και ακτίνα ρ είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου που απέχουν απόσταση ρ από το K . **Χορδή** είναι ένα τμήμα που ενώνει δύο σημεία του κύκλου· η μεγαλύτερη χορδή είναι η **διάμετρος** ($\delta = 2\rho$). **Τόξο** είναι το κομμάτι του κύκλου ανάμεσα σε δύο σημεία του.

📖 Επίκεντρη και εγγεγραμμένη γωνία



Επίκεντρη ω (πράσινη) και εγγεγραμμένη φ (μπλε) που βαίνουν στο ίδιο τόξο AB

📖 Ορισμός

Επίκεντρη λέγεται μια γωνία που έχει την κορυφή της στο **κέντρο** του κύκλου.

Εγγεγραμμένη λέγεται μια γωνία που έχει την κορυφή της **πάνω στον κύκλο** και οι πλευρές της είναι χορδές.

Το τόξο που βρίσκεται «ανάμεσα» στις πλευρές της γωνίας λέγεται **αντίστοιχο τόξο** και λέμε ότι η γωνία **βαίνει** σε αυτό.

Το **μέτρο ενός τόξου** (σε μοίρες) ορίζεται ίσο με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας. Ολόκληρος ο κύκλος είναι 360° .

📖 Το βασικό θεώρημα

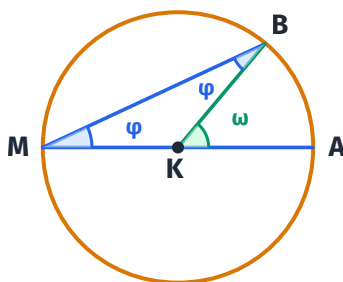
☆ Εγγεγραμμένη γωνία

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το **μισό** της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο:

$$\varphi = \frac{\omega}{2}$$

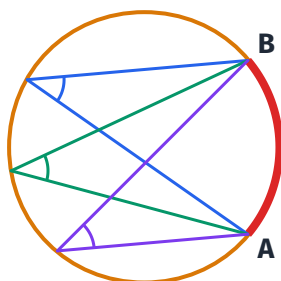
Ισοδύναμα: η εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό του μέτρου του τόξου στο οποίο βαίνει.

Γιατί; Στην απλή περίπτωση όπου η μία πλευρά της εγγεγραμμένης περνά από το κέντρο: το τρίγωνο KMB είναι ισοσκελές ($KM = KB = \rho$), άρα έχει δύο ίσες γωνίες φ . Η επίκεντρη ω είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου, άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών: $\omega = \varphi + \varphi = 2\varphi$.

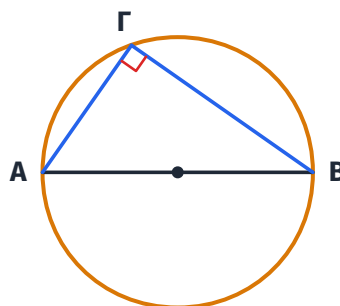


Η εξωτερική γωνία ω ισούται με $\varphi + \varphi$

Σημαντικές συνέπειες



Ίδιο τόξο $\rightarrow$ ίσες εγγεγραμμένες



Βαίνει σε ημικύκλιο $\rightarrow 90^\circ$

☆ Πορίσματα

- Όλες οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν **στο ίδιο τόξο** (ή σε ίσα τόξα) είναι **ίσες** μεταξύ τους.
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε **ημικύκλιο** (δηλαδή οι πλευρές της «πατούν» στα άκρα μιας διαμέτρου) είναι **ορθή** (90°), αφού η αντίστοιχη επίκεντρη είναι 180° .

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 3.1.1

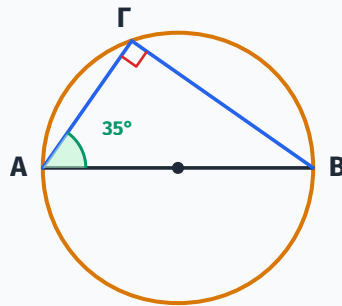
Σε κύκλο κέντρου K , η επίκεντρη γωνία $\hat{AKB}$ είναι 110° . Να βρεθεί η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{AMB}$ που βαίνει στο ίδιο τόξο.

ΛΥΣΗ

$$\hat{AMB} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ.$$

Παράδειγμα 3.1.2

Στο σχήμα η AB είναι διάμετρος και $\hat{BAG} = 35^\circ$. Να βρεθεί η γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου ABG .



ΛΥΣΗ

Η $\widehat{AGB}$ βαίνει σε ημικύκλιο, άρα $\hat{G} = 90^\circ$. Τότε $\hat{B} = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

Παράδειγμα 3.1.3

Ένα τόξο AB είναι 140° . Πόση είναι η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε αυτό; Και πόση αυτή που βαίνει στο «άλλο» τόξο AB ;

ΛΥΣΗ

Στο τόξο 140° : 70° . Το άλλο τόξο είναι $360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$, άρα η αντίστοιχη εγγεγραμμένη είναι 110° . Παρατήρησε ότι $70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$.

⊗ Συχνό λάθος

× Λάθος

Εγγεγραμμένη = επίκεντρη

✓ Σωστό

Εγγεγραμμένη = **μισή** επίκεντρη (στο ίδιο τόξο)

Και κοίτα πάντα **σε ποιο τόξο βαίνει** κάθε γωνία πριν συγκρίνεις.



Θέλεις να ελέγξεις αν το κατάλαβες; Λύσε τα **διαδραστικά κουίζ** του μαθήματος στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν ψηφιακό φροντιστήριο.
www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Επίκεντρη γωνία 84° : πόση είναι η εγγεγραμμένη στο ίδιο τόξο; Εγγεγραμμένη 37° : πόση η επίκεντρη;
- 2 Σε κύκλο, ένα τόξο είναι το $\frac{1}{6}$ του κύκλου. Να βρεις το μέτρο του, την επίκεντρη και την εγγεγραμμένη γωνία που βαίνουν σε αυτό.

- 3** Τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με τη $B\Gamma$ διάμετρο. Αν $AB = 6\text{ cm}$ και $A\Gamma = 8\text{ cm}$, να βρεις την ακτίνα του κύκλου.
- 4** Τα σημεία A, B, Γ, Δ βρίσκονται σε κύκλο και $\hat{A\Gamma B} = 40^\circ$. Πόση είναι η $\hat{A\Delta B}$ (αν τα Γ, Δ είναι από την ίδια πλευρά της AB);
- 5** Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν $\hat{A} = 75^\circ$, πόση είναι η $\hat{\Gamma}$; (Υπόδειξη: τα τόξα στα οποία βαίνουν έχουν άθροισμα 360° .)
- 6** Πώς μπορείς να βρεις το κέντρο ενός κυκλικού δίσκου χρησιμοποιώντας μόνο έναν γνώμονα (ορθή γωνία);

ΜΑΘΗΜΑ

3.2

Κανονικά πολύγωνα

Οι κυψέλες των μελισσών, οι νιφάδες του χιονιού, τα πλακάκια και οι πινακίδες STOP έχουν κάτι κοινό: σχήματα με όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες ίσες. Είναι τα κανονικά πολύγωνα — και είναι στενοί «συγγενείς» του κύκλου.

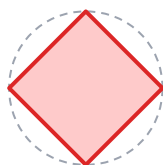
Ορισμός

Ορισμός · Κανονικό πολύγωνο

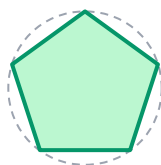
Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό** όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.



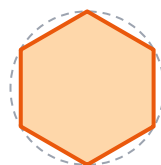
ισόπλευρο τρίγωνο



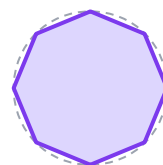
τετράγωνο



κανονικό πεντάγωνο



κανονικό εξάγωνο



κανονικό οκτάγωνο

⊗ Συχνό λάθος

✗ Λάθος

Ο ρόμβος είναι κανονικό πολύγωνο (έχει ίσες πλευρές)

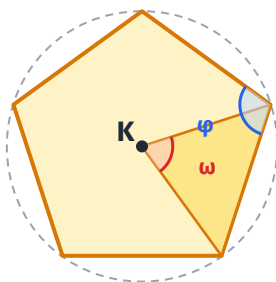
✓ Σωστό

Ο ρόμβος **δεν** είναι κανονικός (εκτός αν είναι τετράγωνο)

Χρειάζονται **και** ίσες πλευρές **και** ίσες γωνίες. Το ορθογώνιο έχει ίσες γωνίες αλλά όχι ίσες πλευρές — ούτε αυτό είναι κανονικό.

Κέντρο, κεντρική γωνία και γωνία του πολυγώνου

Κάθε κανονικό πολύγωνο μπορεί να **εγγραφεί σε κύκλο**: υπάρχει κύκλος που περνά από όλες τις κορυφές του. Το κέντρο K αυτού του κύκλου λέγεται **κέντρο** του πολυγώνου και η ακτίνα του ρ **ακτίνα** του πολυγώνου.



☆ Τύποι για κανονικό ν-γωνο

Κεντρική γωνία (η γωνία με κορυφή το κέντρο, που «βλέπει» μια πλευρά):

$$\omega = \frac{360^\circ}{n}$$

Γωνία του πολυγώνου (σε κάθε κορυφή):

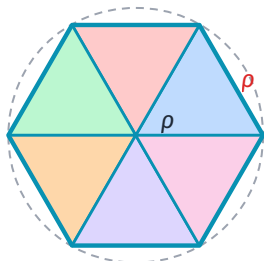
$$\varphi = 180^\circ - \omega$$

Τα n τρίγωνα που σχηματίζονται με κορυφή το κέντρο είναι **ίσα ισοσκελή**.

Γιατί $\varphi = 180^\circ - \omega$; Κάθε ισοσκελές τρίγωνο KAB έχει γωνία κορυφής ω και γωνίες βάσης $\frac{180^\circ - \omega}{2}$. Σε κάθε κορυφή του πολυγώνου «συναντιούνται» δύο τέτοιες γωνίες βάσης: $\varphi = 2 \cdot \frac{180^\circ - \omega}{2} = 180^\circ - \omega$.

Πολύγωνο	n	Κεντρική ω	Γωνία φ
Ισόπλευρο τρίγωνο	3	120°	60°
Τετράγωνο	4	90°	90°
Κανονικό πεντάγωνο	5	72°	108°
Κανονικό εξάγωνο	6	60°	120°
Κανονικό οκτάγωνο	8	45°	135°
Κανονικό δεκάγωνο	10	36°	144°
Κανονικό δωδεκάγωνο	12	30°	150°

Το κανονικό εξάγωνο



Στο κανονικό εξάγωνο η κεντρική γωνία είναι 60° . Τα έξι τρίγωνα που σχηματίζονται είναι ισοσκελή με γωνία κορυφής 60° , άρα **ισόπλευρα**. Επομένως:

☆ Κανονικό εξάγωνο

$$\text{πλευρά} = \text{ακτίνα: } \lambda_6 = \rho$$

Γι' αυτό, για να το κατασκευάσουμε, «ανοίγουμε» τον διαβήτη όσο η ακτίνα και σημαδεύουμε διαδοχικά 6 σημεία πάνω στον κύκλο.

Κατασκευή κανονικού πολυγώνου

☆ Βήματα κατασκευής κανονικού n -γώνου

- 1 Σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο K .
- 2 Υπολογίζουμε την κεντρική γωνία $\omega = \frac{360^\circ}{n}$.
- 3 Με το μοιρογνωμόνιο σχηματίζουμε διαδοχικά n επίκεντρες γωνίες ω · οι πλευρές τους τέμνουν τον κύκλο σε n σημεία.
- 4 Ενώνουμε διαδοχικά τα σημεία.

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 3.2.1

Να βρεθεί η κεντρική γωνία και η γωνία ενός κανονικού εννεαγώνου.

ΛΥΣΗ

$$\omega = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ, ; \varphi = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ.$$

Παράδειγμα 3.2.2

Ένα κανονικό πολύγωνο έχει γωνία 156° . Πόσες πλευρές έχει;

ΛΥΣΗ

$$\omega = 180^\circ - 156^\circ = 24^\circ, \text{ άρα } n = \frac{360^\circ}{24^\circ} = 15 \text{ πλευρές.}$$

Παράδειγμα 3.2.3

Κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 4 cm. Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν του.

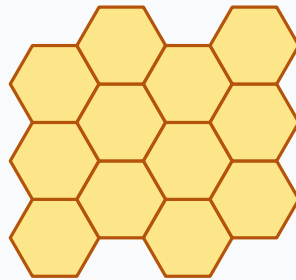
ΛΥΣΗ

Πλευρά 4 cm, περίμετρος 24 cm. Αποτελείται από 6 ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς 4 με ύψος $\sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

$$\text{Εμβαδόν: } 6 \cdot \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \approx 41,6 \text{ cm}^2.$$

Παράδειγμα 3.2.4 — Μαθηματικά στη φύση

Γιατί οι μέλισσες φτιάχνουν εξαγωνικές κυψέλες; Ποια κανονικά πολύγωνα μπορούν να «στρώσουν» το επίπεδο χωρίς κενά;

**ΛΥΣΗ**

Για να καλύπτεται το επίπεδο γύρω από μια κορυφή, οι γωνίες που συναντιούνται πρέπει να δίνουν 360° . Αυτό συμβαίνει για: 6 ισόπλευρα τρίγωνα ($6 \cdot 60^\circ$), 4 τετράγωνα ($4 \cdot 90^\circ$) και 3 κανονικά εξάγωνα ($3 \cdot 120^\circ$). Το πεντάγωνο (108°) δεν μπορεί. Από τα τρία, το εξάγωνο περικλείει το μεγαλύτερο εμβαδόν με τη μικρότερη περίμετρο — λιγότερο κερί για περισσότερο μέλι!



Θέλεις να δεις αυτό το μάθημα και σε **βίντεο**, βήμα-βήμα; Στο **mathgreece.com** θα βρεις ολοκληρωμένο, **δωρεάν** φροντιστήριο για όλη την ύλη της Β' Γυμνασίου.
www.mathgreece.com

Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1** Να βρεις την κεντρική γωνία και τη γωνία: α) κανονικού δεκαγώνου β) κανονικού 20-γώνου.
- 2** Υπάρχει κανονικό πολύγωνο με γωνία α) 150° β) 130° ;
- 3** Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 20° . Πόσες πλευρές έχει και πόση είναι η γωνία του;
- 4** Κανονικό εξάγωνο έχει περίμετρο 36 cm. Ποια είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου;
- 5** Τετράγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 5 cm. Να βρεις την πλευρά και το εμβαδόν του.
- 6** Να περιγράψεις πώς θα κατασκευάσεις κανονικό πεντάγωνο σε κύκλο ακτίνας 3 cm.
- 7** Πόσο είναι το άθροισμα των γωνιών ενός κανονικού οκταγώνου;

ΜΑΘΗΜΑ

3.3

Μήκος κύκλου

Πόσο σχοινί χρειάζεται για να «τυλίξεις» έναν κύκλο; Η απάντηση κρύβει έναν από τους πιο διάσημους αριθμούς της ιστορίας: τον π .

Μια εκπληκτική σταθερά

Αν μετρήσουμε (π.χ. με ένα σχοινάκι) το μήκος L διάφορων κύκλων — ενός κέρματος, ενός πιάτου, μιας ρόδας — και το διαιρέσουμε με τη διάμετρό τους δ , θα βρίσκουμε **πάντα** περίπου τον ίδιο αριθμό, λίγο μεγαλύτερο από 3:

Αντικείμενο	Μήκος L (cm)	Διάμετρος δ (cm)	$\frac{L}{\delta}$
Κέρμα 1 €	7,3	2,3	3,17
Κούπα	25,1	8	3,14
Πιάτο	78,5	25	3,14
Ρόδα ποδηλάτου	207	66	3,14

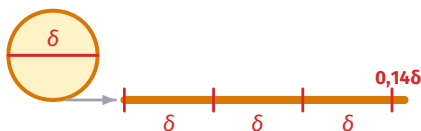
Ορισμός · Ο αριθμός π

Ο λόγος του μήκους κάθε κύκλου προς τη διάμετρό του είναι **σταθερός** και συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα π :

$$\pi = \frac{L}{\delta} = 3,14159265\dots$$

Ο π είναι **άρρητος** αριθμός. Στις ασκήσεις χρησιμοποιούμε συνήθως την προσέγγιση $\pi \approx 3,14$.

Ο τύπος



Αν «ξετυλίξουμε» τον κύκλο, το μήκος του είναι λίγο περισσότερο από 3 διαμέτρους.

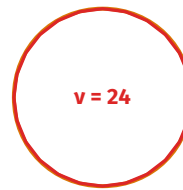
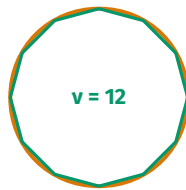
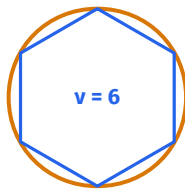
☆ Μήκος κύκλου

$$L = \pi \cdot \delta \quad \text{ή} \quad L = 2\pi r$$

όπου δ η διάμετρος και r η ακτίνα ($\delta = 2r$).

🏛️ Λίγη ιστορία

Ο **Αρχιμήδης** (3ος αι. π.Χ.) υπολόγισε τον π εγγράφοντας και περιγράφοντας κανονικά πολύγωνα με 96 πλευρές γύρω από έναν κύκλο, και απέδειξε ότι $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Σήμερα, με υπολογιστές, γνωρίζουμε τρισεκατομμύρια ψηφία του π — χωρίς να εμφανίζεται ποτέ περίοδος.



