

ΠΛΗΡΕΣ ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΜΕΝΟ ΒΟΗΘΗΜΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θεωρία βήμα προς βήμα • Πολλά λυμένα παραδείγματα
• Συχνά λάθη & παγίδες • Ασκήσεις με πλήρεις λύσεις

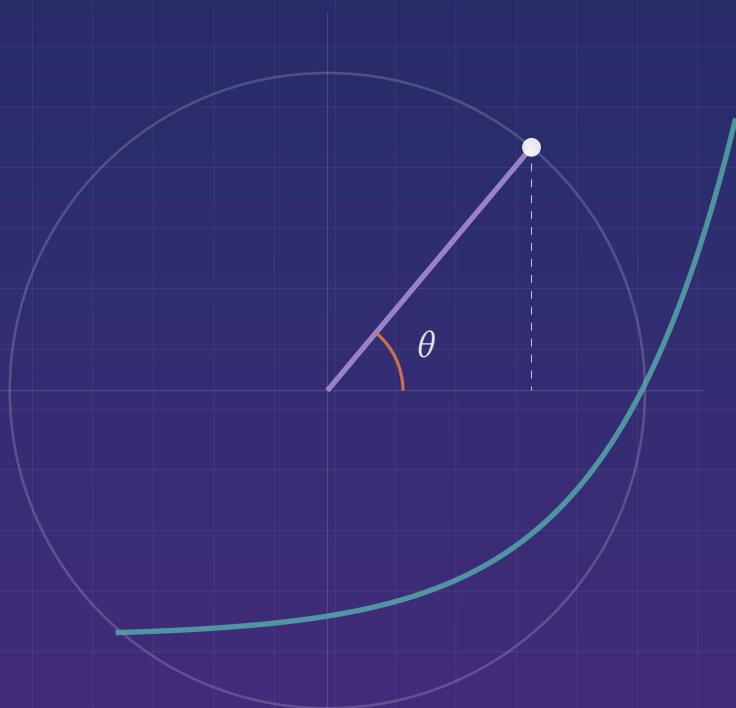
1 Συστήματα

2 Ιδιότητες Συναρτήσεων

3 Τριγωνομετρία

4 Πολυώνυμα

5 Εκθετική & Λογαριθμική



mathgreece.com

Το δωρεάν ελληνικό φροντιστήριο μαθηματικών:
βίντεο, σημειώσεις, τεστ και ασκήσεις

Συγγραφή – Επιμέλεια
Τάσος Κοβατσίδης
Καθηγητής Μαθηματικών

Αγαπητή μαθήτριά, αγαπητέ μαθητή,

Το βιβλίο που κρατάς δεν είναι μια περίληψη ούτε ένα απλό πλάνο μελέτης. Είναι ένα **πλήρες βοήθημα** που καλύπτει όλη την ύλη της Άλγεβρας της Β' Λυκείου, μάθημα προς μάθημα. Στόχος του είναι να σε βοηθήσει να καταλάβεις τη θεωρία σε βάθος, να μάθεις να γράφεις σωστές και πλήρεις λύσεις και να αποφεύγεις τις παγίδες που κοστίζουν μονάδες στα διαγωνίσματα.

Το βοήθημα χωρίζεται σε **5 κεφάλαια**. Κάθε κεφάλαιο έχει το δικό του χρώμα και χωρίζεται σε **μαθήματα** (π.χ. *Μάθημα 3.5*). Σε κάθε σελίδα, επάνω αριστερά βλέπεις σε ποιο κεφάλαιο βρίσκεσαι και επάνω δεξιά σε ποιο μάθημα. Η χρωματιστή γλωττίδα στο δεξί περιθώριο σου δείχνει με μια ματιά το κεφάλαιο. Έτσι δεν χάνεσαι ποτέ.

Πώς είναι οργανωμένο κάθε μάθημα

ΟΡΙΣΜΟΣ | παράδειγμα

Στα μπλε πλαίσια βρίσκονται οι **ορισμοί**: οι έννοιες που πρέπει να ξέρεις με ακρίβεια.

ΘΕΩΡΗΜΑ / ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Εδώ βρίσκονται τα **θεωρήματα**, οι **ιδιότητες** και οι **τύποι**. Όπου χρειάζεται, ακολουθεί η απόδειξη.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στα πλαίσια μεθοδολογίας σου δείχνω **βήμα προς βήμα** πώς αντιμετωπίζεται κάθε κατηγορία άσκησης.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Τα πορτοκαλί πλαίσια σημειώνουν λεπτά σημεία που **πρέπει να προσέξεις**.

ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

Στα κόκκινα πλαίσια θα βρεις τα **λάθη που κάνουν συχνά οι μαθητές** και τον σωστό τρόπο.

Ακολουθούν τα **λυμένα παραδείγματα** (πράσινα πλαίσια), ένα **τυπολόγιο** που συνοψίζει το μάθημα και, στο τέλος, **ασκήσεις για λύση** με τρία επίπεδα δυσκολίας (☆☆☆, ☆☆☆, ☆☆☆). Οι πλήρεις λύσεις τους βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου. Δοκίμασε πρώτα μόνος σου και κοίτα τη λύση μόνο αφού προσπαθήσεις.



Θέλεις κι άλλη βοήθεια; Στο mathgreece.com θα βρεις ένα **πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο**: βιντεομαθήματα για κάθε ενότητα, σημειώσεις, τεστ αυτοαξιολόγησης, παιχνίδια γνώσεων και επιπλέον ασκήσεις. Όλα δωρεάν, για κάθε μαθητή.

Το βοήθημα ακολουθεί τη δομή και την ύλη του σχολικού βιβλίου «Άλγεβρα Β' Γενικού Λυκείου». Η θεωρία παρουσιάζεται με δική μου διατύπωση, και όλα τα παραδείγματα και οι ασκήσεις είναι πρωτότυπα. Καλή μελέτη!

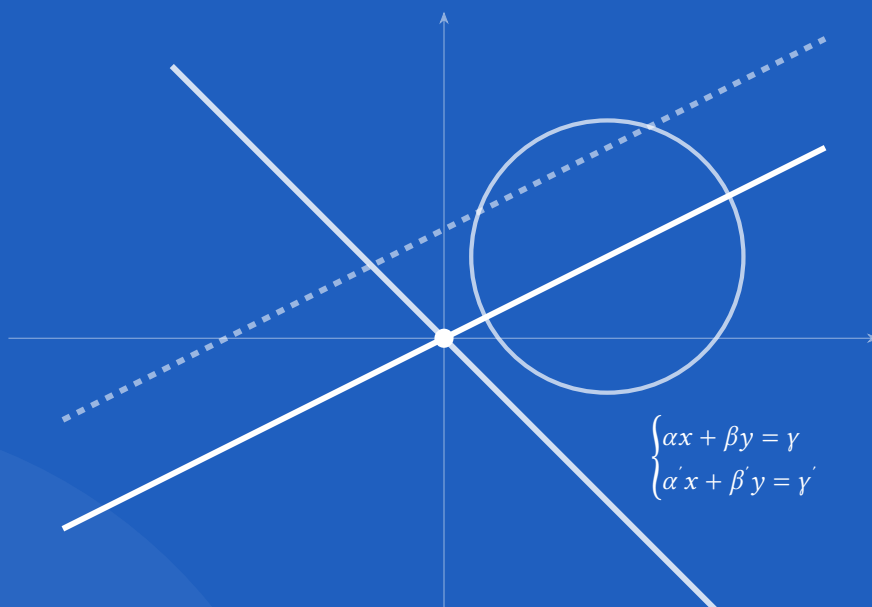
Περιεχόμενα

Κάθε κεφάλαιο έχει το δικό του χρώμα. Το ίδιο χρώμα θα το βρίσκεις στη χρωματιστή γλωττίδα στο δεξί περιθώριο κάθε σελίδας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Συστήματα	4
1.1 Γραμμικά Συστήματα	5
1.2 Μη Γραμμικά Συστήματα	17
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Ιδιότητες Συναρτήσεων	23
2.1 Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες Συνάρτησης	24
2.2 Κατακόρυφη – Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης	33
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Τριγωνομετρία	38
3.1 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας	39
3.2 Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες	46
3.3 Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο	51
3.4 Οι Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις	56
3.5 Βασικές Τριγωνομετρικές Εξισώσεις	63
3.6 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Αθροίσματος Γωνιών	69
3.7 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί της Γωνίας 2α	73
3.8 Μετασχηματισμοί Τριγωνομετρικών Παραστάσεων	78
3.9 Η Συνάρτηση $f(x) = \alpha \etaμ x + \beta συν x$	82
3.10 Επίλυση Τριγώνου	86
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές Εξισώσεις	92
4.1 Πολυώνυμα	93
4.2 Διάρθρωση Πολυωνύμων	98
4.3 Πολυωνυμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις	103
4.4 Εξισώσεις και Ανισώσεις που Ανάγονται σε Πολυωνυμικές	109
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση	114
5.1 Εκθετική Συνάρτηση	115
5.2 Λογάριθμοι	121
5.3 Λογαριθμική Συνάρτηση	126
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ	132
Ε Επαναληπτικά Θέματα σε Όλη την Ύλη	132
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ	134

Συστήματα

Πόσο κοστίζει κάθε προϊόν όταν ξέρουμε μόνο τι πληρώσαμε συνολικά; Σε ποιο σημείο τέμνονται δύο δρόμοι, ή μια ευθεία και ένας κύκλος; Σε τέτοια προβλήματα έχουμε περισσότερους από έναν αγνώστους, που πρέπει να ικανοποιούν ταυτόχρονα πολλές συνθήκες. Το εργαλείο που τα λύνει είναι το **σύστημα εξισώσεων**. Στο κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε να λύνουμε και να διερευνούμε συστήματα με **ορίζουσες** και θα δούμε τι σημαίνει γεωμετρικά η λύση τους.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 • ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ 1.1

Γραμμικά Συστήματα

1.1

ΚΕΦ. 1

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ▶ τι παριστάνει γεωμετρικά η εξίσωση $ax + by = \gamma$,
- ▶ πώς λύνεται ένα σύστημα 2×2 με αντικατάσταση, με αντίθετους συντελεστές και με ορίζουσες,
- ▶ πώς **διερευνάται** ένα σύστημα με παράμετρο,
- ▶ πώς λύνεται ένα σύστημα 3×3 και πώς στήνουμε συστήματα από προβλήματα.

|| Η γραμμική εξίσωση $ax + by = \gamma$

Μια εξίσωση της μορφής

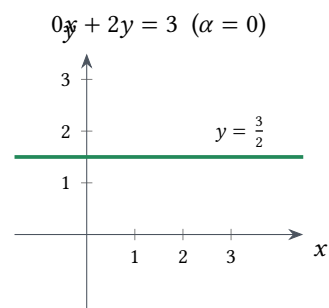
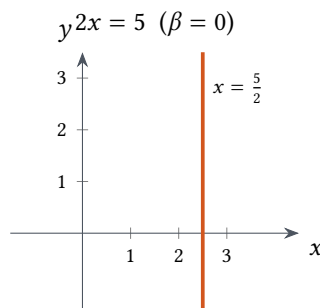
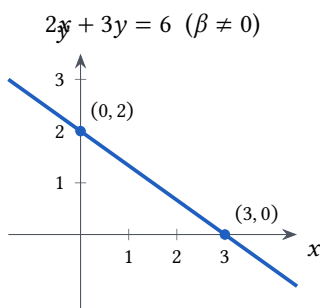
$$ax + by = \gamma, \quad \text{με } a \neq 0 \text{ ή } b \neq 0,$$

λέγεται **γραμμική εξίσωση** με δύο αγνώστους. Κάθε ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) που την επαληθεύει λέγεται **λύση** της. Για παράδειγμα, το ζεύγος $(3, 0)$ είναι λύση της $2x + 3y = 6$, αφού $2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 6$. Λύση είναι και το $(0, 2)$, και γενικά κάθε ζεύγος $(x, \frac{6-2x}{3})$. Η εξίσωση λοιπόν έχει **άπειρες** λύσεις.

Τι σχήμα σχηματίζουν όλες αυτές οι λύσεις στο επίπεδο; Θα δείξουμε ότι σχηματίζουν **ευθεία**.

➡ Η ΕΞΙΣΩΣΗ $AX+BY=\Gamma$ ΠΑΡΙΣΤΑΝΕΙ ΕΥΘΕΙΑ

- ▶ Αν $\beta \neq 0$, η εξίσωση γράφεται $y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta}$. Παριστάνει δηλαδή ευθεία με **κλίση** (συντελεστή διεύθυνσης) $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, \frac{\gamma}{\beta})$.
- ▶ Αν $\beta = 0$ (οπότε $\alpha \neq 0$), η εξίσωση γράφεται $x = \frac{\gamma}{\alpha}$ και παριστάνει **κατακόρυφη** ευθεία, δηλαδή ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$.
- ▶ Ειδικά, αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$, η εξίσωση γίνεται $y = \frac{\gamma}{\beta}$ και παριστάνει **οριζόντια** ευθεία, παράλληλη στον $x'x$.





Χρήσιμο να ξέρεις

Για να σχεδιάσεις γρήγορα μια ευθεία $ax + by = \gamma$, βρες τα σημεία όπου τέμνει τους άξονες. Για $x = 0$ βρίσκεις το σημείο τομής με τον y' και για $y = 0$ το σημείο τομής με τον x' . Δύο σημεία αρκούν για να χαράξεις μια ευθεία.



ΠΡΟΣΟΧΗ!

Αν $\alpha = \beta = 0$, η εξίσωση γίνεται $0x + 0y = \gamma$ και δεν είναι γραμμική με την έννοια του ορισμού.

- ▶ Αν $\gamma \neq 0$, δεν έχει καμία λύση (αδύνατη).
- ▶ Αν $\gamma = 0$, την επαληθεύει **κάθε** ζεύγος (x, y) (ταυτότητα). Οι λύσεις της είναι όλα τα σημεία του επιπέδου.

Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους

ΟΡΙΣΜΟΣ | Σύστημα 2×2

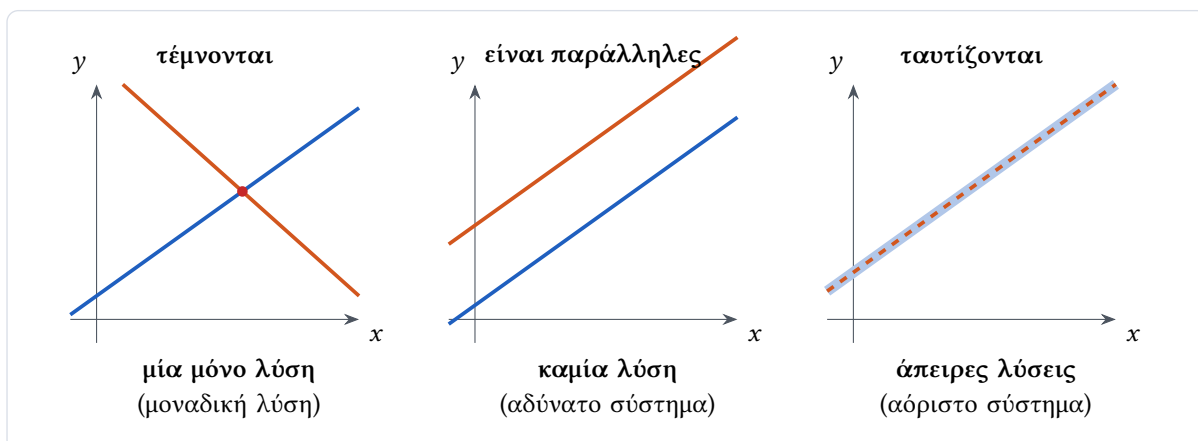
Δύο γραμμικές εξισώσεις που πρέπει να ισχύουν **ταυτόχρονα**,

$$(\Sigma) : \begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$$

αποτελούν ένα **γραμμικό σύστημα 2×2** . **Λύση** του συστήματος είναι κάθε ζεύγος (x_0, y_0) που επαληθεύει **και τις δύο** εξισώσεις. Το να **λύσουμε** το σύστημα σημαίνει να βρούμε όλες τις λύσεις του ή να αποδείξουμε ότι δεν έχει καμία.

♦ Γεωμετρική ερμηνεία: τρεις δυνατές περιπτώσεις

Κάθε εξίσωση παριστάνει μια ευθεία, έστω e_1 και e_2 . Μια λύση του συστήματος είναι ένα σημείο που ανήκει **και στις δύο** ευθείες, δηλαδή ένα κοινό τους σημείο. Δύο ευθείες στο επίπεδο μπορεί:



Επομένως ένα γραμμικό σύστημα 2×2 έχει ή **μία ακριβώς λύση**, ή **καμία**, ή **άπειρες**. Δεν μπορεί, για παράδειγμα, να έχει ακριβώς δύο λύσεις.

 Γιατί δεν γίνεται να έχει ακριβώς δύο λύσεις;

Αν δύο διαφορετικές ευθείες είχαν δύο κοινά σημεία, θα περνούσαν και οι δύο από τα ίδια δύο σημεία. Από δύο σημεία όμως διέρχεται **μία μόνο** ευθεία, άρα οι ευθείες θα ταυτίζονταν. Γι' αυτό, μόλις βρεις δύο διαφορετικές λύσεις ενός γραμμικού συστήματος, ξέρεις αμέσως ότι έχει άπειρες.

|| Αλγεβρική επίλυση: αντικατάσταση και αντίθετοι συντελεστές

Οι δύο μέθοδοι που ξέρεις από το Γυμνάσιο εξακολουθούν να είναι πολύ χρήσιμες, ιδίως όταν οι συντελεστές είναι αριθμοί.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Μέθοδος της αντικατάστασης

- Λύνουμε μία από τις εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο. Διαλέγουμε τον άγνωστο που έχει συντελεστή 1 ή -1 , για να αποφύγουμε τα κλάσματα.
- Αντικαθιστούμε την παράσταση που βρήκαμε στην **άλλη** εξίσωση και λύνουμε την εξίσωση με έναν άγνωστο που προκύπτει.
- Βρίσκουμε τον δεύτερο άγνωστο από την παράσταση του βήματος (α).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών (απαλοιφή)

- Πολλαπλασιάζουμε τη μία ή και τις δύο εξισώσεις με κατάλληλους αριθμούς, ώστε οι συντελεστές ενός αγνώστου να γίνουν **αντίθετοι**.
- Προσθέτουμε κατά μέλη. Ο άγνωστος αυτός απαλείφεται και μένει εξίσωση με έναν άγνωστο.
- Βρίσκουμε τον άλλο άγνωστο με αντικατάσταση σε μία από τις αρχικές εξισώσεις.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 1.1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.1 – Μέθοδος αντικατάστασης

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $x = 7 - 2y$. Αντικαθιστούμε στη δεύτερη:

$$3(7 - 2y) - y = 7 \Leftrightarrow 21 - 6y - y = 7 \Leftrightarrow -7y = -14 \Leftrightarrow y = 2.$$

Τότε $x = 7 - 2 \cdot 2 = 3$. Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (3, 2)$.

Επαλήθευση: $3 + 2 \cdot 2 = 7$  και $3 \cdot 3 - 2 = 7$ 

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.2 – Μέθοδος αντίθετων συντελεστών

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη εξίσωση με 2, ώστε ο συντελεστής του y να γίνει -4 , αντίθετος του 4:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 10x - 4y = 16 \end{cases} \xrightarrow{\text{προσθέτουμε}} 13x = 26 \Leftrightarrow x = 2.$$

Από την πρώτη: $3 \cdot 2 + 4y = 10 \Leftrightarrow 4y = 4 \Leftrightarrow y = 1$. Άρα $(x, y) = (2, 1)$.

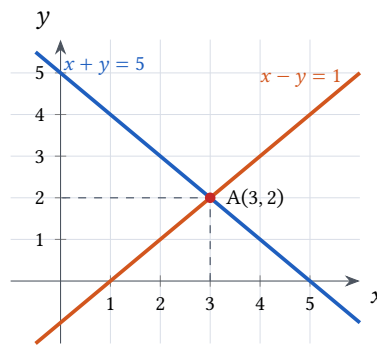
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.3 – Γραφική επίλυση

Να λυθεί γραφικά το σύστημα $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ και να επαληθευτεί αλγεβρικά.

ΛΥΣΗ

Η πρώτη ευθεία τέμνει τους άξονες στα $(5, 0)$ και $(0, 5)$. Η δεύτερη τέμνει τους άξονες στα $(1, 0)$ και $(0, -1)$. Σχεδιάζουμε τις δύο ευθείες και διαπιστώνουμε ότι τέμνονται στο σημείο $A(3, 2)$.

Αλγεβρικά: προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε $2x = 6$, άρα $x = 3$, οπότε $y = 5 - 3 = 2$. Η λύση είναι $(3, 2)$, όπως έδειξε και το σχήμα.



Η ορίζουσα ενός συστήματος – Μέθοδος Cramer

Οι προηγούμενες μέθοδοι δουλεύουν πολύ καλά με αριθμούς. Όταν όμως οι συντελεστές περιέχουν **παράμετρο**, χρειαζόμαστε ένα εργαλείο που να μας δίνει άμεσα πόσες λύσεις έχει το σύστημα. Αυτό το εργαλείο είναι η **ορίζουσα**.

ΟΡΙΣΜΟΣ | Ορίζουσα 2×2

Για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ονομάζουμε **ορίζουσα** την παράσταση

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

Δηλαδή: γινόμενο της κύριας διαγωνίου **μείον** γινόμενο της δευτερεύουσας διαγωνίου.

δευτερεύουσα (-)

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

κύρια (+)

Παραδείγματα:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 4 = 14$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 4 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4$$

Για το σύστημα (Σ) ορίζουμε τρεις ορίζουσες:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta \quad D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta \quad D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma$$

Η D σχηματίζεται από τους **συντελεστές του x** και τους **συντελεστές του y** . Για τη D_x αντικαθιστούμε τη στήλη του x με τους **σταθερούς όρους**, και για τη D_y αντικαθιστούμε τη στήλη του y .

ΘΕΩΡΗΜΑ (CRAMER)

Για το γραμμικό σύστημα (Σ) ισχύουν τα εξής:

- ▶ Αν $D \neq 0$, το σύστημα έχει **μοναδική λύση**, την

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}.$$

- ▶ Αν $D = 0$, το σύστημα είναι ή **αδύνατο** ή έχει **άπειρες λύσεις**.
 - ▶ Αν $D = 0$ και μία τουλάχιστον από τις D_x, D_y είναι διάφορη του μηδενός, το σύστημα είναι **αδύνατο**.
 - ▶ Αν $D = D_x = D_y = 0$, δεν μπορούμε να αποφανθούμε από τις ορίζουσες. Αντικαθιστούμε και εξετάζουμε το σύστημα απευθείας.

Απόδειξη

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με β' και τη δεύτερη με $-\beta$ και προσθέτουμε. Ο y απαλείφεται και παίρνουμε $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)x = \gamma\beta' - \gamma'\beta$, δηλαδή $D \cdot x = D_x$. Με τον ίδιο τρόπο, απαλείφοντας τον x , βρίσκουμε $D \cdot y = D_y$. Έτσι το σύστημα οδηγεί στις εξισώσεις

$$D \cdot x = D_x \quad \text{και} \quad D \cdot y = D_y.$$

Αν $D \neq 0$, παίρνουμε $x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$, και με αντικατάσταση επαληθεύεται ότι το ζεύγος αυτό είναι πράγματι λύση. Αν $D = 0$ και, για παράδειγμα, $D_x \neq 0$, η εξίσωση $0 \cdot x = D_x$ είναι αδύνατη, άρα και το σύστημα είναι αδύνατο.

 Γεωμετρική σημασία της D

Αν $\beta \neq 0$ και $\beta' \neq 0$, οι κλίσεις των δύο ευθειών είναι $\lambda_1 = -\frac{\alpha}{\beta}$ και $\lambda_2 = -\frac{\alpha'}{\beta'}$. Ισχύει:

$$D = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta' = \alpha'\beta \Leftrightarrow -\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\alpha'}{\beta'} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$$

Δηλαδή $D = 0$ σημαίνει ότι οι ευθείες είναι παράλληλες ή ταυτίζονται, ενώ $D \neq 0$ σημαίνει ότι τέμνονται σε ένα σημείο.

 ΠΡΙΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΕΙΣ ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Κάθε εξίσωση πρέπει να έχει πρώτα γραφτεί στη μορφή $ax + by = \gamma$:

- ▶ οι άγνωστοι στο πρώτο μέλος, με την ίδια σειρά (x πρώτα, y μετά) και στις δύο εξισώσεις,
- ▶ οι σταθεροί όροι στο δεύτερο μέλος,
- ▶ χωρίς παρονομαστές και παρενθέσεις.

Αν μια εξίσωση δεν περιέχει κάποιον άγνωστο, ο συντελεστής του είναι 0. Για παράδειγμα, η $y = 3$ γράφεται $0x + 1y = 3$.

 ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Υπολογισμός των οριζουσών Λάθος

Στη D_x αντικαθιστώ τη στήλη του y με τους σταθερούς όρους.
Γράφω $D = \alpha\beta' + \alpha'\beta$.

 Σωστό

Στη D_x αλλάζει η στήλη του x (η πρώτη).
 $D = \alpha\beta' - \alpha'\beta$: κύρια μείον δευτερεύουσα διαγώνιος.

 ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | « $D = D_x = D_y = 0$, άρα άπειρες λύσεις»

Δεν είναι σωστό. Πάρε το σύστημα $\begin{cases} 0x + 0y = 1 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases}$. Όλες οι ορίζουσες είναι 0, όμως το σύστημα είναι φανερά **αδύνατο**. Όταν $D = D_x = D_y = 0$, αντικαθιστούμε τις τιμές στο σύστημα και αποφασίζουμε από αυτό που προκύπτει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.4 – Λύση με ορίζουσες

Να λυθεί με τη μέθοδο των οριζουσών το σύστημα $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x + y = 9 \end{cases}$

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14, \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 27 = 28, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 4 = 14.$$

Αφού $D = 14 \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{28}{14} = 2, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{14}{14} = 1.$$

Άρα $(x, y) = (2, 1)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.5 – Πρώτα «τακτοποίηση»

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{y}{3} = 1 \\ 2(x-y) = y-3 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Φέρνουμε κάθε εξίσωση στη μορφή $ax + by = \gamma$. Στην πρώτη πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ 6:

$$3(x+1) - 2y = 6 \Leftrightarrow 3x - 2y = 3.$$

Η δεύτερη: $2x - 2y = y - 3 \Leftrightarrow 2x - 3y = -3$. Τώρα:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 4 = -5, \quad D_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 6 = -15, \quad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 6 = -15.$$

Άρα $x = \frac{-15}{-5} = 3$ και $y = \frac{-15}{-5} = 3$, δηλαδή $(x, y) = (3, 3)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.6 – Χαρακτηρισμός χωρίς επίλυση

Να εξεταστεί πόσες λύσεις έχει καθένα από τα συστήματα:

$$(\Sigma_1) : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 7 \end{cases} \quad (\Sigma_2) : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

(Σ_1) : $D = 4 - 4 = 0$ και $D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 14 = -2 \neq 0$. Επομένως το σύστημα είναι **αδύνατο**.

Γεωμετρικά, οι ευθείες $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ και $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$ είναι παράλληλες.

(Σ_2) : $D = 0$, $D_x = 12 - 12 = 0$ και $D_y = 6 - 6 = 0$. Οι ορίζουσες δεν αρκούν, οπότε κοιτάμε το σύστημα. Η δεύτερη εξίσωση είναι η πρώτη πολλαπλασιασμένη επί 2, άρα το σύστημα ισοδυναμεί με τη μία εξίσωση $x + 2y = 3$ και έχει **άπειρες λύσεις**. Γράφουμε τις λύσεις ως εξής:

$$(x, y) = (3 - 2\kappa, \kappa), \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Διερεύνηση συστήματος με παράμετρο

Όταν οι συντελεστές ενός συστήματος περιέχουν μια παράμετρο (συνήθως λ ή μ), το πλήθος των λύσεων **εξαρτάται** από την τιμή της. Το να **διερευνήσουμε** το σύστημα σημαίνει να εξετάσουμε όλες τις περιπτώσεις.



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Διερεύνηση γραμμικού συστήματος 2×2

- Υπολογίζουμε τις D , D_x , D_y και τις γράφουμε σε **μορφή γινομένου** (παραγοντοποίηση).
- Λύνουμε την εξίσωση $D = 0$ και βρίσκουμε τις «κρίσιμες» τιμές της παραμέτρου.

γ) Για κάθε άλλη τιμή ($D \neq 0$): μοναδική λύση $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$. Απλοποιούμε όσο γίνεται.

δ) Για κάθε κρίσιμη τιμή: **αντικαθιστούμε στο σύστημα** και εξετάζουμε αν είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.7 – Πλήρης διερεύνηση

Να λυθεί για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα
$$\begin{cases} (\lambda - 1)x + 2y = 3 \\ 2x + (\lambda - 1)y = 3 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Ορίζουσες:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = (\lambda - 1 - 2)(\lambda - 1 + 2) = (\lambda - 3)(\lambda + 1),$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 3(\lambda - 1) - 6 = 3(\lambda - 3), \quad D_y = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(\lambda - 1) - 6 = 3(\lambda - 3).$$

Περίπτωση 1: $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -1$. Τότε $D \neq 0$ και το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{3(\lambda - 3)}{(\lambda - 3)(\lambda + 1)} = \frac{3}{\lambda + 1}, \quad y = \frac{3}{\lambda + 1}.$$

Περίπτωση 2: $\lambda = 3$. Το σύστημα γίνεται $\begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$, δηλαδή μία εξίσωση. Έχει άπειρες λύσεις, τις $(x, y) = \left(\kappa, \frac{3-2\kappa}{2}\right)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Περίπτωση 3: $\lambda = -1$. Το σύστημα γίνεται $\begin{cases} -2x + 2y = 3 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$. Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε $0 = 6$, άρα είναι **αδύνατο**. Το ίδιο φαίνεται και από το ότι $D = 0$ ενώ $D_x = -12 \neq 0$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Απλοποίηση χωρίς προϋπόθεση

Στο παραπάνω παράδειγμα, η απλοποίηση $\frac{3(\lambda-3)}{(\lambda-3)(\lambda+1)} = \frac{3}{\lambda+1}$ επιτρέπεται **μόνο επειδή** βρισκόμαστε στην περίπτωση $\lambda \neq 3$. Αν απλοποιήσεις πριν χωρίσεις περιπτώσεις, θα «χάσεις» την τιμή $\lambda = 3$ και θα νομίσεις ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση και γι' αυτήν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.8 – Εύρεση παραμέτρου

Για ποιες τιμές του λ το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ 4x + \lambda y = 4 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις;

ΛΥΣΗ

Για να έχει άπειρες λύσεις πρέπει οπωσδήποτε $D = 0$. Έχουμε $D = \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = -2$. Εξετάζουμε κάθε τιμή χωριστά:

► $\lambda = 2$: $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases}$. Η δεύτερη είναι η πρώτη επί 2, άρα το σύστημα έχει **άπειρες** λύσεις.

► $\lambda = -2$: $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 2 \\ -2x + y = -2 \end{cases}$, που είναι **αδύνατο**.

Άρα ζητούμενη τιμή είναι μόνο η $\lambda = 2$.



Η διερεύνηση συστήματος με παράμετρο είναι από τα πιο αγαπημένα θέματα των διαγωνισμάτων. Στο mathgreece.com θα βρεις βιντεομάθημα με την πλήρη μεθοδολογία και δεκάδες ακόμη λυμένες διερευνήσεις, εντελώς δωρεάν.

Γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους (3×3)

ΟΡΙΣΜΟΣ | Σύστημα 3×3

Ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 \end{cases}$$

λέγεται γραμμικό σύστημα 3×3. **Λύση** του είναι κάθε τριάδα (x_0, y_0, z_0) που επαληθεύει **και τις τρεις** εξισώσεις.



Γεωμετρικά

Κάθε εξίσωση $ax + by + cz = \delta$ παριστάνει ένα **επίπεδο** στον χώρο. Η λύση ενός συστήματος 3×3 είναι τα κοινά σημεία τριών επιπέδων. Γι' αυτό και εδώ μπορεί να υπάρχει μία λύση, καμία ή άπειρες.



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Επίλυση συστήματος 3×3 με απαλοιφή

- Διαλέγουμε έναν άγνωστο (π.χ. τον z) και τον **απαλείφουμε** από δύο ζεύγη εξισώσεων, με αντικατάσταση ή με αντίθετους συντελεστές.
- Παίρνουμε έτσι ένα σύστημα 2×2 με αγνώστους x, y , το οποίο λύνουμε.
- Αντικαθιστούμε τα x, y σε μία από τις αρχικές εξισώσεις και βρίσκουμε τον z .
- Κάνουμε επαλήθευση και στις τρεις εξισώσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.9 – Σύστημα 3×3

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ 2x - y + z = 3 & (2) \\ x + 2y - z = 2 & (3) \end{cases}$

ΛΥΣΗ

Ο z έχει συντελεστές 1, 1, -1, οπότε τον απαλείφουμε εύκολα.

$$\triangleright (1) + (3): 2x + 3y = 8 \quad (4)$$

$$\triangleright (2) + (3): 3x + y = 5 \quad (5)$$

Από την (5) έχουμε $y = 5 - 3x$, και η (4) δίνει $2x + 15 - 9x = 8 \Leftrightarrow -7x = -7 \Leftrightarrow x = 1$. Τότε $y = 5 - 3 = 2$ και από την (1): $z = 6 - 1 - 2 = 3$.

Η λύση είναι η τριάδα $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. Επαλήθευση στη (2): $2 - 2 + 3 = 3$ ✓

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.10 – Παραβολή από τρία σημεία

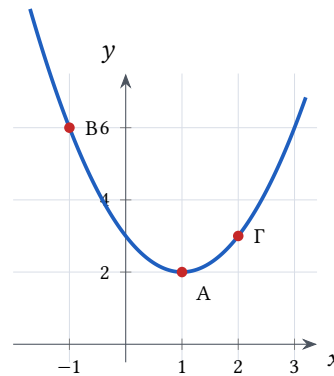
Να βρεθούν οι α, β, γ ώστε η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ να διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-1, 6)$ και $\Gamma(2, 3)$.

ΛΥΣΗ

Κάθε σημείο δίνει μια εξίσωση:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(-1) = 6 \\ f(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 & (1) \\ \alpha - \beta + \gamma = 6 & (2) \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 3 & (3) \end{cases}$$

Από (1) - (2): $2\beta = -4 \Leftrightarrow \beta = -2$. Τότε η (1) δίνει $\alpha + \gamma = 4$ και η (3) δίνει $4\alpha + \gamma = 7$. Αφαιρώντας, $3\alpha = 3$, άρα $\alpha = 1$ και $\gamma = 3$.
Επομένως $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

**Προβλήματα που λύνονται με συστήματα****ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Από το πρόβλημα στο σύστημα**

- Ορίζουμε με σαφήνεια τους αγνώστους («Έστω x η τιμή...») και γράφουμε τους περιορισμούς τους (π.χ. $x > 0$).
- Μεταφράζουμε κάθε πληροφορία του προβλήματος σε εξίσωση.
- Λύνουμε το σύστημα.
- Ελέγχουμε αν η λύση είναι δεκτή (θετικοί αριθμοί, ακέραιοι κ.λπ.) και απαντάμε με λόγια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.11 – Το κυλικείο

Στο κυλικείο του σχολείου, 3 τυρόπιτες και 2 χυμοί κοστίζουν 7,30 €, ενώ 2 τυρόπιτες και 3 χυμοί κοστίζουν 6,70 €. Πόσο κοστίζει η τυρόπιτα και πόσο ο χυμός;

ΛΥΣΗ

Έστω t η τιμή της τυρόπιτας και c η τιμή του χυμού (σε €), με $t, c > 0$. Τότε:

$$\begin{cases} 3t + 2c = 7,3 \\ 2t + 3c = 6,7 \end{cases}$$

Ένα κομψό τέχνασμα: προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε $5t + 5c = 14$, δηλαδή $t + c = 2,8$. Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε $t - c = 0,6$. Από τις δύο αυτές εξισώσεις βρίσκουμε $2t = 3,4$, άρα $t = 1,7$ και $c = 1,1$.