Το περίγραμμα του κανονικού πολυγώνου πλησιάζει όλο και περισσότερο το μήκος του κύκλου όσο αυξάνονται οι πλευρές.

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 3.3.1

Να βρεθεί το μήκος κύκλου με ακτίνα 5 cm.

ΛΥΣΗ

$$L = 2 \cdot 3,14 \cdot 5 = 31,4 \text{ cm. (Ακριβώς: } 10\pi \text{ cm.)}$$

Παράδειγμα 3.3.2

Ένας κύκλος έχει μήκος 47,1 m. Να βρεθεί η ακτίνα του.

ΛΥΣΗ

$$2\pi\rho = 47,1 \Rightarrow \rho = \frac{47,1}{6,28} = 7,5 \text{ m.}$$

Παράδειγμα 3.3.3

Η ρόδα ενός ποδηλάτου έχει διάμετρο 70 cm. Πόσες στροφές κάνει σε διαδρομή 1,1 km;



ΛΥΣΗ

$$\text{Σε μία στροφή διανύει } L = 3,14 \cdot 70 = 219,8 \text{ cm} \approx 2,198 \text{ m. Στροφές: } \frac{1100}{2,198} \approx 500.$$

Παράδειγμα 3.3.4

Ένας στίβος έχει δύο ευθύγραμμα τμήματα των 100 m και δύο ημικύκλια διαμέτρου 64 m. Πόσο είναι το μήκος του;



ΛΥΣΗ

Τα δύο ημικύκλια φτιάχνουν έναν ολόκληρο κύκλο: $\pi \cdot 64 \approx 200,96$ m. Σύνολο $\approx 200 + 200,96 = 400,96$ m — περίπου 400 m, όσο ένας ολυμπιακός στίβος!

⊗ Συχνό λάθος

× Λάθος

$$L = \pi r \text{ ή } L = \pi r^2$$

✓ Σωστό

$$L = 2\pi r \text{ (ή } \pi d)$$

Το πr^2 είναι το **εμβαδόν** (Μάθημα 3.5). Ένα μήκος μετριέται σε cm, όχι σε cm^2 , άρα δεν μπορεί να έχει r^2 .



Για περισσότερες λυμένες ασκήσεις, **κουίζ αυτοαξιολόγησης** και σημειώσεις, μπες στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών.
www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να βρεις το μήκος κύκλου με: α) ακτίνα 3 cm β) διάμετρο 12 m γ) ακτίνα 0,5 km. ($\pi \approx 3,14$)
- 2 Ένας κύκλος έχει μήκος 62,8 cm. Να βρεις τη διάμετρο και την ακτίνα του.
- 3 Μια ρόδα αυτοκινήτου έχει ακτίνα 30 cm. Πόσα μέτρα προχωρά το αυτοκίνητο όταν η ρόδα κάνει 1.000 στροφές;
- 4 Ο Ισημερινός της Γης έχει μήκος περίπου 40.000 km. Να βρεις την ακτίνα της Γης.
- 5 Ένα τετράγωνο και ένας κύκλος έχουν την ίδια περίμετρο, 31,4 cm. Ποια είναι η πλευρά του τετραγώνου και ποια η ακτίνα του κύκλου;
- 6 Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου, τι γίνεται το μήκος του;
- 7 Ένα σχήμα αποτελείται από ημικύκλιο διαμέτρου 10 cm πάνω σε τετράγωνο πλευράς 10 cm. Να βρεις την περίμετρό του.

ΜΑΘΗΜΑ

3.4

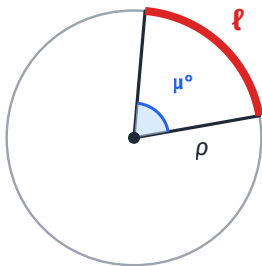
Μήκος τόξου

Ένα τόξο είναι ένα «κομμάτι» του κύκλου. Αν ξέρουμε τι μέρος του κύκλου είναι, βρίσκουμε εύκολα και το μήκος του — με μια απλή μέθοδο των τριών.

Ο τύπος

Ολόκληρος ο κύκλος (360°) έχει μήκος $2\pi\rho$. Ένα τόξο μ° είναι το $\frac{\mu}{360}$ του κύκλου, άρα έχει μήκος το $\frac{\mu}{360}$ του $2\pi\rho$:

Τόξο (μοίρες)	360°	1°	μ°
Μήκος	$2\pi\rho$	$\frac{2\pi\rho}{360} = \frac{\pi\rho}{180}$	$\frac{\pi\rho\mu}{180}$



Τόξο μ° με μήκος ℓ

☆ Μήκος τόξου μ°

$$\ell = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu}{180}$$

όπου ρ η ακτίνα του κύκλου και μ το μέτρο του τόξου σε μοίρες.

💡 Η συμβουλή του καθηγητή

Δεν χρειάζεται να «αποστηθίσεις» τον τύπο. Σκέψου: «τι κομμάτι του κύκλου είναι;». Τόξο $90^\circ = \frac{1}{4}$ του κύκλου, τόξο $120^\circ = \frac{1}{3}$, τόξο $45^\circ = \frac{1}{8}$. Μετά παίρνεις το αντίστοιχο κομμάτι του $2\pi\rho$.

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 3.4.1

Να βρεθεί το μήκος τόξου 60° σε κύκλο ακτίνας 9 cm.

ΛΥΣΗ

$$\ell = \frac{\pi \cdot 9 \cdot 60}{180} = 3\pi \approx 9,42 \text{ cm. (H: } 60^\circ \text{ είναι το } \frac{1}{6} \text{ του κύκλου: } \frac{2\pi \cdot 9}{6} = 3\pi.)$$

Παράδειγμα 3.4.2

Ένα τόξο μήκους 11 cm ανήκει σε κύκλο ακτίνας 7 cm. Πόσες μοίρες είναι; ($\pi \approx \frac{22}{7}$)

ΛΥΣΗ

$$\frac{\pi \cdot 7 \cdot \mu}{180} = 11 \Rightarrow \frac{22}{7} \cdot 7 \cdot \mu = 11 \cdot 180 \Rightarrow 22\mu = 1980 \Rightarrow \mu = 90^\circ.$$

Παράδειγμα 3.4.3

Ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού έχει μήκος 12 cm. Πόση απόσταση διανύει η άκρη του σε 20 λεπτά;



ΛΥΣΗ

Σε 60 λεπτά κάνει πλήρη κύκλο (360°), σε 20 λεπτά διαγράφει 120° : $\ell = \frac{\pi \cdot 12 \cdot 120}{180} = 8\pi \approx 25,1$ cm.

Παράδειγμα 3.4.4 — Γεωγραφία

Δύο πόλεις βρίσκονται στον ίδιο μεσημβρινό, με γεωγραφικά πλάτη 38° Β και 41° Β. Πόσο απέχουν πάνω στην επιφάνεια της Γης; (Ακτίνα Γης ≈ 6.370 km)

ΛΥΣΗ

Το τόξο είναι $41^\circ - 38^\circ = 3^\circ$: $\ell = \frac{3,14 \cdot 6370 \cdot 3}{180} \approx 333$ km.

Το ακτίνιο (rad)

Εκτός από τις μοίρες, οι γωνίες και τα τόξα μετριοούνται και σε **ακτίνια** (rad). Ένα ακτίνιο είναι το τόξο που έχει μήκος **ίσο με την ακτίνα** του κύκλου. Επειδή ο κύκλος έχει μήκος $2\pi r$, χωράει 2π ακτίνια. Άρα:

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \quad 180^\circ = \pi \text{ rad} \quad 1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$$

Μοίρες	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Ακτίνια	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Με ακτίνια ο τύπος του μήκους τόξου γίνεται πολύ απλός: $\ell = r \cdot \alpha$, όπου α το τόξο σε rad. (Θα το χρησιμοποιείς πολύ στο Λύκειο και στη Φυσική.)

⊗ Συχνό λάθος

✗ Λάθος

$$\ell = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu}{360}$$

✓ Σωστό

$$\ell = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu}{180}$$

Ο παρονομαστής 360 μπαίνει όταν ξεκινάμε από το $2\pi\rho$: $\frac{2\pi\rho\mu}{360} = \frac{\pi\rho\mu}{180}$. Μην «μισοαπλοποιείς»!



Κόλλησες κάπου; Στο **mathgreece.com** υπάρχουν βιντεομαθήματα, podcasts και παιχνίδια γνώσεων για κάθε ενότητα — όλα δωρεάν.

www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να βρεις το μήκος τόξου: α) 90° σε κύκλο ακτίνας 4 cm β) 150° σε κύκλο ακτίνας 6 m γ) 36° σε κύκλο διαμέτρου 20 cm.
- 2 Σε κύκλο ακτίνας 10 cm, ένα τόξο έχει μήκος 5π cm. Πόσες μοίρες είναι;
- 3 Ένα τόξο 40° έχει μήκος 6,28 cm. Να βρεις την ακτίνα του κύκλου.
- 4 Ο ωροδείκτης ενός ρολογιού έχει μήκος 8 cm. Πόση απόσταση διανύει η άκρη του από τις 12:00 έως τις 3:00;
- 5 Να μετατρέψεις σε ακτίνια: 120° , 135° , 270° . Και σε μοίρες: $\frac{\pi}{5}$, $\frac{5\pi}{6}$.
- 6 Ένα εκκρεμές μήκους 1,2 m αιωρείται διαγράφοντας τόξο 30° . Πόσο είναι το μήκος του τόξου που διαγράφει η άκρη του;

ΜΑΘΗΜΑ

3.5

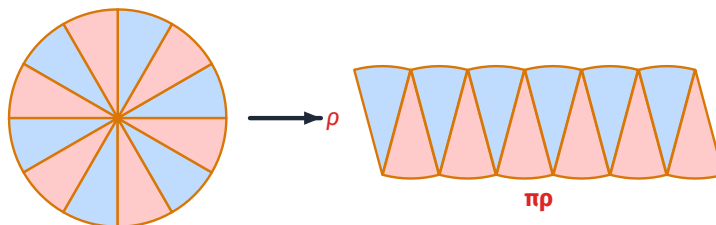
Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

Πόση επιφάνεια καλύπτει μια πίτσα, ένα στρογγυλό τραπέζι ή ένας κυκλικός κήπος; Θα βρούμε τον τύπο με ένα όμορφο «κόλπο»: θα κόψουμε τον κύκλο σε φέτες και θα τον μετατρέψουμε σε (σχεδόν) ορθογώνιο.

📖 Από τον κύκλο στο ορθογώνιο

Χωρίζουμε τον κυκλικό δίσκο σε πολλούς ίσους κυκλικούς τομείς («φέτες πίτσας») και τους τοποθετούμε εναλλάξ, τη μία φέτα με τη μύτη πάνω και την επόμενη με τη μύτη κάτω. Προκύπτει ένα σχήμα που μοιάζει με παραλληλόγραμμο· όσο περισσότερες οι φέτες, τόσο πιο πολύ πλησιάζει ένα **ορθογώνιο** με:

- **ύψος** την ακτίνα ρ και
- **βάση** το μισό μήκος του κύκλου, δηλαδή $\frac{2\pi\rho}{2} = \pi\rho$.



Οι φέτες ανασυντίθενται σε «σχεδόν ορθογώνιο» με διαστάσεις $\pi\rho$ και ρ .

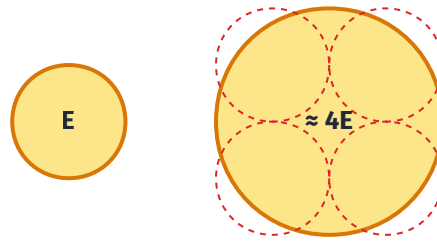
☆ Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

$$E = \pi \cdot \rho^2$$

όπου ρ η ακτίνα. Με τη διάμετρο: $E = \frac{\pi d^2}{4}$.

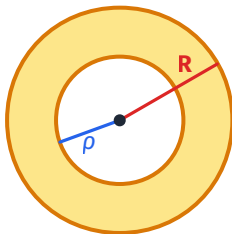
⚠ Προσοχή!

Το εμβαδόν **δεν** είναι ανάλογο της ακτίνας: αν η ακτίνα διπλασιαστεί, το εμβαδόν **τετραπλασιάζεται** (γιατί $\pi(2\rho)^2 = 4\pi\rho^2$). Μια πίτσα διαμέτρου 40 cm έχει τετραπλάσια επιφάνεια από μία διαμέτρου 20 cm!



Διπλάσια διάμετρος → τετραπλάσιο εμβαδόν

Κυκλικός δακτύλιος



Ορισμός · Κυκλικός δακτύλιος

Η επιφάνεια ανάμεσα σε δύο **ομόκεντρους** κύκλους με ακτίνες $R > \rho$ λέγεται **κυκλικός δακτύλιος**. Το εμβαδόν του:

$$E = \pi R^2 - \pi \rho^2 = \pi(R^2 - \rho^2)$$

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 3.5.1

Να βρεθεί το εμβαδόν κυκλικού δίσκου με διάμετρο 10 cm.

ΛΥΣΗ

$$\rho = 5: E = 3,14 \cdot 25 = 78,5 \text{ cm}^2. (\text{Ακριβώς } 25\pi \text{ cm}^2.)$$

Παράδειγμα 3.5.2

Ένας κυκλικός δίσκος έχει εμβαδόν 113,04 m². Να βρεθεί η ακτίνα και το μήκος του κύκλου του.

ΛΥΣΗ

$$3,14\rho^2 = 113,04 \Rightarrow \rho^2 = 36 \Rightarrow \rho = 6 \text{ m. Μήκος: } 2 \cdot 3,14 \cdot 6 = 37,68 \text{ m.}$$

Παράδειγμα 3.5.3 — Καθημερινή ζωή

Μια πιτσαρία πουλά μια πίτσα διαμέτρου 30 cm με 9 € και μια διαμέτρου 40 cm με 14 €. Ποια συμφέρει;

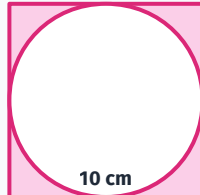
ΛΥΣΗ

$$\text{Εμβαδά: } \pi \cdot 15^2 \approx 706,5 \text{ cm}^2 \text{ και } \pi \cdot 20^2 = 1256 \text{ cm}^2.$$

Τιμή ανά cm^2 : $\frac{9}{706,5} \approx 0,0127 \text{ €}$ και $\frac{14}{1256} \approx 0,0111 \text{ €}$. Συμφέρει η **μεγάλη**.

Παράδειγμα 3.5.4

Να βρεθεί το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής: τετράγωνο πλευράς 10 cm, από το οποίο έχει αφαιρεθεί ο εγγεγραμμένος κύκλος.



ΛΥΣΗ

$$E = 10^2 - \pi \cdot 5^2 = 100 - 78,5 = 21,5 \text{ cm}^2.$$

Παράδειγμα 3.5.5

Ένας κυκλικός πίδακας ακτίνας 3 m περιβάλλεται από πλακόστρωτο διάδρομο πλάτους 1 m. Να βρεθεί το εμβαδόν του διαδρόμου.

ΛΥΣΗ

$$\text{Δακτύλιος με } R = 4, \rho = 3: E = \pi(16 - 9) = 7\pi \approx 21,98 \text{ m}^2.$$

⊗ Συχνό λάθος

× **Λάθος**

$$E = 2\pi\rho$$

✓ **Σωστό**

$$E = \pi\rho^2$$

Το $2\pi\rho$ είναι το **μήκος**. Το εμβαδόν μετριέται σε τετραγωνικές μονάδες, άρα πρέπει να έχει ρ^2 .

⊗ Συχνό λάθος

× **Λάθος**

$$\text{Διάμετρος } 10 \rightarrow E = \pi \cdot 10^2$$

✓ **Σωστό**

$$\text{Διάμετρος } 10 \rightarrow \rho = 5 \rightarrow E = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$$

Στον τύπο μπαίνει η **ακτίνα**. Πρόσεχε αν η άσκηση δίνει διάμετρο!



Εξάσκηση χωρίς τέλος: στο **mathgreece.com** θα βρεις επιπλέον φυλλάδια ασκήσεων και διαγωνίσματα για τη Β' Γυμνασίου, εντελώς **δωρεάν**.

www.mathgreece.com

 Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να βρεις το εμβαδόν κυκλικού δίσκου με: α) ακτίνα 3 cm β) διάμετρο 8 m γ) ακτίνα 0,2 km.
- 2 Ένας κύκλος έχει μήκος 31,4 cm. Να βρεις το εμβαδόν του δίσκου.
- 3 Ένας κυκλικός δίσκος έχει εμβαδόν 314 cm^2 . Να βρεις τη διάμετρό του.
- 4 Να βρεις το εμβαδόν κυκλικού δακτυλίου με ακτίνες 5 cm και 3 cm.
- 5 Ένα CD έχει διάμετρο 12 cm και στη μέση τρύπα διαμέτρου 1,5 cm. Πόσο είναι το εμβαδόν της επιφάνειάς του;
- 6 Αν η ακτίνα ενός κύκλου τριπλασιαστεί, πόσες φορές μεγαλώνει το εμβαδόν; Και το μήκος;
- 7 Ένας κύκλος είναι εγγεγραμμένος σε τετράγωνο πλευράς 6 cm. Πόσο είναι το εμβαδόν που περισσεύει στις «γωνίες»;
- 8 Ένα κατσίκι είναι δεμένο με σχοινί 5 m σε πάσσαλο σε ένα λιβάδι. Σε πόση επιφάνεια μπορεί να βοσκήσει;

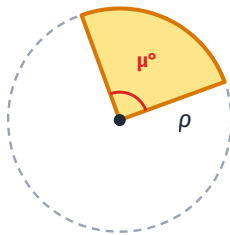
ΜΑΘΗΜΑ

3.6

Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Μια φέτα πίτσας, ο «ανεμιστήρας» που σκουπίζει ένας υαλοκαθαριστήρας, ένας τομέας σε κυκλικό διάγραμμα: όλα είναι κυκλικοί τομείς. Το εμβαδόν τους το βρίσκουμε με την ίδια λογική με το μήκος τόξου.