Απάντηση: η τυρόπιτα κοστίζει 1,70 € και ο χυμός 1,10 €.

**Συμμετρικοί συντελεστές**

Όταν σε ένα σύστημα οι συντελεστές «αντιστρέφονται», όπως στο $\begin{cases} 3t + 2c = \dots \\ 2t + 3c = \dots \end{cases}$, η πρόσθεση και η αφαίρεση κατά μέλη δίνουν αμέσως το άθροισμα και τη διαφορά των αγνώστων. Γλιτώνεις έτσι πολλές πράξεις.

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 1.1**Ευθεία**

$ax + by = \gamma$ ($a \neq 0$ ή $b \neq 0$). Αν $b \neq 0$: κλίση $\lambda = -\frac{a}{b}$. Αν $b = 0$:

κατακόρυφη $x = \frac{\gamma}{a}$.

Ορίζουσες

$D = \alpha\beta' - \alpha'\beta$, $D_x = \gamma\beta' - \gamma'\beta$, $D_y = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma$

$D \neq 0$

μοναδική λύση $\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)$, οι ευθείες τέμνονται

$D = 0$, $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$

αδύνατο σύστημα (παράλληλες ευθείες)

$D = D_x = D_y = 0$

αντικατάσταση και έλεγχος: συνήθως άπειρες λύσεις, **αλλά όχι πάντα**

Σύστημα 3×3

απαλοιφή ενός αγνώστου $\rightarrow$ σύστημα $2 \times 2 \rightarrow$ αντικατάσταση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 1.1

Δυσκολία: ★★ ★ βασική ★★ ★ μέτρια ★★ ★ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- 1 ★★ ★ Να βρείτε την κλίση της ευθείας $3x - 2y = 6$ και τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες. Στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.
- 2 ★★ ★ Για ποια τιμή του k το σημείο $M(2, -1)$ ανήκει στην ευθεία $kx + 3y = 5$;
- 3 ★★ ★ Να λύσετε με τη μέθοδο της αντικατάστασης το σύστημα $\begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$
- 4 ★★ ★ Να λύσετε με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών το σύστημα $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 3x - 4y = 24 \end{cases}$

5 ★★ ★ Να λύσετε με ορίζουσες το σύστημα
$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x + 4y = 6 \end{cases}$$

6 ★★ ★ Χωρίς να λύσετε τα συστήματα, να βρείτε πόσες λύσεις έχει καθένα:

α)
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = -6 \end{cases}$$

β)
$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = 5 \end{cases}$$

γ)
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

7 ★★ ★ Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \frac{2x - y}{3} + \frac{x + y}{2} = 4 \\ 3(x - 2) - 2(y - 1) = -1 \end{cases}$$

8 ★★ ★ Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα
$$\begin{cases} \lambda x + y = \lambda + 1 \\ x + \lambda y = 2 \end{cases}$$

9 ★★ ★ Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες το σύστημα
$$\begin{cases} \alpha x + 2y = 4 \\ 3x + \beta y = 6 \end{cases}$$
 έχει άπειρες λύσεις.

10 ★★ ★ Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 6 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

11 ★★ ★ Μια οικογένεια με 2 ενήλικες και 3 παιδιά πλήρωσε στον κινηματογράφο 36 €. Μια άλλη, με 3 ενήλικες και 1 παιδί, πλήρωσε 33 €. Πόσο κοστίζει το εισιτήριο ενηλίκου και πόσο το παιδικό;

12 ★★ ★ Ένας διψήφιος αριθμός έχει άθροισμα ψηφίων 11. Αν αντιστρέψουμε τη σειρά των ψηφίων του, ο αριθμός αυξάνεται κατά 27. Ποιος είναι ο αριθμός;

13 ★★ ★ Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ \lambda x + y = \lambda^2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να το λύσετε για τις διάφορες τιμές του λ .

β) Για ποια τιμή του λ η μοναδική λύση (x_0, y_0) ικανοποιεί τη σχέση $x_0 + y_0 = 1$;

14 ★★ ★ Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{x}{4} - \frac{3}{y} = 1 \end{cases} \quad (\text{Υπόδειξη: θέστε } u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}).$$

15 ★★ ★ Να βρείτε τη συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0, -3)$, $B(1, 0)$ και $\Gamma(-1, -4)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ 1.2

Μη Γραμμικά Συστήματα

1.2

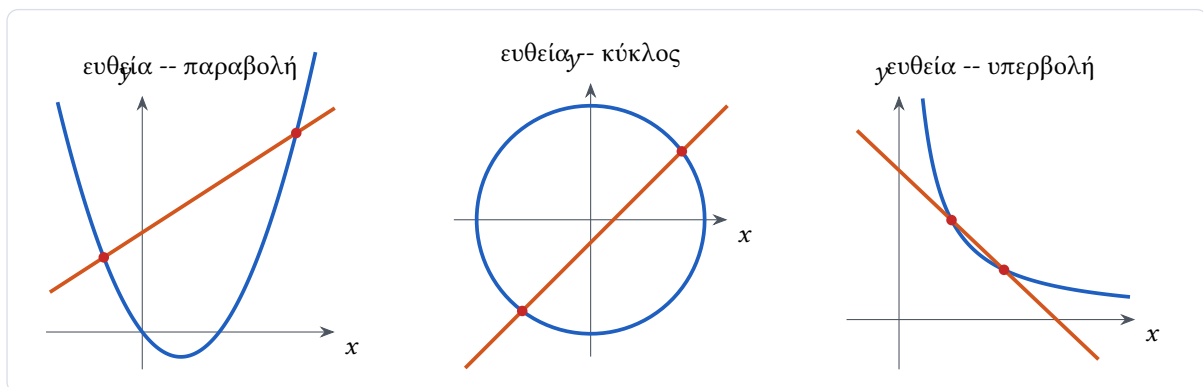
ΚΕΦ. 1

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ▶ ποια συστήματα λέγονται μη γραμμικά και πώς λύνονται με αντικατάσταση,
- ▶ τι σημαίνουν γεωμετρικά: τομή ευθείας με παραβολή, κύκλο ή υπερβολή,
- ▶ το τέχνασμα «άθροισμα -- γινόμενο» για τα συμμετρικά συστήματα,
- ▶ πώς ελέγχουμε το πλήθος των λύσεων με τη διακρίνουσα.

Τι είναι ένα μη γραμμικό σύστημα

Ένα σύστημα λέγεται **μη γραμμικό** όταν **μία τουλάχιστον** από τις εξισώσεις του δεν είναι γραμμική. Για παράδειγμα, όταν περιέχει όρους όπως x^2 , y^2 , xy ή $\frac{1}{x}$. Τέτοια συστήματα εμφανίζονται όταν θέλουμε να βρούμε τα κοινά σημεία μιας ευθείας με μια καμπύλη, ή δύο καμπυλών μεταξύ τους.



⚙️ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Σύστημα με μία γραμμική εξίσωση

- Από τη **γραμμική** εξίσωση λύνουμε ως προς τον έναν άγνωστο.
- Αντικαθιστούμε στη μη γραμμική. Συνήθως προκύπτει εξίσωση 2ου βαθμού.
- Λύνουμε τη δευτεροβάθμια (διακρίνουσα ή παραγοντοποίηση).
- Για **κάθε** ρίζα βρίσκουμε τον άλλο άγνωστο από την παράσταση του βήματος (α), και γράφουμε τις λύσεις ως ζεύγη.

❌ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Λάθος «ζευγάρισμα» λύσεων

Ο δεύτερος άγνωστος πρέπει να υπολογίζεται από τη **γραμμική** εξίσωση (ή από την παράσταση που βρήκαμε). Αν τον υπολογίσεις από τη μη γραμμική, μπορεί να βρεις «λύσεις» που δεν επαληθεύουν το σύστημα. Για παράδειγμα, στο σύστημα $x^2 + y^2 = 25$, $x - y = 1$, για $y = 3$ η εξίσωση του κύκλου δίνει $x = \pm 4$, όμως μόνο το $(4, 3)$ είναι λύση. Το $(-4, 3)$ δεν επαληθεύει την $x - y = 1$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 1.2

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.1 – Ευθεία και παραβολή

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x + 4 \end{cases}$ και να ερμηνευτεί γεωμετρικά.

ΛΥΣΗ

Εξισώνουμε τα δεύτερα μέλη: $x^2 - 2x = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$. Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 9 + 16 = 25$, άρα

$$x = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = -1.$$

Από τη γραμμική εξίσωση $y = x + 4$: για $x = 4$ βρίσκουμε $y = 8$ και για $x = -1$ βρίσκουμε $y = 3$. Οι λύσεις είναι $(4, 8)$ και $(-1, 3)$. Γεωμετρικά, η ευθεία $y = x + 4$ τέμνει την παραβολή $y = x^2 - 2x$ σε δύο σημεία (βλ. το πρώτο σχήμα της σελίδας).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.2 – Ευθεία και κύκλος

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 1 \end{cases}$

ΛΥΣΗ

Από τη γραμμική εξίσωση: $x = y + 1$. Αντικαθιστούμε:

$$(y + 1)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow 2y^2 + 2y - 24 = 0 \Leftrightarrow y^2 + y - 12 = 0 \Leftrightarrow y = 3 \text{ ή } y = -4.$$

Για $y = 3$: $x = 4$. Για $y = -4$: $x = -3$. Λύσεις: $(4, 3)$ και $(-3, -4)$.

Η εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα 5, και η ευθεία τον τέμνει σε δύο σημεία.

Συμμετρικά συστήματα: άθροισμα και γινόμενο

ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Δύο αριθμοί με άθροισμα S και γινόμενο P είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$t^2 - St + P = 0.$$

Επομένως οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ είναι τα ζεύγη (t_1, t_2) και (t_2, t_1) , όπου t_1, t_2 οι ρίζες της εξίσωσης αυτής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.3 – Άθροισμα – γινόμενο

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$

ΛΥΣΗ

Οι x, y είναι ρίζες της $t^2 - 7t + 12 = 0$, δηλαδή $t = 3$ ή $t = 4$. Οι λύσεις είναι $(3, 4)$ και $(4, 3)$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

Τα ζεύγη $(3, 4)$ και $(4, 3)$ είναι **διαφορετικές** λύσεις. Ένα συχνό λάθος είναι να γράψεις μόνο τη μία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.4 – Χρήση ταυτοτήτων

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ και $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$:

$$(x + y)^2 = 13 + 12 = 25 \Leftrightarrow x + y = \pm 5.$$

- ▶ Αν $x + y = 5$ και $xy = 6$: οι x, y είναι ρίζες της $t^2 - 5t + 6 = 0$, δηλαδή 2 και 3. Παίρνουμε τις λύσεις $(2, 3)$ και $(3, 2)$.
- ▶ Αν $x + y = -5$ και $xy = 6$: οι x, y είναι ρίζες της $t^2 + 5t + 6 = 0$, δηλαδή -2 και -3 . Παίρνουμε τις λύσεις $(-2, -3)$ και $(-3, -2)$.

Συνολικά το σύστημα έχει **τέσσερις** λύσεις.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Ξεχνάμε το «±»

Από την $(x + y)^2 = 25$ πολλοί γράφουν μόνο $x + y = 5$ και χάνουν τις μισές λύσεις. Θυμήσου: $\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 5$ ή $\alpha = -5$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.5 – Παραγοντοποίηση

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Η πρώτη γράφεται $(x - y)(x + y) = 16$, και αφού $x + y = 8$ παίρνουμε $8(x - y) = 16$, δηλαδή $x - y = 2$. Από το γραμμικό σύστημα $x + y = 8$, $x - y = 2$ βρίσκουμε $x = 5$ και $y = 3$. Η λύση είναι $(5, 3)$.

Πλήθος κοινών σημείων – ρόλος της διακρίνουσας

Όταν η αντικατάσταση οδηγεί σε δευτεροβάθμια εξίσωση, το πρόσημο της διακρίνουσας Δ μας λέει πόσες λύσεις έχει το σύστημα, δηλαδή πόσα κοινά σημεία έχουν οι δύο γραμμές:

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
δύο κοινά σημεία (τέμνονται)	ένα κοινό σημείο (εφάπτονται)	κανένα κοινό σημείο

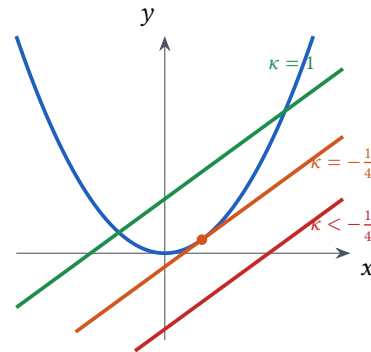
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.6 – Διερεύνηση με παράμετρο

Να βρεθεί, για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας $y = x + \kappa$ με την παραβολή $y = x^2$.

ΛΥΣΗ

Εξισώνουμε: $x^2 = x + \kappa \Leftrightarrow x^2 - x - \kappa = 0$, με $\Delta = 1 + 4\kappa$.

- ▶ $\kappa > -\frac{1}{4}$: $\Delta > 0$, άρα **δύο** κοινά σημεία.
- ▶ $\kappa = -\frac{1}{4}$: $\Delta = 0$, άρα **ένα** κοινό σημείο. Η ευθεία **εφάπτεται** της παραβολής στο $x = \frac{1}{2}$, δηλαδή στο $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.
- ▶ $\kappa < -\frac{1}{4}$: $\Delta < 0$, άρα **κανένα** κοινό σημείο.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.7 – Πρόβλημα με ορθογώνιο**

Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 34 cm και διαγώνιο 13 cm. Να βρεθούν οι διαστάσεις του.

ΛΥΣΗ

Έστω $x, y > 0$ οι διαστάσεις του. Τότε $2x + 2y = 34$, δηλαδή $x + y = 17$, και από το Πυθαγόρειο θεώρημα $x^2 + y^2 = 169$. Από την ταυτότητα:

$$2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = 289 - 169 = 120 \Leftrightarrow xy = 60.$$

Οι x, y είναι λοιπόν ρίζες της $t^2 - 17t + 60 = 0$, δηλαδή 5 και 12. Το ορθογώνιο έχει διαστάσεις 5 cm και 12 cm.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.8 – Δύο δευτεροβάθμιες εξισώσεις

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε άγνωστους τα x^2 και y^2 . Προσθέτοντας κατά μέλη: $2x^2 = 18$, άρα $x^2 = 9$, και τότε $y^2 = 1$. Επομένως $x = \pm 3$ και $y = \pm 1$, με **όλους** τους συνδυασμούς, γιατί κάθε ζεύγος επαληθεύει το σύστημα:

$$(3, 1), (3, -1), (-3, 1), (-3, -1).$$



Τα μη γραμμικά συστήματα συνδέονται με τη Γεωμετρία (κύκλοι, παραβολές) και με τα προβλήματα. Στο mathgreece.com θα βρεις διαδραστικά γραφήματα και βίντεο που δείχνουν κινούμενες ευθείες να τέμνουν καμπύλες. Έτσι το $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ αποκτά νόημα!

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 1.2

Μία εξίσωση γραμμική	λύνουμε τη γραμμική ως προς έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε στην άλλη
$x + y = S, xy = P$	οι x, y είναι ρίζες της $t^2 - St + P = 0$
Χρήσιμες ταυτότητες	$(x \pm y)^2 = x^2 + y^2 \pm 2xy, \quad x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
Πλήθος λύσεων	πρόσημο της Δ της δευτεροβάθμιας που προκύπτει
Ζεύγη	ο 2ος άγνωστος υπολογίζεται από τη γραμμική εξίσωση· οι λύσεις γράφονται ως ζεύγη

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 1.2

Δυσκολία: ★★ ★ βασική ★★ ★ μέτρια ★★ ★ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- 1 ★★ ★ Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$
- 2 ★★ ★ Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$
- 3 ★★ ★ Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 2x \end{cases}$
- 4 ★★ ★ Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 15 \end{cases}$
- 5 ★★ ★ Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases}$
- 6 ★★ ★ Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 + xy = 12 \\ x + y = 4 \end{cases}$
- 7 ★★ ★ Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ x - y = 3 \end{cases}$
- 8 ★★ ★ Να βρείτε τα κοινά σημεία του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ με την ευθεία $3x + 4y = 0$.
- 9 ★★ ★ Να βρείτε την τιμή του κ για την οποία η ευθεία $y = 2x + \kappa$ και η παραβολή $y = x^2 + 1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. Ποιο είναι το σημείο αυτό;
- 10 ★★ ★ Ένα ορθογώνιο οικόπεδο έχει εμβαδόν 48 m^2 και περίμετρο 28 m . Να βρείτε τις διαστάσεις του.
- 11 ★★ ★ Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{cases}$

12
★★★

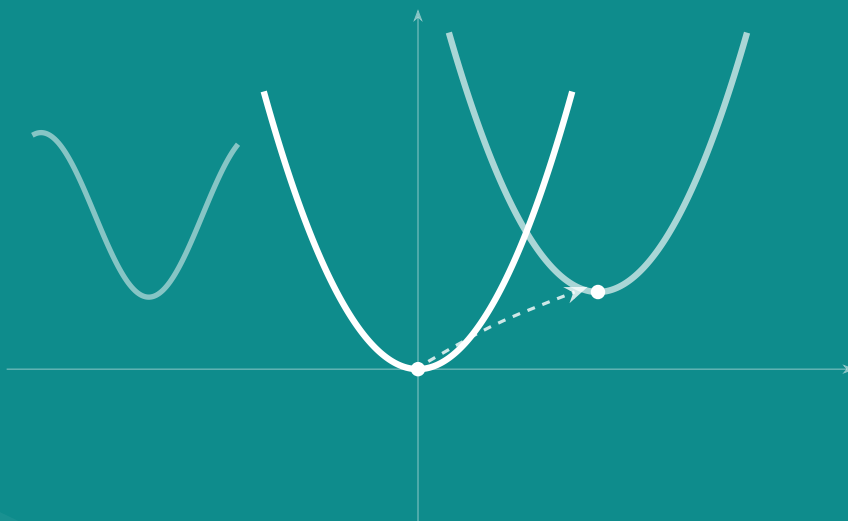
Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$$

13
★★★

Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα 10 cm και εμβαδόν 24 cm^2 . Να βρείτε τις κάθετες πλευρές του.

Ιδιότητες Συναρτήσεων

Μια γραφική παράσταση είναι μια «ιστορία»: πού ανεβαίνει η καμπύλη, πού κατεβαίνει, πού φτάνει στο ψηλότερο ή στο χαμηλότερο σημείο της, και αν έχει κάποια συμμετρία. Στο κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε να περιγράφουμε αυτές τις ιδιότητες με την ακρίβεια της Άλγεβρας: **μονοτονία, ακρότατα, άρτιες και περιττές συναρτήσεις**. Θα δούμε επίσης πώς, **μετατοπίζοντας** μια γνωστή καμπύλη, σχεδιάζουμε χωρίς κόπο πολλές καινούριες.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 • ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ 2.1

Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμε-
τρίες Συνάρτησης

2.1

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ▶ πότε μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα και πώς το αποδεικνύουμε,
- ▶ τι είναι ελάχιστο και μέγιστο (ακρότατα) μιας συνάρτησης,
- ▶ πότε μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή και τι σημαίνει αυτό για τη γραφική της παράσταση.

Μονοτονία συνάρτησης

Φαντάσου ότι περπατάς πάνω στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης από τα αριστερά προς τα δεξιά, δηλαδή καθώς το x μεγαλώνει. Σε κάποια διαστήματα ανεβαίνεις και σε κάποια κατεβαίνεις. Αυτή την εικόνα την περιγράφουμε αυστηρά με τους παρακάτω ορισμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ | Γνησίως αύξουσα – γνησίως φθίνουσα

Έστω f μια συνάρτηση και Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της.

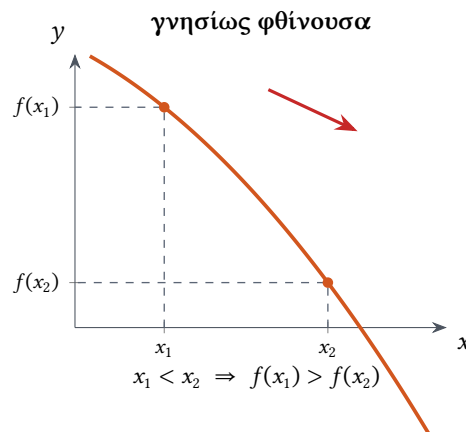
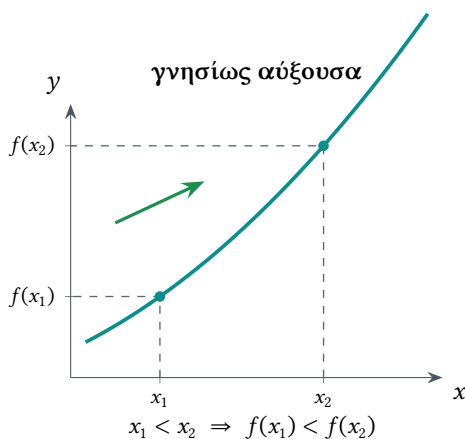
- ▶ Η f λέγεται **γνησίως αύξουσα** στο Δ αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2).$$

- ▶ Η f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** στο Δ αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ λέγεται **γνησίως μονότονη** στο Δ . Συμβολίζουμε: $f \nearrow \Delta$ και $f \searrow \Delta$ αντίστοιχα.

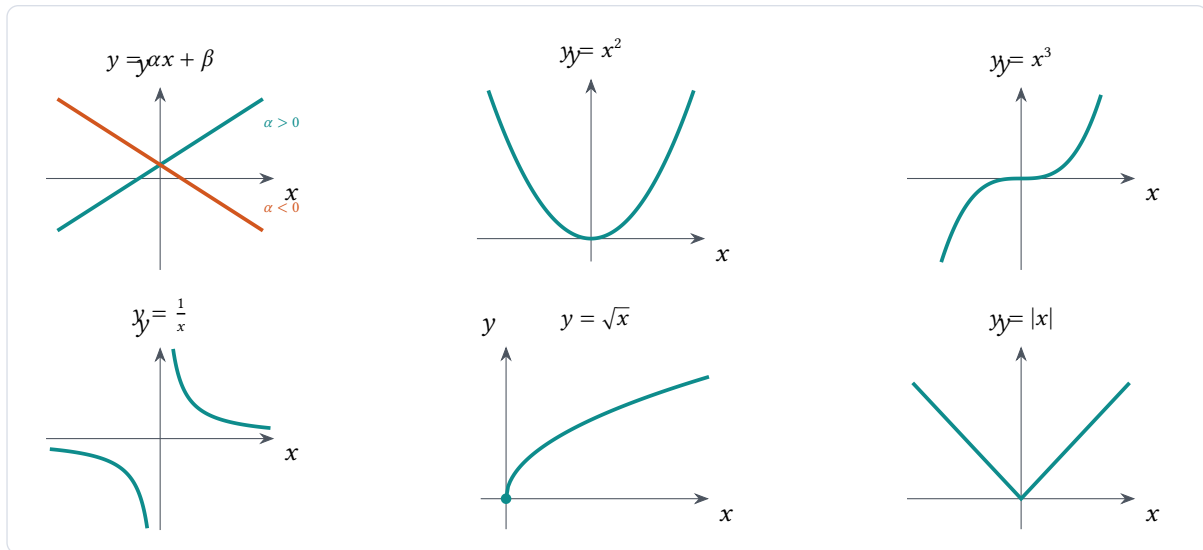


💡 Με απλά λόγια

Σε μια **γνησίως αύξουσα** συνάρτηση η διάταξη **διατηρείται**: ο μικρότερος αριθμός έχει μικρότερη τιμή. Σε μια **γνησίως φθίνουσα** η διάταξη **αντιστρέφεται**: ο μικρότερος αριθμός έχει μεγαλύτερη τιμή.

♦ Η μονοτονία των βασικών συναρτήσεων

Τις παρακάτω συναρτήσεις θα τις συναντάς συνεχώς, και αξίζει να έχεις στο μυαλό σου τη γραφική τους παράσταση.



Συνάρτηση	Μονοτονία
$f(x) = ax + b$	$\nearrow$ στο $\mathbb{R}$ αν $a > 0$, $\searrow$ στο $\mathbb{R}$ αν $a < 0$, σταθερή αν $a = 0$
$f(x) = x^2$	$\searrow$ στο $(-\infty, 0]$, $\nearrow$ στο $[0, +\infty)$
$f(x) = x^3$	$\nearrow$ στο $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\searrow$ στο $(-\infty, 0)$ και $\searrow$ στο $(0, +\infty)$ (χωριστά!)
$f(x) = \sqrt{x}$	$\nearrow$ στο $[0, +\infty)$
$f(x) = x $	$\searrow$ στο $(-\infty, 0]$, $\nearrow$ στο $[0, +\infty)$

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Η $1/x$ «φθίνει σε όλο το πεδίο ορισμού της»

Η $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε **καθένα** από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, αλλά **όχι** στην ένωσή τους $\mathbb{R}^*$. Πράγματι, $-1 < 1$ ενώ $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$: η διάταξη δεν αντιστράφηκε. Η μονοτονία ορίζεται σε **διάστημα**, και η $f(x) = \frac{1}{x}$ πρέπει να εξετάζεται χωριστά σε κάθε διάστημα.

⚙️ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Απόδειξη μονοτονίας με τον ορισμό

- Παίρνουμε τυχαία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.
- Ξεκινώντας από την $x_1 < x_2$, «χτίζουμε» βήμα βήμα τον τύπο της f με πράξεις που επιτρέπονται στις ανισότητες:

- ▶ πρόσθεση του ίδιου αριθμού: η φορά **μένει ίδια**,
- ▶ πολλαπλασιασμός με θετικό: η φορά **μένει ίδια**· με αρνητικό: η φορά **αλλάζει**,
- ▶ ύψωση σε τετράγωνο ή τετραγωνική ρίζα: η φορά **μένει ίδια μόνο αν τα μέλη είναι μη αρνητικά**,
- ▶ αντιστροφή ($\frac{1}{\cdot}$) ομόσημων μελών: η φορά **αλλάζει**.

γ) Καταλήγουμε σε $f(x_1) < f(x_2)$ (γνησίως αύξουσα) ή $f(x_1) > f(x_2)$ (γνησίως φθίνουσα).

Εναλλακτικά: εξετάζουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x_1) - f(x_2)$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.1 – Γραμμική συνάρτηση

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = -3x + 2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Πολλαπλασιάζουμε με $-3 < 0$, οπότε η φορά αλλάζει: $-3x_1 > -3x_2$. Προσθέτουμε 2: $-3x_1 + 2 > -3x_2 + 2$, δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.2 – Τετράγωνο – προσοχή στο πρόσημο

Να αποδειχθεί ότι η $f(x) = x^2 - 2x + 3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

Γράφουμε $f(x) = (x - 1)^2 + 2$. Έστω $1 \leq x_1 < x_2$. Τότε $0 \leq x_1 - 1 < x_2 - 1$. Τα μέλη είναι **μη αρνητικά**, οπότε μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο:

$$(x_1 - 1)^2 < (x_2 - 1)^2 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 + 2 < (x_2 - 1)^2 + 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα $f \nearrow [1, +\infty)$.

⚠ ΥΨΩΣΗ ΣΤΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

Από την $-3 < 1$ δεν προκύπτει ότι $(-3)^2 < 1^2$, γιατί $9 > 1$. Γι' αυτό στο προηγούμενο παράδειγμα ήταν απαραίτητο να ξέρουμε ότι $x_1 - 1 \geq 0$. Πριν υψώσεις τα μέλη μιας ανισότητας στο τετράγωνο, **έλεγξε πάντα το πρόσημό τους**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.3 – Ρίζα

Να αποδειχθεί ότι η $f(x) = \sqrt{x - 2} + 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού είναι $A = [2, +\infty)$. Έστω $2 \leq x_1 < x_2$. Τότε $0 \leq x_1 - 2 < x_2 - 2$, άρα $\sqrt{x_1 - 2} < \sqrt{x_2 - 2}$ και επομένως $\sqrt{x_1 - 2} + 1 < \sqrt{x_2 - 2} + 1$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.4 – Αξιοποίηση της μονοτονίας σε ανίσωση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x$.

- α) Να αποδειχθεί ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
 β) Να λυθεί η ανίσωση $f(2x - 1) > f(x + 3)$.

ΛΥΣΗ

α) Αν $x_1 < x_2$, τότε $x_1^3 < x_2^3$ (η x^3 είναι γνησίως αύξουσα). Προσθέτοντας κατά μέλη με την $x_1 < x_2$ παίρνουμε $x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$.

β) Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει

$$f(2x - 1) > f(x + 3) \Leftrightarrow 2x - 1 > x + 3 \Leftrightarrow x > 4.$$

 Γιατί ισχύει το « $\Leftrightarrow$ » στο (β);

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε $f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow \alpha < \beta$. Η κατεύθυνση « $\Leftarrow$ » είναι ο ορισμός. Για την « $\Rightarrow$ »: αν ήταν $\alpha \geq \beta$, θα είχαμε $f(\alpha) \geq f(\beta)$, πράγμα άτοπο. Έτσι μια γνησίως μονότονη συνάρτηση μάς επιτρέπει να «διώξουμε» το f από τα δύο μέλη. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, η φορά αλλάζει.

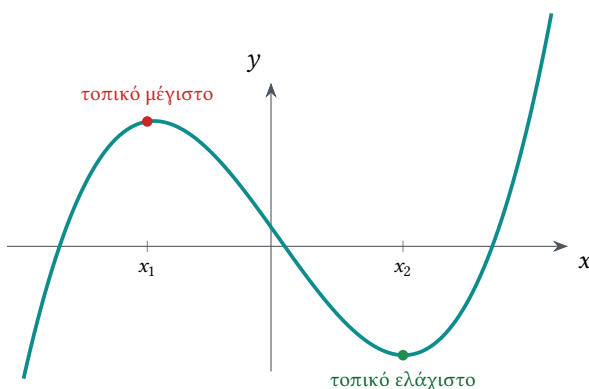
Ελάχιστο και μέγιστο συνάρτησης (ακρότατα)

ΟΡΙΣΜΟΣ | Ολικό ελάχιστο – ολικό μέγιστο

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και $x_0 \in A$.

- ▶ Η f παρουσιάζει **(ολικό) ελάχιστο** στο x_0 αν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$. Ο αριθμός $f(x_0)$ λέγεται **ελάχιστη τιμή** της f .
- ▶ Η f παρουσιάζει **(ολικό) μέγιστο** στο x_0 αν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$. Ο αριθμός $f(x_0)$ λέγεται **μέγιστη τιμή** της f .

Το ελάχιστο και το μέγιστο λέγονται **ακρότατα** της f .



Στο σχήμα, η καμπύλη έχει μια «κορυφή» και μια «κοιλιά». Αυτές είναι ακρότατα μόνο κοντά στα x_1 και x_2 (τοπικά), όχι σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού η καμπύλη ανεβαίνει και κατεβαίνει χωρίς όριο. Στο μάθημα αυτό, όταν λέμε «μέγιστο» ή «ελάχιστο», εννοούμε το **ολικό**.

⚙️ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Εύρεση ακροτάτων αλγεβρικά

- α) Μαντεύουμε την ακρότατη τιμή, π.χ. γράφοντας τον τύπο με **συμπλήρωση τετραγώνου** ή από τη γραφική παράσταση.
- β) Αποδεικνύουμε την ανισότητα $f(x) \geq m$ (ή $f(x) \leq M$) **για κάθε** x του πεδίου ορισμού.
- γ) Βρίσκουμε ένα x_0 για το οποίο ισχύει η **ισότητα**. Χωρίς αυτό το βήμα **δεν** έχουμε δείξει ότι υπάρχει ακρότατο!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.5 – Ελάχιστο τριωνύμου

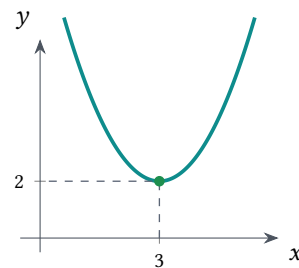
Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της $f(x) = x^2 - 6x + 11$.

ΛΥΣΗ

Με συμπλήρωση τετραγώνου:

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 + 2 = (x - 3)^2 + 2 \geq 2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και η ισότητα ισχύει για $x = 3$. Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 3$, το $f(3) = 2$. Μέγιστο **δεν** έχει, γιατί το $(x - 3)^2$ μεγαλώνει απεριόριστα.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.6 – Μέγιστο κλασματικής

Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της $f(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$.

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^2 + 1 \geq 1$, άρα $\frac{4}{x^2 + 1} \leq \frac{4}{1} = 4$, με ισότητα για $x = 0$. Επομένως η f έχει μέγιστο το $f(0) = 4$.

Ελάχιστο **δεν** έχει. Ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε x , αλλά η τιμή 0 **δεν** επιτυγχάνεται ποτέ. Και για οποιαδήποτε θετική τιμή $f(x_0)$, μπορούμε να βρούμε x με ακόμη μικρότερη τιμή (αρκεί να πάρουμε μεγαλύτερο $|x|$).

❌ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | « $f(x) > 0$, άρα ελάχιστο το 0»

Για να είναι ο αριθμός m ελάχιστη τιμή, πρέπει να υπάρχει x_0 με $f(x_0) = m$. Η ανισότητα $f(x) \geq m$ μόνη της **δεν αρκεί**. Η $f(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$ είναι πάντα θετική, αλλά **δεν** έχει ελάχιστο.

|| Άρτια και περιττή συνάρτηση – Συμμετρίες

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ | Άρτια συνάρτηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **άρτια** όταν για κάθε $x \in A$ ισχύουν:

$$-x \in A \quad \text{και} \quad f(-x) = f(x).$$

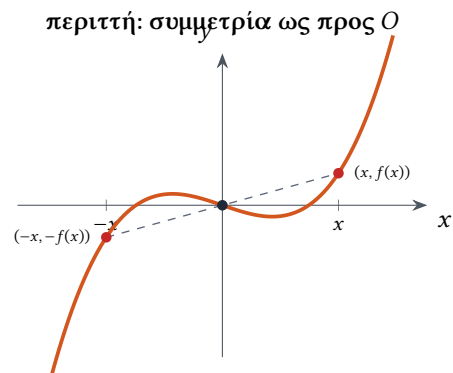
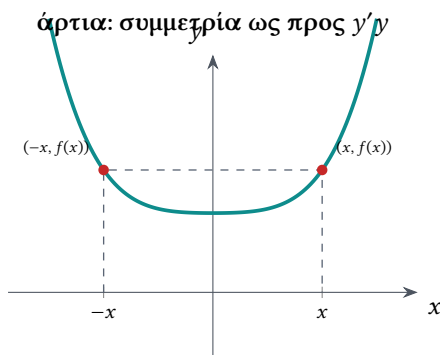
Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι **συμμετρική ως προς τον άξονα y'** .

ΟΡΙΣΜΟΣ | Περιττή συνάρτηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **περιττή** όταν για κάθε $x \in A$ ισχύουν:

$$-x \in A \quad \text{και} \quad f(-x) = -f(x).$$

Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι **συμμετρική ως προς την αρχή O των αξόνων**.



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Εξετάζω αν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού A και ελέγχουμε αν είναι **συμμετρικό ως προς το 0** (αν $x \in A$, τότε και $-x \in A$). Αν δεν είναι, η f **δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή**.
- Υπολογίζουμε το $f(-x)$ βάζοντας όπου x το $-x$ μέσα σε παρένθεση.
- Συγκρίνουμε: αν $f(-x) = f(x)$ η f είναι άρτια, αν $f(-x) = -f(x)$ είναι περιττή.
- Για να δείξουμε ότι **δεν** είναι άρτια ή περιττή, αρκεί ένα **αντιπαράδειγμα**: ένα συγκεκριμένο x_0 με $f(-x_0) \neq f(x_0)$ και $f(-x_0) \neq -f(x_0)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.7 – Αναγνώριση

Να εξεταστεί αν είναι άρτιες ή περιττές οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, \quad g(x) = x^3 - 4x, \quad h(x) = x^2 + 2x, \quad \varphi(x) = \sqrt{x+2}, \quad k(x) = \frac{|x|}{x}.$$

ΛΥΣΗ

- ▶ $A_f = \mathbb{R}$ και $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 3 = x^4 - 2x^2 + 3 = f(x)$, άρα η f είναι **άρτια**.
- ▶ $A_g = \mathbb{R}$ και $g(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -(x^3 - 4x) = -g(x)$, άρα η g είναι **περιττή**.
- ▶ $A_h = \mathbb{R}$, $h(1) = 3$ και $h(-1) = -1$. Επειδή $h(-1) \neq h(1)$ και $h(-1) \neq -h(1)$, η h **δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή**.
- ▶ $A_\varphi = [-2, +\infty)$. Το $3 \in A_\varphi$ ενώ το $-3 \notin A_\varphi$, άρα το πεδίο ορισμού δεν είναι συμμετρικό και η φ **δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή**.
- ▶ $A_k = \mathbb{R}^*$, που είναι συμμετρικό, και $k(-x) = \frac{|-x|}{-x} = -\frac{|x|}{x} = -k(x)$, άρα η k είναι **περιττή**.

❌ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Ξεχνάμε τις παρενθέσεις

❌ Λάθος

$$f(-x) = -x^2 + 3 \text{ για την } f(x) = x^2 + 3.$$

✅ Σωστό

$$f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3. \text{ Το } -x \text{ μπαίνει ολόκληρο σε παρένθεση.}$$

⚠️ ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- ▶ Μια συνάρτηση μπορεί να μην είναι ούτε άρτια ούτε περιττή. Οι περισσότερες συναρτήσεις είναι τέτοιες!
- ▶ Η μηδενική συνάρτηση $f(x) = 0$ είναι και άρτια και περιττή.
- ▶ Αν μια περιττή συνάρτηση ορίζεται στο 0, τότε $f(0) = 0$, γιατί $f(0) = -f(0)$. Η γραφική της παράσταση περνά από την αρχή O .
- ▶ Για πολυώνυμα: αν περιέχει μόνο **άρτιες** δυνάμεις του x (μαζί με τον σταθερό όρο) είναι άρτιο, και αν περιέχει μόνο **περιττές** δυνάμεις είναι περιττό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.8 – Εύρεση παραμέτρου

Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x) = x^2 + (\alpha - 2)x + 1$ να είναι άρτια.

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$, που είναι συμμετρικό. Πρέπει $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - (\alpha - 2)x + 1 = x^2 + (\alpha - 2)x + 1 \Leftrightarrow 2(\alpha - 2)x = 0 \text{ για κάθε } x.$$

Αυτό ισχύει μόνο όταν $\alpha - 2 = 0$, δηλαδή $\alpha = 2$.

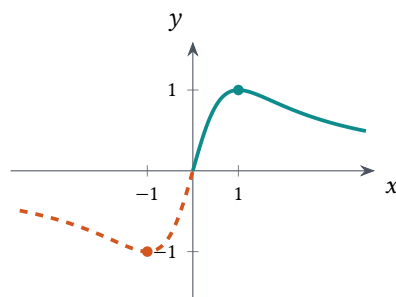
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.9 – Συμπλήρωση γραφικής παράστασης

Η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή, και για $x \geq 0$ η γραφική της παράσταση είναι η μπλε καμπύλη του σχήματος. Να συμπληρωθεί η γραφική παράσταση και να μελετηθεί η μονοτονία της.

ΛΥΣΗ

Αφού η f είναι περιττή, κάθε σημείο (x, y) της καμπύλης έχει το συμμετρικό του $(-x, -y)$ ως προς το O επίσης πάνω στην καμπύλη. Σχεδιάζουμε λοιπόν το συμμετρικό της μπλε καμπύλης ως προς την αρχή των αξόνων (πορτοκαλί).

Από το σχήμα: η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$.



Στο mathgreece.com θα βρεις βιντεομάθημα για τη μονοτονία και τα ακρότατα, καθώς και ένα διαδραστικό τεστ αυτοαξιολόγησης για άρτιες και περιττές συναρτήσεις. Τέλειο για επανάληψη πριν από το διαγώνισμα!

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 2.1

$f \nearrow \Delta$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (η διάταξη διατηρείται)
$f \searrow \Delta$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (η διάταξη αντιστρέφεται)
Γνησίως μονότονη	$f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta$ και $f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow \alpha < \beta$ (για $f \nearrow$)
Ελάχιστο / μέγιστο	$f(x) \geq f(x_0) / f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ και η τιμή επιτυγχάνεται
Άρτια	A συμμετρικό, $f(-x) = f(x)$, συμμετρία ως προς $y'y$
Περιττή	A συμμετρικό, $f(-x) = -f(x)$, συμμετρία ως προς O

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 2.1

Δυσκολία: ★★☆☆ βασική ★★★ μέτρια ★★★★★ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- 1 ★★☆☆ Να αποδείξετε με τον ορισμό ότι η $f(x) = 5x - 7$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- 2 ★★☆☆ Να αποδείξετε ότι η $f(x) = -x^3 + 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- 3 ★★☆☆ Να αποδείξετε ότι η $f(x) = (x + 2)^2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -2]$.
- 4 ★★☆☆ Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 3x^2 - |x|, \quad g(x) = x^5 + 2x^3, \quad h(x) = x^3 + 1, \quad k(x) = \frac{1}{x^2 - 4}.$$
- 5 ★★☆☆ Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της $f(x) = x^2 + 4x + 7$.
- 6 ★★☆☆ Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$.
- 7 ★★☆☆ Δίνεται η $f(x) = \sqrt{x-1} + 3$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε την ελάχιστη τιμή της.
- 8 ★★☆☆ Δίνεται η $f(x) = x^3 + 2x - 3$.
 α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
 β) Να υπολογίσετε το $f(1)$ και να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.
- 9 ★★☆☆ Να βρείτε τον $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x) = (\alpha - 1)x^3 + \beta x^2 + x$ να είναι περιττή για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 10 ★★☆☆ Δίνεται η $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.
 α) Να αποδείξετε ότι είναι περιττή.
 β) Να αποδείξετε ότι $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε τα ακρότατά της.
- 11 ★★☆☆ Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
 α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\pi)$ και $f(3,14)$.
 β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) < f(4)$.

- 12 ★★ ★ Η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και στο $(-\infty, 0]$.
- 13 ★★ ★ Δίνεται η $f(x) = x|x|$.
- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
- β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 • ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ 2.2

Κατακόρυφη – Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ▶ πώς προκύπτει η γραφική παράσταση της $f(x) + c$ και της $f(x \pm c)$ από τη γραφική παράσταση της f ,
- ▶ πώς συνδυάζουμε μετατοπίσεις, π.χ. για να σχεδιάσουμε κάθε παραβολή $y = ax^2 + bx + \gamma$,
- ▶ τι γίνεται με τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες όταν μετατοπίζουμε.

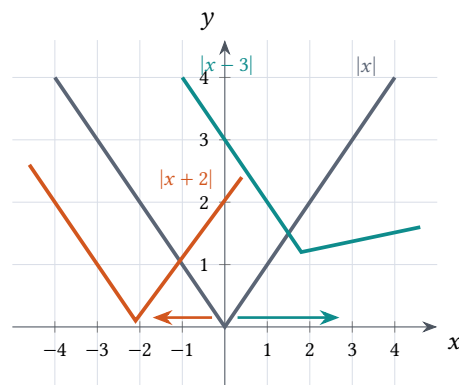
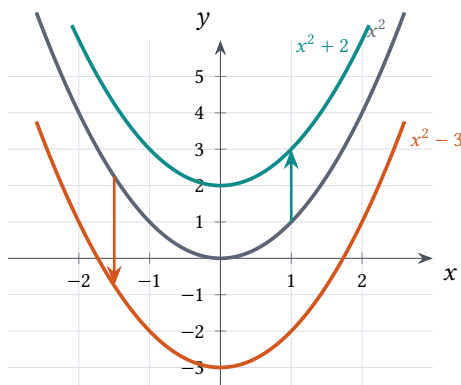
Κατακόρυφη μετατόπιση: $y = f(x) \pm c$

Ας συγκρίνουμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^2 + 2$. Για κάθε x , η τιμή $g(x)$ είναι κατά 2 μεγαλύτερη από την $f(x)$. Επομένως κάθε σημείο της C_f «ανεβαίνει» κατά 2 μονάδες και δίνει ένα σημείο της C_g .

ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

Έστω $c > 0$.

- ▶ Η γραφική παράσταση της $y = f(x) + c$ προκύπτει από τη C_f με **κατακόρυφη μετατόπιση κατά c μονάδες προς τα πάνω**.
- ▶ Η γραφική παράσταση της $y = f(x) - c$ προκύπτει από τη C_f με **κατακόρυφη μετατόπιση κατά c μονάδες προς τα κάτω**.

Οριζόντια μετατόπιση: $y = f(x \mp c)$

Συγκρίνουμε τώρα τις $f(x) = |x|$ και $g(x) = |x - 3|$ (δεξιό σχήμα). Η f έχει την κορυφή της στο $x = 0$, ενώ η g στο $x = 3$, εκεί όπου μηδενίζεται η παράσταση μέσα στην απόλυτη τιμή. Γενικά, η τιμή που παίρνει η f στο x είναι η ίδια με την τιμή που παίρνει η $g(x) = f(x - 3)$ στο $x + 3$, δηλαδή **3 μονάδες δεξιότερα**.

ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

Έστω $c > 0$.

- ▶ Η γραφική παράσταση της $y = f(x - c)$ προκύπτει από τη C_f με **οριζόντια μετατόπιση κατά c μονάδες προς τα δεξιά**.
- ▶ Η γραφική παράσταση της $y = f(x + c)$ προκύπτει από τη C_f με **οριζόντια μετατόπιση κατά c μονάδες προς τα αριστερά**.

❌ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Η «ανάποδη» κατεύθυνση

❌ Λάθος

Η $y = (x + 3)^2$ προκύπτει από την $y = x^2$ με μετατόπιση 3 μονάδες **δεξιά**, «γιατί έχει +3».

✅ Σωστό

Μετατόπιση 3 μονάδες **αριστερά**. Η κορυφή βρίσκεται εκεί όπου $x + 3 = 0$, δηλαδή στο $x = -3$.

Κόλπο για να μην μπερδεύεσαι: ρώτα τον εαυτό σου «**πού μηδενίζεται** η παράσταση μέσα στην f ;». Εκεί πηγαίνει το «κέντρο» της καμπύλης.

💡 Κατακόρυφη και οριζόντια: η διαφορά

Στην **κατακόρυφη** μετατόπιση η σταθερά προστίθεται **έξω** από την f ($f(x) + c$) και η κίνηση έχει την κατεύθυνση που «περιμένουμε»: + σημαίνει πάνω. Στην **οριζόντια** μετατόπιση η σταθερά μπαίνει **μέσα** στην f ($f(x - c)$) και η κίνηση είναι «αντίθετη» από το πρόσημο: $-c$ σημαίνει δεξιά.

Συνδυασμός μετατοπίσεων

ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

Η γραφική παράσταση της $y = f(x - \alpha) + \beta$ προκύπτει από τη C_f με

- ▶ οριζόντια μετατόπιση κατά $|\alpha|$ μονάδες (δεξιά αν $\alpha > 0$, αριστερά αν $\alpha < 0$) και
- ▶ κατακόρυφη μετατόπιση κατά $|\beta|$ μονάδες (πάνω αν $\beta > 0$, κάτω αν $\beta < 0$).

Ένα σημείο (x_0, y_0) της C_f μεταφέρεται στο σημείο $(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)$.

💡 Κάθε παραβολή είναι μετατοπισμένη η $y = ax^2$

Με συμπλήρωση τετραγώνου, κάθε τριώνυμο γράφεται

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a \left(x + \frac{\beta}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Η παραβολή $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ προκύπτει λοιπόν από την $y = ax^2$ με δύο μετατοπίσεις, και η κορυφή της είναι το σημείο $K \left(-\frac{\beta}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.2

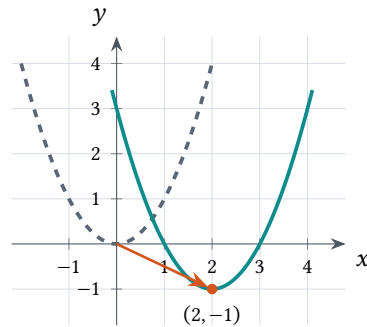
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.1 – Παραβολή με κορυφή εκτός αρχής

Να σχεδιαστεί η $g(x) = x^2 - 4x + 3$, να μελετηθεί η μονοτονία της και να βρεθεί το ακρότατό της.

ΛΥΣΗ

Συμπληρώνουμε το τετράγωνο: $g(x) = (x - 2)^2 - 1$. Η C_g προκύπτει από την $y = x^2$ με μετατόπιση 2 μονάδες **δεξιά** και 1 μονάδα **κάτω**. Η κορυφή $(0, 0)$ πηγαίνει στο $(2, -1)$.

Η x^2 είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Μετά τη μετατόπιση, η g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty, 2]$ και **γνησίως αύξουσα** στο $[2, +\infty)$, με ελάχιστο $g(2) = -1$.



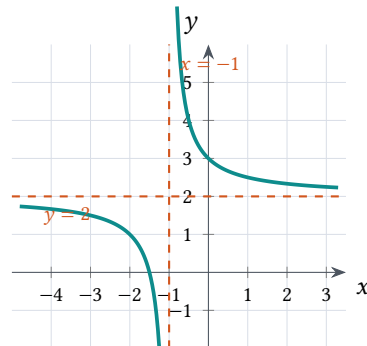
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.2 – Υπερβολή και ασύμπτωτες

Να σχεδιαστεί η $h(x) = \frac{1}{x+1} + 2$.

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού είναι $A = \mathbb{R} - \{-1\}$. Η C_h προκύπτει από την $y = \frac{1}{x}$ με μετατόπιση 1 μονάδα **αριστερά** και 2 μονάδες **πάνω**.

Μαζί με την καμπύλη μετατοπίζονται και οι «ασύμπτωτες ευθείες»: οι άξονες $x = 0$ και $y = 0$, τους οποίους η $y = \frac{1}{x}$ πλησιάζει χωρίς να συναντά ποτέ, γίνονται οι ευθείες $x = -1$ και $y = 2$. Το κέντρο συμμετρίας μεταφέρεται από το $O(0, 0)$ στο $(-1, 2)$.



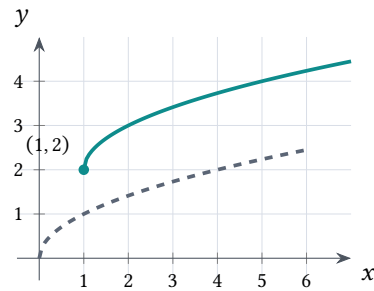
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.3 – Ρίζα μετατοπισμένη

Να βρεθούν το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ και να σχεδιαστεί η γραφική της παράσταση.

ΛΥΣΗ

Η C_f προκύπτει από την $y = \sqrt{x}$ με μετατόπιση 1 μονάδα δεξιά και 2 μονάδες πάνω. Το «αρχικό» σημείο $(0, 0)$ μεταφέρεται στο $(1, 2)$.

- Πεδίο ορισμού: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, δηλαδή $A = [1, +\infty)$.
- Σύνολο τιμών: $\sqrt{x-1} \geq 0$, άρα $f(x) \geq 2$. Το σύνολο τιμών είναι το $[2, +\infty)$.



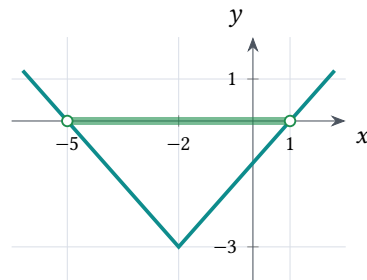
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.4 – Από τη γραφική παράσταση στην ανίσωση

Δίνεται η $f(x) = |x+2| - 3$. Να σχεδιαστεί η C_f και να λυθεί γραφικά και αλγεβρικά η ανίσωση $f(x) < 0$.

ΛΥΣΗ

Η C_f προκύπτει από την $y = |x|$ με μετατόπιση 2 αριστερά και 3 κάτω, οπότε έχει κορυφή στο $(-2, -3)$. Τέμνει τον x' όταν $|x+2| = 3$, δηλαδή στα $x = 1$ και $x = -5$. Η C_f είναι κάτω από τον άξονα x' για $-5 < x < 1$.

Αλγεβρικά: $|x+2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x+2 < 3 \Leftrightarrow -5 < x < 1$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.5 – Εύρεση της αρχικής συνάρτησης

Μετατοπίζοντας τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κατά 2 μονάδες δεξιά και κατά 3 μονάδες πάνω, παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2 - 4x + 7$. Να βρεθεί η f .

ΛΥΣΗ

Ισχύει $g(x) = f(x-2) + 3$, άρα $f(x-2) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Αν θέσουμε $t = x-2$, παίρνουμε $f(t) = t^2$. Άρα $f(x) = x^2$.

🔔 **Επέκταση: δύο ακόμη «μετασχηματισμοί»**

Παρόλο που δεν ανήκουν στις μετατοπίσεις, θα σου φανούν πολύ χρήσιμοι:

- Η $y = -f(x)$ είναι η **συμμετρική** της C_f ως προς τον άξονα x' .
- Η $y = |f(x)|$ προκύπτει αν «αναδιπλώσουμε» προς τα πάνω τα τμήματα της C_f που βρίσκονται κάτω από τον x' .



Οι μετατοπίσεις «ζωντανεύουν» όταν τις βλέπεις σε κίνηση! Στο mathgreece.com θα βρεις διαδραστικά applets όπου μετακινείς ένα ρυθμιστικό και βλέπεις την καμπύλη να γλιστράει. Θα βρεις επίσης βίντεο με όλες τις βασικές περιπτώσεις.

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 2.2

$$y = f(x) + c, c > 0$$

c μονάδες **πάνω**

$$y = f(x) - c, c > 0$$

c μονάδες **κάτω**

$$y = f(x - c), c > 0$$

c μονάδες **δεξιά**

$$y = f(x + c), c > 0$$

c μονάδες **αριστερά**

$$y = f(x - \alpha) + \beta$$

σημείο $(x_0, y_0) \mapsto (x_0 + \alpha, y_0 + \beta)$

Παραβολή

$y = a(x - x_0)^2 + y_0$ με κορυφή (x_0, y_0) , όπου $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$, $y_0 = -\frac{\Delta}{4\alpha}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 2.2

Δυσκολία: ★★ ★ βασική ★★ ★ μέτρια ★★ ★ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

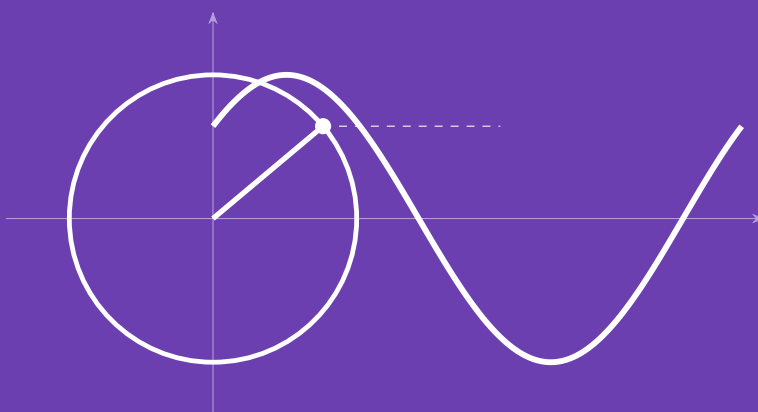
- 1 ★★ ★ Να περιγράψετε πώς προκύπτουν από τη γραφική παράσταση της $y = x^2$ οι γραφικές παραστάσεις των $y = x^2 - 5$ και $y = (x + 4)^2$.
- 2 ★★ ★ Να σχεδιάσετε την $f(x) = |x - 1| + 3$ και να βρείτε την ελάχιστη τιμή της.
- 3 ★★ ★ Να γράψετε την $f(x) = x^2 + 6x + 5$ στη μορφή $(x - \alpha)^2 + \beta$ και να εξηγήσετε πώς προκύπτει η C_f από την $y = x^2$. Ποια είναι η κορυφή της;
- 4 ★★ ★ Δίνεται η $g(x) = \frac{2}{x - 3} - 1$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, να περιγράψετε πώς προκύπτει από την $y = \frac{2}{x}$ και να βρείτε τις ασύμπτωτες ευθείες της.
- 5 ★★ ★ Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , αν μετατοπιστεί 1 μονάδα αριστερά και 2 μονάδες κάτω, δίνει τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2 + 2x - 1$. Να βρείτε την f .
- 6 ★★ ★ Δίνεται η $f(x) = \sqrt{x + 4} - 2$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- 7 ★★ ★ Να λύσετε γραφικά και αλγεβρικά την ανίσωση $|x - 3| - 2 \geq 0$.
- 8 ★★ ★ Να βρείτε τον κ ώστε η γραφική παράσταση της $g(x) = (x - 1)^2 + \kappa$ να εφάπτεται στην ευθεία $y = 2x$ (να έχει δηλαδή με αυτήν ένα μόνο κοινό σημείο). Ποιο είναι το σημείο επαφής;
- 9 ★★ ★ Η γραφική παράσταση της $h(x) = \frac{1}{x - \alpha} + \beta$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 2$ και $y = -1$. Να βρείτε τα α, β και το σημείο τομής της C_h με τον x' .

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- 3.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας
- 3.2 Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες
- 3.3 Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο
- 3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- 3.5 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις
- 3.6 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος
- 3.7 Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α
- 3.8 Μετασχηματισμοί παραστάσεων
- 3.9 Η συνάρτηση $f(x) = a \eta\mu x + \beta \sigma\upsilon\nu x$
- 3.10 Επίλυση τριγώνου

Τριγωνομετρία

Η λέξη «τριγωνομετρία» σημαίνει «μέτρηση τριγώνων». Με αυτήν οι αρχαίοι αστρονόμοι υπολόγιζαν αποστάσεις ως τα ουράνια σώματα. Σήμερα όμως η Τριγωνομετρία είναι κάτι πολύ περισσότερο: είναι η γλώσσα των **περιοδικών φαινομένων**, όπως η παλίρροια, ο ήχος, το εναλλασσόμενο ρεύμα και η κίνηση ενός εκκρεμούς. Στο κεφάλαιο αυτό θα γνωρίσουμε τον **τριγωνομετρικό κύκλο**, τις **ταυτότητες**, τις **τριγωνομετρικές συναρτήσεις** και **εξισώσεις**, και θα κλείσουμε με την **επίλυση τριγώνου**.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 • ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ 3.1

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας

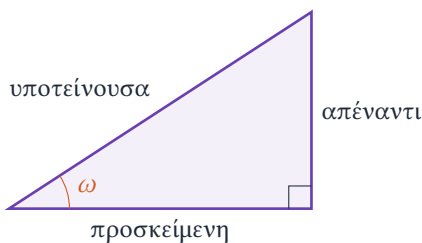
3.1

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ▶ πώς ορίζονται το ημίτονο, το συνημίτονο, η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη **οποιασδήποτε** γωνίας,
- ▶ τι είναι ο τριγωνομετρικός κύκλος και πώς «διαβάζουμε» πάνω του τους τριγωνομετρικούς αριθμούς,
- ▶ τι είναι το ακτίνιο (rad) και πώς μετατρέπουμε μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα.

|| Από το ορθογώνιο τρίγωνο στο σύστημα αξόνων

Από το Γυμνάσιο ξέρεις τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας **οξείας** γωνίας ω ορθογωνίου τριγώνου:



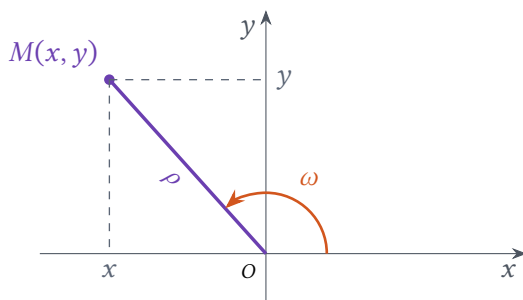
$$\begin{aligned} \eta\mu \omega &= \frac{\text{απέναντι}}{\text{υποτείνουσα}} & \sigma\upsilon\nu \omega &= \frac{\text{προσκειμένη}}{\text{υποτείνουσα}} \\ \epsilon\phi \omega &= \frac{\text{απέναντι}}{\text{προσκειμένη}} & \sigma\phi \omega &= \frac{\text{προσκειμένη}}{\text{απέναντι}} \end{aligned}$$

Ο ορισμός αυτός όμως δεν λειτουργεί για γωνίες 120° , 250° ή -40° , γιατί καμία από αυτές δεν είναι γωνία ορθογωνίου τριγώνου. Γι' αυτό τοποθετούμε τη γωνία σε **σύστημα αξόνων**.

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ | Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω

Τοποθετούμε τη γωνία ω με κορυφή την αρχή O και αρχική πλευρά τον ημιάξονα Ox . Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $M(x, y)$ της τελικής πλευράς, διαφορετικό από το O , και θέτουμε $\rho = (OM) = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$. Ορίζουμε:

$$\eta\mu \omega = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu \omega = \frac{x}{\rho}, \quad \epsilon\phi \omega = \frac{y}{x} \ (x \neq 0), \quad \sigma\phi \omega = \frac{x}{y} \ (y \neq 0).$$



Οι λόγοι $\frac{y}{\rho}$, $\frac{x}{\rho}$, $\frac{y}{x}$ **δεν εξαρτώνται** από το σημείο M που διαλέξαμε. Αν πάρουμε άλλο σημείο της τελικής πλευράς, σχηματίζονται όμοια τρίγωνα και οι λόγοι μένουν ίδιοι. Εξαρτώνται μόνο από τη γωνία ω .

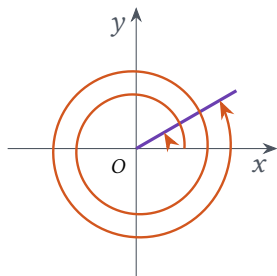
♦ Γωνίες μεγαλύτερες των 360° και αρνητικές γωνίες

Μια γωνία μπορεί να προκύψει από **στροφή** της τελικής πλευράς γύρω από το O :

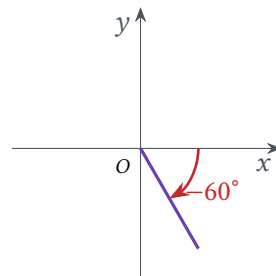
- ▶ αν η στροφή γίνεται **αντίθετα** από τους δείκτες του ρολογιού, η γωνία είναι **θετική**,
- ▶ αν γίνεται **όπως** οι δείκτες του ρολογιού, η γωνία είναι **αρνητική**.

Έτσι έχουν νόημα γωνίες όπως -60° ή $750^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 30^\circ$. Οι γωνίες ω και $\kappa \cdot 360^\circ + \omega$ ($\kappa \in \mathbb{Z}$) έχουν την **ίδια τελική πλευρά**, άρα και τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$$\eta\mu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu \omega, \quad \sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu \omega, \quad \epsilon\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \epsilon\phi \omega.$$



30° και 750° : ίδια τελική πλευρά



αρνητική γωνία (δεξιόστροφη στροφή)

|| Ο τριγωνομετρικός κύκλος

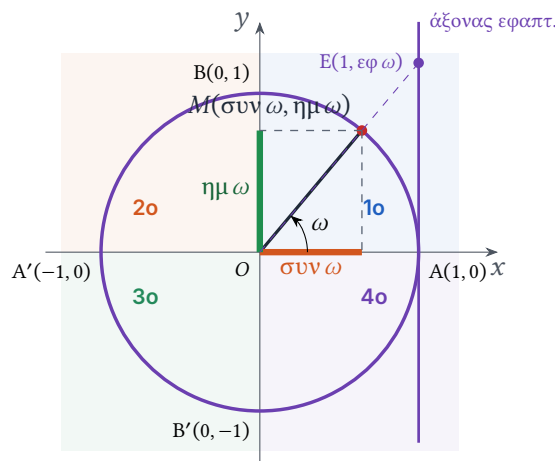
Αφού οι τριγωνομετρικοί αριθμοί δεν εξαρτώνται από το σημείο M , μπορούμε να το διαλέξουμε έτσι ώστε $\rho = 1$. Τότε $\eta\mu \omega = y$ και $\sigma\upsilon\nu \omega = x$!

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ | Τριγωνομετρικός κύκλος

Τριγωνομετρικός κύκλος λέγεται ο κύκλος με κέντρο την αρχή O και ακτίνα 1. Αν $M(x, y)$ είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε:

$$\sigma\upsilon\nu \omega = x \quad (\text{τετμημένη του } M), \quad \eta\mu \omega = y \quad (\text{τεταγμένη του } M).$$

Γι' αυτό ο άξονας $x'x$ λέγεται **άξονας των συνημιτόνων** και ο $y'y$ **άξονας των ημιτόνων**.



🔑 ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

- ▶ Για κάθε γωνία ω : $-1 \leq \eta\mu \omega \leq 1$ και $-1 \leq \sigma\upsilon\nu \omega \leq 1$.
- ▶ Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών εξαρτώνται από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά:

	1ο	2ο	3ο	4ο
$\eta\mu \omega$	+	+	-	-
$\sigma\upsilon\nu \omega$	+	-	-	+
$\epsilon\varphi \omega, \sigma\varphi \omega$	+	-	+	-



Άξονας των εφαπτομένων

Η ευθεία $x = 1$, που εφάπτεται στον τριγωνομετρικό κύκλο στο $A(1, 0)$, λέγεται **άξονας των εφαπτομένων**. Αν η ευθεία OM τον τέμνει στο E , τότε η τεταγμένη του E είναι η $\epsilon\varphi \omega$. Για $\omega = 90^\circ$ ή 270° η ευθεία OM είναι παράλληλη στον άξονα, οπότε η εφαπτομένη **δεν ορίζεται**.

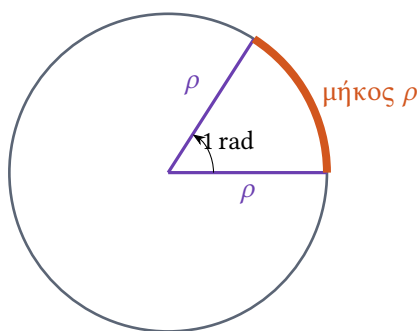
|| Το ακτίνιο (rad)

Εκτός από τις μοίρες, χρησιμοποιούμε μια ακόμη μονάδα μέτρησης γωνιών, πολύ πιο «φυσική» για τα Μαθηματικά.



ΟΡΙΣΜΟΣ | Ακτίνιο

Ακτίνιο (1 rad) είναι η επίκεντρη γωνία η οποία βαίνει σε τόξο μήκους ίσου με την ακτίνα του κύκλου.



Ο κύκλος έχει μήκος $2\pi\rho$, οπότε «χωράει» 2π τέτοια τόξα. Επομένως:

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}, \quad 180^\circ = \pi \text{ rad}, \quad 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ.$$

Αν μια γωνία είναι μ μοίρες και α rad, τότε $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$.

μοίρες	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

Τον πίνακα αυτό πρέπει να τον ξέρεις **απ'** έξω. Θα τον χρησιμοποιείς σε όλο το κεφάλαιο.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
ημ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
συν	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
εφ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	δεν ορ.	0	δεν ορ.	0
σφ	δεν ορ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	δεν ορ.	0	δεν ορ.

💡 Κόλπο για να θυμάσαι τα ημίτονα

Για 0°, 30°, 45°, 60°, 90° γράψε $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$. Αυτά είναι τα ημίτονα! Τα συνημίτονα είναι οι ίδιοι αριθμοί με την **αντίστροφη** σειρά.

❌ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Μοίρες ή ακτίνια;

❌ Λάθος

« $\pi = 180^\circ$ », οπότε $\eta\mu \pi = \eta\mu 180 = 0$, τι δείχνει το κομπιουτεράκι σε rad.

✅ Σωστό

Το π είναι ένας **αριθμός** ($\approx 3,14$). Γράφουμε « $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ ». Στο κομπιουτεράκι έλεγξε πάντα αν είσαι σε DEG ή σε RAD!

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 3.1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.1 – Τριγωνομετρικοί αριθμοί από σημείο

Η τελική πλευρά μιας γωνίας ω διέρχεται από το σημείο $M(-3, 4)$. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της ω .

ΛΥΣΗ

Έχουμε $x = -3$, $y = 4$ και $\rho = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Άρα:

$$\eta\mu \omega = \frac{4}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu \omega = -\frac{3}{5}, \quad \epsilon\phi \omega = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}, \quad \sigma\phi \omega = -\frac{3}{4}.$$

Η ω βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο, και πράγματι το ημίτονο είναι θετικό ενώ τα υπόλοιπα είναι αρνητικά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.2 – Μετατροπές

α) Να μετατραπεί η γωνία 150° σε ακτίνια.

β) Να μετατραπεί η γωνία $\frac{7\pi}{4}$ rad σε μοίρες.

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \frac{150}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \alpha = \frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad.} \quad \beta) \frac{\mu}{180} = \frac{7\pi/4}{\pi} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \mu = \frac{7 \cdot 180}{4} = 315^\circ.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.3 – Γωνίες μεγαλύτερες του κύκλου

Να υπολογιστούν τα $\eta\mu 1110^\circ$, $\sigma\upsilon\nu(-720^\circ)$ και $\epsilon\varphi \frac{9\pi}{4}$.

ΛΥΣΗ

- ▶ $1110^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 30^\circ$, άρα $\eta\mu 1110^\circ = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$.
- ▶ $-720^\circ = -2 \cdot 360^\circ + 0^\circ$, άρα $\sigma\upsilon\nu(-720^\circ) = \sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1$.
- ▶ $\frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$, άρα $\epsilon\varphi \frac{9\pi}{4} = \epsilon\varphi \frac{\pi}{4} = 1$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Γωνία μεγαλύτερη από 360° (ή από 2π)

Διαιρούμε τη γωνία με το 360 (ή με το 2π). Το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι η γωνία από 0° έως 360° που έχει τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, $1110 = 3 \cdot 360 + 30$. Για γωνίες σε rad, γράφουμε π.χ. $\frac{17\pi}{3} = \frac{18\pi - \pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.4 – Πρόσημα

Να βρεθεί το πρόσημο των αριθμών $A = \eta\mu 200^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 300^\circ$ και $B = \frac{\epsilon\varphi(-100^\circ)}{\sigma\upsilon\nu 140^\circ}$.

ΛΥΣΗ

Η 200° ανήκει στο 3ο τεταρτημόριο, άρα $\eta\mu 200^\circ < 0$. Η 300° ανήκει στο 4ο, άρα $\sigma\upsilon\nu 300^\circ > 0$. Επομένως $A < 0$.

Η -100° έχει την ίδια τελική πλευρά με την 260° (3ο τεταρτημόριο), άρα $\epsilon\varphi(-100^\circ) > 0$. Η 140° ανήκει στο 2ο, άρα $\sigma\upsilon\nu 140^\circ < 0$. Επομένως $B < 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.5 – Ύψος κτιρίου

Ένας παρατηρητής, από ένα σημείο A του εδάφους, βλέπει την κορυφή ενός κτιρίου υπό γωνία 30° . Πλησιάζει 30 m προς το κτίριο, στο σημείο B, και τώρα βλέπει την κορυφή υπό γωνία 60° . Να βρεθεί το ύψος του κτιρίου.

ΛΥΣΗ

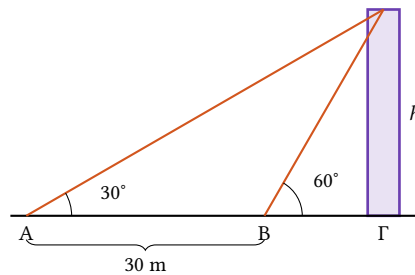
Έστω h το ύψος και $d = (B\Gamma)$ η απόσταση του Β από τη βάση Γ. Από τα ορθογώνια τρίγωνα:

$$\varepsilon\varphi 60^\circ = \frac{h}{d} \Rightarrow h = d\sqrt{3},$$

$$\varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{h}{d+30} \Rightarrow h = \frac{d+30}{\sqrt{3}}.$$

Εξισώνοντας: $d\sqrt{3} = \frac{d+30}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3d = d+30 \Leftrightarrow d = 15$. Άρα

$$h = 15\sqrt{3} \approx 25,98 \text{ m.}$$



Ο τριγωνομετρικός κύκλος είναι το πιο σημαντικό «εργαλείο» του κεφαλαίου. Στο mathgreece.com θα βρεις διαδραστικό τριγωνομετρικό κύκλο, όπου στρέφεις τη γωνία και βλέπεις **Ζωντανά** το ημίτονο και το συνημίτονο να αλλάζουν. Θα βρεις και βιντεομάθημα για όλη την ενότητα.