Ορισμός και τύπος



Ορισμός · Κυκλικός τομέας

Το μέρος του κυκλικού δίσκου που περικλείεται από ένα τόξο και τις δύο ακτίνες που καταλήγουν στα άκρα του λέγεται **κυκλικός τομέας**. Το μέτρο του είναι το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.

Ο κυκλικός δίσκος (360°) έχει εμβαδόν πr^2 . Ένας τομέας μ° είναι το $\frac{\mu}{360}$ του δίσκου:

☆ Εμβαδόν κυκλικού τομέα μ°

$$E_{\text{τομ}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \mu}{360}$$

Εναλλακτικά, αν ξέρουμε το μήκος ℓ του τόξου του: $E_{\text{τομ}} = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot r$ (σαν «τρίγωνο» με βάση το τόξο και ύψος την ακτίνα).

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 3.6.1

Να βρεθεί το εμβαδόν κυκλικού τομέα 72° σε κύκλο ακτίνας 10 cm.

ΛΥΣΗ

$$E = \frac{\pi \cdot 100 \cdot 72}{360} = 20\pi \approx 62,8 \text{ cm}^2. \text{ (} 72^\circ \text{ είναι το } \frac{1}{5} \text{ του κύκλου.)}$$

Παράδειγμα 3.6.2

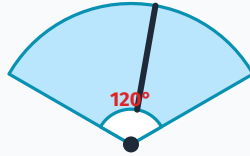
Ένας κυκλικός τομέας ακτίνας 6 cm έχει εμβαδόν $9\pi \text{ cm}^2$. Πόσες μοίρες είναι;

ΛΥΣΗ

$$\frac{\pi \cdot 36 \cdot \mu}{360} = 9\pi \Rightarrow \frac{\mu}{10} = 9 \Rightarrow \mu = 90^\circ.$$

Παράδειγμα 3.6.3

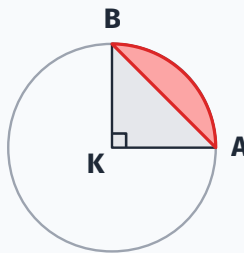
Ο υαλοκαθαριστήρας ενός αυτοκινήτου έχει λάστιχο μήκους 45 cm, στερεωμένο σε βραχίονα ώστε να απέχει από 15 cm έως 60 cm από τον άξονα. Διαγράφει γωνία 120° . Πόση επιφάνεια καθαρίζει;

**ΛΥΣΗ**

Είναι το «κομμάτι» δακτυλίου: $E = \frac{\pi(60^2 - 15^2) \cdot 120}{360} = \frac{\pi \cdot 3375}{3} = 1125\pi \approx 3532,5 \text{ cm}^2$.

Παράδειγμα 3.6.4 — Κυκλικό τμήμα

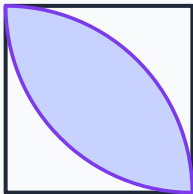
Να βρεθεί το εμβαδόν του κυκλικού **τμήματος** (της περιοχής ανάμεσα σε χορδή και τόξο) που αντιστοιχεί σε τόξο 90° κύκλου ακτίνας 4 cm.

**ΛΥΣΗ**

Τομέας 90° : $\frac{\pi \cdot 16}{4} = 4\pi$. Τρίγωνο KAB (ορθογώνιο, κάθετες 4 και 4): 8. Κυκλικό τμήμα: $4\pi - 8 \approx 4,56 \text{ cm}^2$.

Παράδειγμα 3.6.5

Να βρεθεί το εμβαδόν της σκιασμένης «λεπίδας» μέσα σε τετράγωνο πλευράς 2 cm, που σχηματίζεται από δύο τεταρτοκύκλια με κέντρα δύο απέναντι κορυφές.



ΛΥΣΗ

Κάθε τεταρτοκύκλιο έχει εμβαδόν $\frac{\pi \cdot 4}{4} = \pi$. Το τετράγωνο έχει εμβαδόν 4. Η «λεπίδα» μετρίεται δύο φορές στα τεταρτοκύκλια: $2\pi - 4 \approx 2,28 \text{ cm}^2$.

⊗ Συχνό λάθος

✗ Λάθος

$$E_{\text{τομ}} = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu}{180}$$

✓ Σωστό

Αυτό είναι το **μήκος τόξου**. Το εμβαδόν: $\frac{\pi \rho^2 \mu}{360}$

Ένας γρήγορος έλεγχος: «Ποιο είναι το μέρος του κύκλου; Παίρνω το ίδιο μέρος από το $2\pi\rho$ για μήκος ή από το $\pi\rho^2$ για εμβαδόν.»

📖 Ανακεφαλαίωση τύπων του κύκλου

Μέγεθος	Ολόκληρος κύκλος	Τόξο / τομέας μ°
Μήκος	$L = 2\pi\rho$	$\ell = \frac{\pi\rho\mu}{180}$
Εμβαδόν	$E = \pi\rho^2$	$E = \frac{\pi\rho^2\mu}{360}$



Θέλεις να ελέγξεις αν το κατάλαβες; Λύσε τα **διαδραστικά κουίζ** του μαθήματος στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν ψηφιακό φροντιστήριο.

www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- Να βρεις το εμβαδόν κυκλικού τομέα: α) 45° σε κύκλο ακτίνας 8 cm β) 120° σε κύκλο ακτίνας 3 m γ) 270° σε κύκλο ακτίνας 2 cm.
- Ένας κυκλικός τομέας 40° έχει εμβαδόν $3,14 \text{ cm}^2$. Να βρεις την ακτίνα.
- Σε κυκλικό διάγραμμα ακτίνας 5 cm, ο τομέας «Ποδόσφαιρο» είναι 144° . Πόσο είναι το εμβαδόν του;

- 4 Μια πίτσα διαμέτρου 32 cm κόβεται σε 8 ίσα κομμάτια. Πόσο είναι το εμβαδόν κάθε κομματιού και το μήκος της «κόρας» του;
- 5 Να βρεις το εμβαδόν κυκλικού τομέα με ακτίνα 10 cm και μήκος τόξου 15 cm.
- 6 Να βρεις το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που αντιστοιχεί σε τόξο 60° κύκλου ακτίνας 6 cm. (Το τρίγωνο KAB είναι ισόπλευρο.)

ΚΕΦ.

3

Σε μια ματιά — Ανακεφαλαίωση Κεφαλαίου 30

Πριν προχωρήσεις στο επόμενο κεφάλαιο ή πριν από το διαγώνισμα, έλεγξε ότι θυμάσαι όλα τα παρακάτω. Αν κάτι δεν σου είναι ξεκάθαρο, γύρνα στο αντίστοιχο μάθημα.

Έννοια	Τι πρέπει να θυμάμαι
Εγγεγραμμένη γωνία	= μισή επίκεντρη στο ίδιο τόξο· σε ημικύκλιο = 90°
Κανονικό ν-γωνο	$\omega = \frac{360^\circ}{n}$, $\varphi = 180^\circ - \omega$ · εξάγωνο: $\lambda_6 = \rho$
Μήκος κύκλου	$L = 2\pi\rho$
Μήκος τόξου	$\ell = \frac{\pi\rho\mu}{180}$
Εμβαδόν δίσκου	$E = \pi\rho^2$
Εμβαδόν τομέα	$E = \frac{\pi\rho^2\mu}{360}$
Ακτίνιο	$\pi \text{ rad} = 180^\circ$

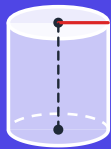
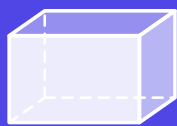


Πριν από το διαγώνισμα του κεφαλαίου, λύσε τα **επαναληπτικά κουίζ** και δες τα βίντεομαθήματα στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο.
www.mathgreece.com

4

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο

Γεωμετρικά στερεά – Μέτρηση στερεών



Ο κόσμος μας έχει τρεις διαστάσεις. Στο τελευταίο κεφάλαιο γνωρίζουμε τις ευθείες και τα επίπεδα του χώρου και μελετάμε τα βασικά γεωμετρικά στερεά — πρίσμα, κύλινδρο, πυραμίδα, κώνο και σφαίρα — μαθαίνοντας να υπολογίζουμε την επιφάνεια και τον όγκο τους. Το ταξίδι κλείνει πάνω στη σφαίρα της Γης, με τις γεωγραφικές συντεταγμένες.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 4.1 Ευθείες και επίπεδα στον χώρο
- 4.2 Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου
- 4.3 Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου
- 4.4 Η πυραμίδα και τα στοιχεία της
- 4.5 Ο κώνος και τα στοιχεία του
- 4.6 Η σφαίρα και τα στοιχεία της
- 4.7 Γεωγραφικές συντεταγμένες

ΜΑΘΗΜΑ

4.1

Ευθείες και επίπεδα στον χώρο

Ως τώρα η Γεωμετρία μας «ζούσε» πάνω σε ένα φύλλο χαρτιού. Τώρα βγαίνουμε στον χώρο των τριών διαστάσεων: εκεί δύο ευθείες μπορούν να μη συναντιούνται ποτέ χωρίς να είναι παράλληλες!

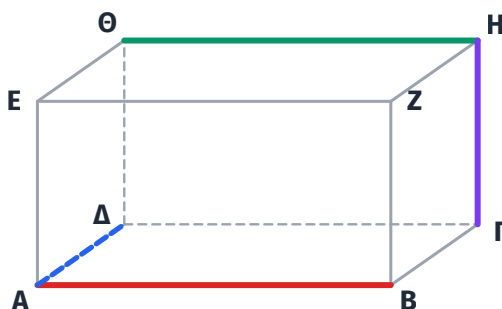
Το επίπεδο

Το **επίπεδο** το φανταζόμαστε σαν μια τέλεια λεία επιφάνεια που εκτείνεται απεριόριστα προς όλες τις κατευθύνσεις — όπως η επιφάνεια ενός τραπέζιού ή ενός τοίχου, χωρίς όρια. Το σχεδιάζουμε σαν παραλληλόγραμμα και το ονομάζουμε με ένα μικρό ελληνικό γράμμα, π.χ. π .

☆ Πότε ορίζεται ένα επίπεδο

- Από **τρία σημεία** που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία (γι' αυτό ένα τρίποδο δεν «κουτσαίνει» ποτέ, ενώ ένα τραπέζι με 4 πόδια μπορεί!).
- Από μια ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής.
- Από δύο τεμνόμενες ευθείες.
- Από δύο παράλληλες ευθείες.

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών



Στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο: AB και AD τέμνονται · AB και ΘH είναι παράλληλες · AB και ΓH είναι ασύμβατες

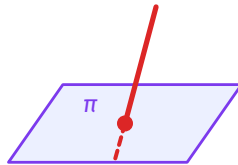
Θέση	Κοινά σημεία	Βρίσκονται σε ένα επίπεδο;
Τεμνόμενες	ένα	ναι
Παράλληλες	κανένα	ναι
Ασύμβατες	κανένα	όχι

Ορισμός · Ασύμβατες ευθείες

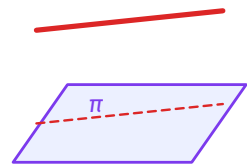
Δύο ευθείες του χώρου που **δεν** βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο λέγονται **ασύμβατες**. Δεν τέμνονται, αλλά ούτε είναι παράλληλες. Παράδειγμα: μια γραμμή του δαπέδου και μια γραμμή του ταβανιού που «διασταυρώνεται» μαζί της από πάνω.

Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου

Η ευθεία ανήκει στο επίπεδο



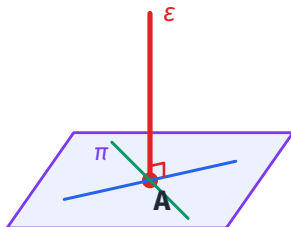
Η ευθεία τέμνει το επίπεδο



Η ευθεία είναι παράλληλη

Ορισμός · Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

Μια ευθεία ϵ που τέμνει ένα επίπεδο π στο σημείο A λέγεται **κάθετη στο επίπεδο** όταν είναι κάθετη σε **κάθε** ευθεία του επιπέδου που περνά από το A . (Αρκεί να είναι κάθετη σε **δύο** τέτοιες ευθείες.) Π.χ. ένας στύλος κάθετος στο έδαφος.



Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

Απόσταση σημείου από επίπεδο λέγεται το μήκος του κάθετου τμήματος από το σημείο προς το επίπεδο. Έτσι ορίζεται, για παράδειγμα, το **ύψος** ενός πρίσματος, μιας πυραμίδας ή ενός κώνου.

Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων

Δύο επίπεδα είτε **τέμνονται** (και η τομή τους είναι **ευθεία**, όπως δύο τοίχοι που συναντιούνται σε μια ακμή), είτε είναι **παράλληλα** (κανένα κοινό σημείο, όπως το δάπεδο και το ταβάνι).

Λυμένα παραδείγματα**Παράδειγμα 4.1.1**

Στον κύβο $ΑΒΓΔΕΖΗΘ$ να βρεθούν: α) μια ακμή παράλληλη στην $ΑΒ$, β) μια ακμή ασύμβατη με την $ΑΒ$, γ) μια ακμή κάθετη στο επίπεδο της βάσης $ΑΒΓΔ$.

ΛΥΣΗ

(Με κάτω βάση ΑΒΓΔ και πάνω ΕΖΗΘ, όπου Ε πάνω από το Α κ.ο.κ.) α) ΔΓ ή ΕΖ ή ΘΗ. β) ΓΗ ή ΔΘ (ή ΕΘ, ΖΗ). γ) ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ.

Παράδειγμα 4.1.2

Γιατί η πόρτα ενός δωματίου ανοιγοκλείνει ενώ στέκεται πάντα κάθετα στο πάτωμα;

ΛΥΣΗ

Οι μεντεσέδες βρίσκονται σε μια ευθεία (τον άξονα) κάθετη στο πάτωμα. Κάθε επίπεδο που περιέχει μια ευθεία κάθετη σε ένα επίπεδο είναι κι αυτό κάθετο σε αυτό. Έτσι σε κάθε θέση η πόρτα παραμένει κάθετη στο πάτωμα.

⊗ Συχνό λάθος

× Λάθος

«Δύο ευθείες που δεν τέμνονται είναι παράλληλες»

✓ Σωστό

Στον χώρο μπορεί να είναι και **ασύμβατες**

Αυτό ισχύει μόνο στο επίπεδο. Στον χώρο, για να είναι παράλληλες, πρέπει επιπλέον να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.



Θέλεις να δεις αυτό το μάθημα και σε **βίντεο**, βήμα-βήμα; Στο **mathgreece.com** θα βρεις ολοκληρωμένο, **δωρεάν** φροντιστήριο για όλη την ύλη της Β' Γυμνασίου.
www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να βρεις στην τάξη σου: α) δύο παράλληλες ευθείες β) δύο ασύμβατες ευθείες γ) δύο παράλληλα επίπεδα δ) μια ευθεία κάθετη σε επίπεδο.
- 2 Σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, πόσες ακμές είναι παράλληλες σε μια δοσμένη ακμή; Πόσες τέμνονται με αυτήν; Πόσες είναι ασύμβατες;
- 3 Γιατί μια φωτογραφική μηχανή στερεώνεται σε τρίποδο και όχι σε «τετράποδο»;
- 4 Σωστό ή Λάθος; α) Δύο επίπεδα που τέμνονται έχουν κοινή μια ευθεία. β) Από τρία οποιαδήποτε σημεία περνά ένα μόνο επίπεδο. γ) Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε δύο τεμνόμενες ευθείες ενός επιπέδου στο σημείο τομής τους, είναι κάθετη στο επίπεδο.

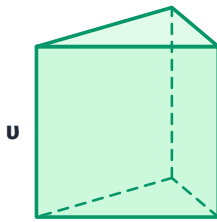
ΜΑΘΗΜΑ

4.2

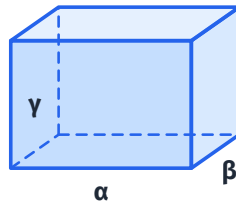
Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου

Κουτιά, κονσέρβες, σωλήνες, ενυδρεία: τα πρίσματα και οι κύλινδροι είναι παντού γύρω μας. Εδώ μαθαίνουμε τα στοιχεία τους και πώς υπολογίζουμε πόσο υλικό χρειάζεται για να τα κατασκευάσουμε (εμβαδόν επιφάνειας).

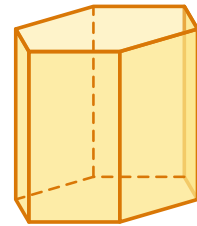
Το πρίσμα και τα στοιχεία του



Τριγωνικό πρίσμα



Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο



Εξαγωνικό πρίσμα

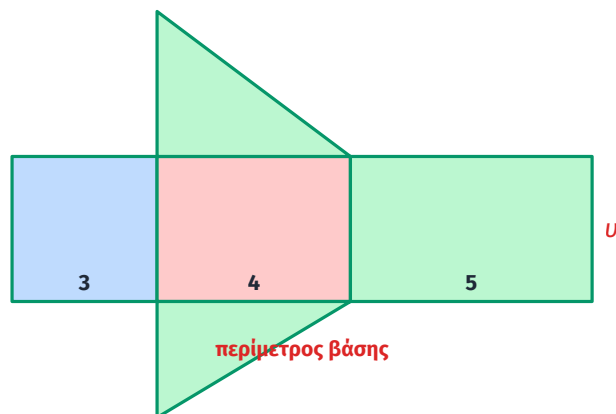
Ορισμός · Ορθό πρίσμα

Ένα στερεό με **δύο ίσες και παράλληλες έδρες** (τις **βάσεις**), που είναι πολύγωνα, και με όλες τις άλλες έδρες **ορθογώνια** κάθετα στις βάσεις (τις **παράπλευρες έδρες**) λέγεται **ορθό πρίσμα**.

- Οι πλευρές των εδρών λέγονται **ακμές**. Οι παράπλευρες ακμές είναι ίσες και παράλληλες.
- Η απόσταση των δύο βάσεων λέγεται **ύψος ν** (στο ορθό πρίσμα ισούται με την παράπλευρη ακμή).
- Το πρίσμα παίρνει το όνομά του από τη βάση: τριγωνικό, τετραγωνικό, πενταγωνικό... Αν η βάση είναι **κανονικό** πολύγωνο, το πρίσμα λέγεται **κανονικό**.
- Ειδικές περιπτώσεις: **ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο** (βάση ορθογώνιο) και **κύβος** (όλες οι έδρες τετράγωνα).

Εμβαδόν επιφάνειας πρίσματος

Αν «ανοίξουμε» ένα πρίσμα, παίρνουμε το **ανάπτυγμά** του: οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν ένα **ορθογώνιο** με βάση την περίμετρο της βάσης και ύψος το ύψος του πρίσματος.



Ανάπτυγμα τριγωνικού πρίσματος

☆ Εμβαδόν πρίσματος

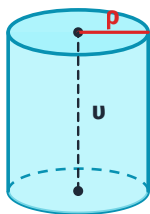
$$E_{\pi} = (\text{περίμετρος βάσης}) \times \upsilon$$

$$E_{ολ} = E_{\pi} + 2E_{\beta}$$

E_{π} : παράπλευρη επιφάνεια, E_{β} : εμβαδόν μιας βάσης, $E_{ολ}$: ολική επιφάνεια.

Στερεό	Ολική επιφάνεια
Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $\alpha \times \beta \times \gamma$	$E_{ολ} = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$
Κύβος ακμής α	$E_{ολ} = 6\alpha^2$

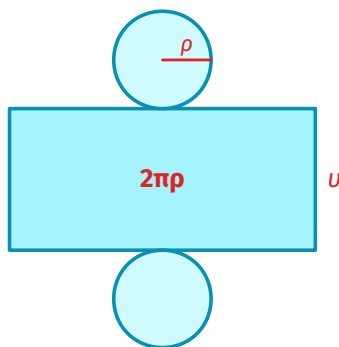
📖 Ο κύλινδρος



📖 Ορισμός · Κύλινδρος

Ο (ορθός κυκλικός) **κύλινδρος** έχει δύο **βάσεις** που είναι ίσοι κύκλοι σε παράλληλα επίπεδα, και μια καμπύλη **παράπλευρη επιφάνεια**. Παράγεται αν περιστρέψουμε ένα ορθογώνιο γύρω από μία πλευρά του. Η απόσταση των βάσεων είναι το **ύψος** υ και η ακτίνα των βάσεων η **ακτίνα** ρ .

Αν κόψουμε την ετικέτα μιας κονσέρβας κατά μήκος και την ξετυλίξουμε, παίρνουμε ένα **ορθογώνιο** με διαστάσεις: το μήκος του κύκλου της βάσης ($2\pi\rho$) και το ύψος (υ).



Ανάπτυγμα κυλίνδρου: ένα ορθογώνιο $2\pi\rho \times \upsilon$ και δύο κύκλοι

☆ Εμβαδόν κυλίνδρου

$$E_{\pi} = 2\pi\rho \cdot \upsilon$$

$$E_{ολ} = 2\pi\rho\upsilon + 2\pi\rho^2$$

📖 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 4.2.1

Ένα κουτί δημητριακών έχει διαστάσεις $20\text{ cm} \times 7\text{ cm} \times 30\text{ cm}$. Πόσο χαρτόνι χρειάζεται (χωρίς τα «αυτάκια»);

ΛΥΣΗ

$$E_{ολ} = 2(20 \cdot 7 + 7 \cdot 30 + 30 \cdot 20) = 2(140 + 210 + 600) = 1900\text{ cm}^2.$$

Παράδειγμα 4.2.2

Ένα ορθό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες 6 cm και 8 cm και ύψος 10 cm . Να βρεθεί η ολική του επιφάνεια.

ΛΥΣΗ

Υποτείνουσα: $\sqrt{36 + 64} = 10$. Περίμετρος βάσης: 24 . $E_{\pi} = 24 \cdot 10 = 240$. $E_{\beta} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$.

$$E_{ολ} = 240 + 48 = 288\text{ cm}^2.$$

Παράδειγμα 4.2.3

Μια κονσέρβα έχει διάμετρο 8 cm και ύψος 11 cm. Πόσο χαρτί χρειάζεται η ετικέτα της και πόση λαμαρίνα όλη η κονσέρβα;



ΛΥΣΗ

$\rho = 4$. Ετικέτα: $E_{\pi} = 2 \cdot 3,14 \cdot 4 \cdot 11 \approx 276,3 \text{ cm}^2$. Βάσεις: $2 \cdot 3,14 \cdot 4^2 \approx 100,5 \text{ cm}^2$. Σύνολο $\approx 376,8 \text{ cm}^2$.

⊗ Συχνό λάθος

× Λάθος

Ολική επιφάνεια κυλίνδρου: $2\pi r h + \pi r^2$

✓ Σωστό

$2\pi r h + 2\pi r^2$

Ο κύλινδρος έχει **δύο** βάσεις. (Αν η άσκηση μιλά για ανοιχτό δοχείο, π.χ. ποτήρι, τότε μόνο μία!)



Για περισσότερες λυμένες ασκήσεις, **κουίζ αυτοαξιολόγησης** και σημειώσεις, μπες στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών.
www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να βρεις την ολική επιφάνεια: α) κύβου ακμής 5 cm β) ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου $8 \times 5 \times 3 \text{ cm}$.
- 2 Ένα κανονικό εξαγωνικό πρίσμα έχει ακμή βάσης 4 cm και ύψος 10 cm. Να βρεις την παράπλευρη επιφάνεια.
- 3 Ένας κύλινδρος έχει ακτίνα 5 cm και ύψος 12 cm. Να βρεις την παράπλευρη και την ολική επιφάνεια.
- 4 Ένα ανοιχτό κυλινδρικό ποτήρι έχει διάμετρο 6 cm και ύψος 10 cm. Πόσο γυαλί χρειάζεται;
- 5 Μια αίθουσα $8 \text{ m} \times 6 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ θα βαφτεί (τοίχοι και ταβάνι, όχι πάτωμα). Αν πόρτες και παράθυρα καλύπτουν 10 m^2 , πόση επιφάνεια θα βαφτεί;
- 6 Ο κύβος έχει ολική επιφάνεια 216 cm^2 . Πόση είναι η ακμή του;
- 7 Ένας κυλινδρικός κύλινδρος βαψίματος (ρολό) έχει διάμετρο 5 cm και μήκος 25 cm. Πόση επιφάνεια βάφει σε 20 περιστροφές;

ΜΑΘΗΜΑ

4.3

Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

Πόσο νερό χωράει ένα ενυδρείο; Πόσο μπετόν χρειάζεται μια κολόνα; Ο όγκος μετρά τον χώρο που καταλαμβάνει ένα στερεό — και για τα πρίσματα και τους κυλίνδρους υπολογίζεται με τον ίδιο απλό κανόνα.

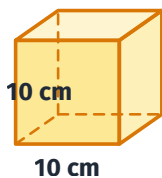
Μονάδες όγκου

Ορισμός · Όγκος

Όγκος ενός στερεού είναι ο θετικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές χωράει σε αυτό η **μονάδα όγκου**: ένας κύβος με ακμή 1 μονάδα μήκους. Βασική μονάδα είναι το **κυβικό μέτρο** (m^3).

Μονάδα	Σχέση
1 m^3	$= 1.000 \text{ dm}^3$
1 dm^3	$= 1.000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ λίτρο (l)}$
1 cm^3	$= 1.000 \text{ mm}^3 = 1 \text{ ml}$
1 m^3	$= 1.000 \text{ λίτρα}$

Στον όγκο, κάθε φορά που κατεβαίνουμε μία μονάδα πολλαπλασιάζουμε με **1.000** ($10 \times 10 \times 10$).



$$1 \text{ dm}^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ λίτρο}$$

⊗ Συχνό λάθος

× Λάθος

$$1 \text{ m}^3 = 100 \text{ dm}^3$$

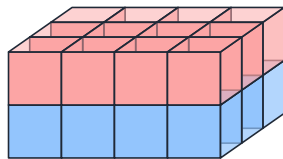
✓ Σωστό

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$$

Μήκος: $\times 10$, εμβαδόν: $\times 100$, όγκος: $\times 1000$.

Όγκος πρίσματος

Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $4 \times 3 \times 2$ αποτελείται από 2 «στρώσεις» των $4 \times 3 = 12$ κυβακίων, δηλαδή 24 κυβάκια. Γενικά, ο όγκος βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε το εμβαδόν της βάσης (πόσα κυβάκια έχει μια στρώση) με το ύψος (πόσες στρώσεις):



Δύο στρώσεις των 12 κύβων: $V = 12 \cdot 2 = 24$

☆ Όγκος πρίσματος

$$V = E_{\beta} \cdot v$$

Στερεό	Όγκος
Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο	$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$
Κύβος	$V = \alpha^3$

📖 Όγκος κυλίνδρου

☆ Όγκος κυλίνδρου

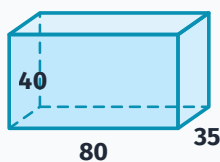
Ο κύλινδρος συμπεριφέρεται σαν «πρίσμα με κυκλική βάση»:

$$V = E_{\beta} \cdot v = \pi \cdot \rho^2 \cdot v$$

📖 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 4.3.1

Ένα ενυδρείο έχει διαστάσεις 80 cm × 35 cm × 40 cm. Πόσα λίτρα νερό χωράει;



ΛΥΣΗ

$$V = 80 \cdot 35 \cdot 40 = 112.000 \text{ cm}^3 = 112 \text{ dm}^3 = 112 \text{ λίτρα.}$$

Παράδειγμα 4.3.2

Ένας κυλινδρικός θερμοσίφωνας έχει ακτίνα 25 cm και ύψος 1,2 m. Πόσα λίτρα νερό χωράει;

ΛΥΣΗ

Σε dm: $\rho = 2,5$, $v = 12$. $V = 3,14 \cdot 6,25 \cdot 12 = 235,5 \text{ dm}^3 = 235,5 \text{ λίτρα}$.

💡 Κόλπο

Αν θέλεις το αποτέλεσμα σε λίτρα, δούλεψε κατευθείαν σε **dm**: τα dm^3 είναι λίτρα!

Παράδειγμα 4.3.3

Μια κολόνα σχήματος ορθού πρίσματος με βάση τετράγωνο πλευράς 40 cm έχει ύψος 3 m. Πόσα m^3 μπετόν χρειάζονται;

ΛΥΣΗ

$V = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 3 = 0,48 \text{ m}^3$.

Παράδειγμα 4.3.4 — Η ιδέα του Αρχιμήδη

Ένα ποτήρι κυλινδρικό με διάμετρο 6 cm περιέχει νερό σε ύψος 8 cm. Ρίχνουμε μια πέτρα και η στάθμη ανεβαίνει στα 9,5 cm. Πόσος είναι ο όγκος της πέτρας;

ΛΥΣΗ

Ο όγκος της πέτρας είναι ο όγκος του νερού που «σήκωσε»: $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 1,5 = 13,5\pi \approx 42,4 \text{ cm}^3$.

⚠ Προσοχή!

Αν οι διαστάσεις δίνονται σε **διαφορετικές** μονάδες (π.χ. cm και m), μετάντρεψε πρώτα όλες στην ίδια μονάδα!



Κόλλησες κάπου; Στο **mathgreece.com** υπάρχουν βιντεομαθήματα, podcasts και παιχνίδια γνώσεων για κάθε ενότητα — όλα **δωρεάν**.
www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να μετατρέψεις: α) $3,5 \text{ m}^3$ σε λίτρα β) 2.500 cm^3 σε λίτρα γ) $0,75 \text{ λίτρα}$ σε cm^3 δ) 45.000 λίτρα σε m^3 .
- 2 Να βρεις τον όγκο: α) κύβου ακμής 7 cm β) ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου $12 \times 5 \times 2,5 \text{ m}$.
- 3 Ένα ορθό πρίσμα με βάση τρίγωνο εμβαδού 18 cm^2 έχει όγκο 216 cm^3 . Πόσο είναι το ύψος του;
- 4 Να βρεις τον όγκο κυλίνδρου με ακτίνα 3 cm και ύψος 10 cm.

- 5** Μια πισίνα $25\text{ m} \times 10\text{ m}$ έχει παντού βάθος $1,8\text{ m}$. Πόσα λίτρα νερό χρειάζονται για να γεμίσει; Αν η αντλία ρίχνει 15 m^3 την ώρα, σε πόσες ώρες θα γεμίσει;
- 6** Ένας κύβος έχει όγκο 64 cm^3 . Να βρεις την ολική επιφάνειά του.
- 7** Ένα κουτί αναψυκτικού έχει διάμετρο $6,6\text{ cm}$ και ύψος 12 cm . Χωράει 330 ml ; ($\pi \approx 3,14$)
- 8** Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κυλίνδρου (και κρατήσουμε το ύψος), τι γίνεται ο όγκος; Αν διπλασιάσουμε το ύψος;

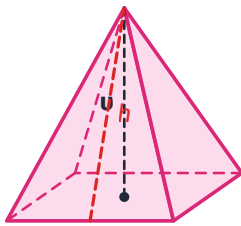
ΜΑΘΗΜΑ

4.4

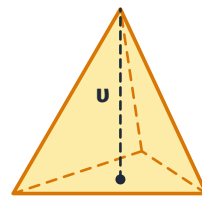
Η πυραμίδα και τα στοιχεία της

Οι πυραμίδες της Αιγύπτου στέκουν όρθιες 4.500 χρόνια. Γεωμετρικά, η πυραμίδα είναι ένα στερεό με μια πολυγωνική βάση και τριγωνικές έδρες που συγκλίνουν σε μια κορυφή. Θα μάθουμε να υπολογίζουμε την επιφάνεια και τον όγκο της.

Στοιχεία της πυραμίδας



Κανονική τετραγωνική πυραμίδα



Τριγωνική πυραμίδα (τετράεδρο)

Ορισμός · Πυραμίδα

Ένα στερεό που η μία του έδρα (η **βάση**) είναι πολύγωνο και όλες οι άλλες (οι **παράπλευρες έδρες**) είναι **τρίγωνα** με κοινή κορυφή (την **κορυφή** της πυραμίδας) λέγεται **πυραμίδα**. Η απόσταση της κορυφής από το επίπεδο της βάσης είναι το **ύψος** $υ$.

Ορισμός · Κανονική πυραμίδα

Μια πυραμίδα λέγεται **κανονική** όταν η βάση της είναι **κανονικό πολύγωνο** και το ύψος της «πέφτει» στο **κέντρο** της βάσης. Τότε οι παράπλευρες έδρες είναι **ίσα ισοσκελή** τρίγωνα. Το ύψος καθεμιάς από αυτές (από την κορυφή προς την πλευρά της βάσης) λέγεται **απόστημα** h της πυραμίδας.

Εμβαδόν επιφάνειας

☆ Κανονική πυραμίδα

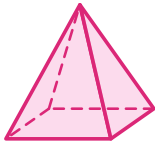
$$E_{\pi} = \frac{1}{2} \cdot (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot h$$

$$E_{\text{ολ}} = E_{\pi} + E_{\beta}$$

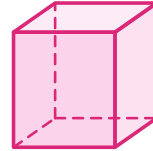
(Η παράπλευρη επιφάνεια είναι n ίσα τρίγωνα με βάση την πλευρά a και ύψος το απόστημα h : $n \cdot \frac{a \cdot h}{2}$.)

Όγκος

Αν γεμίσουμε μια πυραμίδα με άμμο και την αδειάσουμε σε ένα πρίσμα με την **ίδια βάση** και το **ίδιο ύψος**, θα χρειαστούμε ακριβώς **τρεις** φορές για να το γεμίσουμε!



$$\times 3 =$$

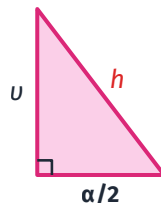


☆ Όγκος πυραμίδας

$$V = \frac{1}{3} \cdot E_{\beta} \cdot v$$

Προσοχή!