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 3.1

Ορισμός	$\eta\mu \omega = \frac{y}{\rho}$, $\sigma\upsilon\nu \omega = \frac{x}{\rho}$, $\varepsilon\varphi \omega = \frac{y}{x}$, $\sigma\varphi \omega = \frac{x}{y}$, όπου $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
Τριγ. κύκλος	$M(\sigma\upsilon\nu \omega, \eta\mu \omega)$, $-1 \leq \eta\mu \omega, \sigma\upsilon\nu \omega \leq 1$
Περιοδικότητα	$\kappa \cdot 360^\circ + \omega$ (ή $2\kappa\pi + \omega$) έχει τους ίδιους τριγ. αριθμούς με την ω
Μετατροπή	$\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ ($\pi \text{ rad} = 180^\circ$)
Πρόσημα	1ο: όλοι + 2ο: μόνο $\eta\mu$ + 3ο: μόνο $\varepsilon\varphi, \sigma\varphi$ + 4ο: μόνο $\sigma\upsilon\nu$ +

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 3.1

Δυσκολία: ★★☆☆ βασική ★★☆☆ μέτρια ★★☆☆ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

1. Να μετατρέψετε σε ακτίνια τις γωνίες 45° , 120° , 210° , 330° .
★★★
2. Να μετατρέψετε σε μοίρες τις γωνίες $\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{12}$ rad.
★★★
3. Η τελική πλευρά μιας γωνίας ω διέρχεται από το σημείο $M(5, -12)$. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της ω .
★★★
4. Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών $\eta\mu 130^\circ$, $\sigma\upsilon\nu 250^\circ$, $\varepsilon\varphi 300^\circ$, $\sigma\varphi(-50^\circ)$.
★★★
5. Να υπολογίσετε τα $\eta\mu 750^\circ$, $\sigma\upsilon\nu(-720^\circ)$, $\varepsilon\varphi 1125^\circ$, $\eta\mu \frac{13\pi}{6}$.
★★★
6. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 2 \eta\mu 30^\circ + 3 \sigma\upsilon\nu 60^\circ - \varepsilon\varphi 45^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 0^\circ + \eta\mu^2 90^\circ$.
★★★
7. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ μπορεί να ισχύει $\eta\mu x = \frac{\alpha+1}{2}$;
★★★

- 8 ★★ ★ Αν $\eta \mu \omega < 0$ και $\epsilon \phi \omega > 0$, σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της ω ; Ποιο είναι το πρόσημο του $\sin \omega$;
- 9 ★★ ★ Όταν ο ήλιος βρίσκεται υπό γωνία 60° ως προς το έδαφος, ένας στύλος ρίχνει σκιά μήκους 4 m. Να βρείτε το ύψος του στύλου.
- 10 ★★ ★ Από ένα σημείο A ένας παρατηρητής βλέπει την κορυφή ενός πύργου υπό γωνία 30° . Αφού πλησιάσει 40 m προς τον πύργο, τη βλέπει υπό γωνία 45° . Να βρείτε το ύψος του πύργου.
- 11 ★★ ★ Ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού διαγράφει γωνία όσο περνά ο χρόνος. Ποια γωνία (με το πρόσημό της) διαγράφει σε 1 ώρα και 20 λεπτά; Να την εκφράσετε σε μοίρες και σε ακτίνια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 • ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ 3.2

Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- τις βασικές σχέσεις που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της ίδιας γωνίας,
- πώς βρίσκουμε όλους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς όταν ξέρουμε έναν από αυτούς,
- πώς αποδεικνύουμε τριγωνομετρικές ταυτότητες και πώς απλοποιούμε παραστάσεις.

Οι βασικές ταυτότητες

ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Για κάθε γωνία ω (για την οποία ορίζονται οι αντίστοιχοι αριθμοί) ισχύουν:

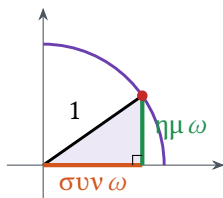
$$\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$$

$$\epsilon\varphi \omega = \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega}, \quad \sigma\varphi \omega = \frac{\sigma\upsilon\nu \omega}{\eta\mu \omega}, \quad \epsilon\varphi \omega \cdot \sigma\varphi \omega = 1$$

$$1 + \epsilon\varphi^2 \omega = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \omega}, \quad 1 + \sigma\varphi^2 \omega = \frac{1}{\eta\mu^2 \omega}$$

Απόδειξη

Αν $M(x, y)$ είναι το σημείο της τελικής πλευράς πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε $x = \sigma\upsilon\nu \omega$, $y = \eta\mu \omega$ και $x^2 + y^2 = (OM)^2 = 1$, δηλαδή $\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$. Επίσης $\epsilon\varphi \omega = \frac{y}{x} = \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega}$ και ομοίως για τη $\sigma\varphi \omega$. Τέλος, διαιρώντας την $\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$ με $\sigma\upsilon\nu^2 \omega \neq 0$ παίρνουμε $\epsilon\varphi^2 \omega + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \omega}$. Αν τη διαιρέσουμε με $\eta\mu^2 \omega$, παίρνουμε την τελευταία ταυτότητα.



Η ταυτότητα $\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$ δεν είναι τίποτε άλλο από το **Πυθαγόρειο θεώρημα** στο ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα 1 και κάθετες πλευρές $|\sigma\upsilon\nu \omega|$ και $|\eta\mu \omega|$.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

- $\eta\mu^2 \omega$ σημαίνει $(\eta\mu \omega)^2$. Αντίθετα, το $\eta\mu \omega^2$ είναι το ημίτονο της γωνίας ω^2 , εντελώς διαφορετικό!
- Η ταυτότητα $\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$ ισχύει για την **ίδια** γωνία. Για παράδειγμα, $\eta\mu^2 30^\circ +$

$$\sin^2 60^\circ = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \neq 1.$$

Εύρεση τριγωνομετρικών αριθμών από έναν γνωστό



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Ξέρω έναν αριθμό, βρίσκω τους άλλους

- α) Αν ξέρουμε το $\eta\mu \omega$ (ή το $\sigma\upsilon\nu \omega$): από την $\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$ βρίσκουμε το τετράγωνο του άλλου.
- β) Αν ξέρουμε την $\epsilon\varphi \omega$: από την $1 + \epsilon\varphi^2 \omega = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \omega}$ βρίσκουμε το $\sigma\upsilon\nu^2 \omega$ και μετά $\eta\mu \omega = \epsilon\varphi \omega \cdot \sigma\upsilon\nu \omega$.
- γ) Το **πρόσημο** το επιλέγουμε από το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει η ω . Αυτό το δίνει πάντα η εκφώνηση.
- δ) Τέλος, $\epsilon\varphi \omega = \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega}$ και $\sigma\varphi \omega = \frac{1}{\epsilon\varphi \omega}$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 3.2

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.1 – Από το ημίτονο

Αν $\eta\mu x = \frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της x .

ΛΥΣΗ

$\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, άρα $\sigma\upsilon\nu x = \pm \frac{4}{5}$. Επειδή η x ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο, $\sigma\upsilon\nu x < 0$, οπότε $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{4}{5}$. Τότε

$$\epsilon\varphi x = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}, \quad \sigma\varphi x = -\frac{4}{3}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.2 – Από την εφαπτομένη

Αν $\epsilon\varphi x = 2$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να βρεθούν τα $\sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu x$.

ΛΥΣΗ

$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1 + \epsilon\varphi^2 x = 1 + 4 = 5$, άρα $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$. Στο 3ο τεταρτημόριο $\sigma\upsilon\nu x < 0$, οπότε $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Τότε

$$\eta\mu x = \epsilon\varphi x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Έλεγχος: στο 3ο τεταρτημόριο και το ημίτονο είναι αρνητικό ✓

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Το ξεχασμένο πρόσημο

✗ Λάθος

$\sin x = \sqrt{1 - \eta\mu^2 x}$ για κάθε x .

✓ Σωστό

$\sin x = \pm \sqrt{1 - \eta\mu^2 x}$. Το πρόσημο εξαρτάται από το τεταρτημόριο. Το τεταρτημόριο **πρέπει** να χρησιμοποιηθεί στη λύση, αλλιώς η απάντηση είναι ελλιπής.

|| Απόδειξη ταυτοτήτων

⚙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Πώς αποδεικνύω μια τριγωνομετρική ταυτότητα

- α) Ξεκινάμε από το **πιο «σύνθετο» μέλος** και, με διαδοχικές ισότητες, καταλήγουμε στο άλλο.
- β) Χρήσιμα «εργαλεία»: γράφουμε $\epsilon\phi = \frac{\eta\mu}{\sigma\upsilon\nu}$ και $\sigma\phi = \frac{\sigma\upsilon\nu}{\eta\mu}$, κάνουμε ομώνυμα, και αντικαθιστούμε το 1 με $\eta\mu^2 + \sigma\upsilon\nu^2$ (ή το αντίστροφο).
- γ) Αν δεν «βγαίνει», μετασχηματίζουμε **και τα δύο μέλη** χωριστά μέχρι να καταλήξουν στην ίδια παράσταση.
- δ) Εναλλακτικά: αποδεικνύουμε ότι η διαφορά των δύο μελών είναι 0.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Ξεκινώ από το συμπέρασμα

Δεν ξεκινάμε γράφοντας την ταυτότητα που θέλουμε να αποδείξουμε για να καταλήξουμε σε κάτι αληθές (π.χ. $1 = 1$) με συνεπαγωγές « $\Rightarrow$ ». Από ένα ψευδές μπορεί να προκύψει αληθές! Αν δουλέψεις έτσι, πρέπει όλα τα βήματα να είναι **ισοδυναμίες** ($\Leftrightarrow$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.3 – Απόδειξη ταυτότητας

Να αποδειχθεί ότι $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 + (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 = 2$.

ΛΥΣΗ

Αναπτύσσουμε το πρώτο μέλος:

$$\eta\mu^2 x + 2 \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x - 2 \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 2(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) = 2 \cdot 1 = 2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.4 – Με εφαπτομένη και συνεφαπτομένη

Να αποδειχθεί ότι $\epsilon\phi x + \sigma\phi x = \frac{1}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}$.

ΛΥΣΗ

$$\epsilon\phi x + \sigma\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.5 – Δυνάμεις

Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x = 2\eta\mu^2 x - 1$.

ΛΥΣΗ

$$\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x = (\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x)(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu^2 x - (1 - \eta\mu^2 x) = 2\eta\mu^2 x - 1.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.6 – Υπολογισμός από άθροισμα

Αν $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$, να υπολογιστεί το γινόμενο $\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$.

ΛΥΣΗ

Υψώνουμε στο τετράγωνο: $\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{4}$, δηλαδή $1 + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{4}$.
Επομένως

$$\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = -\frac{3}{8}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.7 – Απαλοιφή της γωνίας

Αν $x = 3 \sigma\upsilon\nu \theta$ και $y = 3 \eta\mu \theta$, να βρεθεί μια σχέση μεταξύ των x, y που δεν περιέχει τη θ .

ΛΥΣΗ

$x^2 + y^2 = 9 \sigma\upsilon\nu^2 \theta + 9 \eta\mu^2 \theta = 9(\sigma\upsilon\nu^2 \theta + \eta\mu^2 \theta) = 9$. Το σημείο (x, y) βρίσκεται λοιπόν πάνω στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα 3.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.8 – Παράσταση με εφαπτομένη

Αν $\epsilon\phi x = 3$, να υπολογιστεί η τιμή της $A = \frac{2\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x}$.

ΛΥΣΗ

Αφού ορίζεται η $\epsilon\phi x$, έχουμε $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$. Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με $\sigma\upsilon\nu x$:

$$A = \frac{2\epsilon\phi x - 1}{\epsilon\phi x + 3} = \frac{6 - 1}{3 + 3} = \frac{5}{6}.$$

💡 Το «κόλπο» της διαίρεσης

Όταν ξέρουμε την $\epsilon\phi x$ και η παράσταση είναι κλάσμα με όρους «ίδιου βαθμού» σε $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$, διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με $\sigma\upsilon\nu x$ (ή με $\sigma\upsilon\nu^2 x$). Έτσι γλιτώνουμε τον υπολογισμό των $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$, και δεν χρειάζεται καν να ξέρουμε το τεταρτημόριο!



Οι ταυτότητες θέλουν **εξάσκηση**! Στο mathgreece.com θα βρεις σειρά λυμένων ταυτοτήτων σε βίντεο, βαθμολογημένες από εύκολες έως δύσκολες, και ένα κουίζ για να ελέγξεις αν τις έχεις κατακτήσει.

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 3.2

Πυθαγόρεια	$\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$
Πηλικά	$\epsilon\varphi \omega = \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega}, \sigma\varphi \omega = \frac{\sigma\upsilon\nu \omega}{\eta\mu \omega}, \epsilon\varphi \omega \sigma\varphi \omega = 1$
Με εφαπτομένη	$1 + \epsilon\varphi^2 \omega = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \omega}, 1 + \sigma\varphi^2 \omega = \frac{1}{\eta\mu^2 \omega}$
Πρόσημο	επιλέγεται πάντα από το τεταρτημόριο
Ταυτότητες	από το ένα μέλος στο άλλο· $1 = \eta\mu^2 + \sigma\upsilon\nu^2$ · ομώνυμα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 3.2

Δυσκολία: ★★☆☆ βασική ★★☆☆ μέτρια ★★☆☆ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- 1 ★★☆☆ Αν $\eta\mu x = -\frac{5}{13}$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της x .
- 2 ★★☆☆ Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{3}{5}$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της x .
- 3 ★★☆☆ Αν $\epsilon\varphi x = -\frac{3}{4}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρείτε τα $\sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu x$.
- 4 ★★☆☆ Να αποδείξετε ότι $(1 + \eta\mu x)(1 - \eta\mu x) = \sigma\upsilon\nu^2 x$.
- 5 ★★☆☆ Να αποδείξετε ότι $\epsilon\varphi^2 x - \eta\mu^2 x = \epsilon\varphi^2 x \cdot \eta\mu^2 x$.
- 6 ★★☆☆ Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$.
- 7 ★★☆☆ Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \frac{\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$, όπου $\eta\mu x \neq \sigma\upsilon\nu x$.
- 8 ★★☆☆ Αν $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{3}$, να υπολογίσετε το $\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$.
- 9 ★★☆☆ Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{1 + \epsilon\varphi^2 x} + \frac{1}{1 + \sigma\varphi^2 x} = 1$.
- 10 ★★☆☆ Αν $\epsilon\varphi x = -2$, να υπολογίσετε την παράσταση $B = \frac{\eta\mu^2 x - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x}$.
- 11 ★★☆☆ Αν $x = 2 + \eta\mu \theta$ και $y = 1 - \sigma\upsilon\nu \theta$, να βρείτε σχέση μεταξύ των x, y ανεξάρτητη από τη θ . Τι παριστάνει γεωμετρικά;
- 12 ★★☆☆ Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x + 3 \eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ 3.3

Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο

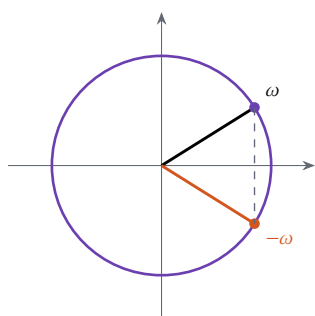
3.3

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

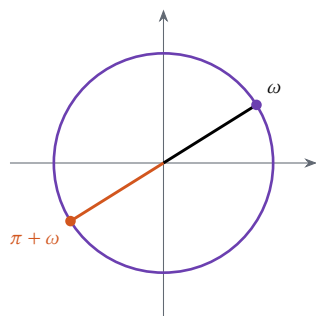
- ▶ πώς συνδέονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $-\omega$, $\pi - \omega$, $\pi + \omega$, $\frac{\pi}{2} - \omega$, $\frac{\pi}{2} + \omega$ με αυτούς της ω ,
- ▶ πώς υπολογίζουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς **οποιασδήποτε** γωνίας με τη βοήθεια μιας οξείας,
- ▶ πώς απλοποιούμε παραστάσεις και αξιοποιούμε τη σχέση $A + B + \Gamma = \pi$ σε τρίγωνο.

Το ζητούμενο είναι απλό: να υπολογίζουμε π.χ. το συν 210° ή το εφ $\frac{11\pi}{6}$ χρησιμοποιώντας μόνο τον πίνακα των γωνιών 0° – 90° . Το «κλειδί» είναι οι **συμμετρίες του τριγωνομετρικού κύκλου**.

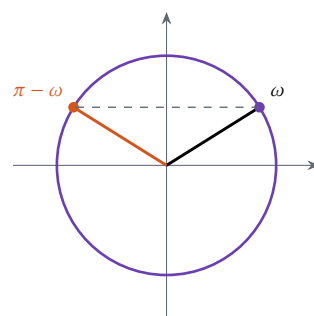
Οι κανόνες αναγωγής



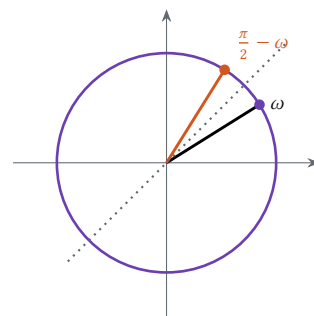
Αντίθετες γωνίες
συμμετρία ως προς $x'x$



Διαφέρουν κατά π
συμμετρία ως προς O



Παραπληρωματικές
συμμετρία ως προς $y'y$



Συμπληρωματικές
συμμετρία ως προς $y = x$

ΟΡΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ

Γωνία	ημ	συν	εφ	σφ
$-\omega$	$-\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu\omega$	$-\epsilon\phi\omega$	$-\sigma\phi\omega$
$\pi - \omega$ ($180^\circ - \omega$)	$\eta\mu\omega$	$-\sigma\upsilon\nu\omega$	$-\epsilon\phi\omega$	$-\sigma\phi\omega$
$\pi + \omega$ ($180^\circ + \omega$)	$-\eta\mu\omega$	$-\sigma\upsilon\nu\omega$	$\epsilon\phi\omega$	$\sigma\phi\omega$
$\frac{\pi}{2} - \omega$ ($90^\circ - \omega$)	$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\eta\mu\omega$	$\sigma\phi\omega$	$\epsilon\phi\omega$
$\frac{\pi}{2} + \omega$ ($90^\circ + \omega$)	$\sigma\upsilon\nu\omega$	$-\eta\mu\omega$	$-\sigma\phi\omega$	$-\epsilon\phi\omega$
$2\kappa\pi + \omega$ ($\kappa \cdot 360^\circ + \omega$)	$\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\epsilon\phi\omega$	$\sigma\phi\omega$

Απόδειξη

Για τις αντίθετες γωνίες: τα σημεία $M(x, y)$ και M' του τριγωνομετρικού κύκλου που αντιστοιχούν στις ω και $-\omega$ είναι συμμετρικά ως προς τον x' αξον, άρα $M'(x, -y)$. Επομένως $\sigma\upsilon\nu(-\omega) = x = \sigma\upsilon\nu\omega$ και $\eta\mu(-\omega) = -y = -\eta\mu\omega$, οπότε και $\epsilon\phi(-\omega) = -\epsilon\phi\omega$. Οι άλλες περιπτώσεις αποδεικνύονται με τον ίδιο τρόπο, από τις συμμετρίες ως προς τον y' αξον (σημείο $M'(-x, y)$), ως προς το O (σημείο $M'(-x, -y)$) και ως προς τη διχοτόμο $y = x$ (σημείο $M'(y, x)$).



Ο «χρυσός κανόνας» για να μην αποστηθίζεις

- α) Με $\pi \pm \omega$, $2\pi \pm \omega$ ή $-\omega$: ο τριγωνομετρικός αριθμός μένει ο ίδιος ($\eta\mu \rightarrow \eta\mu$, $\sigma\upsilon\nu \rightarrow \sigma\upsilon\nu$).
- β) Με $\frac{\pi}{2} \pm \omega$ ή $\frac{3\pi}{2} \pm \omega$: ο αριθμός **αλλάζει** στον «συμπληρωματικό» του ($\eta\mu \leftrightarrow \sigma\upsilon\nu$, $\epsilon\phi \leftrightarrow \sigma\phi$).
- γ) Το **πρόσημο**: φανταζόμαστε την ω οξεία και βάζουμε το πρόσημο που έχει ο **αρχικός** αριθμός στο τεταρτημόριο όπου πέφτει η γωνία.

Παράδειγμα: $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right)$. Ο αριθμός αλλάζει σε $\eta\mu\omega$. Η γωνία $\frac{3\pi}{2} + \omega$ είναι στο 4ο τεταρτημόριο, όπου το συνημίτονο είναι θετικό. Άρα $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) = +\eta\mu\omega$.



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Υπολογισμός τριγωνομετρικού αριθμού οποιασδήποτε γωνίας

- α) Αν η γωνία είναι αρνητική, χρησιμοποιούμε τους κανόνες για τη $-\omega$.
- β) Αν είναι μεγαλύτερη από 360° (2π), αφαιρούμε πολλαπλάσια του 360° (2π).
- γ) Γράφουμε τη γωνία που μένει στη μορφή $180^\circ - \omega$, $180^\circ + \omega$ ή $360^\circ - \omega$ με ω οξεία, και εφαρμόζουμε τον κανόνα.



ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 3.3

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.1 – Βασικοί υπολογισμοί

Να υπολογιστούν: $\eta\mu 150^\circ$, $\sigma\upsilon\nu 210^\circ$, $\epsilon\phi 315^\circ$, $\eta\mu(-120^\circ)$.

ΛΥΣΗ

- $\eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$.

- ▶ $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- ▶ $\cos 315^\circ = \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos(-45^\circ) = -\cos 45^\circ = -1$.
- ▶ $\sin(-120^\circ) = -\sin 120^\circ = -\sin(180^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.2 – Γωνίες σε ακτίνια

Να υπολογιστούν: $\sin \frac{17\pi}{6}$, $\cos \frac{4\pi}{3}$, $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

ΛΥΣΗ

- ▶ $\frac{17\pi}{6} = 2\pi + \frac{5\pi}{6}$, άρα $\sin \frac{17\pi}{6} = \sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- ▶ $\cos \frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.
- ▶ $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = -\sin \frac{7\pi}{4} = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\left(-\sin \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.3 – Μεγάλη γωνία

Να υπολογιστεί το $\cos 1230^\circ$.

ΛΥΣΗ

$1230 = 3 \cdot 360 + 150$, άρα $\cos 1230^\circ = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.4 – Απλοποίηση παράστασης

Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$A = \frac{\sin(\pi - x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin(\pi + x) \cdot \sin(-x)} - \cos(\pi + x) \cdot \sin x.$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\sin(-x) = -\sin x$ και $\cos(\pi + x) = \cos x$. Άρα

$$A = \frac{\sin x \cdot \sin x}{(-\sin x)(-\sin x)} - \cos x \sin x = \frac{\sin x}{\sin x} - 1 = \cos x - 1.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.5 – Γωνίες τριγώνου

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδειχθεί ότι: α) $\sin(B + \Gamma) = \sin A$ β) $\sin(B + \Gamma) = -\sin A$ γ) $\sin \frac{B+\Gamma}{2} = \sin \frac{A}{2}$.

ΛΥΣΗ

Ισχύει $A + B + \Gamma = \pi$, άρα $B + \Gamma = \pi - A$ και $\frac{B+\Gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$. Επομένως:

- α) $\sin(B + \Gamma) = \sin(\pi - A) = \sin A$, β) $\sin(B + \Gamma) = \sin(\pi - A) = -\sin A$,
 γ) $\sin \frac{B+\Gamma}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cos \frac{A}{2}$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Λάθος πρόσημο στο 2ο βήμα

✗ Λάθος

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Ένας γρήγορος έλεγχος που σε σώζει: **πριν** από τον υπολογισμό, σκέψου σε ποιο τεταρτημόριο είναι η γωνία και τι πρόσημο περιμένεις.

✓ Σωστό

$\sin(180^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2}$. Η 120° είναι στο 2ο τεταρτημόριο, όπου το συνημίτονο είναι **αρνητικό**.



Οι κανόνες αναγωγής μαθαίνονται εύκολα με εικόνες. Στο mathgreece.com υπάρχει βιντεομάθημα που δείχνει τις συμμετρίες στον τριγωνομετρικό κύκλο, καθώς και ένα παιχνίδι γνώσεων για να εξασκηθείς στα πρόσημα με ταχύτητα!

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 3.3

$-\omega$	συν ίδιο, οι υπόλοιποι αλλάζουν πρόσημο
$\pi - \omega$	ημ ίδιο, οι υπόλοιποι αλλάζουν πρόσημο
$\pi + \omega$	εφ, σφ ίδιες, ημ, συν αλλάζουν πρόσημο
$\frac{\pi}{2} - \omega$	ημ $\leftrightarrow$ συν, εφ $\leftrightarrow$ σφ (όλα θετικά)
$\frac{\pi}{2} + \omega$	ημ($\frac{\pi}{2} + \omega$) = συν ω , συν($\frac{\pi}{2} + \omega$) = -ημ ω
Τρίγωνο	$B + \Gamma = \pi - A$, $\frac{B+\Gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 3.3

Δυσκολία: ★★☆☆ βασική ★★☆☆ μέτρια ★★☆☆ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- 1 Να υπολογίσετε τα: ημ 135° , συν 240° , εφ 150° , ημ 300° , συν (-45°) .
★★★
- 2 Να υπολογίσετε τα: ημ $\frac{5\pi}{6}$, συν $\frac{4\pi}{3}$, εφ $\frac{7\pi}{4}$, συν $(-\frac{2\pi}{3})$.
★★★
- 3 Να υπολογίσετε τα: ημ 870° , συν 1020° , εφ (-1140°) .
★★★
- 4 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \eta\mu 120^\circ \sin 150^\circ + \sin 120^\circ \eta\mu 150^\circ$.
★★★
- 5 Να απλοποιήσετε την παράσταση $B = \frac{\sin(\pi - x) \varepsilon\varphi(-x)}{\eta\mu(\pi + x)}$.
★★★
- 6 Να απλοποιήσετε την παράσταση $\Gamma = \eta\mu(\frac{\pi}{2} - x) \sin(-x) + \sin(\frac{\pi}{2} + x) \eta\mu(\pi - x)$.
★★★
- 7 Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2 10^\circ + \eta\mu^2 80^\circ = 1$.
★★★
- 8 Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = \sin 10^\circ + \sin 50^\circ + \sin 130^\circ + \sin 170^\circ$.
★★★
- 9 Σε τρίγωνο ABΓ να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi(A + B) + \varepsilon\varphi \Gamma = 0$ (με $\Gamma \neq 90^\circ$) και $\sin \frac{A+B}{2} = \eta\mu \frac{\Gamma}{2}$.
★★★

10
★★★

Να υπολογίσετε το γινόμενο $\Pi = \varepsilon\varphi 1^\circ \cdot \varepsilon\varphi 2^\circ \cdot \varepsilon\varphi 3^\circ \cdots \varepsilon\varphi 89^\circ$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 • ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ 3.4

Οι Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ▶ τι είναι περιοδική συνάρτηση,
- ▶ τις γραφικές παραστάσεις και τις ιδιότητες των $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\epsilon\varphi x$ (και $\sigma\varphi x$),
- ▶ πώς επηρεάζουν οι αριθμοί ρ και ω τη γραφική παράσταση της $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$,
- ▶ πώς περιγράφονται περιοδικά φαινόμενα με τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Περιοδικές συναρτήσεις

Πολλά φαινόμενα **επαναλαμβάνονται** με τον ίδιο τρόπο σε σταθερά χρονικά διαστήματα: η εναλλαγή μέρας και νύχτας, οι παλίρροιες, ο χτύπος της καρδιάς. Τα φαινόμενα αυτά περιγράφονται από περιοδικές συναρτήσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ | Περιοδική συνάρτηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **περιοδική** αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x \in A$:

- ▶ $x + T \in A$ και $x - T \in A$, και
- ▶ $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.

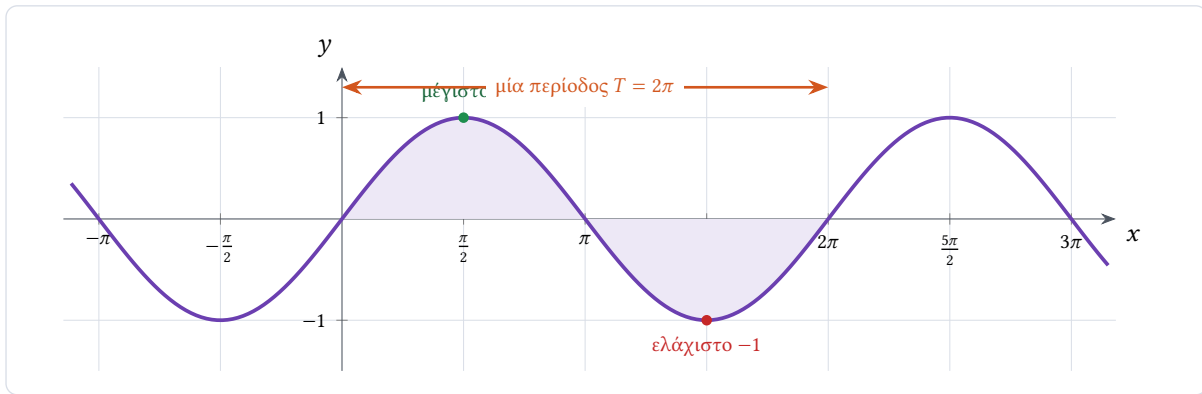
Ο **μικρότερος** θετικός T με αυτή την ιδιότητα λέγεται **περίοδος** της f .

🔦 Χρήσιμο να ξέρεις

Η γραφική παράσταση μιας περιοδικής συνάρτησης αποτελείται από ένα «κομμάτι» πλάτους T που **επαναλαμβάνεται**. Αρκεί λοιπόν να τη σχεδιάσουμε σε ένα διάστημα πλάτους μιας περιόδου και μετά να την «αντιγράψουμε».

Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$

Σε κάθε πραγματικό αριθμό x αντιστοιχίζουμε το ημίτονο της γωνίας των x rad. Έτσι ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Επειδή $\eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu x$, είναι **περιοδική με περίοδο 2π** .

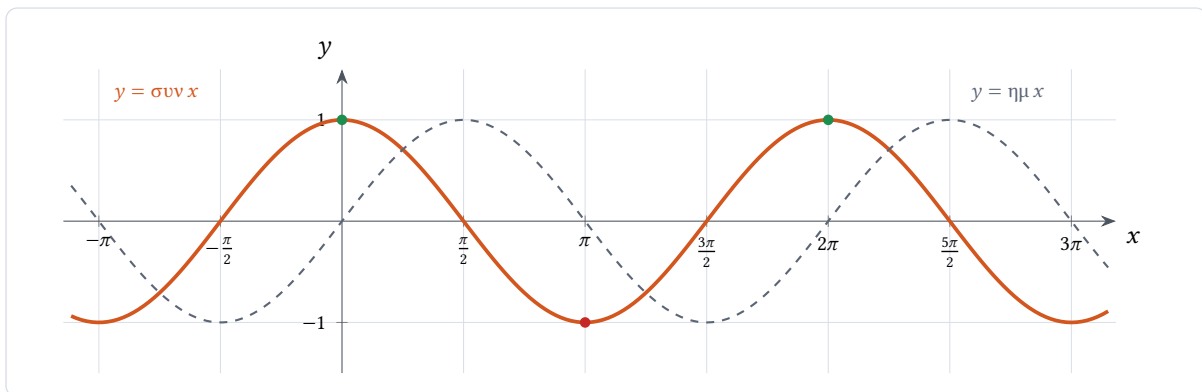


x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
	↗		↘		↗

ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ $F(x) = \eta\mu x$

- ▶ Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R}$. Σύνολο τιμών: $[-1, 1]$. Περίοδος: 2π .
- ▶ Στο $[0, 2\pi]$: γνησίως αύξουσα στα $[0, \frac{\pi}{2}]$ και $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.
- ▶ Μέγιστο 1 για $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ και ελάχιστο -1 για $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.
- ▶ Είναι **περιττή**: $\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$, οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς το O .
- ▶ Μηδενίζεται για $x = \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$



ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ $F(x) = \sigma\upsilon\nu x$

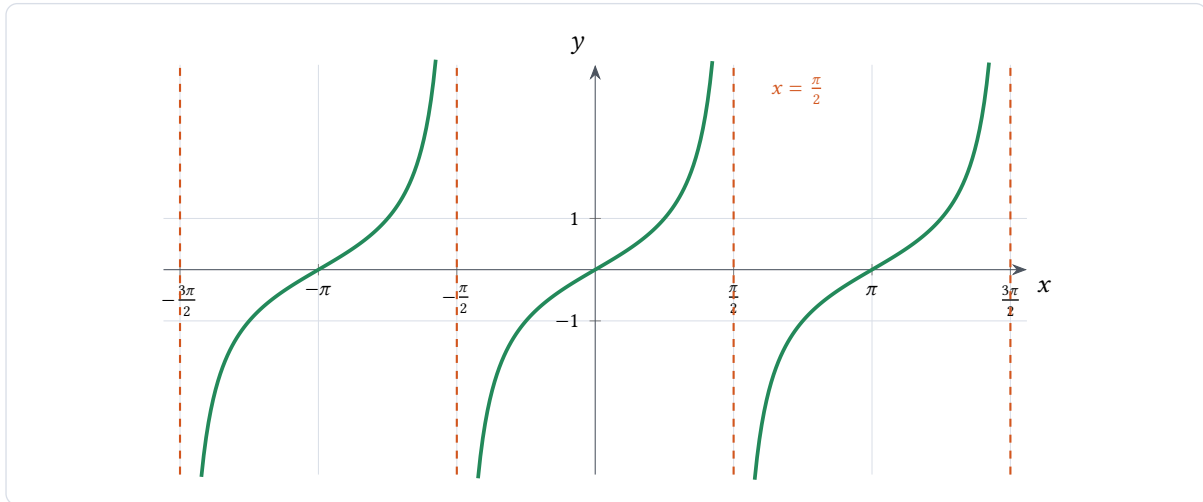
- ▶ Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R}$. Σύνολο τιμών: $[-1, 1]$. Περίοδος: 2π .
- ▶ Στο $[0, 2\pi]$: γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\pi, 2\pi]$.
- ▶ Μέγιστο 1 για $x = 2\kappa\pi$ και ελάχιστο -1 για $x = 2\kappa\pi + \pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.
- ▶ Είναι **άρτια**: $\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$, οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$.
- ▶ Μηδενίζεται για $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.



Η συνημιτονοειδής είναι μετατοπισμένη ημιτονοειδής

Επειδή $\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, η γραφική παράσταση της $\sin x$ προκύπτει από την $\cos x$ με **οριζόντια μετατόπιση κατά $\frac{\pi}{2}$ προς τα αριστερά** (θυμήσου το Μάθημα 2.2!). Οι δύο καμπύλες έχουν ακριβώς το ίδιο σχήμα.

Η συνάρτηση $f(x) = \tan x$



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ $F(x) = \tan x$

- ▶ Πεδίο ορισμού: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\} = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Σύνολο τιμών: $\mathbb{R}$.
- ▶ Είναι περιοδική με περίοδο π (όχι 2π !), αφού $\tan(x + \pi) = \tan x$.
- ▶ Είναι γνησίως αύξουσα σε **καθένα** από τα διαστήματα $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.
- ▶ Είναι **περιττή**. Οι ευθείες $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ είναι **κατακόρυφες ασύμπτωτες**.
- ▶ Δεν έχει μέγιστο ούτε ελάχιστο.