Στον όγκο μπαίνει το **ύψος** v της πυραμίδας (κατακόρυφο), ενώ στην παράπλευρη επιφάνεια μπαίνει το **απόστημα** h (πάνω στην έδρα). Συνδέονται με Πυθαγόρειο: στην τετραγωνική πυραμίδα πλευράς α , $h^2 = v^2 + (\frac{\alpha}{2})^2$.



Το ορθογώνιο τρίγωνο που συνδέει ύψος v , απόστημα h και μισή πλευρά $\frac{\alpha}{2}$

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 4.4.1

Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 10 cm και ύψος 12 cm. Να βρεθούν το απόστημα, η ολική επιφάνεια και ο όγκος.

ΛΥΣΗ

Απόστημα: $h = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ cm.

$$E_{\pi} = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 13 = 260 \text{ cm}^2, E_{\beta} = 100, E_{ολ} = 360 \text{ cm}^2.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400 \text{ cm}^3.$$

Παράδειγμα 4.4.2 — Ιστορία

Η Μεγάλη Πυραμίδα της Γκίζας είχε αρχικά βάση τετράγωνο πλευράς περίπου 230 m και ύψος 146 m. Να εκτιμηθεί ο όγκος της.

ΛΥΣΗ

$$V \approx \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 146 = \frac{1}{3} \cdot 52.900 \cdot 146 \approx 2.574.000 \text{ m}^3 \text{ — περίπου 2,6 εκατομμύρια κυβικά μέτρα πέτρας!}$$

Παράδειγμα 4.4.3

Ένα κανονικό τετράεδρο (όλες οι έδρες ισόπλευρα τρίγωνα) έχει ακμή 6 cm. Να βρεθεί η ολική του επιφάνεια.

ΛΥΣΗ

$$\text{Τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς 6 με ύψος } 3\sqrt{3}: E_{ολ} = 4 \cdot \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3} \approx 62,4 \text{ cm}^2.$$

⊗ Συχνό λάθος**× Λάθος**

$$V_{\text{πυρ}} = E_{\beta} \cdot v$$

✓ Σωστό

$$V_{\text{πυρ}} = \frac{1}{3} E_{\beta} \cdot v$$

Μην ξεχνάς το $\frac{1}{3}$! Η πυραμίδα είναι πολύ «λιγότερη» από το πρίσμα με την ίδια βάση και ύψος.



Εξάσκηση χωρίς τέλος: στο **mathgreece.com** θα βρεις επιπλέον φυλλάδια ασκήσεων και διαγωνίσματα για τη Β' Γυμνασίου, εντελώς **δωρεάν**.

www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 6 cm και απόστημα 5 cm. Να βρεις την παράπλευρη και την ολική επιφάνεια.
- 2 Με τα δεδομένα της άσκησης 1, να βρεις το ύψος και τον όγκο της πυραμίδας.
- 3 Μια πυραμίδα έχει όγκο 80 cm^3 και ύψος 6 cm. Πόσο είναι το εμβαδόν της βάσης της;
- 4 Ένα πρίσμα και μια πυραμίδα έχουν την ίδια βάση και τον ίδιο όγκο. Αν το ύψος του πρίσματος είναι 5 cm, πόσο είναι το ύψος της πυραμίδας;
- 5 Μια σκηνή κάμπινγκ έχει σχήμα κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας με πλευρά βάσης 2,4 m και ύψος 1,6 m. Πόσο ύφασμα χρειάζεται για τις παράπλευρες έδρες; Πόσος αέρας χωράει μέσα;

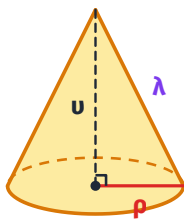
- 6** Πόσες έδρες, κορυφές και ακμές έχει μια εξαγωνική πυραμίδα; Να ελέγξεις τη σχέση του Euler:
 $\text{έδρες} + \text{κορυφές} - \text{ακμές} = 2$.

ΜΑΘΗΜΑ

4.5

Ο κώνος και τα στοιχεία του

Ένα χωνάκι παγωτού, ένας κώνος κυκλοφορίας, η σκεπή ενός πύργου: όλα έχουν σχήμα κώνου. Ο κώνος είναι για τον κύλινδρο ό,τι είναι η πυραμίδα για το πρίσμα.

 Στοιχεία του κώνου

 Ορισμός · Κώνος

Ο (ορθός κυκλικός) **κώνος** παράγεται αν περιστρέψουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο γύρω από μία κάθετη πλευρά του. Έχει:

- μία **βάση**, που είναι κύκλος ακτίνας ρ ,
- μία **κορυφή**,
- **ύψος** u (απόσταση κορυφής από τη βάση),
- **γενέτειρα** λ (το τμήμα από την κορυφή σε σημείο του κύκλου της βάσης).

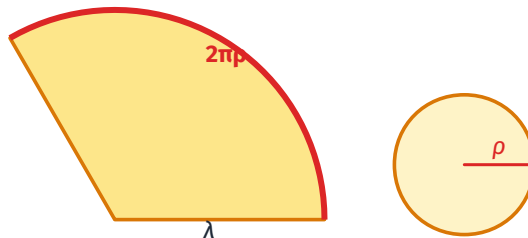
☆ Σχέση ρ , u , λ

Η ακτίνα, το ύψος και η γενέτειρα σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τη γενέτειρα:

$$\lambda^2 = \rho^2 + u^2$$

 Εμβαδόν επιφάνειας

Αν κόψουμε την παράπλευρη επιφάνεια κατά μήκος μιας γενέτειρας και την ανοίξουμε, παίρνουμε έναν **κυκλικό τομέα** με ακτίνα λ και τόξο μήκους $2\pi\rho$. Το εμβαδόν του είναι $\frac{1}{2} \cdot \text{τόξο} \cdot \text{ακτίνα} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\rho \cdot \lambda = \pi\rho\lambda$.



Το ανάπτυγμα του κώνου: κυκλικός τομέας και κύκλος

☆ Εμβαδόν κώνου

$$E_{\pi} = \pi \cdot \rho \cdot \lambda$$

$$E_{ολ} = \pi \rho \lambda + \pi \rho^2$$

📖 Όγκος

☆ Όγκος κώνου

Όπως η πυραμίδα είναι το $\frac{1}{3}$ του πρίσματος, έτσι ο κώνος είναι το $\frac{1}{3}$ του κυλίνδρου με την ίδια βάση και ύψος:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \rho^2 \cdot v$$

📖 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 4.5.1

Ένας κώνος έχει ακτίνα 6 cm και ύψος 8 cm. Να βρεθούν η γενέτειρα, η ολική επιφάνεια και ο όγκος του.



ΛΥΣΗ

$$\lambda = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ cm. } E_{\pi} = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi, E_{\beta} = 36\pi, E_{ολ} = 96\pi \approx 301,4 \text{ cm}^2.$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 36 \cdot 8 = 96\pi \approx 301,4 \text{ cm}^3.$$

Παράδειγμα 4.5.2

Ένα χωνάκι παγωτού έχει διάμετρο 5 cm και ύψος 12 cm. Πόσα ml παγωτό χωράει (μέχρι το χείλος);

ΛΥΣΗ

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 2,5^2 \cdot 12 = 78,5 \text{ cm}^3 = 78,5 \text{ ml.}$$

Παράδειγμα 4.5.3

Ένας σωρός άμμου έχει σχήμα κώνου με διάμετρο βάσης 4 m και γενέτειρα 2,5 m. Πόσα m³ άμμου έχει;

ΛΥΣΗ

$$\rho = 2, v = \sqrt{6,25 - 4} = 1,5 \text{ m. } V = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 4 \cdot 1,5 = 6,28 \text{ m}^3.$$

⊗ Συχνό λάθος

× Λάθος

$$V_{\text{κων}} = \frac{1}{3} \pi \rho^2 \lambda$$

✓ Σωστό

$$V_{\text{κων}} = \frac{1}{3} \pi \rho^2 v$$

Στον όγκο μπαίνει το **ύψος**, στην παράπλευρη επιφάνεια η **γενέτειρα**. Αν η άσκηση δίνει το ένα, βρες το άλλο με Πυθαγόρειο.



Θέλεις να ελέγξεις αν το κατάλαβες; Λύσε τα **διαδραστικά κουίζ** του μαθήματος στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν ψηφιακό φροντιστήριο.
www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Κώνος έχει ακτίνα 5 cm και γενέτειρα 13 cm. Να βρεις το ύψος, την ολική επιφάνεια και τον όγκο του.
- 2 Κώνος έχει όγκο $12\pi \text{ cm}^3$ και ακτίνα 3 cm. Να βρεις το ύψος του.
- 3 Ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες 3 cm και 4 cm περιστρέφεται γύρω από την κάθετη των 4 cm. Τι στερεό παράγεται; Να βρεις τον όγκο του.
- 4 Πόσο χαρτόνι χρειάζεται για ένα κωνικό καπέλο πάρτι με διάμετρο 18 cm και γενέτειρα 25 cm (χωρίς βάση);
- 5 Ένας κύλινδρος και ένας κώνος έχουν ίδια βάση και ίδιο ύψος. Ο κύλινδρος έχει όγκο 450 cm^3 . Πόσος είναι ο όγκος του κώνου;
- 6 Ένα κωνικό ποτήρι έχει ακτίνα 4 cm και ύψος 9 cm. Πόσα τέτοια ποτήρια γεμίζουμε με 1 λίτρο νερό;

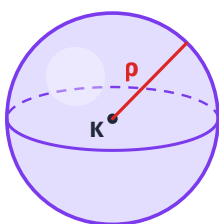
ΜΑΘΗΜΑ

4.6

Η σφαίρα και τα στοιχεία της

Η πιο «τέλεια» μορφή στον χώρο: όλα τα σημεία της απέχουν το ίδιο από το κέντρο. Οι τύποι για την επιφάνεια και τον όγκο της ήταν η ανακάλυψη για την οποία ο Αρχιμήδης ήταν περισσότερο περήφανος.

Στοιχεία της σφαίρας



Ορισμός · Σφαίρα

Η επιφάνεια που αποτελείται από όλα τα σημεία του χώρου που απέχουν **σταθερή απόσταση** ρ από ένα σημείο K λέγεται **σφαίρα** με **κέντρο** K και **ακτίνα** ρ . Παράγεται αν περιστρέψουμε έναν κυκλικό δίσκο γύρω από μια διάμετρό του. Μαζί με το εσωτερικό της αποτελεί τη **σφαιρική μπάλα**.

Κάθε επίπεδο που τέμνει τη σφαίρα την τέμνει σε **κύκλο**. Αν το επίπεδο περνά από το κέντρο, ο κύκλος έχει ακτίνα ρ και λέγεται **μέγιστος κύκλος** (όπως ο Ισημερινός της Γης).

Εμβαδόν και όγκος

☆ Τύποι της σφαίρας

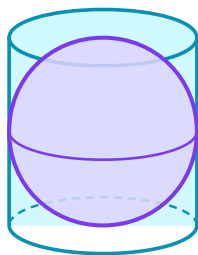
$$E = 4\pi \cdot \rho^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot \rho^3$$

Το εμβαδόν της σφαίρας είναι ίσο με το εμβαδόν **τεσσάρων** μέγιστων κύκλων της.

🏛️ Λίγη ιστορία

Ο **Αρχιμήδης** απέδειξε ότι, αν μια σφαίρα χωράει ακριβώς μέσα σε έναν κύλινδρο (με ύψος ίσο με τη διάμετρο), τότε ο όγκος της σφαίρας είναι τα $\frac{2}{3}$ του όγκου του κυλίνδρου — και το ίδιο ισχύει για τις επιφάνειες! Ήταν τόσο περήφανος γι' αυτό, που ζήτησε να χαραχτεί στον τάφο του μια σφαίρα μέσα σε κύλινδρο.



$$V_{\text{σφ}} = \frac{2}{3} V_{\text{κυλ}} = \frac{2}{3} \cdot \pi \rho^2 \cdot 2\rho = \frac{4}{3} \pi \rho^3$$

Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 4.6.1

Μια μπάλα μπάσκετ έχει διάμετρο περίπου 24 cm. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειάς της και ο όγκος της.

ΛΥΣΗ

$$\rho = 12. \quad E = 4 \cdot 3,14 \cdot 144 \approx 1808,6 \text{ cm}^2. \quad V = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 1728 \approx 7234,6 \text{ cm}^3 \approx 7,2 \text{ λίτρα.}$$

Παράδειγμα 4.6.2

Μια σφαίρα έχει εμβαδόν 314 cm². Να βρεθεί η ακτίνα της.

ΛΥΣΗ

$$4 \cdot 3,14 \cdot \rho^2 = 314 \Rightarrow \rho^2 = 25 \Rightarrow \rho = 5 \text{ cm.}$$

Παράδειγμα 4.6.3

Ένα ημισφαιρικό μπολ έχει εσωτερική ακτίνα 9 cm. Πόση σούπα χωράει;

ΛΥΣΗ

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 729 = 486\pi \approx 1526 \text{ cm}^3 \approx 1,5 \text{ λίτρα.}$$

Παράδειγμα 4.6.4 — Η Γη

Η Γη έχει ακτίνα περίπου 6.370 km. Να εκτιμηθεί η επιφάνειά της. Αν περίπου το 71% είναι θάλασσα, πόση είναι η επιφάνεια της ξηράς;

ΛΥΣΗ

$$E \approx 4 \cdot 3,14 \cdot 6370^2 \approx 509,6 \text{ εκατομμύρια km}^2. \quad \text{Ξηρά: } \approx 0,29 \cdot 509,6 \approx 148 \text{ εκατομμύρια km}^2.$$

⚠ Προσοχή!

Το εμβαδόν της σφαίρας μετρείται σε **τετραγωνικές** μονάδες (ρ^2), ο όγκος σε **κυβικές** (ρ^3). Αν διπλασιαστεί η ακτίνα, το εμβαδόν τετραπλασιάζεται, ενώ ο όγκος γίνεται **8 φορές** μεγαλύτερος!

⊗ Συχνό λάθος**× Λάθος**

$$V = \frac{4}{3} \pi \rho^2$$

✓ Σωστό

$$V = \frac{4}{3} \pi \rho^3$$

Ο όγκος έχει πάντα «τρεις διαστάσεις» — άρα ρ^3 .

📖 Συνοπτικός πίνακας στερεών

Στερεό	Παράπλευρη επιφάνεια	Όγκος
Πρίσμα	(περίμ. βάσης)· v	$E_{\beta} \cdot v$
Κύλινδρος	$2\pi r v$	$\pi r^2 v$
Κανονική πυραμίδα	$\frac{1}{2}$ (περίμ. βάσης)· h	$\frac{1}{3} E_{\beta} \cdot v$
Κώνος	$\pi r l$	$\frac{1}{3} \pi r^2 v$
Σφαίρα	$4\pi \rho^2$ (ολική)	$\frac{4}{3} \pi \rho^3$



Θέλεις να δεις αυτό το μάθημα και σε **βίντεο**, βήμα-βήμα; Στο **mathgreece.com** θα βρεις ολοκληρωμένο, **δωρεάν** φροντιστήριο για όλη την ύλη της Β' Γυμνασίου.

www.mathgreece.com

✍ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να βρεις το εμβαδόν και τον όγκο σφαίρας με ακτίνα 3 cm.
- 2 Μια σφαίρα έχει όγκο $\frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3$. Να βρεις την ακτίνα της.
- 3 Πόσο δέρμα χρειάζεται για μια μπάλα ποδοσφαίρου διαμέτρου 22 cm;
- 4 Μια σφαίρα χωράει ακριβώς σε κύβο ακμής 10 cm. Τι ποσοστό του όγκου του κύβου καταλαμβάνει;
- 5 Αν η ακτίνα μιας σφαίρας τριπλασιαστεί, πόσες φορές μεγαλώνουν το εμβαδόν και ο όγκος;
- 6 Ένα παγωτό αποτελείται από κώνο ακτίνας 3 cm και ύψους 10 cm, γεμάτο, με ένα ημισφαίριο παγωτού από πάνω. Πόσο παγωτό υπάρχει συνολικά;

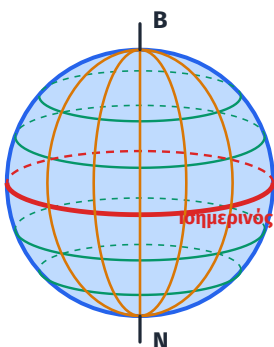
ΜΑΘΗΜΑ

4.7

Γεωγραφικές συντεταγμένες

Πώς δίνουμε τη «διεύθυνση» οποιουδήποτε σημείου πάνω στη Γη; Όπως στο επίπεδο χρησιμοποιούμε δύο αριθμούς (x, y) , έτσι και στη σφαίρα της Γης χρησιμοποιούμε δύο γωνίες: το γεωγραφικό πλάτος και το γεωγραφικό μήκος. Είναι η μαθηματική βάση του GPS!

Οι βασικοί κύκλοι της Γης



Ισημερινός, παράλληλοι και μεσημβρινοί

- Η Γη περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα που περνά από τον **Βόρειο (Β)** και τον **Νότιο (Ν)** πόλο.
- Ο **Ισημερινός** είναι ο μέγιστος κύκλος που απέχει το ίδιο από τους δύο πόλους· χωρίζει τη Γη στο βόρειο και στο νότιο ημισφαίριο.
- Οι **παράλληλοι** είναι κύκλοι παράλληλοι προς τον Ισημερινό· μικραίνουν όσο πλησιάζουμε στους πόλους.
- Οι **μεσημβρινοί** είναι μισοί μέγιστοι κύκλοι που ενώνουν τους δύο πόλους. **Πρώτος μεσημβρινός** θεωρείται αυτός που περνά από το αστεροσκοπείο του **Γκρίνουιτς** (Λονδίνο).

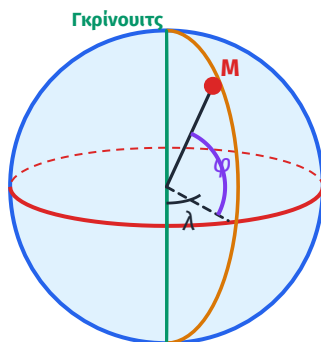
Γεωγραφικό πλάτος και μήκος

Ορισμός · Γεωγραφικό πλάτος

Η γωνία φ που σχηματίζει η ακτίνα της Γης προς έναν τόπο με το επίπεδο του Ισημερινού λέγεται **γεωγραφικό πλάτος** του τόπου. Μετριέται από 0° (Ισημερινός) έως 90° **Βόρεια (Β)** ή **Νότια (Ν)**. Όλοι οι τόποι του ίδιου παραλλήλου έχουν το ίδιο γεωγραφικό πλάτος.

Ορισμός · Γεωγραφικό μήκος

Η γωνία λ ανάμεσα στο επίπεδο του πρώτου μεσημβρινού και στο επίπεδο του μεσημβρινού ενός τόπου λέγεται **γεωγραφικό μήκος** του τόπου. Μετριέται από 0° έως 180° **Ανατολικά (Α)** ή **Δυτικά (Δ)** του Γκρίνουιτς. Όλοι οι τόποι του ίδιου μεσημβρινού έχουν το ίδιο γεωγραφικό μήκος.



Γεωγραφικό πλάτος φ (από τον Ισημερινό) και γεωγραφικό μήκος λ (από τον μεσημβρινό του Γκρίνουιτς)

Πόλη	Γεωγρ. πλάτος	Γεωγρ. μήκος
Αθήνα	38° B	24° A
Θεσσαλονίκη	41° B	23° A
Ηράκλειο	35° B	25° A
Λονδίνο	51° B	0°
Νέα Υόρκη	41° B	74° Δ
Σίδνεί	34° N	151° A

💡 Η συμβουλή του καθηγητή

Το πρώτο νούμερο (πλάτος) σου λέει «πόσο βόρεια ή νότια», το δεύτερο (μήκος) «πόσο ανατολικά ή δυτικά». Στους χάρτες του κινητού θα δεις τις συντεταγμένες σε δεκαδική μορφή, π.χ. Αθήνα (37,98 · 23,73), όπου τα αρνητικά σημαίνουν Νότια ή Δυτικά.

📖 Υπολογισμοί αποστάσεων

Δύο τόποι **στον ίδιο μεσημβρινό** απέχουν (πάνω στη Γη) ένα τόξο μέγιστου κύκλου, με μέτρο τη **διαφορά** των γεωγραφικών τους πλατών (αν είναι στο ίδιο ημισφαίριο) ή το **άθροισμά** τους (αν είναι σε διαφορετικά). Το μήκος του τόξου βρίσκεται με τον τύπο του Μαθήματος 3.4 με $\rho \approx 6.370 \text{ km}$.

Παράδειγμα 4.7.1

Η Θεσσαλονίκη (41° B) και ένας τόπος στη Λιβύη στον ίδιο σχεδόν μεσημβρινό (31° B). Πόσο απέχουν;

ΛΥΣΗ

$$\text{Τόξο } 41^\circ - 31^\circ = 10^\circ: \ell = \frac{3,14 \cdot 6370 \cdot 10}{180} \approx 1.111 \text{ km.}$$

Χρήσιμο: **1° γεωγραφικού πλάτους $\approx 111 \text{ km}$.**

Παράδειγμα 4.7.2

Δύο τόποι βρίσκονται στον ίδιο μεσημβρινό, ο ένας 20° Β και ο άλλος 15° Ν. Πόσο απέχουν;

ΛΥΣΗ

Σε διαφορετικά ημισφαίρια: τόξο $20^\circ + 15^\circ = 35^\circ$, απόσταση $\approx 35 \cdot 111 = 3.885$ km.

Παράδειγμα 4.7.3 — Ζώνες ώρας

Η Γη κάνει μια πλήρη περιστροφή (360°) σε 24 ώρες. Πόση διαφορά ώρας αντιστοιχεί σε 15° γεωγραφικού μήκους;

ΛΥΣΗ

$\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$ ανά ώρα. Γι' αυτό οι ζώνες ώρας είναι περίπου 15° η καθεμιά.

⊗ Συχνό λάθος**× Λάθος**

«Το γεωγραφικό πλάτος μετριέται από το Γκρίνουιτς»

✓ Σωστό

Το **πλάτος** μετριέται από τον **Ισημερινό**, το **μήκος** από τον **μεσημβρινό του Γκρίνουιτς**

Θυμήσου: οι **παράλληλοι** δίνουν το **πλάτος** (οριζόντιες «γραμμές»), οι μεσημβρινοί το **μήκος**.



Για περισσότερες λυμένες ασκήσεις, **κουίζ αυτοαξιολόγησης** και σημειώσεις, μπες στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών.
www.mathgreece.com

✎ Άλυτες ασκήσεις

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1** Σε ποιο ημισφαίριο (βόρειο/νότιο, ανατολικό/δυτικό) βρίσκεται τόπος με συντεταγμένες: α) 45° Ν, 70° Δ β) 12° Β, 100° Α;
- 2** Ποιο είναι το γεωγραφικό πλάτος του Βόρειου Πόλου; Και του Ισημερινού;
- 3** Δύο πόλεις βρίσκονται στον ίδιο μεσημβρινό με πλάτη 52° Β και 37° Β. Πόσο απέχουν περίπου;
- 4** Αν η ώρα στο Γκρίνουιτς είναι 12:00, τι ώρα είναι (ηλιακά) σε έναν τόπο 45° Α;
- 5** Ένα αεροπλάνο πετά κατά μήκος του Ισημερινού από 10° Α σε 40° Α. Πόσα km διανύει (χωρίς να λάβουμε υπόψη το ύψος πτήσης);

ΚΕΦ.

4

Σε μια ματιά — Ανακεφαλαίωση Κεφαλαίου 40

Πριν προχωρήσεις στο επόμενο κεφάλαιο ή πριν από το διαγώνισμα, έλεγξε ότι θυμάσαι όλα τα παρακάτω. Αν κάτι δεν σου είναι ξεκάθαρο, γύρνα στο αντίστοιχο μάθημα.

Έννοια	Τι πρέπει να θυμάμαι
Ευθείες στον χώρο	τεμνόμενες, παράλληλες, ασύμβατες
Πρίσμα	$E_{\pi} = (\text{περίμ.}) \cdot v$, $V = E_{\beta} \cdot v$
Κύλινδρος	$E_{\pi} = 2\pi r v$, $V = \pi r^2 v$
Πυραμίδα	$E_{\pi} = \frac{1}{2} (\text{περίμ.}) h$, $V = \frac{1}{3} E_{\beta} v$
Κώνος	$\lambda^2 = \rho^2 + v^2$, $E_{\pi} = \pi r \lambda$, $V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$
Σφαίρα	$E = 4\pi r^2$, $V = \frac{4}{3} \pi r^3$
Μονάδες όγκου	$\times 1000 \cdot 1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ λίτρο}$
Γεωγρ. συντεταγμένες	πλάτος από Ισημερινό (B/N), μήκος από Γκρίνουιτς (A/Δ) · $1^{\circ} \approx 111 \text{ km}$



Πριν από το διαγώνισμα του κεφαλαίου, λύσε τα **επαναληπτικά κουίζ** και δες τα βιντεομαθήματα στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο.
www.mathgreece.com

Λύσεις των ασκήσεων

Στις σελίδες που ακολουθούν θα βρεις τις λύσεις όλων των άλυτων ασκήσεων του βιβλίου, οργανωμένες ανά κεφάλαιο και μάθημα. Θυμήσου: η λύση διαβάζεται **αφού** έχεις προσπαθήσει μόνος σου!

Άλγεβρα · Κεφάλαιο 1ο · Εξισώσεις – Ανισώσεις

Μάθημα 1.1 · Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις

- 1** α) $5x + 2$ β) $\frac{x}{2} - 3$ γ) $x + (x + 1) = 2x + 1$ δ) $1,2x + 0,6y$ €.
- 2** α) $2 \cdot 9 - 9 + 4 = 13$ β) $2 \cdot 1 + 3 + 4 = 9$ γ) 4.
- 3** α) $6x$ β) $6\alpha + 4\beta$ γ) $-4y - 5$ δ) $-2x^2 + 3x$.
- 4** α) $4x - 8 + 6x + 3 = 10x - 5$ β) $-5\alpha + 3 + 2\alpha - 8 = -3\alpha - 5$ γ) $6y - 3 - 2y + 10 - y - 1 = 3y + 6$.
- 5** $K = 6x - 2y - 3x + 6y + x = 4x + 4y$. Για $x = 2, y = -1$: $K = 8 - 4 = 4$.
- 6** Σωστές: α) και δ). Η β) είναι λάθος (μη όμοιοι όροι), η γ) πρέπει να είναι $-x + 1$, η ε) δίνει $4x$.
- 7** Κόστος = $4 + 2,5(v - 1) = 2,5v + 1,5$ €. Για $v = 6$: $2,5 \cdot 6 + 1,5 = 16,5$ €.
- 8** $\Pi = x + 2x - 1 + x + 4 = 4x + 3$. Για $x = 5$: $\Pi = 23$ cm.
- 9** Το πρώτο θέλει 3 σπύρτα και κάθε επόμενο 2: $2v + 1$. Για $v = 30$: 61 σπύρτα.
- 10** $\Lambda = 5x + 10 - 3x - 12 - 2x + 2 = 0$. Για κάθε x η τιμή είναι 0.

Μάθημα 1.2 · Εξισώσεις α' βαθμού

- 1** α) $-6 + 7 = 1$ ✓ ναι. β) $4 + 2 = 6 \neq 2$, όχι. γ) $5 + 2 = 7$ και $-4 + 11 = 7$ ✓ ναι.
- 2** α) $x = -5$ β) $x = -7$ γ) $x = -8$ δ) $x = -15$ ε) $x = -3$.
- 3** α) $3x = 12, x = 4$ β) $-5x = -15, x = 3$ γ) $5x = 0, x = 0$.
- 4** α) $2x - 1 = 3x + 3, x = -4$ β) $5x - 10 = 5, x = 3$ γ) $15 - 2x = 2 - x, x = 13$.
- 5** α) $2x + 6 = 2x + 6, 0x = 0$: ταυτότητα. β) $3x + 1 = 3x + 3, 0x = 2$: αδύνατη.
- 6** α) $3x + 2x = 60, x = 12$. β) $3(x + 1) = 4(x - 2), 3x + 3 = 4x - 8, x = 11$. γ) $6x - 3(x - 1) = 2(x + 5), 3x + 3 = 2x + 10, x = 7$.
- 7** Ε.Κ.Π. 10: $2(3x - 1) - 5(x + 2) = x - 4, 6x - 2 - 5x - 10 = x - 4, 0x = 8$: αδύνατη.
- 8** α) $0,2x = 0,8, x = 4$. β) $2,4 - 0,2x + 0,2 = 1,6, -0,2x = -1, x = 5$. (Μπορείς και να πολλαπλασιάσεις με 10.)
- 9** $18 - \alpha = 2\alpha + 6 \Rightarrow 12 = 3\alpha \Rightarrow \alpha = 4$.

- 10** Λάθος: $-(x - 2) = -x + 2$, όχι $-x - 2$. Σωστά: $2x - x + 2 = 6, x = 4$.

Μάθημα 1.3 · Επίλυση τύπων

- 1** $\alpha = \frac{E}{\beta}$ ($\beta \neq 0$).
- 2** $t = \frac{s}{v} = \frac{260}{80} = 3,25$ h, δηλαδή 3 ώρες και 15 λεπτά.
- 3** $3x = y + 5 \Rightarrow x = \frac{y + 5}{3}$.
- 4** $v = \frac{2E}{\beta} = \frac{84}{12} = 7$ cm.
- 5** $\frac{T}{K} = 1 + \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{T}{K} - 1$ (ή $\varepsilon = \frac{T - K}{K}$).
- 6** $\gamma = 3M - \alpha - \beta$. Αριθμητικά: $\gamma = 51 - 16 - 17 = 18$.
- 7** $C = \frac{5(F - 32)}{9}$. Για $F = 104$: $C = \frac{5 \cdot 72}{9} = 40$ °C.
- 8** $\alpha x - \gamma x = -\beta \Rightarrow x(\alpha - \gamma) = -\beta \Rightarrow x = \frac{-\beta}{\alpha - \gamma} = \frac{\beta}{\gamma - \alpha}$.
- 9** $x = \frac{K - 3,2}{0,9}$. Για $K = 15,8$: $x = \frac{12,6}{0,9} = 14$ km.

Μάθημα 1.4 · Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

- 1** $x + 2x = 54, x = 18$. Οι αριθμοί: 18 και 36.
- 2** $x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) = 100, 4x = 88, x = 22$: 22, 24, 26, 28.
- 3** $45 - x = 4(15 - x), 45 - x = 60 - 4x, 3x = 15, x = 5$: πριν από 5 χρόνια (40 και 10).
- 4** $1,24x = 320, x \approx 258,06$ €.
- 5** $x + (x + 5) = 27, x = 11$ αγόρια (16 κορίτσια).
- 6** Βάση x : $x + 2(x + 4) = 50, 3x = 42, x = 14$. Πλευρές: 14, 18, 18 cm.
- 7** $18x + 5x = 46, x = 2$ ώρες.
- 8** $2x + 0,2(40 - x) = 26, 1,8x = 18, x = 10$ κέρματα των 2 € (και 30 των 20 λεπτών).
- 9** $x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 75$, ΕΚΠ 12: $12x - 4x - 3x = 900, 5x = 900, x = 180$ σελίδες.
- 10** Σε 1 ώρα γεμίζουν $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ της δεξαμενής. Σε x ώρες: $\frac{x}{2} = 1, x = 2$ ώρες.

11 $x + x + 15 + 3x = 180$, $5x = 165$, $x = 33$. Γωνίες: 33° , 48° , 99° .

Μάθημα 1.5 · Ανισώσεις α' βαθμού

1 $\alpha) < \beta) > \gamma) < \delta) <$.

2 $\alpha) < \beta) < \gamma) > \delta) >$.

3 $\alpha) x > 5 \quad \beta) x \leq -2 \quad \gamma) x > -4 \quad \delta) x \leq 3$.

4 $\alpha) 3x \geq -12, x \geq -4. \quad \beta) 3x - 6 < 5x + 4, -2x < 10, x > -5$.

5 ΕΚΠ 4: $2x - (x - 3) \leq 8, x + 3 \leq 8, x \leq 5$.

6 ΕΚΠ 6: $2(2x - 1) - 6 > 3(x + 1), 4x - 8 > 3x + 3, x > 11$.

7 $x < 5$ και $x > -3: -3 < x < 5$.

8 $x > -2$ και $x \leq 3$: ακέραιοι $-1, 0, 1, 2, 3$.

9 $\alpha) 2 > 5: 0x > 3$, αδύνατη. $\beta) 2x + 4 > 2x: 0x > -4$, αληθεύει για κάθε x .

10 $\frac{14 + 16 + x}{3} \geq 17, 30 + x \geq 51, x \geq 21$. Αφού ο μέγιστος βαθμός είναι 20, **δεν** μπορεί.

11 $3 + 0,75x \leq 18, 0,75x \leq 15, x \leq 20$ km.

Άλγεβρα · Κεφάλαιο 2ο · Πραγματικοί αριθμοί

Μάθημα 2.1 · Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

1 $\alpha) 8 \quad \beta) 13 \quad \gamma) 0,9 \quad \delta) \frac{7}{10} \quad \epsilon) 100 \text{ στ) } 0,01$

2 $\alpha) 10 - 6 = 4 \quad \beta) 12 : 3 = 4 \quad \gamma) \sqrt{25} = 5 \quad \delta) \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$

3 Σωστές: $\gamma)$, $\delta)$, $\epsilon)$. Η $\alpha)$ είναι λάθος ($\sqrt{36} = 6$ μόνο), η $\beta)$ επίσης ($\sqrt{25} = 5 \neq 7$).

4 $\alpha) 4$ και $5 \quad \beta) 8$ και $9 \quad \gamma) 11$ και $12 \quad \delta) 1$ και 2

5 $\alpha) \pm 8 \quad \beta) \pm \sqrt{3} \quad \gamma) x^2 = \frac{1}{4}, x = \pm \frac{1}{2} \quad \delta) \text{αδύνατη} \quad \epsilon) x = 0$

6 $\alpha) \sqrt{16} = 4 \quad \beta) \sqrt{81} = 9 \quad \gamma) \sqrt{25} = 5 \quad \delta) 0,2 \cdot 30 = 6$

7 Πλευρά $\sqrt{2,25} = 1,5$ m, περίμετρος 6 m.

8 Εμβαδόν 144 cm^2 , πλευρά $\sqrt{144} = 12$ cm.

9 $\alpha) x = 81 \quad \beta) x + 3 = 16, x = 13 \quad \gamma) 2x = 100, x = 50$

10 $\sqrt{7} \approx 2,65, \sqrt{45} \approx 6,71, \sqrt{200} \approx 14,14$.