Ανάλογα, η $\cot x$ έχει περίοδο π , ορίζεται όταν $\cos x \neq 0$ και είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε διάστημα $(k\pi, k\pi + \pi)$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Η εφαιπόμενη «είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της»

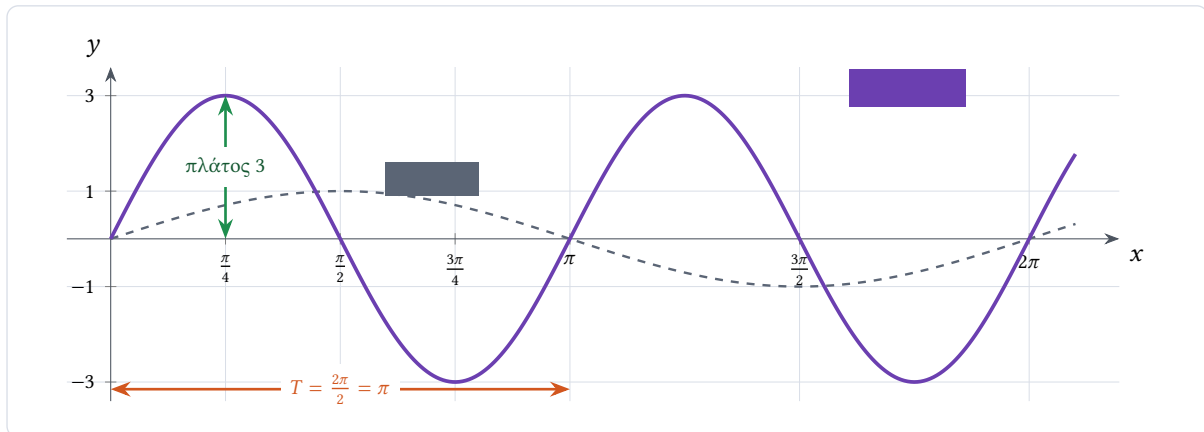
Όπως και η $\frac{1}{x}$ στο Μάθημα 2.1, η $\tan x$ είναι γνησίως αύξουσα σε **κάθε διάστημα** χωριστά, όχι στο σύνολο του πεδίου ορισμού. Για παράδειγμα, $\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$, όμως $\tan \frac{\pi}{4} = 1 > -1 = \tan \frac{3\pi}{4}$.

Οι συναρτήσεις $f(x) = \rho \sin(\omega x)$ και $f(x) = \rho \cos(\omega x)$

ΠΛΑΤΟΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

Αν $\rho > 0$ και $\omega > 0$, οι συναρτήσεις $f(x) = \rho \sin(\omega x)$ και $g(x) = \rho \cos(\omega x)$:

- ▶ έχουν **μέγιστη τιμή ρ** και **ελάχιστη τιμή $-\rho$** (ο ρ λέγεται **πλάτος**),
- ▶ είναι περιοδικές με **περίοδο** $T = \frac{2\pi}{\omega}$.



Ερμηνεία

Ο ρ «τεντώνει» την καμπύλη **κατακόρυφα**: οι κορυφές ανεβαίνουν στο ύψος ρ . Ο ω «συμπιέζει» την καμπύλη **οριζόντια**: όσο μεγαλύτερος είναι ο ω , τόσο πιο «πυκνές» είναι οι ταλαντώσεις. Η $3\eta\mu 2x$ κάνει δύο πλήρεις ταλαντώσεις στο $[0, 2\pi]$, ενώ η $\eta\mu x$ κάνει μία.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Σχεδίαση της $y = \rho\eta\mu(\omega x)$ σε μία περίοδο

α) Υπολογίζουμε την περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$ και τη χωρίζουμε σε **4 ίσα μέρη**: $0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

β) Στα σημεία αυτά η $\rho\eta\mu(\omega x)$ παίρνει τις τιμές $0, \rho, 0, -\rho, 0$.

γ) Ενώνουμε τα σημεία με «κυματιστή» καμπύλη και την επαναλαμβάνουμε.

Για την $\rho\sigma\upsilon\nu(\omega x)$ οι αντίστοιχες τιμές είναι $\rho, 0, -\rho, 0, \rho$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 3.4

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.1 – Περίοδος και ακρότατα

Να βρεθούν η περίοδος, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων: α) $f(x) = 4\eta\mu 3x$
β) $g(x) = -2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$.

ΛΥΣΗ

α) $T = \frac{2\pi}{3}$, μέγιστο 4 και ελάχιστο -4.

β) $T = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$. Επειδή $-1 \leq \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} \leq 1$, πολλαπλασιάζοντας με -2 παίρνουμε $-2 \leq g(x) \leq 2$. Η μέγιστη τιμή 2 επιτυγχάνεται όταν $\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} = -1$, π.χ. για $x = 2\pi$. Η ελάχιστη τιμή -2 επιτυγχάνεται όταν $\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} = 1$, π.χ. για $x = 0$.

⚠️ ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ

Η $g(x) = -2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$ έχει πλάτος $|-2| = 2$. Το μείον **αναποδογυρίζει** την καμπύλη (συμμετρία ως προς τον x' x): εκεί που η $\sigma\upsilon\nu$ έχει μέγιστο, η g έχει ελάχιστο.

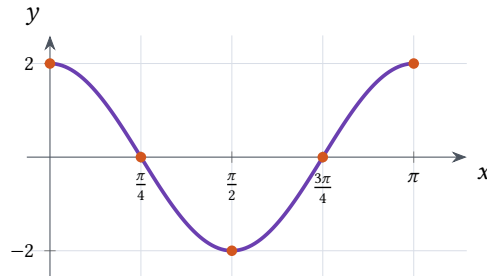
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.2 – Σχεδίαση

Να γίνει η γραφική παράσταση της $f(x) = 2 \sin 2x$ στο διάστημα $[0, \pi]$.

ΛΥΣΗ

Περίοδος $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Χωρίζουμε σε 4 ίσα μέρη:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	2	0	-2	0	2



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.3 – Εύρεση τύπου από τη γραφική παράσταση

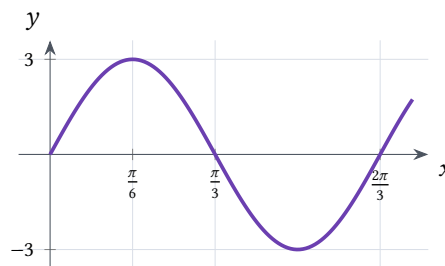
Η διπλανή καμπύλη είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$ με $\rho, \omega > 0$. Να βρεθούν οι ρ και ω .

ΛΥΣΗ

Από το σχήμα, η μέγιστη τιμή είναι 3, άρα $\rho = 3$. Μια πλήρης ταλάντωση ολοκληρώνεται στο $x = \frac{2\pi}{3}$, άρα η περίοδος είναι $T = \frac{2\pi}{3}$. Τότε

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \omega = 3.$$

Επομένως $f(x) = 3 \eta\mu 3x$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.4 – Σύγκριση με μονοτονία

Να συγκριθούν οι αριθμοί: α) $\eta\mu \frac{\pi}{7}$ και $\eta\mu \frac{\pi}{5}$ β) $\sin 2$ και $\sin 3$.

ΛΥΣΗ

α) Η $\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ και $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, άρα $\eta\mu \frac{\pi}{7} < \eta\mu \frac{\pi}{5}$.

β) Η $\sin x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$ και $0 < 2 < 3 < \pi \approx 3,14$, άρα $\sin 2 > \sin 3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.5 – Περιοδικό φαινόμενο: παλίρροια

Το ύψος (σε m) της στάθμης του νερού σε ένα λιμάνι, t ώρες μετά τα μεσάνυχτα, δίνεται από τον τύπο $h(t) = 3 + 2 \eta\mu \frac{\pi t}{6}$, $0 \leq t \leq 24$.

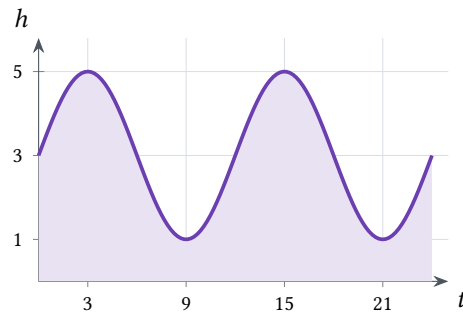
- Ποιο είναι το μέγιστο και ποιο το ελάχιστο ύψος της στάθμης;
- Κάθε πόσες ώρες επαναλαμβάνεται το φαινόμενο;
- Ποιες ώρες έχουμε πλημμυρίδα (μέγιστο ύψος);

ΛΥΣΗ

α) Αφού $-1 \leq \eta\mu \frac{\pi t}{6} \leq 1$, έχουμε $1 \leq h(t) \leq 5$.
Μέγιστο ύψος 5 m, ελάχιστο 1 m.

β) $T = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12$ ώρες.

γ) Μέγιστο έχουμε όταν $\eta\mu \frac{\pi t}{6} = 1$, δηλαδή $\frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi$, οπότε $t = 3 + 12\kappa$. Στο $[0, 24]$ βρίσκουμε $t = 3$ και $t = 15$, δηλαδή στις 3:00 και στις 15:00.



Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι πιο κατανοητές όταν τις «παίζεις»! Στο mathgreece.com θα βρεις applet όπου αλλάζεις τα ρ και ω και βλέπεις αμέσως τη μεταβολή του πλάτους και της περιόδου. Θα βρεις επίσης βιντεομάθημα και επιπλέον ασκήσεις.

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 3.4

$\eta\mu x$	$\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], T = 2\pi$, περιττή, μέγ. στο $\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi$, ελάχ. στο $-\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi$
συν x	$\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], T = 2\pi$, άρτια, μέγ. στο $2\kappa\pi$, ελάχ. στο $\pi + 2\kappa\pi$
εφ x	$x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, σύνολο τιμών $\mathbb{R}$, $T = \pi$, περιττή, ↗ σε κάθε διάστημα
$\rho \eta\mu \omega x$	μέγ. ρ , ελάχ. $-\rho$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ($\rho, \omega > 0$)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 3.4

Δυσκολία: ★★☆☆ βασική ★★☆☆ μέτρια ★★☆☆ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- 1 Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων: $f(x) = 5 \eta\mu 4x$, $g(x) = \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x}{3}$, $h(x) = 3 \epsilon\phi 2x$ (μόνο περίοδο).
★★★
- 2 Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x) = \eta\mu x + 1$ και της $g(x) = 3 - 2 \sigma\upsilon\nu x$.
★★★
- 3 Να συγκρίνετε τους αριθμούς: α) $\eta\mu \frac{2\pi}{3}$ και $\eta\mu \frac{3\pi}{4}$ β) $\epsilon\phi 1$ και $\epsilon\phi 1,2$.
★★★
- 4 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = 3 \eta\mu \frac{x}{2}$ σε ένα διάστημα πλάτους μιας περιόδου.
★★★
- 5 Η συνάρτηση $f(x) = \rho \sigma\upsilon\nu(\omega x)$, με $\rho, \omega > 0$, έχει μέγιστη τιμή 4 και περίοδο $\frac{\pi}{3}$. Να βρείτε τους ρ, ω και την τιμή $f\left(\frac{\pi}{9}\right)$.
★★★
- 6 Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = (\alpha - 1) \eta\mu 2x$ έχει μέγιστη τιμή 3;
★★★
- 7 Να αποδείξετε ότι η $f(x) = \eta\mu x + \eta\mu 3x$ είναι περιττή και ότι $f(x + 2\pi) = f(x)$.
★★★

- 8
★★★ Η θερμοκρασία (σε °C) μιας πόλης κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο $\theta(t) = 18 - 6 \sin \frac{\pi t}{12}$, όπου t οι ώρες μετά τα μεσάνυχτα, $0 \leq t \leq 24$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία και τις ώρες στις οποίες σημειώνονται.
- 9
★★★ Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $f(x) = \eta\mu^2 x - 2 \eta\mu x + 3$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 • ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ 3.5

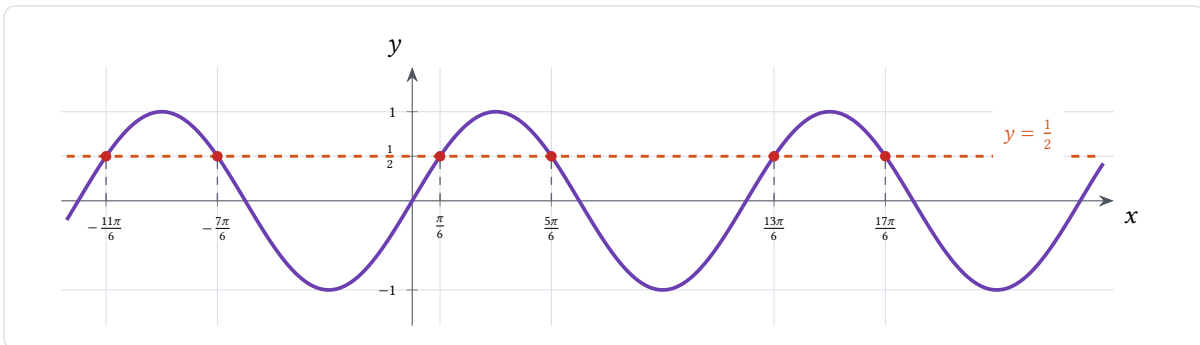
Βασικές Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

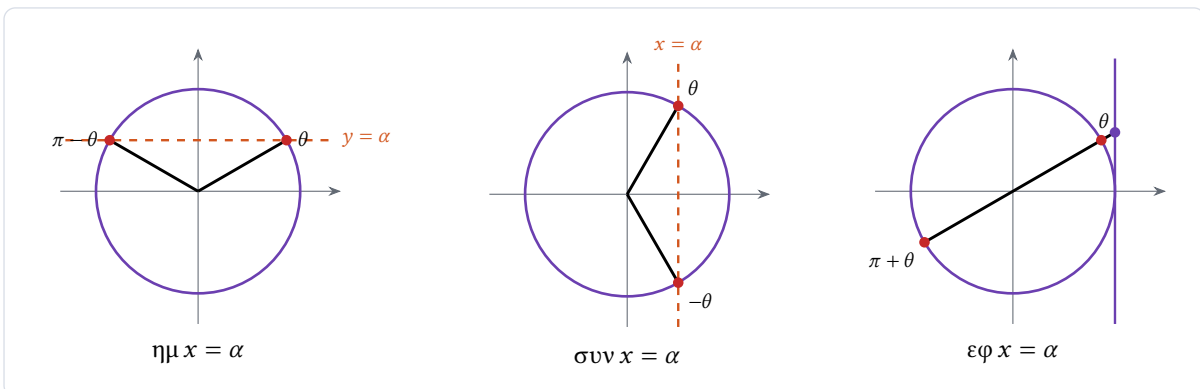
- ▶ πώς λύνονται οι εξισώσεις $\eta\mu x = \alpha$, $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$, $\epsilon\phi x = \alpha$, $\sigma\phi x = \alpha$,
- ▶ γιατί οι εξισώσεις αυτές έχουν **άπειρες** λύσεις και πώς τις γράφουμε,
- ▶ πώς βρίσκουμε τις λύσεις σε ένα συγκεκριμένο διάστημα,
- ▶ πώς λύνονται εξισώσεις που ανάγονται σε βασικές (π.χ. δευτεροβάθμιες ως προς $\eta\mu x$).

Γιατί άπειρες λύσεις;

Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$; Στο $[0, 2\pi)$ βρίσκουμε δύο: $x = \frac{\pi}{6}$ και $x = \frac{5\pi}{6}$. Επειδή όμως η $\eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π , αν προσθέσουμε σε αυτές οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του 2π παίρνουμε πάλι λύσεις. Η εξίσωση έχει λοιπόν **άπειρες** λύσεις!



Οι βασικές εξισώσεις



ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Αν θ είναι μια γνωστή λύση (συνήθως από τον πίνακα των βασικών γωνιών), τότε για $k \in \mathbb{Z}$:

$\eta\mu x = \eta\mu \theta$	$x = 2κπ + \theta$ ή $x = 2κπ + \pi - \theta$
$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \theta$	$x = 2κπ + \theta$ ή $x = 2κπ - \theta$ ($x = 2κπ \pm \theta$)
$\epsilon\varphi x = \epsilon\varphi \theta$	$x = κπ + \theta$
$\sigma\varphi x = \sigma\varphi \theta$	$x = κπ + \theta$

Σε μοίρες γράφουμε αντίστοιχα $κ \cdot 360^\circ$ και $κ \cdot 180^\circ$ στη θέση των $2κπ$ και $κπ$.

Ερμηνεία των τύπων

- ▶ Δύο γωνίες έχουν το ίδιο **ημίτονο** αν είναι ίσες ή **παραπληρωματικές** (με προσθήκη πολλαπλασίων του 2π).
- ▶ Δύο γωνίες έχουν το ίδιο **συνημίτονο** αν είναι ίσες ή **αντίθετες**.
- ▶ Δύο γωνίες έχουν την ίδια **εφαπτομένη** αν διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο του π . Γι' αυτό εδώ γράφουμε $κπ$ και όχι $2κπ$.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ (ΑΠΟΜΝΗΜΟΝΕΥΟΝΤΑΙ)

$$\begin{array}{lll} \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = κπ & \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2κπ + \frac{\pi}{2} & \eta\mu x = -1 \Leftrightarrow x = 2κπ - \frac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = κπ + \frac{\pi}{2} & \sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow x = 2κπ & \sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow x = 2κπ + \pi \\ \epsilon\varphi x = 0 \Leftrightarrow x = κπ & \sigma\varphi x = 0 \Leftrightarrow x = κπ + \frac{\pi}{2} & \end{array}$$

ΠΟΤΕ Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΙΝΑΙ ΑΔΥΝΑΤΗ

Οι εξισώσεις $\eta\mu x = \alpha$ και $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$ έχουν λύση **μόνο αν** $-1 \leq \alpha \leq 1$. Για παράδειγμα, η $\eta\mu x = 2$ είναι **αδύνατη**. Αντίθετα, οι $\epsilon\varphi x = \alpha$ και $\sigma\varphi x = \alpha$ έχουν λύση για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Λύνω μια βασική τριγωνομετρική εξίσωση

- Απομονώνουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό: $\eta\mu(\dots) = \alpha$.
- Ελέγχουμε αν $|\alpha| \leq 1$ (για $\eta\mu$, $\sigma\upsilon\nu$).
- Γράφουμε τον αριθμό α ως τριγωνομετρικό αριθμό μιας γνωστής γωνίας: $\alpha = \eta\mu \theta$. Αν το α είναι **αρνητικό**, χρησιμοποιούμε:

$$-\eta\mu \theta = \eta\mu(-\theta), \quad -\sigma\upsilon\nu \theta = \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta), \quad -\epsilon\varphi \theta = \epsilon\varphi(-\theta).$$

- Εφαρμόζουμε τον τύπο και λύνουμε ως προς x .

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 3.5

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.1 – Οι τρεις βασικές μορφές

Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ β) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$ γ) $\epsilon\varphi x = -1$.

ΛΥΣΗ

α) $\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

β) $-\frac{1}{2} = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3}$. Άρα $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

γ) $-1 = -\epsilon\varphi \frac{\pi}{4} = \epsilon\varphi \left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Άρα $\epsilon\varphi x = \epsilon\varphi \left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

❌ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Το «κπ» στο ημίτονο

❌ Λάθος

$$\eta\mu x = \eta\mu \theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta.$$

✅ Σωστό

$x = 2\kappa\pi + \theta$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \theta$. Δύο «οικογένειες» λύσεων, με $2\kappa\pi$. Μόνο η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη έχουν κπ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.2 – Εξίσωση με σύνθετη γωνία

Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu \left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

ΛΥΣΗ

$\eta\mu \left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{6}$, οπότε:

► $2x - \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$, ή

► $2x - \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi + \pi \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

⚠ ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΚΑΙ ΤΟ ΚΠ

Όταν διαιρούμε με το 2, διαιρείται και το $2\kappa\pi$ και γίνεται κπ. Ένα συχνό λάθος είναι να διαιρεθεί μόνο το θ και να μείνει το $2\kappa\pi$ ως έχει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.3 – Λύσεις σε διάστημα

Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης $2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2} = 0$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

ΛΥΣΗ

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

► $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$: θέλουμε $0 \leq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{8} \leq \kappa \leq \frac{7}{8}$. Αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$, έχουμε $\kappa = 0$ και $x = \frac{\pi}{4}$.

► $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4}$: θέλουμε $0 \leq 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \leq 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \kappa \leq \frac{9}{8}$. Άρα $\kappa = 1$ και $x = \frac{7\pi}{4}$.

Οι λύσεις στο $[0, 2\pi]$ είναι οι $\frac{\pi}{4}$ και $\frac{7\pi}{4}$.

**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Λύσεις σε δοσμένο διάστημα**

Για κάθε «οικογένεια» λύσεων $x = (\dots)\kappa\pi + (\dots)$, γράφουμε τη διπλή ανίσωση « $\alpha \leq x \leq \beta$ », τη λύνουμε ως προς κ και κρατάμε μόνο τις **ακέραιες** τιμές του κ . Μετά υπολογίζουμε τα αντίστοιχα x .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.4 – Εξίσωση της μορφής $\eta\mu f(x) = \eta\mu g(x)$

Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu 3x = \eta\mu x$.

ΛΥΣΗ

- ▶ $3x = 2\kappa\pi + x \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi \Leftrightarrow x = \kappa\pi$, ή
- ▶ $3x = 2\kappa\pi + \pi - x \Leftrightarrow 4x = 2\kappa\pi + \pi \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.5 – Ημίτονο ίσο με συνημίτονο

Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu x$.

ΛΥΣΗ

Μετατρέπουμε το συνημίτονο σε ημίτονο: $\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Άρα $\eta\mu 2x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$:

- ▶ $2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$, ή
- ▶ $2x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + x \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

**Μετατροπή συνημιτόνου σε ημίτονο**

Όταν η εξίσωση έχει διαφορετικούς αριθμούς στα δύο μέλη (ημίτονο στο ένα, συνημίτονο στο άλλο), χρησιμοποιούμε τις

$$\sigma\upsilon\nu \alpha = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \eta\mu \alpha = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \sigma\varphi \alpha = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Εξισώσεις που ανάγονται σε βασικές**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.6 – Δευτεροβάθμια ως προς $\eta\mu x$**

Να λυθεί η εξίσωση $2\eta\mu^2 x - \eta\mu x - 1 = 0$.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $\eta\mu x = u$, με $-1 \leq u \leq 1$. Η εξίσωση γίνεται $2u^2 - u - 1 = 0$, με $\Delta = 1 + 8 = 9$, άρα $u = \frac{1 \pm 3}{4}$, δηλαδή $u = 1$ ή $u = -\frac{1}{2}$. Και οι δύο τιμές είναι δεκτές.

- ▶ $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$.
- ▶ $\eta\mu x = -\frac{1}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.7 – Μετατροπή με την ταυτότητα

Να λυθεί η εξίσωση $2 \sin^2 x + 3 \eta\mu x - 3 = 0$.

ΛΥΣΗ

Γράφουμε $\sin^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$ ώστε η εξίσωση να έχει μόνο ημίτονα:

$$2 - 2 \eta\mu^2 x + 3 \eta\mu x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2 \eta\mu^2 x - 3 \eta\mu x + 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 1 \text{ ή } \eta\mu x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Άρα } x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.8 – Με εφαπτομένη και συνεφαπτομένη

Να λυθεί η εξίσωση $\epsilon\phi x = 3 \sigma\phi x$.

ΛΥΣΗ

Πρέπει να ορίζονται και οι δύο αριθμοί: $\sin x \neq 0$ και $\eta\mu x \neq 0$. Αφού $\sigma\phi x = \frac{1}{\epsilon\phi x}$, η εξίσωση γίνεται $\epsilon\phi^2 x = 3$, δηλαδή $\epsilon\phi x = \pm\sqrt{3}$:

$$\epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \quad \epsilon\phi x = \epsilon\phi \left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}.$$

Οι λύσεις αυτές ικανοποιούν τους περιορισμούς. Συνοπτικά: $x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

❌ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Διάρθρωση με ποσότητα που μπορεί να είναι 0

Στην εξίσωση $\eta\mu x \sin x = \sin x$, αν «διώξουμε» το $\sin x$ διαιρώντας, χάνουμε λύσεις! Το σωστό είναι να βγάλουμε κοινό παράγοντα:

$$\sin x (\eta\mu x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ή } \eta\mu x = 1.$$



Οι τριγωνομετρικές εξισώσεις είναι κορυφαίο θέμα στις εξετάσεις. Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο με όλες τις κατηγορίες εξισώσεων, φύλλα εργασίας με λύσεις και ένα τεστ που διορθώνεται αυτόματα. Δοκίμασέ το!

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 3.5

$\eta\mu x = \eta\mu \theta$	$x = 2\kappa\pi + \theta \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \pi - \theta$
$\sin x = \sin \theta$	$x = 2\kappa\pi \pm \theta$
$\epsilon\phi x = \epsilon\phi \theta, \sigma\phi x = \sigma\phi \theta$	$x = \kappa\pi + \theta$
Αρνητικό α	$-\eta\mu \theta = \eta\mu(-\theta), -\sin \theta = \sin(\pi - \theta), -\epsilon\phi \theta = \epsilon\phi(-\theta)$
Αδύνατη	$\eta\mu x = \alpha \text{ ή } \sin x = \alpha \text{ με } \alpha > 1$
Σε διάστημα	ανίσωση ως προς κ , κρατάμε τις ακέραιες τιμές

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 3.5

Δυσκολία: ★★☆☆ βασική ★★☆☆ μέτρια ★★☆☆ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- 1 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$.
- 2 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- 3 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$.
- 4 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu x + \sqrt{3} = 0$.
- 5 ★★☆☆ Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $\sigma\upsilon\nu 2x = 0$ β) $\eta\mu \frac{x}{2} = 1$ γ) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{3}{2}$.
- 6 ★★☆☆ Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.
- 7 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.
- 8 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu 2x = \eta\mu \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
- 9 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 3x = \sigma\upsilon\nu x$.
- 10 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$.
- 11 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $4\eta\mu^2 x - 3 = 0$.
- 12 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2x = \eta\mu x$.
- 13 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x = 0$.
- 14 ★★☆☆ Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης $2\eta\mu x = 1$ στο διάστημα $[0, 4\pi]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 • ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ 3.6

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Αθροίσματος Γωνιών

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ▶ τους τύπους για τα $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\eta\mu(\alpha \pm \beta)$, $\epsilon\varphi(\alpha \pm \beta)$, $\sigma\varphi(\alpha \pm \beta)$,
- ▶ πώς υπολογίζουμε ακριβείς τιμές για γωνίες όπως 15° , 75° , 105° ,
- ▶ πώς χρησιμοποιούμε τους τύπους σε ταυτότητες και εξισώσεις.

Ισχύει άραγε ότι $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$; Ας δοκιμάσουμε με $\alpha = \beta = 60^\circ$: $\sin 120^\circ = \frac{1}{2}$, ενώ $\sin 60^\circ + \sin 60^\circ = 1$. Όχι! Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί δεν «μοιράζονται» στο άθροισμα. Οι σωστοί τύποι είναι οι παρακάτω.

ΤΥΠΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑΣ

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \eta\mu \alpha \eta\mu \beta & \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \eta\mu \alpha \eta\mu \beta \\ \eta\mu(\alpha + \beta) &= \eta\mu \alpha \cos \beta + \sin \alpha \eta\mu \beta & \eta\mu(\alpha - \beta) &= \eta\mu \alpha \cos \beta - \sin \alpha \eta\mu \beta \\ \epsilon\varphi(\alpha + \beta) &= \frac{\epsilon\varphi \alpha + \epsilon\varphi \beta}{1 - \epsilon\varphi \alpha \epsilon\varphi \beta} & \epsilon\varphi(\alpha - \beta) &= \frac{\epsilon\varphi \alpha - \epsilon\varphi \beta}{1 + \epsilon\varphi \alpha \epsilon\varphi \beta} \\ \sigma\varphi(\alpha + \beta) &= \frac{\sigma\varphi \alpha \sigma\varphi \beta - 1}{\sigma\varphi \beta + \sigma\varphi \alpha} & \sigma\varphi(\alpha - \beta) &= \frac{\sigma\varphi \alpha \sigma\varphi \beta + 1}{\sigma\varphi \beta - \sigma\varphi \alpha}\end{aligned}$$

(Οι τύποι της εφαπτομένης και της συνεφαπτομένης ισχύουν όταν ορίζονται όλοι οι όροι τους.)

Π Πώς να τους θυμάσαι

- ▶ **Συνημίτονο**: «συν-συν, ημ-ημ», με το **αντίθετο** πρόσημο: στο $\sin(\alpha + \beta)$ μπαίνει μείον.
- ▶ **Ημίτονο**: «ημ-συν, συν-ημ», με το **ίδιο** πρόσημο: στο $\eta\mu(\alpha + \beta)$ μπαίνει συν.
- ▶ **Εφαπτομένη**: στον αριθμητή το ίδιο πρόσημο, στον παρονομαστή «1» και το αντίθετο πρόσημο.

Απόδειξη

Για το $\sin(\alpha - \beta)$: Στον τριγωνομετρικό κύκλο παίρνουμε τα σημεία A(συν α , ημ α) και B(συν β , ημ β). Με τον τύπο της απόστασης:

$$(AB)^2 = (\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\eta\mu \alpha - \eta\mu \beta)^2 = 2 - 2(\sin \alpha \sin \beta + \eta\mu \alpha \eta\mu \beta).$$

Αν στρέψουμε το σχήμα κατά γωνία $-\beta$, τα σημεία πηγαίνουν στις θέσεις A'(συν $(\alpha - \beta)$, ημ $(\alpha - \beta)$) και B'(1, 0), και η απόστασή τους δεν αλλάζει:

$$(A'B')^2 = (\sin(\alpha - \beta) - 1)^2 + \eta\mu^2(\alpha - \beta) = 2 - 2\sin(\alpha - \beta).$$

Εξισώνοντας παίρνουμε $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \eta\mu \alpha \eta\mu \beta$. Για το $\sin(\alpha + \beta)$ θέτουμε $-\beta$ στη θέση του β .

Για το ημίτονο χρησιμοποιούμε την $\eta\mu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$. Για την εφαπτομένη διαιρούμε τον τύπο του ημιτόνου με τον τύπο του συνημιτόνου, και μετά αριθμητή και παρονομαστή με $\sigma\upsilon\nu \alpha \sigma\upsilon\nu \beta$.

✗ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** | «Μοιράζω» τον τριγωνομετρικό αριθμό

✗ **Λάθος**

$$\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu x + \eta\mu \frac{\pi}{6} = \eta\mu x + \frac{1}{2}$$

✓ **Σωστό**

$$\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu x \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu x \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \eta\mu x + \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu x$$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 3.6

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.6.1 – Ακριβείς τιμές

Να υπολογιστούν τα $\sigma\upsilon\nu 15^\circ$, $\eta\mu 75^\circ$ και $\epsilon\varphi 105^\circ$.

ΛΥΣΗ

$$\sigma\upsilon\nu 15^\circ = \sigma\upsilon\nu(45^\circ - 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 45^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ + \eta\mu 45^\circ \eta\mu 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\eta\mu 75^\circ = \eta\mu(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad (\acute{\omicron}\pi\omega\varsigma \acute{\eta}\tau\alpha\nu \alpha\nu\alpha\mu\epsilon\nu\acute{\omicron}\mu\epsilon\nu\omicron, \acute{\alpha}\phi\omicron\upsilon 75^\circ = 90^\circ - 15^\circ).$$

$$\epsilon\varphi 105^\circ = \epsilon\varphi(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.6.2 – Από δεδομένους αριθμούς

Αν $\eta\mu \alpha = \frac{3}{5}$ με $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ και $\sigma\upsilon\nu \beta = \frac{5}{13}$ με $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, να υπολογιστούν τα $\eta\mu(\alpha + \beta)$ και $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$.

ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε πρώτα τους «άλλους» αριθμούς. Στο 2ο τεταρτημόριο $\sigma\upsilon\nu \alpha = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$. Στο 1ο τεταρτημόριο $\eta\mu \beta = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$. Τότε:

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} + \left(-\frac{4}{5}\right) \frac{12}{13} = \frac{15 - 48}{65} = -\frac{33}{65},$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \left(-\frac{4}{5}\right) \frac{5}{13} - \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} = \frac{-20 - 36}{65} = -\frac{56}{65}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.6.3 – Ταυτότητα

Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu(\alpha + \beta) \eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu^2 \alpha - \eta\mu^2 \beta$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}\eta\mu(\alpha + \beta) \eta\mu(\alpha - \beta) &= (\eta\mu \alpha \sigma\upsilon\nu \beta + \sigma\upsilon\nu \alpha \eta\mu \beta)(\eta\mu \alpha \sigma\upsilon\nu \beta - \sigma\upsilon\nu \alpha \eta\mu \beta) = \eta\mu^2 \alpha \sigma\upsilon\nu^2 \beta - \sigma\upsilon\nu^2 \alpha \eta\mu^2 \beta \\ &= \eta\mu^2 \alpha (1 - \eta\mu^2 \beta) - (1 - \eta\mu^2 \alpha) \eta\mu^2 \beta = \eta\mu^2 \alpha - \eta\mu^2 \beta.\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.6.4 – Απλοποίηση

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

ΛΥΣΗ

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} \eta\mu x + \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu x - \frac{\sqrt{3}}{2} \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.6.5 – «Αναγνωρίζω» τον τύπο σε εξίσωση

Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu x \sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu x \eta\mu 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ΛΥΣΗ

Το πρώτο μέλος είναι το ανάπτυγμα του $\eta\mu(x + 2x) = \eta\mu 3x$. Άρα $\eta\mu 3x = \eta\mu \frac{\pi}{3}$:

$$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \quad \text{ή} \quad 3x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{2\pi}{9}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.6.6 – Εύρεση γωνίας από εφαπτομένες

Αν α, β είναι οξείες γωνίες με $\epsilon\varphi \alpha = \frac{1}{2}$ και $\epsilon\varphi \beta = \frac{1}{3}$, να αποδειχθεί ότι $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

ΛΥΣΗ

$\epsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{5/6}{5/6} = 1$. Επειδή $0 < \alpha + \beta < \pi$ και στο διάστημα αυτό η μόνη γωνία με εφαπτομένη 1 είναι η $\frac{\pi}{4}$, έχουμε $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

Στο τελευταίο παράδειγμα δεν αρκεί η $\epsilon\varphi(\alpha + \beta) = 1$, γιατί και η $\frac{5\pi}{4}$ έχει εφαπτομένη 1. Χρειάζεται **πάντα** να περιορίσουμε το διάστημα στο οποίο ανήκει η γωνία.



Στο mathgreece.com θα βρεις ένα συνοπτικό **τυπολόγιο τριγωνομετρίας** για εκτύπωση, καθώς και βίντεο με τις αποδείξεις των τύπων αθροίσματος. Είναι ιδανικό για να τους κατανοήσεις και να μην τους «παπαγαλίσεις»!

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 3.6

$$\sin(\alpha \pm \beta) \quad \sin \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) \quad \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) \quad \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

Προσοχή $\sin(\alpha + \beta) \neq \sin \alpha + \sin \beta!$ Για να βρούμε τη γωνία χρειάζεται και το διάστημα στο οποίο ανήκει

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 3.6

Δυσκολία: ★★☆☆ βασική ★★☆☆ μέτρια ★★☆☆ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- 1 ★★☆☆ Να υπολογίσετε τα $\sin 15^\circ$ και $\sin 75^\circ$.
- 2 ★★☆☆ Να υπολογίσετε το $\sin 105^\circ$.
- 3 ★★☆☆ Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: α) $\sin 80^\circ \sin 20^\circ + \sin 80^\circ \cos 20^\circ$ β) $\sin 50^\circ \sin 10^\circ + \sin 50^\circ \cos 10^\circ$.
- 4 ★★☆☆ Να υπολογίσετε την παράσταση $\frac{\sin 25^\circ + \sin 20^\circ}{1 - \sin 25^\circ \sin 20^\circ}$.
- 5 ★★☆☆ Αν $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ με $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ και $\sin \beta = -\frac{12}{13}$ με $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τα $\sin(\alpha - \beta)$ και $\sin(\alpha + \beta)$.
- 6 ★★☆☆ Να αποδείξετε ότι $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin x$.
- 7 ★★☆☆ Να αποδείξετε ότι $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$.
- 8 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $\sin x \sin \frac{\pi}{3} + \sin x \cos \frac{\pi}{3} = 1$.
- 9 ★★☆☆ Αν α, β είναι οξείες γωνίες με $\sin \alpha = 2$ και $\sin \beta = 3$, να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$.
- 10 ★★☆☆ Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ που δεν είναι ορθογώνιο, να αποδείξετε ότι $\sin A + \sin B + \sin \Gamma = \sin A \sin B \sin \Gamma$.
- 11 ★★☆☆ Να αποδείξετε ότι $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 • ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ 3.7

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί της Γωνίας 2α

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ▶ τους τύπους των $\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$, $\epsilon\varphi 2\alpha$,
- ▶ τους τύπους **αποτετραγωνισμού** και πώς βρίσκουμε τους αριθμούς της $\frac{\alpha}{2}$,
- ▶ πώς εκφράζουμε το $\eta\mu 2\alpha$ και το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ μέσω της $\epsilon\varphi \alpha$,
- ▶ εφαρμογές σε ταυτότητες, εξισώσεις και ακρότατα.