Μάθημα 2.2 · Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί

1 Ρητοί: $\sqrt{81} = 9, -\frac{5}{3}, \sqrt{1,21} = 1,1, 0,7$. Άρρητοι: $\sqrt{8}, \sqrt{15}, \pi$.

2 $\alpha) \notin \beta) \in \gamma) \in \delta) \notin \epsilon) \in$

3 $\alpha) \sqrt{17} > 4 = \sqrt{16} \quad \beta) \sqrt{30} > \sqrt{29} \quad \gamma) -\sqrt{2} \approx -1,414 > -1,5 \quad \delta) \pi \approx 3,1416 < \sqrt{10} \approx 3,162$

4 $-\sqrt{2} < 0 < \frac{4}{3} < \sqrt{2} < 1,5$ (αφού $\frac{4}{3} \approx 1,333, \sqrt{2} \approx 1,414$).

5 Π.χ. $\sqrt{26}$ και $\sqrt{30}$ (αφού $25 < 26 < 30 < 36$). Επίσης $\pi + 2$.

6 Το 50 δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Όμως $\frac{50}{2} = 25$ και $\sqrt{25} = 5$.

7 $\alpha) \Sigma \quad \beta) \Lambda \quad \gamma) \Sigma$ (άπειρα ψηφία χωρίς περίοδο) $\delta) \Lambda$: π.χ. $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$.

8 Κατασκευάζουμε τετράγωνο πλευράς 1 στο $[0, 1]$. Με κέντρο το 0 και ακτίνα τη διαγώνιο γράφουμε κύκλο: τέμνει την ευθεία στο $\sqrt{2}$ (δεξιά) και στο $-\sqrt{2}$ (αριστερά).

9 $49 < 60 < 64$, άρα $7 < \sqrt{60} < 8$: ο ζητούμενος είναι το 7. Αντίστοιχα $-8 < -\sqrt{60} < -7$, άρα -7 .

Μάθημα 2.3 · Προβλήματα με τετραγωνικές ρίζες

1 Πλευρά $\sqrt{2500} = 50$ m, περίμετρος 200 m.

2 $\alpha^2 = 81 + 144 = 225, \alpha = 15$ cm.

3 $\gamma^2 = 676 - 100 = 576, \gamma = 24$ cm.

4 $\delta = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \approx 3,61$ m.

5 $v = \sqrt{2500 - 900} = \sqrt{1600} = 40$ m.

6 $2\alpha^2 = 100 \Rightarrow \alpha^2 = 50$, εμβαδόν 50 cm^2 , πλευρά $\sqrt{50} \approx 7,07$ cm.

7 $\rho^2 = \frac{78,5}{3,14} = 25, \rho = 5$ cm.

8 Το ύψος χωρίζει τη βάση σε $4 + 4$: $v^2 = 64 - 16 = 48$, $v = \sqrt{48} \approx 6,93$ cm.

Άλγεβρα · Κεφάλαιο 3ο · Συναρτήσεις

Μάθημα 3.1 · Η έννοια της συνάρτησης

1 $y: 9, 7, 5, 3, 1$.

2 Μόνο το (α) . Στο (β) το 1 έχει δύο εικόνες· στο (γ) το 3 δεν έχει καμία.

3 $y = 12 + 0,05x$. Για $x = 140$: $y = 19$ €.

4 $y: 5, 1, 10$. Για $y = 10$: $x^2 = 9, x = \pm 3$.

5 $s = 90t. 90t = 315 \Rightarrow t = 3,5$ h.

6 $y = 40 - 2,5x. y = 0 \Rightarrow x = 16$ λεπτά.

7 $y = x + 3$.

8 $\Pi = 4x, E = x^2$. Να: αφού $x = \frac{\Pi}{4}$, είναι $E = \frac{\Pi^2}{16}$.

Μάθημα 3.2 · Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης

- 1 Α: 1ο, Β: 2ο, Γ: 3ο, Δ: 4ο. Τα Ε (άξονας y') και Ζ (άξονας x') δεν ανήκουν σε τεταρτημόριο.
- 2 $(-2, -5), (2, 5), (2, -5)$.
- 3 Τετμημένη 0: $\alpha - 3 = 0, \alpha = 3$.
- 4 α) $\sqrt{36 + 64} = 10$ β) $\sqrt{9 + 16} = 5$ γ) $\sqrt{25 + 144} = 13$.
- 5 Πλευρές 4 και 3: περίμετρος 14, εμβαδόν 12, διαγώνιος $\sqrt{16 + 9} = 5$.
- 6 $y: -5, -3, -1, 1, 3, 5$. Τα σημεία βρίσκονται σε ευθεία γραμμή.
- 7 Για $x = 3: y = 8 \checkmark$ ανήκει. Για $x = -2: y = 3 \neq 5$, δεν ανήκει.
- 8 $\kappa = 3 \cdot 2 - 4 = 2$.

Μάθημα 3.3 · Η συνάρτηση $y = ax$

- 1 Όλες περνούν από το Ο. Δεύτερα σημεία: $(1, 3), (1, -3), (3, 1)$. Η $y = -3x$ «κατεβαίνει».
- 2 $\alpha = \frac{10}{-5} = -2, y = -2x$.
- 3 Τα Α, Β, Γ. Για το Δ: $2,5 \cdot (-2) = -5 \neq 4$.
- 4 $6 = 3(\lambda - 2) \Rightarrow \lambda - 2 = 2 \Rightarrow \lambda = 4$.
- 5 $y = 0,06x$. Για $x = 350: y = 21$ λίτρα.
- 6 $\alpha = 2,5, y = 2,5x. x = 2 \rightarrow y = 5 \cdot y = 35 \rightarrow x = 14$.
- 7 $\frac{7}{2} = \frac{17,5}{5} = \frac{28}{8} = 3,5$: ναι, ανάλογα, $y = 3,5x$.
- 8 Η $y = -4x$, γιατί $|-4| = 4 > 3$.

Μάθημα 3.4 · Η συνάρτηση $y = ax + \beta$

- 1 α) 4, $(0, -1)$ β) $-1, (0, 3)$ γ) $\frac{1}{2}, (0, 0)$ δ) 0, $(0, -5)$
- 2 $(0, -4)$ και $(2, 0)$.
- 3 Οι $\varepsilon_1, \varepsilon_4$ (κλίση 3). Η ε_2 ταυτίζεται με την ε_1 !
- 4 $y = -2x + \beta, 5 = -2 + \beta, \beta = 7: y = -2x + 7$.
- 5 $\beta = 4, 0 = 2\alpha + 4 \Rightarrow \alpha = -2: y = -2x + 4$.
- 6 Πρώτη: $(0, 3), (2, 0)$. Δεύτερη: $(0, 1), (-1, 0)$. Τέμνονται στο $(0,8; 1,8): 3 \cdot 0,8 + 2 \cdot 1,8 = 6 \checkmark$ και $0,8 - 1,8 = -1 \checkmark$.
- 7 Τομή $(0, 6)$ και $(2, 0)$: εμβαδόν $\frac{2 \cdot 6}{2} = 6$ τ.μ.
- 8 α) $y = -2$ β) $x = 4$.
- 9 $y = 24 - 1,5x. y = 0 \Rightarrow x = 16$ ώρες.
- 10 $2\mu - 1 = 5 \Rightarrow \mu = 3$.

Μάθημα 3.5 · Η συνάρτηση $y = a/x$ – Η υπερβολή

- 1 (α) $xy = 12$ σταθερό: ναι. (β) 10, 16, 18: όχι. (γ) $xy = 10$: ναι.
- 2 Σημεία: $(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$ και τα συμμετρικά τους $(-1, -6), (-2, -3), (-3, -2), (-6, -1)$. Δύο κλάδοι στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο.
- 3 $\alpha = -8$. Στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.
- 4 Α, Β, Γ. Το Δ όχι, αφού $\frac{10}{-1} = -10$.
- 5 $t = \frac{240}{v}$. 4 h και 3 h αντίστοιχα.
- 6 Αντιστρόφως ανάλογα: $1 \cdot 12 = x \cdot 3 \Rightarrow x = 4$ βρύσες.
- 7 $(-2, -3): \frac{6}{-2} = -3 \checkmark$.
- 8 $\frac{4}{x} = x \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Σημεία $(2, 2)$ και $(-2, -2)$.

Άλγεβρα · Κεφάλαιο 4ο · Περιγραφική Στατιστική**Μάθημα 4.1 · Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα**

- 1 α) ποιοτική β) συνεχής γ) διακριτή δ) ποιοτική ε) συνεχής στ) διακριτή $(37, 38, 38\frac{1}{2} \dots)$ — μετράμε σε βήματα, όχι με όργανο.
- 2 α) απογραφή (λίγα άτομα) β) δειγματοληψία (παίρνουμε δείγματα νερού) γ) δειγματοληψία.
- 3 Όχι. Το δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό: όσοι βγαίνουν από γυμναστήριο αθλούνται συχνότερα από τον μέσο κάτοικο.
- 4 Πληθυσμός: τα βιβλία της βιβλιοθήκης· άτομο: κάθε βιβλίο· μεταβλητή: αριθμός σελίδων (ποσοτική διακριτή).

- 5 Π.χ. η διάρκεια ζωής των λαμπτήρων ενός εργοστασίου ή η ποιότητα των κονσερβών (για να ελεγχθούν, ανοίγονται/καταστρέφονται).

Μάθημα 4.2 · Γραφικές παραστάσεις

- 1 Τέσσερις ράβδοι ίσου πλάτους με ύψη 12, 9, 6, 3 (κλίμακα π.χ. 1 cm = 3 μαθητές).
- 2 Πόδια $\frac{12}{30} \cdot 360 = 144^\circ$, λεωφορείο 108° , αυτοκίνητο 72° , ποδήλατο 36° (σύνολο 360°).
- 3 $\frac{90}{360} \cdot 120 = 30$ μαθητές.
- 4 $275 : 50 = 5,5$: πέντε ολόκληρα σύμβολα και μισό.
- 5 Οι πωλήσεις αυξάνονται μέχρι τον Ιούλιο (μέγιστο 80) και μετά μειώνονται — λογικό, ακολουθούν τη ζέστη.

6 α) κυκλικό β) χρονογράμμα γ) ραβδόγραμμα.

Μάθημα 4.3 · Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων

1 Βαθμός 1: 1 (5%), 2: 2 (10%), 3: 7 (35%), 4: 7 (35%), 5: 3 (15%). Σύνολο 20, 100%.

2 $35\% + 15\% = 50\%$.

3 $0,15 \cdot 200 = 30$ άτομα, γωνία $0,15 \cdot 360^\circ = 54^\circ$.

4 $\frac{16}{28} \approx 57,1\%$ και $\frac{15}{25} = 60\%$: στη δεύτερη.

5 $0,25 + 0,4 + x + 0,15 = 1 \Rightarrow x = 0,2$.

6 Τέταρτος: $360 - 270 = 90^\circ$. $f: \frac{120}{360} \approx 0,33, 0,25, \approx 0,17, 0,25$.

Μάθημα 4.4 · Ομαδοποίηση παρατηρήσεων

1 [5,8): 5, 7, 6 $\rightarrow$ 3· [8,11): 9, 10, 8, 9, 10 $\rightarrow$ 5· [11,14): 12, 11, 13, 12, 11, 13, 12 $\rightarrow$ 7· [14,17): 15, 14, 16 $\rightarrow$ 3· [17,20): 18, 19 $\rightarrow$ 2. Σύνολο 20.

2 Κέντρα: $6,5 \cdot 9,5 \cdot 12,5 \cdot 15,5 \cdot 18,5$. Ιστόγραμμα με εφαιπτόμενα ορθογώνια ύψους 3, 5, 7, 3, 2.

3 Στην [40, 50).

4 Σύνολο 20. Κάτω από 40: $2 + 5 = 7$, δηλαδή 35%.

5 Πλάτος 10: [10, 20), [20, 30), [30, 40), [40, 50).

Μάθημα 4.5 · Μέση τιμή – Διάμεσος

1 $\bar{x} = \frac{90}{7} \approx 12,86$. Σειρά: 9, 9, 11, 12, 14, 15, 20 $\rightarrow \delta = 12$.

2 $\bar{x} = \frac{22}{6} \approx 3,67$. Σειρά: $1,5 \cdot 2 \cdot 3,5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \rightarrow \delta = \frac{3,5 + 4}{2} = 3,75$.

3 $\bar{x} = \frac{0 + 7 + 10 + 12 + 4}{20} = \frac{33}{20} = 1,65$. Διάμεσος: μ.ο. 10ης και 11ης παρατήρησης. Θέσεις 4–10 έχουν 1, 11–15 έχουν 2: $\delta = \frac{1 + 2}{2} = 1,5$.

4 $\frac{45 + x}{5} = 11 \Rightarrow x = 10$.

5 $\frac{70 + 20}{6} = 15$ χρόνια.

6 $\frac{6,5 \cdot 3 + 9,5 \cdot 5 + 12,5 \cdot 7 + 15,5 \cdot 3 + 18,5 \cdot 2}{20} = \frac{238}{20} = 11,9$

λεπτά.

7 Υπάρχει ακραία τιμή (850), άρα η διάμεσος: $\delta = 155$ χιλ. € (ενώ $\bar{x} \approx 228,9$).

8 Και οι δύο αυξάνονται κατά 2.

Γεωμετρία · Κεφάλαιο 1ο · Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο θεώρημα

Μάθημα 1.1 · Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

1 Π.χ. ορθογώνιο 1×8 (περίμετρος 18), 2×4 (περίμετρος 12), σχήμα «Γ» κ.λπ. Οι περίμετροι γενικά διαφέρουν.

2 $4 \cdot 7 = 28$ τετραγωνάκια.

3 α) Σ β) Λ γ) Σ

4 Μισό του ορθογωνίου 4×6 : $\frac{24}{2} = 12$ τετραγωνάκια.

Μάθημα 1.2 · Μονάδες μέτρησης επιφανειών

1 α) 2,5 β) 3,5 γ) 40.000 δ) 3.200 ε) 0,085

2 α) 12.000 β) 600 γ) 50 δ) $2.500.000 \text{ m}^2 = 2.500$ στρέμματα

3 Σε cm^2 : 3.000, 2.900, 3.100, 3.000. Άρα: $2.900 \text{ cm}^2 < 0,3 \text{ m}^2 = 300.000 \text{ mm}^2 < 31 \text{ dm}^2$.

4 6.500 m^2 , κόστος 78.000 €.

5 Εμβαδόν 14 m^2 , για δύο χέρια 28 m^2 : $28 : 7 = 4$ λίτρα.

6 Κατά μήκος $200 : 25 = 8$, κατά πλάτος $150 : 25 = 6$: 48 πλακάκια.

Μάθημα 1.3 · Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

1 α) 90 cm^2 β) $5,76 \text{ m}^2$ γ) 27 cm^2

2 Πλάτος 8 cm, περίμετρος 40 cm.

3 $E = 10 \cdot 4,8 = 48 \text{ cm}^2$. Ύψος προς τη μικρή: $48 : 6 = 8 \text{ cm}$.

4 $E = \frac{8 \cdot 15}{2} = 60 \text{ cm}^2$. $\frac{17v}{2} = 60 \Rightarrow v = \frac{120}{17} \approx 7,06 \text{ cm}$.

5 $\frac{30 \cdot 8}{2} = 120 \text{ m}^2$.

6 $\frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ cm}^2$.

7 Εμβαδόν 400 cm^2 , πλευρά 20 cm.

8 $20 + 12 = 32 \text{ cm}^2$.

9 Διπλασιάζεται. Τετραπλασιάζεται.

10 $\frac{200 \cdot 60}{2} = 6.000 \text{ m}^2 = 6$ στρέμματα.

Μάθημα 1.4 · Πυθαγόρειο θεώρημα

1 α) 10 β) 20 γ) $\sqrt{5} \approx 2,24$

2 Κάθετη $\sqrt{625 - 49} = 24$. Περίμετρος 56 cm, εμβαδόν 84 cm^2 .

3 α) $225 = 81 + 144 \checkmark$ β) $225 \neq 221 \times$ γ) $1369 = 144 + 1225 \checkmark$ δ) $49 \neq 50 \times$

4 $\sqrt{42,25 - 36} = \sqrt{6,25} = 2,5 \text{ m}$.

5 $2\alpha^2 = 64 \Rightarrow \alpha^2 = 32$: εμβαδόν 32 cm^2 . (Η: $\frac{\delta^2}{2}$.)

6 Ύψος $\sqrt{289 - 64} = 15$, εμβαδόν $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120 \text{ cm}^2$.

7 Διαφορά βάσεων 6: $\sqrt{36 + 64} = 10 \text{ cm}$.

8 Πλευρά $\sqrt{64 + 225} = 17$: περίμετρος 68 cm. Εμβαδόν $\frac{16 \cdot 30}{2} = 240 \text{ cm}^2$.

9 Διαγώνιος $100 \text{ cm} \approx 39,4 \text{ ίντσες}$.

10 Συνολικά 12 km ανατολικά και 3 km βόρεια: $\sqrt{144 + 9} = \sqrt{153} \approx 12,37 \text{ km}$.

Γεωμετρία · Κεφάλαιο 2ο · Τριγωνομετρία – Διανύσματα

Μάθημα 2.1 · Εφαπτομένη οξείας γωνίας

1 $\varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{5}{12} \approx 0,417$, $\varepsilon\varphi\hat{\Gamma} = \frac{12}{5} = 2,4$.