Οι τύποι της γωνίας 2α

Αν στους τύπους του αθροίσματος θέσουμε $\beta = \alpha$, παίρνουμε:

Ο ΤΥΠΟΙ ΔΙΠΛΑΣΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

$$\eta\mu 2\alpha = 2 \eta\mu \alpha \sigma\upsilon\nu \alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2 \alpha - \eta\mu^2 \alpha = 2 \sigma\upsilon\nu^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \eta\mu^2 \alpha$$

$$\epsilon\varphi 2\alpha = \frac{2 \epsilon\varphi \alpha}{1 - \epsilon\varphi^2 \alpha}$$

Απόδειξη

$\eta\mu 2\alpha = \eta\mu(\alpha + \alpha) = \eta\mu \alpha \sigma\upsilon\nu \alpha + \sigma\upsilon\nu \alpha \eta\mu \alpha = 2 \eta\mu \alpha \sigma\upsilon\nu \alpha$. Επίσης $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu \alpha \sigma\upsilon\nu \alpha - \eta\mu \alpha \eta\mu \alpha = \sigma\upsilon\nu^2 \alpha - \eta\mu^2 \alpha$. Αν αντικαταστήσουμε $\eta\mu^2 \alpha = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 \alpha$ παίρνουμε $2 \sigma\upsilon\nu^2 \alpha - 1$, και αν αντικαταστήσουμε $\sigma\upsilon\nu^2 \alpha = 1 - \eta\mu^2 \alpha$ παίρνουμε $1 - 2 \eta\mu^2 \alpha$.

Ο ΑΠΟΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Λύνοντας τις δύο τελευταίες μορφές του $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ ως προς $\sigma\upsilon\nu^2 \alpha$ και $\eta\mu^2 \alpha$:

$$\eta\mu^2 \alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu^2 \alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}, \quad \epsilon\varphi^2 \alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}.$$

Οι τύποι αυτοί «κατεβάζουν» το τετράγωνο σε διπλάσια γωνία.

Ο ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

Αν $\sigma\upsilon\nu \alpha \neq 0$:

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2 \epsilon\varphi \alpha}{1 + \epsilon\varphi^2 \alpha}, \quad \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1 - \epsilon\varphi^2 \alpha}{1 + \epsilon\varphi^2 \alpha}.$$

Απόδειξη

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}. \text{ Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με } \sigma\upsilon\nu^2\alpha \text{ και παίρνουμε}$$

$$\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi^2\alpha + 1}. \text{ Ομοίως } \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha} = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}.$$

💡 Μην «κολλάς» στο 2α

Οι τύποι ισχύουν για **κάθε** γωνία και το «μισό» της. Για παράδειγμα:

$$\eta\mu\alpha = 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu 4x = 1 - 2\eta\mu^2 2x, \quad \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}\eta\mu 2x, \quad 1 + \sigma\upsilon\nu x = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}.$$

❌ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | « $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha$ »

❌ Λάθος

$$\eta\mu 60^\circ = 2\eta\mu 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

✅ Σωστό

$$\eta\mu 60^\circ = 2\eta\mu 30^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

🔍 ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 3.7

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.7.1 – Υπολογισμός

Αν $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, να υπολογιστούν τα $\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$, $\varepsilon\varphi 2\alpha$.

ΛΥΣΗ

Στο 2ο τεταρτημόριο $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{4}{5}$. Τότε:

$$\eta\mu 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}, \quad \sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - 2 \cdot \frac{9}{25} = \frac{7}{25}, \quad \varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = -\frac{24}{7}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.7.2 – Μισή γωνία

Να υπολογιστεί το $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{8}$.

ΛΥΣΗ

Από τον αποτετραγωνισμό: $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$. Επειδή η $\frac{\pi}{8}$ είναι στο 1ο τεταρτημόριο, $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{8} > 0$, άρα

$$\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.7.3 – Ταυτότητα

Να αποδειχθεί ότι $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 2x} = \varepsilon\varphi x$.

ΛΥΣΗ

$$\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 2x} = \frac{1 - (1 - 2\eta\mu^2 x)}{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} = \frac{2\eta\mu^2 x}{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \varepsilon\varphi x.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Ποια μορφή του $\sin 2\alpha$ διαλέγω;

- ▶ Αν στην παράσταση υπάρχει **μόνο ημίτονο**, διαλέγουμε $\sin 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2 \alpha$.
- ▶ Αν υπάρχει **μόνο συνημίτονο**, διαλέγουμε $\sin 2\alpha = 2\sin^2 \alpha - 1$.
- ▶ Αν θέλουμε να φύγει το «1», χρησιμοποιούμε $1 + \sin 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$ ή $1 - \sin 2\alpha = 2\eta\mu^2 \alpha$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.7.4 – Εξίσωση με παραγοντοποίηση

Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu 2x = \sin x$.

ΛΥΣΗ

$$2\eta\mu x \sin x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\eta\mu x - 1) = 0:$$

- ▶ $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2},$
- ▶ $\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

(Συγκρίνε με το Παράδειγμα 3.5.5, όπου η ίδια εξίσωση λύθηκε αλλιώς. Τα σύνολα λύσεων είναι ίδια!)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.7.5 – Εξίσωση με «σωστή» μορφή του $\sin 2x$

Να λυθεί η εξίσωση $\sin 2x + 3\eta\mu x - 2 = 0$.

ΛΥΣΗ

Υπάρχει μόνο ημίτονο, άρα $\sin 2x = 1 - 2\eta\mu^2 x$:

$$1 - 2\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 1 \text{ ή } \eta\mu x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Άρα } x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.7.6 – Τύπος της τριπλάσιας γωνίας

Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu 3\alpha = 3\eta\mu \alpha - 4\eta\mu^3 \alpha$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \eta\mu 3\alpha &= \eta\mu(2\alpha + \alpha) = \eta\mu 2\alpha \sin \alpha + \sin 2\alpha \eta\mu \alpha = 2\eta\mu \alpha \sin^2 \alpha + (1 - 2\eta\mu^2 \alpha) \eta\mu \alpha \\ &= 2\eta\mu \alpha(1 - \eta\mu^2 \alpha) + \eta\mu \alpha - 2\eta\mu^3 \alpha = 3\eta\mu \alpha - 4\eta\mu^3 \alpha. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.7.7 – Ακρότατα

Να βρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της $f(x) = \eta\mu x \sin x$, καθώς και η περίοδός της.

ΛΥΣΗ

$f(x) = \frac{1}{2} \eta\mu 2x$. Επομένως η μέγιστη τιμή είναι $\frac{1}{2}$ (για $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$), η ελάχιστη είναι $-\frac{1}{2}$ (για $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$) και η περίοδος είναι $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.7.8 – Δύναμη 4

Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = \frac{3 + \sigma\upsilon\nu 4x}{4}$.

ΛΥΣΗ

$\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^2 - 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \frac{1}{2}(2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1 - \frac{1}{2}\eta\mu^2 2x$. Με αποτετραγωνισμό, $\eta\mu^2 2x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 4x}{2}$, άρα

$$\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = 1 - \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 4x}{4} = \frac{3 + \sigma\upsilon\nu 4x}{4}.$$



Οι τύποι της διπλάσιας γωνίας εμφανίζονται παντού: σε ταυτότητες, σε εξισώσεις, σε ακρότατα, και αργότερα στην Ανάλυση της Γ' Λυκείου! Στο mathgreece.com θα βρεις συλλογή ασκήσεων «εξετάσεων» με πλήρεις λύσεις σε βίντεο.

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 3.7

$\eta\mu 2\alpha$	$2\eta\mu \alpha \sigma\upsilon\nu \alpha = \frac{2\epsilon\varphi \alpha}{1+\epsilon\varphi^2 \alpha}$
$\sigma\upsilon\nu 2\alpha$	$\sigma\upsilon\nu^2 \alpha - \eta\mu^2 \alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2 \alpha - 1 = 1 - 2\eta\mu^2 \alpha = \frac{1-\epsilon\varphi^2 \alpha}{1+\epsilon\varphi^2 \alpha}$
$\epsilon\varphi 2\alpha$	$\frac{2\epsilon\varphi \alpha}{1-\epsilon\varphi^2 \alpha}$
Αποτετραγωνισμός	$\eta\mu^2 \alpha = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu^2 \alpha = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
Χρήσιμα	$1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2 \alpha, \quad 1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\eta\mu^2 \alpha, \quad (\eta\mu \alpha \pm \sigma\upsilon\nu \alpha)^2 = 1 \pm \eta\mu 2\alpha$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 3.7

Δυσκολία: ★★☆☆ βασική ★★☆☆ μέτρια ★★☆☆ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- 1 Αν $\sigma\upsilon\nu \alpha = \frac{12}{13}$ και $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, να υπολογίσετε τα $\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$, $\epsilon\varphi 2\alpha$.
★★★
- 2 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: α) $2\eta\mu 15^\circ \sigma\upsilon\nu 15^\circ$ β) $\frac{\sigma\upsilon\nu^2 22,5^\circ - \eta\mu^2 22,5^\circ}{1 - \epsilon\varphi^2 22,5^\circ}$ γ)
★★★
- 3 Να αποδείξετε ότι $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1 + \eta\mu 2x$.
★★★
- 4 Να υπολογίσετε το $\eta\mu \frac{\pi}{12}$ με τη βοήθεια του αποτετραγωνισμού.
★★★
- 5 Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu^4 x - \eta\mu^4 x = \sigma\upsilon\nu 2x$.
★★★
- 6 Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu 2x} = \epsilon\varphi x$.
★★★
- 7 Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu x$ χρησιμοποιώντας τον τύπο του $\sigma\upsilon\nu 2x$.
★★★

8
★★★Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu 2x = \sqrt{3} \eta\mu x$.9
★★★Αν $\epsilon\varphi x = 2$, να υπολογίσετε τα $\eta\mu 2x$ και $\sigma\upsilon\nu 2x$ χωρίς να βρείτε τα $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$.10
★★★Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4 \sigma\upsilon\nu^3 \alpha - 3 \sigma\upsilon\nu \alpha$.11
★★★Δίνεται η $f(x) = 4 \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 1$. Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.12
★★★Να αποδείξετε ότι $\frac{1 + \eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x} = \frac{1 + \epsilon\varphi x}{1 - \epsilon\varphi x}$ (όπου ορίζονται).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 • ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ 3.8

Μετασχηματισμοί Τριγωνομετρικών Παραστάσεων

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ▶ πώς μετατρέπουμε ένα **γινόμενο** τριγωνομετρικών αριθμών σε **άθροισμα**,
- ▶ πώς μετατρέπουμε ένα **άθροισμα** (ή διαφορά) σε **γινόμενο**,
- ▶ πώς οι μετασχηματισμοί αυτοί λύνουν εξισώσεις και αποδεικνύουν ταυτότητες.

|| Από γινόμενο σε άθροισμα

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις ισότητες $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \eta\mu\beta$ και $\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \eta\mu\beta$, παίρνουμε $2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta)$. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτουν και οι υπόλοιποι τύποι.

➡ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΣΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ

$$\begin{aligned} 2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta &= \eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta) \\ 2\sigma\upsilon\nu\alpha \eta\mu\beta &= \eta\mu(\alpha + \beta) - \eta\mu(\alpha - \beta) \\ 2\sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta &= \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) \\ 2\eta\mu\alpha \eta\mu\beta &= \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

|| Από άθροισμα σε γινόμενο

Αν στους προηγούμενους τύπους θέσουμε $\alpha + \beta = A$ και $\alpha - \beta = B$, δηλαδή $\alpha = \frac{A+B}{2}$ και $\beta = \frac{A-B}{2}$, παίρνουμε τους πολύ χρήσιμους τύπους:

➡ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

$$\begin{aligned} \eta\mu A + \eta\mu B &= 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} & \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B &= 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} \\ \eta\mu A - \eta\mu B &= 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} & \sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B &= -2\eta\mu \frac{A+B}{2} \eta\mu \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$



Πότε τους χρησιμοποιώ

- ▶ Σε εξισώσεις της μορφής $\eta\mu A \pm \eta\mu B = 0$ ή $\sigma\upsilon\nu A \pm \sigma\upsilon\nu B = 0$: η μετατροπή σε γινόμενο δίνει «γινόμενο = 0».

- ▶ Σε κλάσματα όπως $\frac{\eta\mu 3x + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu x}$, όπου μετά τη μετατροπή απλοποιούνται κοινοί παράγοντες.
- ▶ Σε τρίγωνα, μαζί με τη σχέση $A + B + \Gamma = \pi$.

❌ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Το πρόσημο στη διαφορά συνημιτόνων

❌ Λάθος

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2 \eta\mu \frac{A+B}{2} \eta\mu \frac{A-B}{2}$$

✅ Σωστό

$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = -2 \eta\mu \frac{A+B}{2} \eta\mu \frac{A-B}{2}$. Έλεγχος:
για $A = 0$, $B = \pi$, το πρώτο μέλος είναι 2 και
το δεύτερο $-2 \eta\mu \frac{\pi}{2} \eta\mu \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$ ✅

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 3.8

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.8.1 – Υπολογισμοί χωρίς πίνακες

Να υπολογιστούν: α) $2 \eta\mu 75^\circ \sigma\upsilon\nu 15^\circ$ β) $\eta\mu 75^\circ + \eta\mu 15^\circ$ γ) $\sigma\upsilon\nu 75^\circ - \sigma\upsilon\nu 15^\circ$.

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \eta\mu(75^\circ + 15^\circ) + \eta\mu(75^\circ - 15^\circ) = \eta\mu 90^\circ + \eta\mu 60^\circ = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\beta) 2 \eta\mu 45^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\gamma) -2 \eta\mu 45^\circ \eta\mu 30^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.8.2 – Απλοποίηση κλάσματος

Να αποδειχθεί ότι $\frac{\eta\mu 3x + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu x} = \epsilon\phi 2x$.

ΛΥΣΗ

$$\frac{2 \eta\mu 2x \sigma\upsilon\nu x}{2 \sigma\upsilon\nu 2x \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x} = \epsilon\phi 2x.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.8.3 – Εξίσωση

Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu 3x + \eta\mu x = 0$.

ΛΥΣΗ

$$2 \eta\mu 2x \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x = 0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x = 0.$$

$$\text{▶ } \eta\mu 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \kappa\pi \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2}.$$

$$\text{▶ } \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}. \text{ Οι λύσεις αυτές περιέχονται ήδη στις } \frac{\kappa\pi}{2} \text{ (για περιττό } \kappa).$$

$$\text{Άρα } x = \frac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.8.4 – Εξίσωση με τρεις όρους

Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 5x + \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 3x$.

ΛΥΣΗ

$$2 \sigma\upsilon\nu 3x \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu 3x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 3x(2 \sigma\upsilon\nu 2x - 1) = 0:$$

- ▶ $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6},$
- ▶ $\sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Ομαδοποίηση

Όταν έχουμε τρεις ή περισσότερους όρους, **ομαδοποιούμε** τους όρους με γωνίες που έχουν «συμμετρικό» άθροισμα. Για παράδειγμα, $\sin 5x$ με $\sin x$ (άθροισμα $6x$, ημιάθροισμα $3x$), ώστε να εμφανιστεί κοινός παράγοντας με τον τρίτο όρο $\sin 3x$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.8.5 – Τριγωνομετρία στο τρίγωνο

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ να αποδειχθεί ότι

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{\Gamma}{2}.$$

ΛΥΣΗ

Ισχύει $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma}{2}$, άρα $\eta\mu \frac{A+B}{2} = \sin \frac{\Gamma}{2}$ και $\sin \frac{A+B}{2} = \eta\mu \frac{\Gamma}{2}$. Τότε:

$$\begin{aligned} \eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma &= 2 \eta\mu \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} + 2 \eta\mu \frac{\Gamma}{2} \sin \frac{\Gamma}{2} = 2 \sin \frac{\Gamma}{2} \left[\sin \frac{A-B}{2} + \sin \frac{A+B}{2} \right] \\ &= 2 \sin \frac{\Gamma}{2} \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{\Gamma}{2}. \end{aligned}$$



Οι τύποι μετασχηματισμού είναι πολλοί και μοιάζουν μεταξύ τους. Στο mathgreece.com θα βρεις ένα παιχνίδι αντιστοίχισης για να τους μάθεις παίζοντας, καθώς και λυμένες ασκήσεις σε βίντεο.

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 3.8

$\eta\mu A \pm \eta\mu B$	$2 \eta\mu \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$\sin A + \sin B$	$2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$\sin A - \sin B$	$-2 \eta\mu \frac{A+B}{2} \eta\mu \frac{A-B}{2}$
Γινόμενα	$2 \eta\mu \alpha \sin \beta, 2 \sin \alpha \sin \beta, 2 \eta\mu \alpha \eta\mu \beta \rightarrow$ αθροίσματα ημιτόνων / συνημιτόνων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 3.8

Δυσκολία: ★★☆☆ βασική ★★★ μέτρια ★★★★★ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- 1 Να γράψετε ως άθροισμα τα γινόμενα: α) $2 \eta\mu 3x \sin x$ β) $2 \sin 5x \sin 2x$.
★★★
- 2 Να υπολογίσετε τη διαφορά $\eta\mu 105^\circ - \eta\mu 15^\circ$.
★★★
- 3 Να υπολογίσετε το άθροισμα $\sin 105^\circ + \sin 15^\circ$.
★★★

- 4 ★★ ★ Να αποδείξετε ότι $\frac{\sin x - \sin 3x}{\eta\mu 3x - \eta\mu x} = \epsilon\varphi 2x$.
- 5 ★★ ★ Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu 5x - \eta\mu x = 0$.
- 6 ★★ ★ Να λύσετε την εξίσωση $\sin 3x + \sin x = 0$.
- 7 ★★ ★ Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x + \eta\mu 3x + \eta\mu 5x = \eta\mu 3x (1 + 2 \sin 2x)$.
- 8 ★★ ★ Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 20^\circ \eta\mu 40^\circ \eta\mu 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$.
- 9 ★★ ★ Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ να αποδείξετε ότι $\sin A + \sin B + \sin \Gamma = 1 + 4 \eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2}$.
- 10 ★★ ★ Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x + \eta\mu 2x + \eta\mu 3x = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 • ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ 3.9

Η Συνάρτηση $f(x) = \alpha \eta\mu x + \beta \sigma\upsilon\nu x$

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ▶ ότι κάθε παράσταση $\alpha \eta\mu x + \beta \sigma\upsilon\nu x$ γράφεται στη μορφή $\rho \eta\mu(x + \varphi)$,
- ▶ πώς βρίσκουμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της,
- ▶ πώς λύνονται οι εξισώσεις $\alpha \eta\mu x + \beta \sigma\upsilon\nu x = \gamma$ και τότε έχουν λύση.

Η βασική πρόταση

Πολλά φυσικά φαινόμενα, όπως η επαλληλία δύο ταλαντώσεων, οδηγούν σε συναρτήσεις όπως η $f(x) = \sqrt{3} \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$. Η εντυπωσιακή διαπίστωση είναι ότι το άθροισμα αυτό είναι **πάλι ημιτονοειδής συνάρτηση!**

Η ΜΟΡΦΗ $\rho \eta\mu(x + \varphi)$

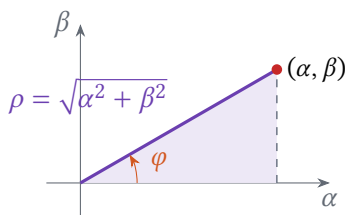
Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί, όχι και οι δύο μηδέν, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \eta\mu x + \beta \sigma\upsilon\nu x = \rho \eta\mu(x + \varphi), \quad \text{όπου} \quad \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu \varphi = \frac{\alpha}{\rho}, \quad \eta\mu \varphi = \frac{\beta}{\rho}.$$

Απόδειξη

Επειδή $\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\rho}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\rho^2} = 1$, το σημείο $\left(\frac{\alpha}{\rho}, \frac{\beta}{\rho}\right)$ ανήκει στον τριγωνομετρικό κύκλο. Υπάρχει λοιπόν γωνία φ με $\sigma\upsilon\nu \varphi = \frac{\alpha}{\rho}$ και $\eta\mu \varphi = \frac{\beta}{\rho}$. Τότε

$$\alpha \eta\mu x + \beta \sigma\upsilon\nu x = \rho (\sigma\upsilon\nu \varphi \eta\mu x + \eta\mu \varphi \sigma\upsilon\nu x) = \rho \eta\mu(x + \varphi).$$



Ο ρ είναι η απόσταση του σημείου (α, β) από την αρχή O , και η φ είναι η γωνία που σχηματίζει το $O(\alpha, \beta)$ με τον ημιάξονα Ox . Έτσι βρίσκουμε γρήγορα τα ρ και φ !

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

Για την $f(x) = \alpha \eta\mu x + \beta \sigma\upsilon\nu x = \rho \eta\mu(x + \varphi)$:

- ▶ μέγιστη τιμή $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, ελάχιστη τιμή $-\rho = -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$,
- ▶ περίοδος 2π ,
- ▶ η γραφική της παράσταση προκύπτει από την $y = \rho \eta\mu x$ με οριζόντια μετατόπιση κατά $|\varphi|$,
- ▶ η εξίσωση $\alpha \eta\mu x + \beta \sigma\upsilon\nu x = \gamma$ έχει λύση **αν και μόνο αν** $|\gamma| \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, δηλαδή $\gamma^2 \leq \alpha^2 + \beta^2$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 3.9

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.9.1 – Μετατροπή και γραφική παράσταση

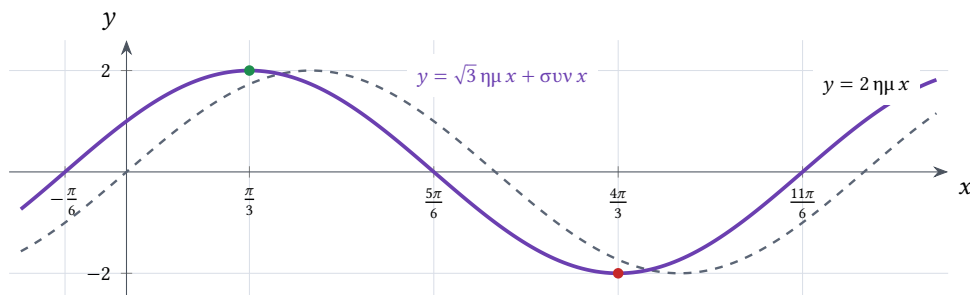
Να γραφτεί η $f(x) = \sqrt{3}\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ στη μορφή $\rho\eta\mu(x + \varphi)$ και να σχεδιαστεί η γραφική της παράσταση.

ΛΥΣΗ

$\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = 1$, οπότε $\rho = \sqrt{3+1} = 2$. Επίσης $\sigma\upsilon\nu \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\eta\mu \varphi = \frac{1}{2}$, άρα $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Επομένως

$$f(x) = 2\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Η C_f προκύπτει από την $y = 2\eta\mu x$ με μετατόπιση $\frac{\pi}{6}$ προς τα αριστερά. Έχει μέγιστο 2 για $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, δηλαδή $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.9.2 – Αρνητικός συντελεστής

Να γραφτεί η $g(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ στη μορφή $\rho\eta\mu(x + \varphi)$.

ΛΥΣΗ

$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\sigma\upsilon\nu \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\eta\mu \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Η φ είναι στο 4ο τεταρτημόριο, οπότε $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Επομένως

$$g(x) = \sqrt{2}\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

⚠ Η ΓΩΝΙΑ Φ ΘΕΛΕΙ ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ ΠΡΟΣΗΜΑ

Για να βρούμε τη φ χρειαζόμαστε **και** το $\sigma\upsilon\nu \varphi$ **και** το $\eta\mu \varphi$. Μόνο ένα από τα δύο δεν αρκεί, γιατί υπάρχουν δύο γωνίες στο $[0, 2\pi)$ με το ίδιο ημίτονο. Τα πρόσημα των α και β καθορίζουν το τεταρτημόριο της φ .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.9.3 – Ακρότατα

Να βρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της $f(x) = 3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x$.

ΛΥΣΗ

$\rho = \sqrt{9+16} = 5$. Άρα η μέγιστη τιμή είναι 5 και η ελάχιστη -5 . Δεν χρειάζεται καν να βρούμε τη φ !

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Εξίσωση $\alpha \etaμ x + \beta \sigmaυν x = \gamma$

α) Ελέγχουμε αν $\gamma^2 \leq \alpha^2 + \beta^2$. Αν όχι, η εξίσωση είναι αδύνατη.

β) Γράφουμε το πρώτο μέλος ως $\rho \etaμ(x + \varphi)$. Η εξίσωση γίνεται $\etaμ(x + \varphi) = \frac{\gamma}{\rho}$.

γ) Τη λύνουμε ως βασική τριγωνομετρική εξίσωση.

Εναλλακτικά: διαιρούμε με α , θέτουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \epsilon\varphi \theta$ και γράφουμε $\etaμ x + \epsilon\varphi \theta \sigmaυν x = \frac{\etaμ(x+\theta)}{\sigmaυν \theta}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.9.4 – Επίλυση εξίσωσης

Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{3} \etaμ x + \sigmaυν x = 1$.

ΛΥΣΗ

Από το προηγούμενο παράδειγμα, η εξίσωση γράφεται $2 \etaμ\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow \etaμ\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \etaμ \frac{\pi}{6}$:

- $x + \frac{\pi}{6} = 2κπ + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2κπ$, ή
- $x + \frac{\pi}{6} = 2κπ + \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2κπ + \frac{2\pi}{3}$, $κ \in \mathbb{Z}$.

Επαλήθευση για $x = \frac{2\pi}{3}$: $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$ ✓

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.9.5 – Ύπαρξη λύσης

Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει λύση η εξίσωση $3 \etaμ x + 4 \sigmaυν x = \lambda$;

ΛΥΣΗ

Πρέπει $\lambda^2 \leq 3^2 + 4^2 = 25$, δηλαδή $-5 \leq \lambda \leq 5$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | « $\etaμ x + \sigmaυν x \leq 2$ »

Πολλοί σκέφτονται: «αφού $\etaμ x \leq 1$ και $\sigmaυν x \leq 1$, η μέγιστη τιμή του $\etaμ x + \sigmaυν x$ είναι 2». Όμως το ημίτονο και το συνημίτονο δεν γίνονται ταυτόχρονα ίσα με 1. Η σωστή μέγιστη τιμή είναι $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.



Η μετατροπή $\alpha \etaμ x + \beta \sigmaυν x = \rho \etaμ(x + \varphi)$ είναι ένα «μαγικό» εργαλείο. Δες στο mathgreece.com το applet όπου προσθέτεις δύο κύματα και βλέπεις να προκύπτει ένα νέο κύμα με πλάτος ρ και φάση φ !

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 3.9

Μετατροπή	$\alpha \etaμ x + \beta \sigmaυν x = \rho \etaμ(x + \varphi)$, $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\sigmaυν \varphi = \frac{\alpha}{\rho}$, $\etaμ \varphi = \frac{\beta}{\rho}$
Ακρότατα	μέγιστο $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, ελάχιστο $-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
Εξίσωση	$\alpha \etaμ x + \beta \sigmaυν x = \gamma$ έχει λύση $\Leftrightarrow \gamma^2 \leq \alpha^2 + \beta^2$
Περίοδος	2π (για τη $\alpha \etaμ \omega x + \beta \sigmaυν \omega x$: $\frac{2\pi}{\omega}$)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 3.9

Δυσκολία: ★★ ★ βασική ★★ ★ μέτρια ★★ ★ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- 1 Να γράψετε την $f(x) = \etaμ x + \sqrt{3} \sigmaυν x$ στη μορφή $\rho \etaμ(x + \varphi)$.
★★★
- 2 Να γράψετε την $g(x) = \sigmaυν x - \etaμ x$ στη μορφή $\rho \etaμ(x + \varphi)$.
★★★
- 3 Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $f(x) = 5 \etaμ x - 12 \sigmaυν x$.
★★★
- 4 Να λύσετε την εξίσωση $\etaμ x - \sqrt{3} \sigmaυν x = 1$.
★★★
- 5 Να λύσετε την εξίσωση $\etaμ x + \sqrt{3} \sigmaυν x = \sqrt{2}$.
★★★
- 6 Για ποιες τιμές του λ έχει λύση η εξίσωση $2 \etaμ x + \sigmaυν x = \lambda$;
★★★
- 7 Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x) = 3 \etaμ x + 4 \sigmaυν x + 7$.
★★★
- 8 Να λύσετε την εξίσωση $\etaμ x + \sigmaυν x = 1$.
★★★
- 9 Δίνεται η $f(x) = \sqrt{3} \etaμ 2x + \sigmaυν 2x$. Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη τιμή της και τις θέσεις στις οποίες την παίρνει.
★★★

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 • ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ 3.10

Επίλυση Τριγώνου

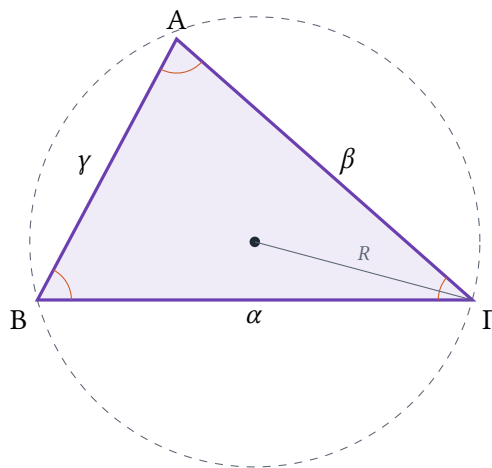
3.10

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- τον νόμο των ημιτόνων και τον νόμο των συνημιτόνων,
- πώς υπολογίζουμε τα στοιχεία ενός τριγώνου από τρία γνωστά στοιχεία του,
- τον τύπο του εμβαδού $E = \frac{1}{2}\beta\gamma \eta\mu A$ και εφαρμογές σε πραγματικά προβλήματα.

Συμβολισμοί

Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ συμβολίζουμε με A, B, Γ τις γωνίες του και με α, β, γ τις πλευρές που βρίσκονται απέναντι από αυτές. Με R συμβολίζουμε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου και με E το εμβαδόν.



Ο νόμος των ημιτόνων

Ο ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΗΜΙΤΟΝΩΝ

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$$

Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών.

Απόδειξη

Το εμβαδόν του τριγώνου γράφεται $E = \frac{1}{2}\gamma \cdot u_\gamma$, όπου u_γ το ύψος από την κορυφή Γ . Στο ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζει το ύψος έχουμε $u_\gamma = \beta \eta\mu A$ (αυτό ισχύει και όταν η A είναι αμβλεία, αφού $\eta\mu(180^\circ - A) = \eta\mu A$). Άρα $E = \frac{1}{2}\beta\gamma \eta\mu A$, και με τον ίδιο τρόπο $E = \frac{1}{2}\alpha\gamma \eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta \eta\mu \Gamma$. Εξισώνοντας και

διαιρώντας με $\frac{1}{2}\alpha\beta\gamma$ παίρνουμε $\frac{\eta\mu A}{\alpha} = \frac{\eta\mu B}{\beta} = \frac{\eta\mu \Gamma}{\gamma}$. Η ισότητα με το $2R$ προκύπτει από το εγγεγραμμένο τρίγωνο που έχει μία πλευρά διάμετρο του κύκλου.

🔑 ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma \eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha \eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta \eta\mu \Gamma$$

Το εμβαδόν ισούται με το μισό του γινομένου δύο πλευρών επί το ημίτονο της γωνίας που περιέχουν.

|| Ο νόμος των συνημιτόνων

🔑 ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A$$

και ανάλογα $\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha \cos B$, $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \Gamma$.

Απόδειξη

Τοποθετούμε το τρίγωνο σε σύστημα αξόνων με $A(0,0)$, $B(\gamma,0)$ και την Γ στο άνω ημιεπίπεδο. Από τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών, $\Gamma(\beta \cos A, \beta \sin A)$. Τότε

$$\alpha^2 = (B\Gamma)^2 = (\beta \cos A - \gamma)^2 + (\beta \sin A)^2 = \beta^2(\cos^2 A + \sin^2 A) - 2\beta\gamma \cos A + \gamma^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A.$$

💡 Γενίκευση του Πυθαγορείου

Αν $A = 90^\circ$, τότε $\cos A = 0$ και ο νόμος γίνεται $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, δηλαδή το Πυθαγόρειο θεώρημα! Από τον νόμο προκύπτει επίσης:

$$\cos A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma},$$

οπότε: A οξεία $\Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, A ορθή $\Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, A αμβλεία $\Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$.

|| Οι περιπτώσεις επίλυσης τριγώνου

«Επιλύω ένα τρίγωνο» σημαίνει ότι, από τρία γνωστά κύρια στοιχεία του (με ένα τουλάχιστον να είναι πλευρά), βρίσκω τα υπόλοιπα.

Γνωστά στοιχεία	Τι κάνουμε	Λύσεις
Μία πλευρά, δύο γωνίες	Τρίτη γωνία από το $A + B + \Gamma = 180^\circ$, μετά νόμος ημιτόνων	μία
Δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία	Νόμος συνημιτόνων για την τρίτη πλευρά, μετά νόμος συνημιτόνων ή ημιτόνων για τις γωνίες	μία
Τρεις πλευρές	Νόμος συνημιτόνων για τις γωνίες	μία (αν ισχύει η τριγωνική ανισότητα)
Δύο πλευρές και μη περιεχόμενη γωνία	Νόμος ημιτόνων: προσοχή, μπορεί να υπάρχουν δύο γωνίες με το ίδιο ημίτονο!	καμία, μία ή δύο

! Η «ΑΜΦΙΣΗΜΗ» ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Όταν από τον νόμο ημιτόνων βρίσκουμε π.χ. $\eta\mu B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, τότε $B = 45^\circ$ ή $B = 135^\circ$. Πρέπει να ελέγξουμε και τις δύο τιμές: δεκτή είναι κάθε τιμή για την οποία $A + B < 180^\circ$. Ένα χρήσιμο κριτήριο: απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 3.10

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.10.1 – Πλευρά και δύο γωνίες

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\alpha = 10$, $B = 45^\circ$ και $\Gamma = 75^\circ$. Να βρεθούν τα A , β , γ .

ΛΥΣΗ

$A = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$. Από τον νόμο των ημιτόνων:

$$\beta = \frac{\alpha \eta\mu B}{\eta\mu A} = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{6}}{3} \approx 8,16,$$

$$\gamma = \frac{\alpha \eta\mu \Gamma}{\eta\mu A} = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{6}}{3} \approx 11,15.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.10.2 – Δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\beta = 5$, $\gamma = 8$ και $A = 60^\circ$. Να βρεθούν η πλευρά α και το $\sin B$.

ΛΥΣΗ

$$\alpha^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 89 - 40 = 49 \Leftrightarrow \alpha = 7.$$

$$\sin B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} = \frac{49 + 64 - 25}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{88}{112} = \frac{11}{14}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.10.3 – Τρεις πλευρές

Ένα τρίγωνο έχει πλευρές $\alpha = 7$, $\beta = 5$, $\gamma = 3$. Να βρεθεί η γωνία A και το είδος του τριγώνου.

ΛΥΣΗ

$$\cos A = \frac{25 + 9 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 120^\circ.$$

Το τρίγωνο είναι **αμβλυγώνιο**. Αυτό φαίνεται και από το ότι $\alpha^2 = 49 > 34 = \beta^2 + \gamma^2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.10.4 – Η αμφίσημη περίπτωση

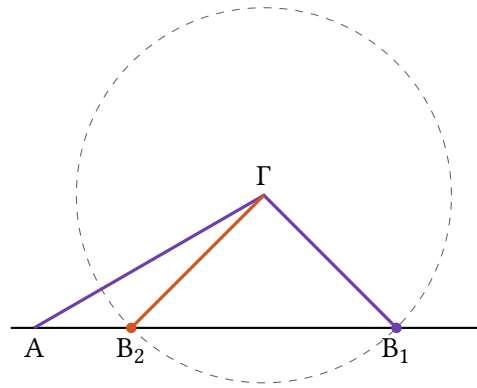
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A = 30^\circ$, $\alpha = 4$ και $\beta = 4\sqrt{2}$. Να βρεθούν οι γωνίες B και Γ .

ΛΥΣΗ

Από τον νόμο ημιτόνων: $\eta\mu B = \frac{\beta \eta\mu A}{\alpha} = \frac{4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα $B = 45^\circ$ ή $B = 135^\circ$.

- ▶ $B = 45^\circ$: $\Gamma = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$. ✓
- ▶ $B = 135^\circ$: $\Gamma = 180^\circ - 30^\circ - 135^\circ = 15^\circ$. ✓

Υπάρχουν λοιπόν **δύο** τρίγωνα με τα δοσμένα στοιχεία (σχήμα: ο κύκλος κέντρου Γ και ακτίνας α τέμνει την ημιευθεία AB σε δύο σημεία).



✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Χάνω τη δεύτερη λύση

Από την $\eta\mu B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ δεν προκύπτει μόνο ότι $B = 45^\circ$. Στο τρίγωνο οι γωνίες παίρνουν τιμές στο $(0^\circ, 180^\circ)$, όπου δύο παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο. Αντίθετα, από το **συνημίτονο** η γωνία προσδιορίζεται μονοσήμαντα. Γι' αυτό, όταν μπορούμε, βρίσκουμε τις γωνίες με τον νόμο των συνημιτόνων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.10.5 – Εφαρμογή: απόσταση πάνω από λίμνη

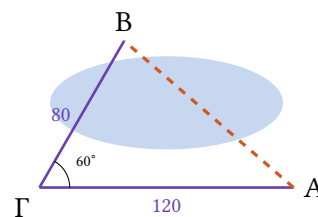
Για να μετρήσουμε την απόσταση δύο σημείων A και B στις απέναντι όχθες μιας λίμνης, επιλέγουμε ένα σημείο Γ στη στεριά. Μετράμε $\Gamma A = 120$ m, $\Gamma B = 80$ m και $\widehat{A\Gamma B} = 60^\circ$. Πόση είναι η απόσταση AB ;

ΛΥΣΗ

Με τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$:

$$(AB)^2 = 120^2 + 80^2 - 2 \cdot 120 \cdot 80 \cdot \frac{1}{2} = 14400 + 6400 - 9600 = 11200.$$

$$\text{Άρα } (AB) = \sqrt{11200} = 40\sqrt{7} \approx 105,8 \text{ m.}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.10.6 – Εμβαδόν και ακτίνα R

- α) Να βρεθεί το εμβαδόν τριγώνου με $\beta = 6$, $\gamma = 10$ και $A = 150^\circ$.
 β) Σε τρίγωνο είναι $\alpha = 6$ και $A = 30^\circ$. Να βρεθεί η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου.

ΛΥΣΗ

α) $E = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \eta\mu 150^\circ = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15$. β) $2R = \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{6}{1/2} = 12$, άρα $R = 6$.



Η επίλυση τριγώνου έχει άμεσες εφαρμογές στην τοπογραφία, στη ναυσιπλοία και στην αστρονομία. Στο mathgreece.com θα βρεις προβλήματα από την πραγματική ζωή λυμένα βήμα βήμα σε βίντεο, καθώς και ένα συνοπτικό τυπολόγιο ολόκληρου του κεφαλαίου της Τριγωνομετρίας.

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 3.10

Νόμος ημιτόνων	$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$
Νόμος συνημιτόνων	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A$, $\cos A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$
Εμβαδόν	$E = \frac{1}{2}\beta\gamma \eta\mu A$
Είδος γωνίας	$\alpha^2 \geq \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow A$ αμβλεία / οξεία
Αμφίσκημη πτώση	περί- από το ημίτονο: έλεγχος και της παραπληρωματικής γωνίας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 3.10

Δυσκολία: ★★☆☆ βασική ★★★ μέτρια ★★★★★ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- 1 Σε τρίγωνο ABΓ είναι $B = 60^\circ$, $\Gamma = 45^\circ$ και $\beta = 6$. Να βρείτε τη γωνία A και τις πλευρές γ , α . ★★☆☆
- 2 Σε τρίγωνο είναι $\beta = 3$, $\gamma = 5$ και $A = 120^\circ$. Να βρείτε την πλευρά α . ★★☆☆
- 3 Ένα τρίγωνο έχει πλευρές 5, 7, 8. Να βρείτε τη γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά 7. ★★☆☆
- 4 Να βρείτε το εμβαδόν τριγώνου με $\beta = 8$, $\gamma = 5$ και $A = 30^\circ$. ★★☆☆
- 5 Να εξετάσετε αν το τρίγωνο με πλευρές 6, 7, 10 είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο. ★★☆☆
- 6 Σε τρίγωνο είναι $\alpha = 10$ και $A = 45^\circ$. Να βρείτε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου. ★★☆☆
- 7 Να βρείτε πόσα τρίγωνα υπάρχουν σε κάθε περίπτωση και να υπολογίσετε τις γωνίες τους:
 α) $A = 45^\circ$, $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{3}$ β) $A = 60^\circ$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$. ★★☆☆
- 8 Δύο πλοία αναχωρούν ταυτόχρονα από ένα λιμάνι. Το ένα κινείται με 20 km/h και το άλλο με 30 km/h, σε πορείες που σχηματίζουν γωνία 60° . Πόσο απέχουν μετά από 2 ώρες; ★★☆☆

9
★★★

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\alpha = \beta \sin \Gamma + \gamma \sin B$.

10
★★★

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$. Να βρείτε τη γωνία A .

11
★★★

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\eta\mu A = 2 \eta\mu B \sin \Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

4.1 Πολυώνυμα

4.2 Διαίρεση πολυωνύμων

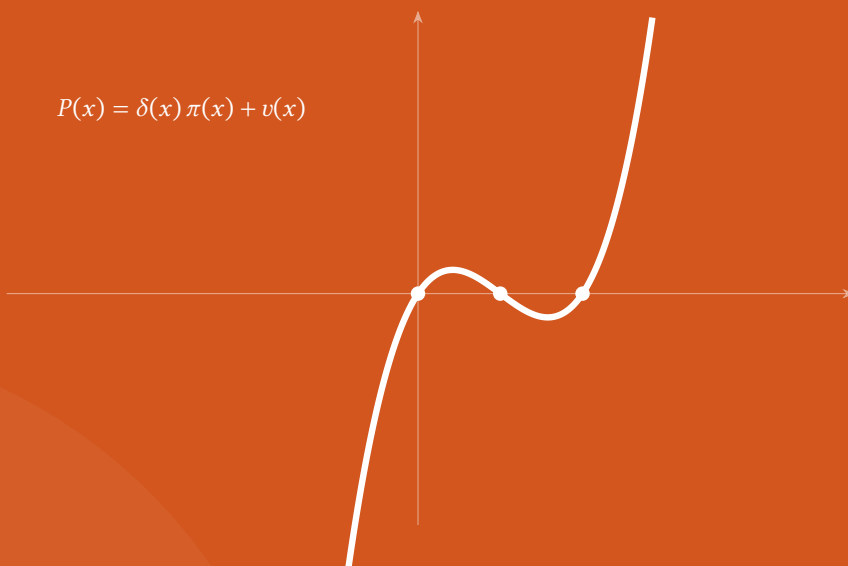
4.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

4.4 Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές Εξισώσεις

Από τη Γ' Γυμνασίου ξέρεις να λύνεις εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού. Τι γίνεται όμως με μια εξίσωση όπως η $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$; Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε συστηματικά τα **πολυώνυμα**: πώς τα διαιρούμε, πώς βρίσκουμε τις ρίζες τους, πώς τα **παραγοντοποιούμε**. Με τα εργαλεία αυτά λύνουμε εξισώσεις και ανισώσεις κάθε βαθμού, καθώς και κλασματικές και άρρητες εξισώσεις.

$$P(x) = \delta(x) \pi(x) + v(x)$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 • ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΜΑΘΗΜΑ 4.1

Πολυώνυμα

4.1

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ▶ τι είναι πολυώνυμο, βαθμός, συντελεστές, σταθερός όρος,
- ▶ πότε δύο πολυώνυμα είναι ίσα και πότε ένα πολυώνυμο είναι το μηδενικό,
- ▶ τι είναι τιμή και ρίζα πολυωνύμου, και πώς κάνουμε πράξεις με πολυώνυμα.

Βασικές έννοιες

ΟΡΙΣΜΟΣ | Πολυώνυμο

Μονώνυμο του x λέγεται κάθε παράσταση της μορφής ax^v , όπου $a \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{N}$. **Πολυώνυμο** του x λέγεται κάθε άθροισμα μονωνύμων:

$$P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

- ▶ Οι αριθμοί $a_v, \dots, a_1, a_0$ λέγονται **συντελεστές** και ο a_0 λέγεται **σταθερός όρος**.
- ▶ Τα μονώνυμα $a_k x^k$ λέγονται **όροι** του πολυωνύμου.
- ▶ Τα πολυώνυμα της μορφής a_0 (π.χ. 5, -2) λέγονται **σταθερά**, και το 0 λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο**.

ΟΡΙΣΜΟΣ | Βαθμός

Βαθμός ενός μη μηδενικού πολυωνύμου είναι ο **μεγαλύτερος εκθέτης** του x που έχει **μη μηδενικό** συντελεστή. Ο συντελεστής αυτός λέγεται **μεγιστοβάθμιος**.

- ▶ Κάθε σταθερό μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0.
- ▶ Για το μηδενικό πολυώνυμο **δεν ορίζεται** βαθμός.

$$P(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{μεγιστοβάθμιος} \\ \text{συντελεστής}}}{-2} x^{\underset{\substack{\swarrow \\ \text{βαθμός } 4}}{4}} + 0x^3 + 5x^2 - x + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{σταθερός όρος}}}{7}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ | Ισότητα πολυωνύμων

Δύο πολυώνυμα λέγονται **ίσα** όταν έχουν τον ίδιο βαθμό και **ίσους τους συντελεστές των ομοβάθμιων όρων**. Ειδικότερα, ένα πολυώνυμο είναι το **μηδενικό** αν και μόνο αν **όλοι οι συντελεστές του είναι μηδέν**.

ΟΡΙΣΜΟΣ | Τιμή και ρίζα

Τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για $x = \rho$ λέγεται ο αριθμός $P(\rho)$ που προκύπτει αν βάλουμε όπου x το ρ . Αν $P(\rho) = 0$, ο ρ λέγεται **ρίζα** του $P(x)$.

Δύο «δωρεάν» τιμές

- ▶ $P(0) = \alpha_0$: η τιμή στο 0 είναι ο **σταθερός όρος**.
- ▶ $P(1) = \alpha_n + \dots + \alpha_1 + \alpha_0$: η τιμή στο 1 είναι το **άθροισμα των συντελεστών**.

Πράξεις με πολυώνυμα

Προσθέτουμε, αφαιρούμε και πολλαπλασιάζουμε πολυώνυμα με τους γνωστούς κανόνες της Άλγεβρας (επιμεριστική ιδιότητα, αναγωγή ομοίων όρων).

ΒΑΘΜΟΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Αν $P(x)$ και $Q(x)$ είναι μη μηδενικά πολυώνυμα, τότε:

- ▶ ο βαθμός του γινομένου $P(x) \cdot Q(x)$ είναι **ίσος με το άθροισμα** των βαθμών τους,
- ▶ ο βαθμός του αθροίσματος $P(x) + Q(x)$ (αν δεν είναι το μηδενικό) είναι **μικρότερος ή ίσος** από τον μεγαλύτερο από τους βαθμούς τους.

ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ «ΧΑΣΕΙ» ΒΑΘΜΟ

Τα $P(x) = x^3 + 2x$ και $Q(x) = -x^3 + x^2$ είναι 3ου βαθμού, ενώ το άθροισμά τους $x^2 + 2x$ είναι 2ου βαθμού. Οι μεγαistoβάθμιοι όροι αλληλοαναιρέθηκαν.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 4.1**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.1 – Βαθμός με παράμετρο**

Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ο βαθμός του πολυωνύμου

$$P(x) = (\lambda^2 - 1)x^3 + (\lambda - 1)x^2 + 2x - 1.$$

ΛΥΣΗ

Ο συντελεστής του x^3 μηδενίζεται όταν $\lambda^2 - 1 = 0$, δηλαδή $\lambda = \pm 1$.

- ▶ Αν $\lambda \neq \pm 1$, τότε $\lambda^2 - 1 \neq 0$ και το $P(x)$ είναι **3ου βαθμού**.
- ▶ Αν $\lambda = 1$: $P(x) = 0x^3 + 0x^2 + 2x - 1 = 2x - 1$, δηλαδή **1ου βαθμού**.
- ▶ Αν $\lambda = -1$: $P(x) = 0x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, δηλαδή **2ου βαθμού**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.2 – Ίσα πολυώνυμα

Να βρεθούν οι α, β, γ ώστε τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha - 1)x^2 + (\beta + 2)x + \gamma$ και $Q(x) = 3x^2 - x + 5$ να είναι ίσα.

ΛΥΣΗ

Εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοβάθμιων όρων: $\alpha - 1 = 3$, $\beta + 2 = -1$, $\gamma = 5$. Άρα $\alpha = 4$, $\beta = -3$, $\gamma = 5$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.3 – Μηδενικό πολυώνυμο

Να βρεθούν οι α, β, γ ώστε το $P(x) = (\alpha - 2)x^2 + (\alpha + \beta)x + \gamma - 1$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

ΛΥΣΗ

Πρέπει όλοι οι συντελεστές να είναι μηδέν: $\alpha - 2 = 0$, $\alpha + \beta = 0$, $\gamma - 1 = 0$. Άρα $\alpha = 2$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.4 – Τιμή και ρίζα

Δίνεται το $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3$. Να υπολογιστούν τα $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$ και να εξεταστεί αν ο -1 είναι ρίζα του.

ΛΥΣΗ

$P(0) = 3$, $P(1) = 1 - 2 + 3 = 2$, $P(-1) = -1 - 2 + 3 = 0$. Αφού $P(-1) = 0$, ο -1 είναι ρίζα του $P(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.5 – Μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών

Να βρεθεί ο β ώστε να ισχύει $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + \beta)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Κάνουμε τις πράξεις στο δεύτερο μέλος:

$$(x^2 - 2x + 1)(x + \beta) = x^3 + (\beta - 2)x^2 + (1 - 2\beta)x + \beta.$$

Για να είναι ίσο με το $x^3 + 0x^2 - 3x + 2$, πρέπει $\beta - 2 = 0$, $1 - 2\beta = -3$ και $\beta = 2$. Και οι τρεις εξισώσεις δίνουν $\beta = 2$, άρα η ζητούμενη τιμή είναι $\beta = 2$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

Στη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών παίρνουμε συχνά **περισσότερες εξισώσεις από αγνώστους**. Πρέπει να ελέγξουμε ότι η λύση επαληθεύει **όλες** τις εξισώσεις. Αν δεν τις επαληθεύει, η ζητούμενη ισότητα είναι αδύνατη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.6 – Άθροισμα συντελεστών

Να βρεθεί το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου $P(x) = (2x - 1)^5 + (x^2 - 3)^3$, χωρίς να γίνει το ανάπτυγμα.

ΛΥΣΗ

Το άθροισμα των συντελεστών είναι $P(1) = (2 - 1)^5 + (1 - 3)^3 = 1 - 8 = -7$.

❌ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Βαθμός ή πλήθος όρων;

❌ Λάθος

Το $P(x) = 7x^5 - 3$ είναι 2ου βαθμού, «γιατί έχει δύο όρους».

✅ Σωστό

Ο βαθμός είναι ο **μεγαλύτερος εκθέτης** με μη μηδενικό συντελεστή, άρα το $P(x)$ είναι **5ου** βαθμού.



Στο mathgreece.com θα βρεις σύντομα βιντεομαθήματα για τις βασικές έννοιες των πολυωνύμων, καθώς και ένα τεστ γρήγορης αυτοαξιολόγησης. Ιδανικό για να «ζεσταθείς» πριν από τη διαίρεση πολυωνύμων!

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 4.1

Βαθμός	μεγαλύτερος εκθέτης με μη μηδενικό συντελεστή (το 0 δεν έχει βαθμό)
Ισότητα	ίδιος βαθμός και ίσοι συντελεστές ομοβάθμιων όρων
Μηδενικό	όλοι οι συντελεστές μηδέν
Ρίζα	$P(\rho) = 0$
Χρήσιμα	$P(0)$ = σταθερός όρος, $P(1)$ = άθροισμα συντελεστών
Βαθμοί	${}^\circ(PQ) = {}^\circ P + {}^\circ Q$, ${}^\circ(P + Q) \leq \max({}^\circ P, {}^\circ Q)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 4.1

Δυσκολία: ★★☆☆ βασική ★★★ μέτρια ★★★★★ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- 1 ★★☆☆ Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι πολυώνυμα του x ; Για όσες είναι, να βρείτε τον βαθμό τους.

$$A = 3x^4 - x + 1, \quad B = x^2 + \frac{1}{x}, \quad \Gamma = \sqrt{2}x^3 - 5, \quad \Delta = 2x + \sqrt{x}, \quad E = 7.$$

- 2 ★★☆☆ Δίνεται το $P(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 3$. Να υπολογίσετε τα $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$.

- 3 ★★☆☆ Να βρείτε τους α, β ώστε τα $P(x) = (\alpha + 2)x^2 + 3x - 1$ και $Q(x) = 5x^2 + (\beta - 1)x - 1$ να είναι ίσα.

- 4 ★★☆☆ Να βρείτε τον κ ώστε ο αριθμός 2 να είναι ρίζα του $P(x) = x^3 - \kappa x^2 + x + 2$.

- 5 ★★☆☆ Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ τον βαθμό του πολυωνύμου $P(x) = (\mu^2 - 4)x^2 + (\mu + 2)x + 3$.

- 6 ★★☆☆ Να βρείτε τους α, β, γ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha - \beta)x^2 + (\beta - \gamma + 1)x + (\gamma - 3)$ να είναι το μηδενικό.

- 7 ★★☆☆ Να βρείτε τους α, β ώστε να ισχύει $x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 2 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$ για κάθε x .

- 8 ★★☆☆ Να βρείτε το άθροισμα των συντελεστών και τον σταθερό όρο του πολυωνύμου $P(x) = (x^2 - x + 1)^{10}(3x - 2)^3$.

- 9 Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ 2ου βαθμού τέτοιο ώστε $P(x+1) - P(x) = 2x$ για κάθε x και $P(0) = 1$.
★★★
- 10 Αν $P(x)$ είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού και $Q(x)$ πολυώνυμο 2ου βαθμού, ποιος είναι ο βαθμός του $P(x) \cdot Q(x)$, του $[Q(x)]^3$ και του $P(x) + Q(x)$?
★★★

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 • ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΜΑΘΗΜΑ 4.2

Διαίρεση Πολυωνύμων

4.2

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ▶ την ταυτότητα της διαίρεσης και πώς κάνουμε «κάθετη» διαίρεση πολυωνύμων,
- ▶ το **σχήμα Horner** για τη διαίρεση με $x - \rho$,
- ▶ το θεώρημα του υπολοίπου και το κριτήριο «ο $x - \rho$ είναι παράγοντας $\Leftrightarrow P(\rho) = 0$ ».

|| Η ταυτότητα της διαίρεσης

Όπως διαιρούμε ακέραιους (π.χ. $17 = 5 \cdot 3 + 2$), μπορούμε να διαιρέσουμε και πολυώνυμα.

ΟΡΗ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ (διαιρετέος) και $\delta(x) \neq 0$ (διαιρέτης) υπάρχουν **μοναδικά** πολυώνυμα $\pi(x)$ (πηλίκιο) και $\nu(x)$ (υπόλοιπο) τέτοια ώστε

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \nu(x),$$

όπου το $\nu(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει **βαθμό μικρότερο** από τον βαθμό του $\delta(x)$.

Αν $\nu(x) = 0$, η διαίρεση λέγεται **τέλεια**. Τότε λέμε ότι το $\delta(x)$ **διαιρεί** το $\Delta(x)$ ή ότι είναι **παράγοντας** του $\Delta(x)$.

♦ Η κάθετη διαίρεση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.1 – Κάθετη διαίρεση βήμα βήμα

Να γίνει η διαίρεση $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 5) : (x^2 - x + 1)$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 & -3x^2 & +4x & -5 & x^2 - x + 1 \\
 -2x^3 & +2x^2 & -2x & & 2x - 1 \\
 \hline
 & -x^2 & +2x & -5 & \\
 & +x^2 & -x & +1 & \\
 \hline
 & & x & -4 &
 \end{array}$$

Πηλίκιο $\pi(x) = 2x - 1$ και υπόλοιπο $\nu(x) = x - 4$. Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι

$$2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = (x^2 - x + 1)(2x - 1) + x - 4.$$

1. $\frac{2x^3}{x^2} = 2x$: πρώτος όρος του πηλίκου.
2. $2x \cdot (x^2 - x + 1)$, που **αφαιρείται** (γι' αυτό γράφεται με αντίθετα πρόσημα, κόκκινο).
3. $\frac{-x^2}{x^2} = -1$: δεύτερος όρος του πηλίκου, και επαναλαμβάνουμε.
4. Σταματάμε όταν ο βαθμός του υπολοίπου γίνει μικρότερος από 2.

⚠ ΟΙ «ΚΕΝΕΣ» ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Αν ο διαιρετέος δεν έχει κάποια δύναμη του x , π.χ. $x^4 - 3x + 1$, την γράφουμε με συντελεστή μηδέν: $x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 3x + 1$. Έτσι οι στήλες της διαίρεσης «ευθυγραμμίζονται» σωστά.

Διαίρεση με $x - \rho$ και το θεώρημα του υπολοίπου**🔗 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΙΠΟΥ**

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$:

$$v = P(\rho).$$

Απόδειξη

Ο διαιρέτης $x - \rho$ είναι 1ου βαθμού, οπότε το υπόλοιπο είναι σταθερό, έστω v . Από την ταυτότητα της διαίρεσης, $P(x) = (x - \rho)\pi(x) + v$. Για $x = \rho$ παίρνουμε $P(\rho) = 0 \cdot \pi(\rho) + v = v$.

🔗 ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ **αν και μόνο αν** ο ρ είναι ρίζα του $P(x)$:

$$(x - \rho) \text{ διαιρεί το } P(x) \Leftrightarrow P(\rho) = 0.$$

❌ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Το πρόσημο του ρ **❌ Λάθος**

Το υπόλοιπο της διαίρεσης με $x + 2$ είναι το $P(2)$.

✅ Σωστό

$x + 2 = x - (-2)$, άρα $\rho = -2$ και το υπόλοιπο είναι το $P(-2)$.

Το σχήμα Horner

Για τη διαίρεση με $x - \rho$ υπάρχει ένας πολύ γρήγορος αλγόριθμος, που δίνει ταυτόχρονα το πηλίκο και το υπόλοιπο.

⚙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Σχήμα Horner για τη διαίρεση $P(x) : (x - \rho)$

- α) Γράφουμε στην πρώτη γραμμή **όλους** τους συντελεστές του $P(x)$, από τη μεγαλύτερη δύναμη προς τη μικρότερη (με 0 όπου λείπει δύναμη). Δεξιά γράφουμε τον ρ .
- β) «Κατεβάζουμε» τον πρώτο συντελεστή στην τρίτη γραμμή.
- γ) Πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό που μόλις γράψαμε με ρ , γράφουμε το γινόμενο στη δεύτερη γραμμή κάτω από τον επόμενο συντελεστή και προσθέτουμε. Επαναλαμβάνουμε μέχρι το τέλος.
- δ) Ο **τελευταίος** αριθμός της τρίτης γραμμής είναι το **υπόλοιπο**. Οι προηγούμενοι είναι οι συντελεστές του **πηλίκου**, το οποίο έχει βαθμό κατά ένα μικρότερο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.2 – Σχήμα Horner

Να γίνει η διαίρεση $(x^4 - 3x^3 + 2x - 7) : (x - 2)$.

ΛΥΣΗ

1	-3	0	2	-7	2
	2	-2	-4	-4	
1	-1	-2	-2	-11	

Συντελεστές: 1, -3, 0, 2, -7 (το x^2 λείπει, άρα 0).
 $1 \rightarrow 1 \cdot 2 = 2 \rightarrow -3 + 2 = -1 \rightarrow (-1) \cdot 2 = -2 \rightarrow$
 $0 - 2 = -2 \rightarrow \dots$

Πηλίκο: $\pi(x) = x^3 - x^2 - 2x - 2$

Υπόλοιπο: $v = -11$

Έλεγχος: $P(2) = 16 - 24 + 4 - 7 = -11$ ✓

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 4.2

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.3 – Υπόλοιπο χωρίς διαίρεση

Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = x^{100} - 2x + 3$ με το $x + 1$.

ΛΥΣΗ

Από το θεώρημα του υπολοίπου, $v = P(-1) = (-1)^{100} - 2(-1) + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.4 – Παράμετρος και παραγοντοποίηση

Να βρεθεί ο α ώστε το $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 5x + 6$ να έχει παράγοντα το $x - 1$, και στη συνέχεια να παραγοντοποιηθεί.

ΛΥΣΗ

Πρέπει $P(1) = 0$: $1 + \alpha - 5 + 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$. Τότε $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Με σχήμα Horner για $\rho = 1$:

1	-2	-5	6	1
	1	-1	-6	
1	-1	-6	0	

Άρα $P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.5 – Δύο συνθήκες

Να βρεθούν οι α, β ώστε το $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$ να διαιρείται με το $x - 1$ και με το $x + 2$.

ΛΥΣΗ

$P(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha + \beta - 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 5$.

$P(-2) = 0 \Leftrightarrow -8 + 4\alpha - 2\beta - 6 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - \beta = 7$.

Προσθέτοντας: $3\alpha = 12$, άρα $\alpha = 4$ και $\beta = 1$. Πράγματι, $x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.6 – Υπόλοιπο διαίρεσης με τριώνυμο

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x - 1$ αφήνει υπόλοιπο 3, και διαιρούμενο με $x - 2$ αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x - 1)(x - 2)$.

ΛΥΣΗ

Ο διαιρέτης είναι 2ου βαθμού, οπότε το υπόλοιπο έχει τη μορφή $v(x) = ax + \beta$:

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)\pi(x) + ax + \beta.$$

Για $x = 1$: $P(1) = a + \beta = 3$. Για $x = 2$: $P(2) = 2a + \beta = 5$. Άρα $a = 2$, $\beta = 1$, και το υπόλοιπο είναι $v(x) = 2x + 1$.

💡 Το «κόλπο» του τελευταίου παραδείγματος

Δεν ξέρουμε το $P(x)$, αλλά δεν το χρειαζόμαστε! Γράφουμε την ταυτότητα της διαίρεσης και δίνουμε στο x τις τιμές που **μηδενίζουν τον διαιρέτη**. Έτσι εξαφανίζεται ο άγνωστος όρος $(x - 1)(x - 2)\pi(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.7 – Διαίρεση με $ax - \beta$

Να βρεθούν το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $(2x^3 + x^2 - 4x + 3) : (2x - 1)$.

ΛΥΣΗ

Γράφουμε $2x - 1 = 2(x - \frac{1}{2})$. Κάνουμε Horner με $\rho = \frac{1}{2}$: οι συντελεστές 2, 1, -4, 3 δίνουν

$$2 \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2 \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} - 4 = -3 \rightarrow -3 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{3}{2}.$$

Άρα $P(x) = (x - \frac{1}{2})(2x^2 + 2x - 3) + \frac{3}{2} = (2x - 1)(x^2 + x - \frac{3}{2}) + \frac{3}{2}$. Το πηλίκο είναι $x^2 + x - \frac{3}{2}$ και το υπόλοιπο $\frac{3}{2}$.

⚠️ ΠΡΟΣΟΧΗ!

Στη διαίρεση με $ax - \beta$ το **υπόλοιπο** είναι το ίδιο με εκείνο της διαίρεσης με $x - \frac{\beta}{a}$, αλλά το **πηλίκο** πρέπει να διαιρεθεί με a .



Το σχήμα Horner θέλει λίγη εξάσκηση για να γίνει «αυτόματο». Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο όπου γίνεται βήμα βήμα, καθώς και φύλλα εξάσκησης με λύσεις. Θα δεις ότι σε λίγα λεπτά θα το κάνεις με κλειστά μάτια!

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 4.2

Ταυτότητα διαίρεσης	$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + v(x)$, με $v = 0$ ή $0 < \deg v < \deg \delta$
Θεώρημα υπολοίπου	υπόλοιπο της διαίρεσης με $x - \rho = P(\rho)$
Παράγοντας	$x - \rho$ διαιρεί το $P(x) \Leftrightarrow P(\rho) = 0$
Horner	γρήγορη διαίρεση με $x - \rho$: πηλίκο και υπόλοιπο μαζί
Διαίρεση με τριώνυμο	υπόλοιπο $ax + \beta$: δίνουμε τιμές που μηδενίζουν τον διαιρέτη

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 4.2

Δυσκολία: ★★☆☆ βασική ★★☆☆ μέτρια ★★☆☆ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- 1 ★☆☆ Να κάνετε τη διαίρεση $(x^3 - 2x^2 + 3x - 1) : (x^2 + 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.
- 2 ★☆☆ Με το σχήμα Horner να κάνετε τη διαίρεση $(2x^3 - 5x^2 + x + 4) : (x - 2)$.
- 3 ★☆☆ Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = x^5 - 3x^2 + x + 4$ με το $x + 1$.
- 4 ★☆☆ Να εξετάσετε αν το $x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$.
- 5 ★☆☆ Να βρείτε τον κ ώστε το $P(x) = 2x^3 + \kappa x^2 - 7x + 6$ να διαιρείται με το $x + 2$, και στη συνέχεια να το παραγοντοποιήσετε.
- 6 ★☆☆ Να βρείτε τους α, β ώστε το $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$ να έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.
- 7 ★☆☆ Το $P(x)$ διαιρούμενο με $x + 1$ αφήνει υπόλοιπο -2 , και διαιρούμενο με $x - 3$ αφήνει υπόλοιπο 6. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $x^2 - 2x - 3$.
- 8 ★☆☆ Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $(3x^3 - 2x^2 + x - 1) : (3x - 2)$.
- 9 ★☆☆ Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ το πολυώνυμο $P(x) = x^{2n} - 1$ έχει παράγοντες τα $x - 1$ και $x + 1$.
- 10 ★☆☆ Ένα πολυώνυμο $P(x)$ 3ου βαθμού έχει μεγιστοβάθμιο συντελεστή 2, έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και -1 , και διαιρούμενο με $x - 2$ αφήνει υπόλοιπο 18. Να βρείτε το $P(x)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 • ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΜΑΘΗΜΑ 4.3

Πολυωνυμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις

4.3

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ▶ πώς λύνουμε εξισώσεις 3ου και μεγαλύτερου βαθμού με παραγοντοποίηση,
- ▶ το θεώρημα των ακέραιων ριζών,
- ▶ πώς λύνουμε πολυωνυμικές ανισώσεις με πίνακα προσήμων.

Πολυωνυμικές εξισώσεις

Η βασική ιδέα είναι η εξής: γράφουμε το πολυώνυμο ως γινόμενο παραγόντων 1ου και 2ου βαθμού και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

$$A \cdot B \cdot \Gamma = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ή } B = 0 \text{ ή } \Gamma = 0.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Τρόποι παραγοντοποίησης

- Κοινός παράγοντας: $x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$.
- Ομαδοποίηση: $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = x^2(x - 2) - 9(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 9)$.
- Ταυτότητες: $a^2 - b^2$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$, $(a \pm b)^2$.
- Θεώρημα ακέραιων ριζών και Horner, όταν οι προηγούμενοι τρόποι δεν δουλεύουν.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΡΙΖΩΝ

Αν ένα πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ με ακέραιους συντελεστές έχει ρίζα έναν ακέραιο $\rho \neq 0$, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0 .

Απόδειξη

Από την $P(\rho) = 0$ έχουμε $a_n \rho^n + \dots + a_1 \rho = -a_0$, δηλαδή $\rho(a_n \rho^{n-1} + \dots + a_1) = -a_0$. Η παρένθεση είναι ακέραιος αριθμός, άρα ο ρ διαιρεί τον a_0 .

ΤΙ ΛΕΕΙ ΚΑΙ ΤΙ ΔΕΝ ΛΕΕΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Το θεώρημα δίνει τους υποψήφιους ακέραιους ρίζες. Δεν εξασφαλίζει ότι κάποιος από αυτούς είναι ρίζα, ούτε ότι το πολυώνυμο έχει ακέραιες ρίζες. Ελέγχουμε τους υποψήφιους έναν έναν. Επίσης δεν μας λέει τίποτα για ρίζες που δεν είναι ακέραιες (π.χ. $\frac{1}{2}$ ή $\sqrt{2}$).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Εξίσωση 3ου βαθμού με ακέραιους συντελεστές

- Γράφουμε τους διαιρέτες του σταθερού όρου (θετικούς και αρνητικούς).
- Ελέγχουμε ποιος από αυτούς μηδενίζει το πολυώνυμο. Συνήθως ξεκινάμε από τους ± 1 , ± 2 .

- γ) Με Horner διαιρούμε με $x - \rho$ και παίρνουμε πηλίκο 2ου βαθμού.
 δ) Λύνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 4.3

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.1 – Κοινός παράγοντας και ομαδοποίηση

Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $x^3 - 4x = 0$ β) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$.

ΛΥΣΗ

α) $x(x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -2$.

β) $x^2(x - 2) - 9(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 3)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = -3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.2 – Θεώρημα ακέραιων ριζών

Να λυθεί η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

ΛΥΣΗ

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του -6 : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Δοκιμάζουμε: $P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$, άρα το 1 είναι ρίζα. Horner με $\rho = 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

Η εξίσωση γράφεται $(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$. Οι ρίζες είναι 1, 2, 3.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.3 – Μη ακέραιη ρίζα

Να λυθεί η εξίσωση $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$.

ΛΥΣΗ

Υποψήφιες ακέραιες ρίζες: $\pm 1, \pm 2$. Έχουμε $P(1) = -2 \neq 0$ και $P(-1) = -2 - 3 + 3 + 2 = 0$. Horner με $\rho = -1$ στους συντελεστές 2, -3, -3, 2: $2 \rightarrow -5 \rightarrow 2 \rightarrow 0$. Άρα

$$(x + 1)(2x^2 - 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = \frac{5 \pm 3}{4},$$

δηλαδή $x = -1, x = 2, x = \frac{1}{2}$. Παρατήρησε ότι η ρίζα $\frac{1}{2}$ δεν θα μπορούσε να βρεθεί από το θεώρημα ακέραιων ριζών!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.4 – Διτετράγωνη εξίσωση

Να λυθεί η εξίσωση $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $x^2 = u \geq 0$: $u^2 - 5u + 4 = 0 \Leftrightarrow u = 1 \text{ ή } u = 4$. Τότε $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ και $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Η εξίσωση έχει τέσσερις ρίζες: $\pm 1, \pm 2$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Διάρθρωση με τον άγνωστο

✗ Λάθος

$$x^3 = 4x \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

✓ Σωστό

$$x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \text{ή } x = \pm 2. \text{ Διαιρώντας με } x \text{ «χάνεται» η ρίζα } x = 0!$$

Πολυωνυμικές ανισώσεις

⚙️ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Ανίσωση $P(x) > 0$ (ή $<$, $\geq$, $\leq$)

- α) Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο ένα μέλος, ώστε το άλλο να είναι 0.
- β) Παραγοντοποιούμε το $P(x)$ σε παράγοντες 1ου βαθμού και τριώνυμα.
- γ) Φτιάχνουμε **πίνακα προσήμων**: μια γραμμή για κάθε παράγοντα και μια τελευταία για το γινόμενο.
- ▶ Ο παράγοντας $ax + \beta$ έχει το πρόσημο του a **δεξιά** από τη ρίζα του και το αντίθετο **αριστερά**.
 - ▶ Το τριώνυμο έχει το πρόσημο του a «έξω» από τις ρίζες και το αντίθετο «μέσα». Αν $\Delta < 0$, έχει παντού το πρόσημο του a .
- δ) Διαβάζουμε από την τελευταία γραμμή τα διαστήματα που μας ενδιαφέρουν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.5 – Ανίσωση 3ου βαθμού

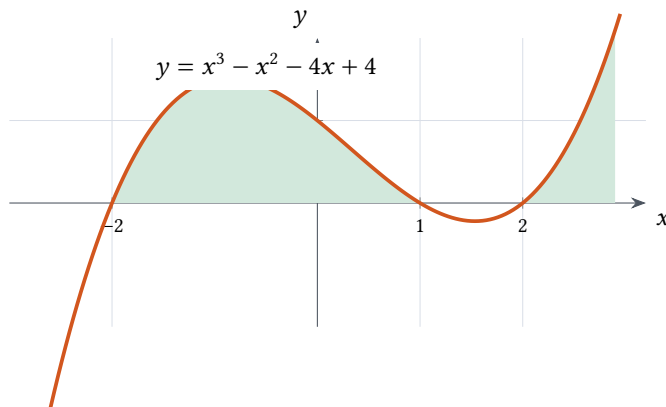
Να λυθεί η ανίσωση $x^3 - x^2 - 4x + 4 > 0$.