2 $AG = 20 \cdot 0,35 = 7 \text{ cm}$.

3 $v = 24 \cdot 1,192 \approx 28,6 \text{ m}$.

4 $0,15 \cdot 400 = 60 \text{ m}$. $\varepsilon\varphi\omega = 0,15 \Rightarrow \omega \approx 8,5^\circ$.

5 α) $\approx 26,6^\circ$ β) $\approx 71,6^\circ$ γ) 45° .

6 $\varepsilon\varphi\omega = \frac{8}{15} \approx 0,533 \Rightarrow \omega \approx 28,1^\circ$.

7 $\varepsilon\varphi\omega = \frac{6}{4} = 1,5 \Rightarrow \omega \approx 56,3^\circ$.

8 $\alpha = \varepsilon\varphi 30^\circ \approx 0,577$: $y \approx 0,577x$ (ακριβώς $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$).

Μάθημα 2.2 · Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

1 $AG = 15$. $\eta\mu\hat{B} = \frac{15}{17}$, $\sigma\eta\nu\hat{B} = \frac{8}{17}$, $\varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{15}{8}$.

2 Απέναντι $20 \cdot 0,5 = 10 \text{ cm}$, προσκείμενη $20 \cdot 0,866 \approx 17,32 \text{ cm}$.

3 $2000 \cdot 0,259 \approx 518 \text{ m}$.

4 Τρίγωνο 5, 12, 13: $\eta\mu\omega = \frac{12}{13}$, $\varepsilon\varphi\omega = \frac{12}{5}$.

5 $\eta\mu\omega = \frac{1}{5} = 0,2 \Rightarrow \omega \approx 11,5^\circ$.

6 $\sigma\eta\nu\hat{\Gamma} = \eta\mu\hat{B} = 0,8$.

7 $(\frac{7}{25})^2 + (\frac{24}{25})^2 = \frac{49 + 576}{625} = 1 \checkmark$

8 Η $\varepsilon\varphi\omega$: έχουν τον ίδιο αριθμητή (απέναντι), αλλά η εφαπτομένη έχει μικρότερο παρονομαστή (προσκείμενη < υποτείνουσα).

Μάθημα 2.3 · Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης

1 α) $< \beta) < \gamma) <$ (και μάλιστα $\varepsilon\varphi 44^\circ < 1 < \varepsilon\varphi 46^\circ$) δ) $\eta\mu 30^\circ = \sigma\eta\nu 60^\circ < \sigma\eta\nu 30^\circ$.

2 $\eta\mu 10^\circ < \eta\mu 35^\circ < \eta\mu 50^\circ < \eta\mu 80^\circ$.

3 α) 20° β) 60° γ) 50° .

4 $\omega = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$.

5 Το $\sigma\eta\nu\omega$ όχι (είναι μικρότερο του 1). Η $\varepsilon\varphi\omega = 5$ μπορεί (γωνία $\approx 78,7^\circ$).

6 $AG = BG \cdot \eta\mu\hat{B}$ και $AB = BG \cdot \eta\mu\hat{\Gamma}$. Αφού $\hat{B} > \hat{\Gamma}$, $\eta\mu\hat{B} > \eta\mu\hat{\Gamma}$, άρα $AG > AB$.

Μάθημα 2.4 · Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° και 60°

1 α) 1 β) $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ γ) 1 δ) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

2 Απέναντι της 60° : $18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \approx 15,6 \text{ cm}$.

Προσκείμενη: $18 \cdot \frac{1}{2} = 9 \text{ cm}$.

3 $6\sqrt{2} \approx 8,49 \text{ cm}$.

4 $v = 10 \cdot \eta\mu 60^\circ = 5\sqrt{3} \approx 8,66 \text{ cm}$.

5 $6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \approx 5,2 \text{ m}$.

6 α) 30° β) 60° γ) $\sigma\eta\nu\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 45°

7 $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu 60^\circ \checkmark$

Μάθημα 2.5 · Η έννοια του διανύσματος

1 Διανυσματικά: α), γ), ε). Μονόμετρα: β), δ), στ).

2 α) $\vec{AB} = \vec{AG}$ β) $\vec{OA}$ και $\vec{OG}$ γ) $\vec{AB}$ και $\vec{BG}$.

3 $\sqrt{36 + 64} = 10$.

4 Το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο: οι απέναντι πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ είναι ίσες και παράλληλες.

5 $\vec{AM} = \vec{MB} \cdot \vec{MA} = -\vec{MB}$.

Μάθημα 2.6 · Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων

1 α) $\vec{AD}$ β) $\vec{GE}$ γ) $\vec{GB}$ δ) $\vec{0}$

2 $\sqrt{36 + 64} = 10 \text{ N}$.

3 α) 17 N β) 7 N (προς τη φορά της 12 N) γ) 13 N.

4 $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD}$, $\vec{DB} = \vec{AB} - \vec{AD}$.

5 $\sqrt{144 + 25} = 13 \text{ km/h}$.

6 $\vec{AB} + \vec{BG} = \vec{AG}$ και $\vec{AG} + \vec{GA} = \vec{AA} = \vec{0}$.

Μάθημα 2.7 · Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

1 $F_x = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10 \text{ N}$, $F_y = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \approx 17,3 \text{ N}$.

2 $13 \cdot \varepsilon\varphi\omega = 2,4 \Rightarrow \omega \approx 67,4^\circ$.

3 $\vec{KL} = (6, -8)$, μέτρο 10.

4 Παράλληλη: $50 \text{ N} \cdot \text{κάθετη: } 50\sqrt{3} \approx 86,6 \text{ N}$.

5 $\sqrt{4 + 2,25} = 2,5 \text{ m/s}$. $\varepsilon\varphi\omega = \frac{2}{1,5} \approx 1,33 \Rightarrow \omega \approx 53^\circ$.

Γεωμετρία · Κεφάλαιο 3ο · Μέτρηση κύκλου

Μάθημα 3.1 · Εγγεγραμμένες γωνίες

- 1 42° και 74° .
- 2 Τόξο 60° , επίκεντρη 60° , εγγεγραμμένη 30° .
- 3 $\hat{A} = 90^\circ$, άρα $B\Gamma = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ cm}$ και $\rho = 5 \text{ cm}$.
- 4 40° (ίδιο τόξο).
- 5 $\hat{A} + \hat{\Gamma} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$, άρα $\hat{\Gamma} = 105^\circ$.
- 6 Τοποθετείς την κορυφή της ορθής γωνίας πάνω στον κύκλο: οι πλευρές τέμνουν τον κύκλο στα άκρα μιας διαμέτρου. Κάνεις το ίδιο σε άλλη θέση: οι δύο διάμετροι τέμνονται στο κέντρο.

Μάθημα 3.2 · Κανονικά πολύγωνα

- 1 α) 36° , 144° β) 18° , 162° .
- 2 α) $\omega = 30^\circ$, $\nu = 12$: ναι. β) $\omega = 50^\circ$, $\frac{360}{50} = 7,2$ όχι ακέραιος: όχι.
- 3 $\nu = 18$, $\varphi = 160^\circ$.
- 4 Πλευρά $6 \text{ cm} =$ ακτίνα.
- 5 Η διαγώνιος είναι διάμετρος: 10 cm . Πλευρά $\frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \approx 7,07 \text{ cm}$, εμβαδόν 50 cm^2 .
- 6 Κύκλος ακτίνας 3 cm , 5 διαδοχικές επίκεντρες γωνίες των 72° με μοιρογνωμόνιο, ένωση των 5 σημείων.
- 7 $8 \cdot 135^\circ = 1080^\circ$.

Μάθημα 3.3 · Μήκος κύκλου

- 1 α) $18,84 \text{ cm}$ β) $37,68 \text{ m}$ γ) $3,14 \text{ km}$
- 2 $\delta = 20 \text{ cm}$, $\rho = 10 \text{ cm}$.
- 3 $1000 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 0,3 = 1884 \text{ m}$.
- 4 $\rho = \frac{40000}{6,28} \approx 6.369 \text{ km}$.
- 5 Πλευρά $7,85 \text{ cm}$ · ακτίνα 5 cm .
- 6 Διπλασιάζεται (το μήκος είναι ανάλογο της ακτίνας).
- 7 Τρεις πλευρές του τετραγώνου $30 \text{ cm} +$ ημικύκλιο $\frac{3,14 \cdot 10}{2} = 15,7 \text{ cm}$: σύνολο $45,7 \text{ cm}$.

Μάθημα 3.4 · Μήκος τόξου

- 1 α) $2\pi \approx 6,28 \text{ cm}$ β) $5\pi \approx 15,7 \text{ m}$ γ) $2\pi \approx 6,28 \text{ cm}$
- 2 $\frac{\pi \cdot 10 \cdot \mu}{180} = 5\pi \Rightarrow \mu = 90^\circ$.
- 3 $\frac{3,14 \cdot \rho \cdot 40}{180} = 6,28 \Rightarrow \rho = 9 \text{ cm}$.
- 4 Τόξο 90° : $\frac{\pi \cdot 8 \cdot 90}{180} = 4\pi \approx 12,56 \text{ cm}$.
- 5 $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2} \cdot 36^\circ$, 150° .
- 6 $\frac{3,14 \cdot 1,2 \cdot 30}{180} = 0,628 \text{ m}$.

Μάθημα 3.5 · Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

- 1 α) $9\pi \approx 28,26 \text{ cm}^2$ β) $16\pi \approx 50,24 \text{ m}^2$ γ) $0,04\pi \approx 0,1256 \text{ km}^2$
- 2 $\rho = 5$, $E = 78,5 \text{ cm}^2$.
- 3 $\rho^2 = 100$, $\rho = 10$, $\delta = 20 \text{ cm}$.
- 4 $\pi(25 - 9) = 16\pi \approx 50,24 \text{ cm}^2$.
- 5 $\pi(36 - 0,5625) \approx 111,3 \text{ cm}^2$.
- 6 Το εμβαδόν 9 φορές, το μήκος 3 φορές.
- 7 $36 - 9\pi \approx 7,74 \text{ cm}^2$.
- 8 $25\pi \approx 78,5 \text{ m}^2$.

Μάθημα 3.6 · Εμβαδόν κυκλικού τομέα

- 1 α) $8\pi \approx 25,12 \text{ cm}^2$ β) $3\pi \approx 9,42 \text{ m}^2$ γ) $3\pi \approx 9,42 \text{ cm}^2$
- 2 $\frac{3,14 \cdot \rho^2 \cdot 40}{360} = 3,14 \Rightarrow \rho^2 = 9 \Rightarrow \rho = 3 \text{ cm}$.
- 3 $\frac{\pi \cdot 25 \cdot 144}{360} = 10\pi \approx 31,4 \text{ cm}^2$.
- 4 Εμβαδόν $\frac{\pi \cdot 256}{8} = 32\pi \approx 100,5 \text{ cm}^2$. Κόρα $\frac{2\pi \cdot 16}{8} = 4\pi \approx 12,6 \text{ cm}$.
- 5 $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10 = 75 \text{ cm}^2$.
- 6 Τομέας: $6\pi \approx 18,85$. Ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 6: $9\sqrt{3} \approx 15,59$. Τμήμα $\approx 3,26 \text{ cm}^2$.

Γεωμετρία · Κεφάλαιο 4ο · Γεωμετρικά στερεά – Μέτρηση στερεών

Μάθημα 4.1 • Ευθείες και επίπεδα στον χώρο

1 Ενδεικτικά: α) δύο απέναντι ακμές του πίνακα β) μια ακμή του δαπέδου και μια ακμή του ταβανιού σε διαφορετική διεύθυνση γ) πάτωμα–ταβάνι δ) η ακμή όπου συναντιούνται δύο τοίχοι, σε σχέση με το πάτωμα.

2 3 παράλληλες, 4 τεμνόμενες, 4 ασύμβατες (σύνολο 11 άλλες ακμές).

3 Τρία σημεία (μη συνευθειακά) ορίζουν πάντα ένα επίπεδο, άρα τα τρία πόδια ακουμπούν πάντα σταθερά. Με τέσσερα πόδια, σε ανώμαλο έδαφος, το ένα μπορεί να μένει στον αέρα.

4 α) Σ β) Λ (αν είναι συνευθειακά, περνούν άπειρα) γ) Σ

Μάθημα 4.2 • Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου

1 α) $6 \cdot 25 = 150 \text{ cm}^2$ β) $2(40 + 15 + 24) = 158 \text{ cm}^2$.

2 Περίμετρος 24: $E_{\pi} = 240 \text{ cm}^2$.

3 $E_{\pi} = 120\pi \approx 376,8 \text{ cm}^2$.

$E_{ολ} = 120\pi + 50\pi = 170\pi \approx 533,8 \text{ cm}^2$.

4 $2\pi \cdot 3 \cdot 10 + \pi \cdot 9 = 69\pi \approx 216,7 \text{ cm}^2$.

5 Τοίχοι $2(8 + 6) \cdot 3 = 84$, ταβάνι 48: $84 + 48 - 10 = 122 \text{ m}^2$.

6 $6\alpha^2 = 216 \Rightarrow \alpha = 6 \text{ cm}$.

7 $20 \cdot 2\pi \cdot 2,5 \cdot 25 = 2500\pi \approx 7.850 \text{ cm}^2 \approx 0,79 \text{ m}^2$.

Μάθημα 4.3 • Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

1 α) 3.500 l β) 2,5 l γ) 750 cm^3 δ) 45 m^3

2 α) 343 cm^3 β) 150 m^3

3 $v = 216 : 18 = 12 \text{ cm}$.

4 $90\pi \approx 282,6 \text{ cm}^3$.

5 $V = 450 \text{ m}^3 = 450.000 \text{ l}$. Χρόνος $450 : 15 = 30$ ώρες.

6 Ακμή 4 cm, επιφάνεια $6 \cdot 16 = 96 \text{ cm}^2$.

7 $V = 3,14 \cdot 3,3^2 \cdot 12 \approx 410 \text{ cm}^3$. Ναι, χωράει άνετα (υπάρχει και αέρας).

8 Τετραπλασιάζεται· διπλασιάζεται.

Μάθημα 4.4 • Η πυραμίδα και τα στοιχεία της

1 $E_{\pi} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^2$, $E_{ολ} = 60 + 36 = 96 \text{ cm}^2$.

2 $v = \sqrt{25 - 9} = 4 \text{ cm}$. $V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48 \text{ cm}^3$.

3 $\frac{1}{3} E_{\beta} \cdot 6 = 80 \Rightarrow E_{\beta} = 40 \text{ cm}^2$.

4 $E_{\beta} \cdot 5 = \frac{1}{3} E_{\beta} \cdot v \Rightarrow v = 15 \text{ cm}$.

5 Απόστημα $\sqrt{1,6^2 + 1,2^2} = 2 \text{ m}$. Ύψος $\frac{1}{2} \cdot 9,6 \cdot 2 = 9,6 \text{ m}^2$. Όγκος $\frac{1}{3} \cdot 5,76 \cdot 1,6 = 3,072 \text{ m}^3$.

6 Έδρες 7, κορυφές 7, ακμές 12: $7 + 7 - 12 = 2 \checkmark$

Μάθημα 4.5 • Ο κώνος και τα στοιχεία του

1 $v = 12 \text{ cm}$. $E_{ολ} = 65\pi + 25\pi = 90\pi \approx 282,6 \text{ cm}^2$.

$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 25 \cdot 12 = 100\pi \approx 314 \text{ cm}^3$.

2 $\frac{1}{3} \pi \cdot 9 \cdot v = 12\pi \Rightarrow v = 4 \text{ cm}$.

3 Κώνος με $\rho = 3$, $v = 4$: $V = 12\pi \approx 37,7 \text{ cm}^3$.

4 $\pi \cdot 9 \cdot 25 = 225\pi \approx 706,5 \text{ cm}^2$.

5 150 cm^3 .

6 $V = \frac{1}{3} \pi \cdot 16 \cdot 9 = 48\pi \approx 150,7 \text{ cm}^3$. $1000 : 150,7 \approx 6,6$: 6 γεμάτα ποτήρια.

Μάθημα 4.6 • Η σφαίρα και τα στοιχεία της

1 $E = 36\pi \approx 113 \text{ cm}^2$, $V = 36\pi \approx 113 \text{ cm}^3$ (ίδιος αριθμός, διαφορετικές μονάδες!).

2 $\frac{4}{3} \pi \rho^3 = \frac{32}{3} \pi \Rightarrow \rho^3 = 8 \Rightarrow \rho = 2 \text{ cm}$.

3 $4\pi \cdot 121 \approx 1519,8 \text{ cm}^2$.

4 $V_{σφ} = \frac{4}{3} \pi \cdot 125 \approx 523,6 \text{ cm}^3$, κύβος 1000: περίπου 52,4%.

5 9 φορές και 27 φορές.

6 Κώνος 30π , ημισφαίριο $\frac{2}{3} \pi \cdot 27 = 18\pi$: σύνολο $48\pi \approx 150,7 \text{ cm}^3$.

Μάθημα 4.7 • Γεωγραφικές συντεταγμένες

1 α) νότιο, δυτικό (π.χ. Χιλή) β) βόρειο, ανατολικό (π.χ. Ταϊλάνδη).

2 90° B και 0° .

3 Τόξο 15° : $\approx 15 \cdot 111 = 1.665 \text{ km}$.

4 $45 : 15 = 3$ ώρες μπροστά: 15:00.

5 Τόξο 30° σε μέγιστο κύκλο: $\approx 30 \cdot 111 = 3.330 \text{ km}$.