ΛΥΣΗ

Με ομαδοποίηση: $x^2(x - 1) - 4(x - 1) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$. Οι ρίζες είναι $-2, 1, 2$.

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$x + 2$		$-$	0	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Άρα $P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 1) \cup (2, +\infty)$.



Η γραφική παράσταση βρίσκεται **πάνω** από τον άξονα x' ακριβώς στα διαστήματα που βρήκαμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.6 – Τριώνυμο χωρίς ρίζες

Να λυθεί η ανίσωση $(x - 3)(x^2 + x + 1) \leq 0$.

ΛΥΣΗ

Το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ και $\alpha = 1 > 0$, άρα είναι **θετικό για κάθε x** . Επομένως το πρόσημο του γινομένου είναι το πρόσημο του $x - 3$:

$$(x - 3)(x^2 + x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.7 – Διπλή ρίζα

Να λυθεί η ανίσωση $(x - 1)^2(x + 2) \geq 0$.

ΛΥΣΗ

Ο παράγοντας $(x - 1)^2$ είναι ≥ 0 για κάθε x και μηδενίζεται μόνο για $x = 1$. Άρα:

- ▶ για $x = 1$ η ανίσωση ισχύει ως ισότητα,
- ▶ για $x \neq 1$ ισχύει $(x - 1)^2 > 0$, οπότε η ανίσωση γίνεται $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.

Λύσεις: $x \in [-2, +\infty)$. (Το $x = 1$ ήδη περιέχεται στο διάστημα.)

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Η διπλή ρίζα στον πίνακα προσημίων

Ένας παράγοντας με **άρτιο** εκθέτη, όπως ο $(x - 1)^2$, **δεν αλλάζει** πρόσημο στη ρίζα του. Αν τον μεταχειριστείς σαν απλό παράγοντα (που αλλάζει πρόσημο), ο πίνακας θα βγει λάθος. Για παράδειγμα, στην ανίσωση $(x - 1)^2(x + 2) < 0$ η λύση είναι $x < -2$ και **όχι** κάποιο διάστημα κοντά στο 1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.8 – Πρόβλημα: κουτί χωρίς καπάκι

Από ένα τετράγωνο χαρτόνι πλευράς 12 cm κόβουμε από κάθε γωνία ένα τετραγωνάκι πλευράς x cm και διπλώνουμε τα «πτερύγια», φτιάχνοντας ένα ανοιχτό κουτί. Για ποια τιμή του x ο όγκος του κουτιού είναι 128 cm^3 ;

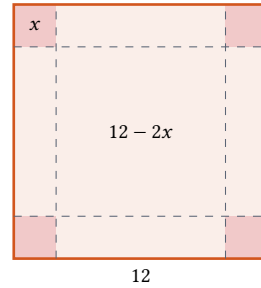
ΛΥΣΗ

Πρέπει $0 < x < 6$. Ο όγκος του κουτιού είναι $V = x(12 - 2x)^2$. Από την $V = 128$:

$$4x^3 - 48x^2 + 144x - 128 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 12x^2 + 36x - 32 = 0.$$

Δοκιμάζοντας τους διαιρέτες του 32 βρίσκουμε τη ρίζα $x = 2$. Με Horner: $(x - 2)(x^2 - 10x + 16) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2(x - 8) = 0$. Άρα $x = 2$ ή $x = 8$. Η τιμή 8 απορρίπτεται, γιατί πρέπει $x < 6$.

Απάντηση: $x = 2$ cm, οπότε το κουτί έχει διαστάσεις $8 \times 8 \times 2$.



Ο πίνακας προσήμων είναι το «ελβετικό σουγιαδάκι» των ανισώσεων. Θα τον χρησιμοποιείς σε όλη τη Γ' Λυκείου! Στο mathgreece.com θα βρεις αναλυτικό βίντεο, καθώς και ασκήσεις εξάσκησης με λύσεις.

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 4.3

Ιδέα	παραγοντοποίηση και $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ή $B = 0$
Ακέραιες ρίζες	ακέραια ρίζα $\neq 0 \Rightarrow$ διαιρέτης του σταθερού όρου
Διτετράγωνη	$x^2 = u \geq 0$
Ανισώσεις	πίνακας προσήμων· τα τριώνυμα με $\Delta < 0$ έχουν σταθερό πρόσημο
Άρτιος εκθέτης	ο παράγοντας $(x - \rho)^{2k}$ δεν αλλάζει πρόσημο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 4.3

Δυσκολία: ★★☆☆ βασική ★★★ μέτρια ★★★★★ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- 1 ★★☆☆ Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $x^3 - 9x = 0$ β) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$.
- 2 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$.
- 3 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.
- 4 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$.
- 5 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$.
- 6 ★★☆☆ Να λύσετε την ανίσωση $x^3 - 4x^2 + x + 6 < 0$.
- 7 ★★☆☆ Να λύσετε την ανίσωση $(x^2 - 4)(x^2 + 2x + 5) \geq 0$.

- 8 ★★ ★ Να λύσετε την ανίσωση $x^4 - x^2 \leq 0$.
- 9 ★★ ★ Να βρείτε τον a ώστε η εξίσωση $x^3 + ax^2 - x - 2 = 0$ να έχει ρίζα το -2 , και στη συνέχεια να βρείτε τις άλλες ρίζες της.
- 10 ★★ ★ Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της $f(x) = x^3$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της $g(x) = 4x$.
- 11 ★★ ★ Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + x + 3 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 • ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΜΑΘΗΜΑ 4.4

Εξισώσεις και Ανισώσεις που
Ανάγονται σε Πολυωνυμικές

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ▶ πώς λύνουμε **κλασματικές** (ρητές) εξισώσεις και ανισώσεις,
- ▶ πώς λύνουμε **άρρητες** εξισώσεις (με ριζικά) και πώς ελέγχουμε τις λύσεις,
- ▶ πώς μια κατάλληλη **αντικατάσταση** απλοποιεί δύσκολες εξισώσεις.

Κλασματικές (ρητές) εξισώσεις



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Κλασματική εξίσωση

- Περιορισμοί:** βρίσκουμε τις τιμές του x που μηδενίζουν κάποιον παρονομαστή και τις αποκλείουμε.
- Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές και βρίσκουμε το ΕΚΠ.
- Πολλαπλασιάζουμε **όλους** τους όρους με το ΕΚΠ («διώχνουμε» τους παρονομαστές).
- Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση που προκύπτει.
- Ελέγχουμε** τις λύσεις με τους περιορισμούς. Όσες δεν τους ικανοποιούν απορρίπτονται.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 4.4

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.1 – Κλασματική εξίσωση

Να λυθεί η εξίσωση $\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$.

ΛΥΣΗ

Περιορισμοί: $x \neq 1$ και $x \neq -1$. Το ΕΚΠ είναι $(x-1)(x+1) = x^2-1$. Πολλαπλασιάζουμε:

$$3(x+1) + 2(x-1) = 4 \Leftrightarrow 5x+1=4 \Leftrightarrow x=\frac{3}{5}.$$

Η τιμή $\frac{3}{5}$ ικανοποιεί τους περιορισμούς, άρα είναι δεκτή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.2 – Με απορριπτέα λύση

Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x+1}{x-2} - \frac{6}{x^2-2x} = \frac{1}{x}$.

ΛΥΣΗ

Ισχύει $x^2 - 2x = x(x - 2)$, οπότε οι περιορισμοί είναι $x \neq 0$ και $x \neq 2$, και το ΕΚΠ είναι $x(x - 2)$:

$$x(x + 1) - 6 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Η τιμή $x = 2$ **απορρίπτεται** λόγω περιορισμού. Άρα η μοναδική λύση είναι $x = -2$.

Επαλήθευση: $\frac{-1}{-4} - \frac{6}{8} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{-2}$ ✓

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Ξεχνάω τους περιορισμούς

Αν δεν γράψεις τους περιορισμούς στην αρχή, θα δώσεις ως λύση και το $x = 2$, που μηδενίζει παρονομαστή! Αυτό είναι **σοβαρό λάθος** και κοστίζει μονάδες στα διαγωνίσματα.

Κλασματικές ανισώσεις

➡ ΒΑΣΙΚΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ

Για $Q(x) \neq 0$ ισχύει:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) > 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) \geq 0 \text{ και } Q(x) \neq 0.$$

(Ένα πηλίκο και το αντίστοιχο γινόμενο έχουν το ίδιο πρόσημο.)

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Πολλαπλασιάζω με τον παρονομαστή

✗ Λάθος

$$\frac{2}{x-1} < 1 \Leftrightarrow 2 < x-1 \Leftrightarrow x > 3.$$

✓ Σωστό

Το πρόσημο του $x - 1$ είναι **άγνωστο**, οπότε δεν ξέρουμε αν η φορά της ανίσωσης μένει ίδια! Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο ένα μέλος και κάνουμε πίνακα προσήμων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.3 – Η σωστή λύση

Να λυθεί η ανίσωση $\frac{2}{x-1} < 1$.

ΛΥΣΗ

Περιορισμός: $x \neq 1$. Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος:

$$\frac{2}{x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2-x+1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x-1} < 0 \Leftrightarrow (3-x)(x-1) < 0.$$

Το τριώνυμο $(3-x)(x-1) = -x^2 + 4x - 3$ έχει ρίζες 1 και 3 και $a = -1 < 0$, οπότε είναι αρνητικό «έξω» από τις ρίζες: $x < 1$ ή $x > 3$.

Παρατήρησε ότι η «λάθος λύση» έχανε όλα τα $x < 1$!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.4 – Με ίσον

Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-3}{x+1} \leq 0$.

ΛΥΣΗ

Ισοδυναμεί με $(x-3)(x+1) \leq 0$ και $x \neq -1$. Το τριώνυμο είναι ≤ 0 στο $[-1, 3]$, και αφού $x \neq -1$, η λύση είναι $x \in (-1, 3]$.

|| Άρρητες εξισώσεις

Άρρητες λέγονται οι εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος βρίσκεται κάτω από ριζικό, π.χ. $\sqrt{x+5} = x-1$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Άρρητη εξίσωση $\sqrt{A} = B$

- α) Περιορισμοί: $A \geq 0$ (για να ορίζεται η ρίζα) και $B \geq 0$ (γιατί η ρίζα είναι μη αρνητική).
- β) Υψώνουμε στο τετράγωνο: $A = B^2$.
- γ) Λύνουμε και κρατάμε μόνο όσες λύσεις ικανοποιούν τους περιορισμούς. Μια επαλήθευση στην αρχική εξίσωση είναι πάντα καλή ιδέα.



ΓΙΑΤΙ ΕΜΦΑΝΙΖΟΝΤΑΙ «ΞΕΝΕΣ» ΛΥΣΕΙΣ

Η ύψωση στο τετράγωνο δεν είναι ισοδύναμη μετατροπή: από την $A = B$ προκύπτει $A^2 = B^2$, αλλά από την $A^2 = B^2$ προκύπτει $A = B$ ή $A = -B$. Η δεύτερη περίπτωση δίνει τις «ξένες» λύσεις. Γι' αυτό απαιτούμε $B \geq 0$ ή κάνουμε επαλήθευση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.5 – Άρρητη εξίσωση

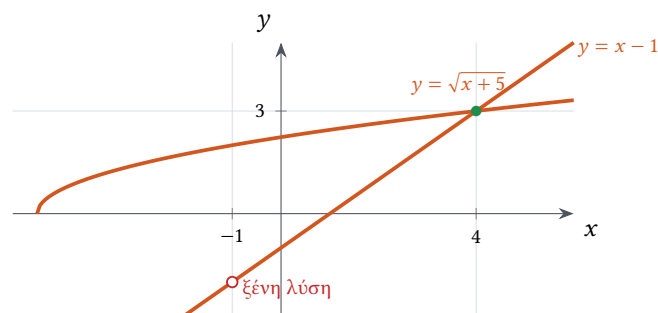
Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{x+5} = x-1$.

ΛΥΣΗ

Περιορισμοί: $x+5 \geq 0$ και $x-1 \geq 0$, δηλαδή $x \geq 1$. Υψώνουμε στο τετράγωνο:

$$x+5 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = -1.$$

Η τιμή $x = -1$ απορρίπτεται, γιατί $-1 < 1$. Επαλήθευση για $x = 4$: $\sqrt{9} = 3 = 4 - 1$ ✓. Λύση: $x = 4$.



Οι καμπύλες τέμνονται μόνο στο $x = 4$. Το $x = -1$ είναι ρίζα της $\sqrt{x+5} = -(x-1)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.6 – Δύο ριζικά

Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$.

ΛΥΣΗ

Περιορισμοί: $2x+3 \geq 0$ και $x+1 \geq 0$, δηλαδή $x \geq -1$. Απομονώνουμε ένα ριζικό και υψώνουμε στο τετράγωνο:

$$\sqrt{2x+3} = 1 + \sqrt{x+1} \Rightarrow 2x+3 = 1 + 2\sqrt{x+1} + x+1 \Leftrightarrow x+1 = 2\sqrt{x+1}.$$

Θέτουμε $t = \sqrt{x+1} \geq 0$: $t^2 = 2t \Leftrightarrow t = 0$ ή $t = 2$. Άρα $x = -1$ ή $x = 3$.

Επαλήθευση: για $x = -1$: $\sqrt{1} - \sqrt{0} = 1$ ✓. Για $x = 3$: $\sqrt{9} - \sqrt{4} = 1$ ✓.

💡 Απομόνωσε πρώτα το ριζικό

Πριν υψώσεις στο τετράγωνο, **απομόνωσε** ένα ριζικό στο ένα μέλος. Αν υψώσεις κατευθείαν την $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = 1$, θα πάρεις το «διπλό γινόμενο» $2\sqrt{\alpha\beta}$, που είναι πιο δύσκολο να χειριστείς.

|| Εξισώσεις με αντικατάσταση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.7 – Αντικατάσταση με ρίζα

Να λυθεί η εξίσωση $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$.

ΛΥΣΗ

Περιορισμός: $x \geq 0$. Θέτουμε $\sqrt{x} = t \geq 0$, οπότε $x = t^2$ και η εξίσωση γίνεται $t^2 - 5t + 6 = 0$, με ρίζες $t = 2$ και $t = 3$ (και οι δύο δεκτές). Άρα $x = 4$ ή $x = 9$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.8 – Αντικατάσταση παράστασης

Να λυθεί η εξίσωση $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $u = x^2 + x$: $u^2 - 8u + 12 = 0 \Leftrightarrow u = 2$ ή $u = 6$.

► $x^2 + x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -2$.

► $x^2 + x = 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -3$.

Οι ρίζες είναι 1, -2, 2, -3. (Αν κάναμε τις πράξεις, θα παίρναμε εξίσωση 4ου βαθμού!)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.9 – Απλή άρρητη ανίσωση

Να λυθεί η ανίσωση $\sqrt{x-1} < 3$.

ΛΥΣΗ

Πρέπει $x-1 \geq 0$. Επειδή και τα δύο μέλη είναι μη αρνητικά, η ύψωση στο τετράγωνο διατηρεί τη φορά: $x-1 < 9$. Άρα $1 \leq x < 10$.



Οι άρρητες και οι κλασματικές εξισώσεις κρύβουν πολλές παγίδες (περιορισμοί, ξένες λύσεις). Στο mathgreece.com θα βρεις ένα βίντεο αφιερωμένο στα συχνότερα λάθη και ένα τεστ «βρες το λάθος», για να γίνεις αλάνθαστος!

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 4.4

Κλασματική σωση	εξί-	περιορισμοί → ΕΚΠ → λύση → έλεγχος περιορισμών
Κλασματική σωση $\sqrt{A} = B$	ανί-	όλα στο ένα μέλος· $\frac{P}{Q} > 0 \Leftrightarrow PQ > 0$ · ποτέ πολλαπλασιασμός με παρονομαστή αγνώστου προσήμου $A \geq 0, B \geq 0, A = B^2$
Δύο ριζικά		απομονώνουμε, υψώνουμε, επαναλαμβάνουμε· επαλήθευση
Αντικατάσταση		$\sqrt{x} = t \geq 0, x^2 = u \geq 0$, κοινή παράσταση = u

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 4.4

Δυσκολία: ★★☆☆ βασική ★★★ μέτρια ★★★★★ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

1
★★★

Να λύσετε την εξίσωση $\frac{2}{x} + \frac{3}{x+2} = 1$.

2
★★★

Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x+2} = 4$.

3
★★★

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x+2}{x-5} > 0$.

4
★★★

Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$.

5
★★★

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x+3}{x-1} \geq 2$.

6
★★★

Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{3x+1} = x-1$.

7
★★★

Να λύσετε την εξίσωση $x + \sqrt{x} - 6 = 0$.

8
★★★

Να λύσετε την εξίσωση $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 = 0$.

9
★★★

Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x+7} - \sqrt{x} = 1$.

10
★★★

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x^2-4}{x^2+x} \leq 0$.

11
★★★

Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x+3} > x+1$.

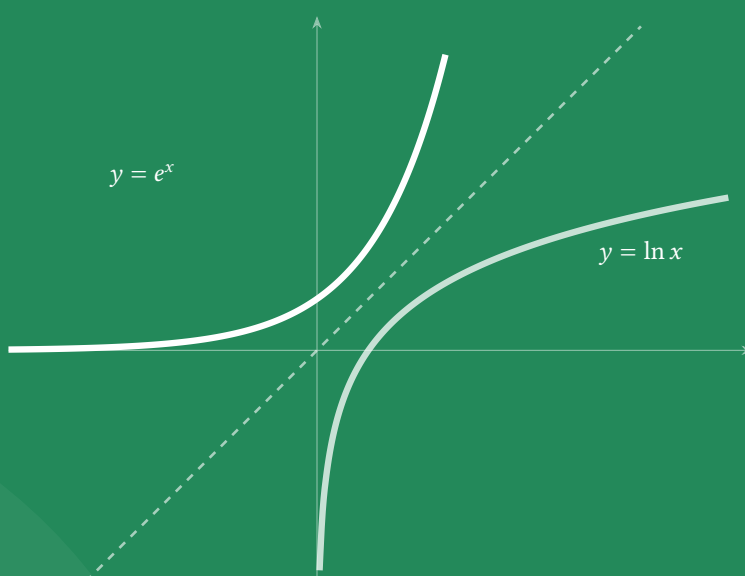
5.1 Εκθετική συνάρτηση

5.2 Λογάριθμοι

5.3 Λογαριθμική συνάρτηση

Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση

Ένας πληθυσμός βακτηρίων που διπλασιάζεται κάθε ώρα, ένα κεφάλαιο που «τρέχει» με ανατοκισμό, ένα ραδιενεργό υλικό που χάνει τη μισή του μάζα κάθε 5 χρόνια: όλα αυτά τα φαινόμενα περιγράφονται από την **εκθετική συνάρτηση**. Η «αντίστροφη» της, ο **λογάριθμος**, μετράει την ένταση των σεισμών, την οξύτητα ενός διαλύματος και την ένταση του ήχου. Στο κεφάλαιο αυτό γνωρίζουμε τις δύο αυτές συναρτήσεις, τις ιδιότητές τους, και μαθαίνουμε να λύνουμε εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις και ανισώσεις.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 • ΕΚΘΕΤΙΚΗ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑ 5.1

Εκθετική Συνάρτηση

5.1

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ▶ τις δυνάμεις με πραγματικό εκθέτη και τις ιδιότητές τους,
- ▶ την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, τη γραφική της παράσταση και τις ιδιότητές της,
- ▶ πώς λύνουμε εκθετικές εξισώσεις και ανισώσεις,
- ▶ τον αριθμό e και τα φαινόμενα εκθετικής μεταβολής (ανατοκισμός, ραδιενέργεια, πληθυσμοί).

Δυνάμεις με πραγματικό εκθέτη

Ξέρεις ήδη τι σημαίνει $2^3 = 8$, $2^{-1} = \frac{1}{2}$ και $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Στη Β' Λυκείου η δύναμη a^x ορίζεται για **κάθε πραγματικό εκθέτη** x , ακόμη και άρρητο, όπως $2^{\sqrt{3}}$ ή 3^π , αρκεί να είναι $a > 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ | Δυνάμεις

Για $a > 0$, $\mu \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 2$:

$$a^{-\nu} = \frac{1}{a^\nu}, \quad a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^\mu}, \quad a^0 = 1.$$

Η δύναμη a^x με x **άρρητο** ορίζεται ως το «όριο» των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες που πλησιάζουν το x . Για παράδειγμα, οι αριθμοί $2^{1,7}$, $2^{1,73}$, $2^{1,732}$, ... πλησιάζουν τον $2^{\sqrt{3}}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Για $a, \beta > 0$ και $x, y \in \mathbb{R}$:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad (a\beta)^x = a^x \beta^x, \quad \left(\frac{a}{\beta}\right)^x = \frac{a^x}{\beta^x}.$$

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Άθροισμα δυνάμεων

✗ Λάθος

$$2^x + 2^x = 2^{2x} \quad \text{και} \quad 3^{x+1} = 3^x + 3.$$

✓ Σωστό

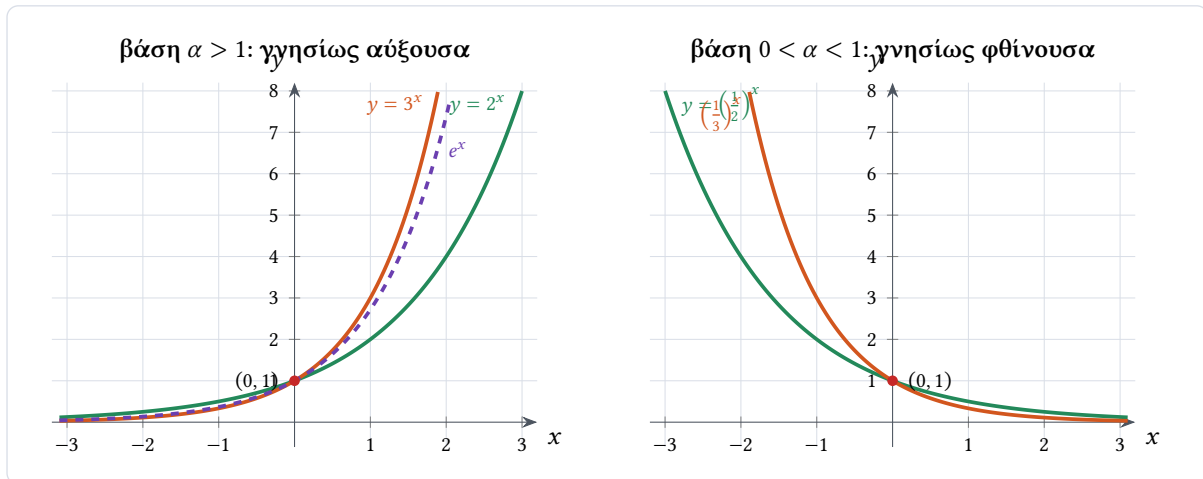
$$2^x + 2^x = 2 \cdot 2^x = 2^{x+1} \quad \text{και} \quad 3^{x+1} = 3^x \cdot 3.$$

Οι ιδιότητες αφορούν **γινόμενα**, όχι **αθροίσματα**.

Η εκθετική συνάρτηση

ΟΡΙΣΜΟΣ | Εκθετική συνάρτηση

Αν $a > 0$ και $a \neq 1$, η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, λέγεται **εκθετική συνάρτηση με βάση a** .



ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ $f(x) = A^x$

- ▶ Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R}$. Σύνολο τιμών: $(0, +\infty)$, δηλαδή $A^x > 0$ για κάθε x .
- ▶ Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(0, 1)$ (αφού $A^0 = 1$) και από το $(1, A)$.
- ▶ Αν $A > 1$, η f είναι **γνησίως αύξουσα**. Αν $0 < A < 1$, είναι **γνησίως φθίνουσα**.
- ▶ Ο άξονας $x'x$ είναι **ασύμπτωτη**: η καμπύλη τον πλησιάζει όλο και περισσότερο, χωρίς να τον συναντά ποτέ.
- ▶ Οι γραφικές παραστάσεις των A^x και $(\frac{1}{A})^x$ είναι **συμμετρικές ως προς τον $y'y$** , αφού $(\frac{1}{A})^x = A^{-x}$.

ΟΙ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΗΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ

Για $A > 0, A \neq 1$:

$$A^{x_1} = A^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

- ▶ Αν $A > 1$: $A^{x_1} < A^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$ (η φορά **διατηρείται**).
- ▶ Αν $0 < A < 1$: $A^{x_1} < A^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$ (η φορά **αλλάζει**).

Ο αριθμός e

Ο αριθμός e και οι τράπεζες

Αν καταθέσεις 1 € με (υπερβολικό!) ετήσιο επιτόκιο 100% και ο τόκος προστίθεται n φορές τον χρόνο, στο τέλος του χρόνου θα έχεις $(1 + \frac{1}{n})^n$ €. Για $n = 1$ έχεις 2 €, για $n = 12$ (μηνιαία) $\approx 2,613$ €, για $n = 365$ (ημερήσια) $\approx 2,7146$ €. Όσο μεγαλώνει το n , το ποσό πλησιάζει τον αριθμό

$$e = 2,718281828 \dots$$

Ο e είναι άρρητος και, μαζί με τον π , ένας από τους πιο σημαντικούς αριθμούς των Μαθηματικών. Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ εμφανίζεται παντού στις φυσικές επιστήμες.

Εκθετικές εξισώσεις και ανισώσεις

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Εκθετική εξίσωση

- α) **Ίδια βάση:** γράφουμε και τα δύο μέλη ως δυνάμεις της ίδιας βάσης, $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, οπότε $f(x) = g(x)$.
- β) **Κοινός παράγοντας:** αν εμφανίζονται a^{x+k} , γράφουμε $a^{x+k} = a^k \cdot a^x$ και βγάζουμε κοινό παράγοντα το a^x .
- γ) **Αντικατάσταση:** αν εμφανίζονται a^{2x} και a^x , θέτουμε $a^x = t$ με $t > 0$, και η εξίσωση γίνεται δευτεροβάθμια.
- δ) **Διαφορετικές βάσεις που δεν «ενώνονται»:** λογαριθμίζουμε (Μάθημα 5.2).

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 5.1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1.1 – Υπολογισμοί

Να υπολογιστούν οι αριθμοί $8^{\frac{2}{3}}$, $27^{-\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

ΛΥΣΗ

$$8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4, \quad 27^{-\frac{1}{3}} = (3^3)^{-\frac{1}{3}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}, \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1.2 – Σύγκριση

Να συγκριθούν οι αριθμοί: α) $2^{\sqrt{3}}$ και $2^{1,7}$ β) $(0,5)^\pi$ και $(0,5)^3$.

ΛΥΣΗ

α) Η βάση είναι $2 > 1$, οπότε η 2^x είναι γνησίως αύξουσα. Αφού $\sqrt{3} \approx 1,732 > 1,7$, έχουμε $2^{\sqrt{3}} > 2^{1,7}$.

β) Η βάση είναι $0,5 < 1$, οπότε η $(0,5)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα. Αφού $\pi > 3$, έχουμε $(0,5)^\pi < (0,5)^3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1.3 – Ίδια βάση

Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $2^{x+1} = 32$ β) $9^x = 27$ γ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3} = 4^x$.

ΛΥΣΗ

α) $2^{x+1} = 2^5 \Leftrightarrow x+1 = 5 \Leftrightarrow x = 4.$

β) $3^{2x} = 3^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$

γ) $2^{-(x^2-3)} = 2^{2x} \Leftrightarrow -x^2 + 3 = 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -3.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1.4 – Κοινός παράγοντας

Να λυθεί η εξίσωση $3^{x+1} + 3^x = 36$.

ΛΥΣΗ

$$3 \cdot 3^x + 3^x = 36 \Leftrightarrow 4 \cdot 3^x = 36 \Leftrightarrow 3^x = 9 = 3^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1.5 – Αντικατάσταση

Να λυθεί η εξίσωση $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

ΛΥΣΗ

Ισχύει $4^x = (2^x)^2$. Θέτουμε $2^x = t > 0$: $t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ ή $t = 4$, και οι δύο δεκτές. Τότε $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ και $2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Ξεχνάω ότι $t > 0$

Αν από την αντικατάσταση $a^x = t$ προκύψει αρνητική τιμή, π.χ. $t = -3$, αυτή **απορρίπτεται**, γιατί $a^x > 0$ για κάθε x . Η εξίσωση $2^x = -3$ είναι αδύνατη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1.6 – Εκθετικές ανισώσεις

Να λυθούν οι ανισώσεις: α) $2^{x-1} < 8$ β) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 9$ γ) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 < 0$.

ΛΥΣΗ

α) $2^{x-1} < 2^3$. Η βάση είναι $2 > 1$, οπότε η φορά διατηρείται: $x - 1 < 3 \Leftrightarrow x < 4$.

β) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$. Η βάση είναι $\frac{1}{3} < 1$, οπότε η φορά **αλλάζει**: $x \leq -2$.

γ) Με $5^x = t > 0$: $t^2 - 6t + 5 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 5$, δηλαδή $5^0 < 5^x < 5^1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Ξεχνάω να αλλάξω τη φορά

Στην ανίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^3$, η βάση είναι μικρότερη του 1, οπότε η λύση είναι $x < 3$ και **όχι** $x > 3$. Κοίτα **πάντα** τη βάση πριν «διώξεις» τις δυνάμεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1.7 – Εκθετικό σύστημα

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 32 \\ 3^{x-y} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Η πρώτη γράφεται $2^{x+2y} = 2^5$, άρα $x + 2y = 5$. Η δεύτερη γράφεται $3^{x-y} = 3^{-1}$, άρα $x - y = -1$. Αφαιρώντας, $3y = 6$, οπότε $y = 2$ και $x = 1$.

Εκθετική μεταβολή στην πράξη

ΧΡΗΣΙΜΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

- ▶ **Ανατοκισμός:** κεφάλαιο K_0 με επιτόκιο ε ανά περίοδο, μετά από n περιόδους γίνεται $K_n = K_0(1 + \varepsilon)^n$.
- ▶ **Εκθετική αύξηση / μείωση:** $Q(t) = Q_0 e^{ct}$. Αν $c > 0$ έχουμε αύξηση, αν $c < 0$ μείωση.
- ▶ **Ραδιενεργός διάσπαση** με χρόνο υποδιπλασιασμού T : $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1.8 – Βακτήρια

Ο πληθυσμός μιας καλλιέργειας βακτηρίων, t ώρες μετά την έναρξη του πειράματος, είναι $N(t) = 500 \cdot 2^{t/3}$. Πότε θα γίνει 8000;

ΛΥΣΗ

$$500 \cdot 2^{t/3} = 8000 \Leftrightarrow 2^{t/3} = 16 = 2^4 \Leftrightarrow \frac{t}{3} = 4 \Leftrightarrow t = 12 \text{ ώρες.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1.9 – Ανατοκισμός και ραδιενέργεια

- Καταθέτουμε 10 000 € με ετήσιο επιτόκιο 5% και ανατοκισμό. Πόσα χρήματα θα έχουμε μετά από 3 χρόνια;
- Ένα ραδιενεργό υλικό έχει χρόνο υποδιπλασιασμού 5 χρόνια. Πόσα γραμμάρια από τα αρχικά 80 g θα μείνουν μετά από 15 χρόνια;

ΛΥΣΗ

$$\alpha) K_3 = 10000 \cdot 1,05^3 = 10000 \cdot 1,157625 = 11\,576,25 \text{ €}. \quad \beta) m(15) = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{15/5} = 80 \cdot \frac{1}{8} = 10 \text{ g.}$$



Η εκθετική συνάρτηση εξηγεί γιατί «η χιονοστιβάδα μεγαλώνει τόσο γρήγορα»! Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο, προσομοιώσεις εκθετικής αύξησης και ασκήσεις με πραγματικά δεδομένα, όλα δωρεάν.

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 5.1

$f(x) = \alpha^x, 0 < \alpha \neq 1$	$\mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, διέρχεται από τα $(0, 1)$ και $(1, \alpha)$
Μονοτονία	$\alpha > 1$: $\nearrow$ $0 < \alpha < 1$: $\searrow$
Εξισώσεις	$\alpha^{f(x)} = \alpha^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ · αντικατάσταση $\alpha^x = t > 0$
Ανισώσεις	$\alpha > 1$: ίδια φορά, $0 < \alpha < 1$: αλλάζει η φορά
Μοντέλα	$K_0(1 + \varepsilon)^n, Q_0 e^{ct}, m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 5.1

Δυσκολία: ★★☆☆ βασική ★★☆☆ μέτρια ★★☆☆ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- 1 ★★☆☆ Να υπολογίσετε τους αριθμούς $16^{\frac{3}{4}}$, $32^{-\frac{2}{5}}$, $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$.
- 2 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $3^{x-2} = 81$.
- 3 ★★☆☆ Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $4^x = 8$ β) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 125$.
- 4 ★★☆☆ Να συγκρίνετε τους αριθμούς $(0,7)^{1,2}$ και $(0,7)^{1,5}$.
- 5 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $2^{x^2-x} = 4$.
- 6 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.
- 7 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $2^{x+2} - 2^x = 24$.
- 8 ★★☆☆ Να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} > \frac{1}{8}$.
- 9 ★★☆☆ Να λύσετε την ανίσωση $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 \geq 0$.
- 10 ★★☆☆ Για ποιες τιμές του a η συνάρτηση $f(x) = (a-1)^x$ είναι εκθετική και γνησίως φθίνουσα;
- 11 ★★☆☆ Ένα ραδιενεργό υλικό έχει μάζα $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/8}$, όπου t σε ημέρες. Μετά από πόσες ημέρες θα έχει απομείνει το $\frac{1}{16}$ της αρχικής μάζας;
- 12 ★★☆☆ Καταθέτουμε 1000 € με ετήσιο επιτόκιο 4% και ανατοκισμό. Πόσα χρήματα θα έχουμε μετά από 2 χρόνια; Πόσος είναι ο συνολικός τόκος;
- 13 ★★☆☆ Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 6 \\ 2^{x+y} = 8 \end{cases}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 • ΕΚΘΕΤΙΚΗ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑ 5.2

Λογάριθμοι

5.2

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ▶ τι είναι ο λογάριθμος ενός αριθμού και πώς υπολογίζεται,
- ▶ τις ιδιότητες των λογαρίθμων (γινομένου, πηλίκου, δύναμης),
- ▶ τους δεκαδικούς και τους φυσικούς λογαρίθμους και την αλλαγή βάσης.

|| Ο ορισμός του λογαρίθμου

Ποιος εκθέτης χρειάζεται για να κάνει ο 2 το 8; Ο 3, αφού $2^3 = 8$. Ποιος εκθέτης κάνει ο 2 το 5; Δεν είναι ακέραιος, αλλά υπάρχει και είναι μοναδικός, γιατί η 2^x είναι γνησίως αύξουσα και παίρνει όλες τις θετικές τιμές. Αυτόν τον εκθέτη τον λέμε **λογάριθμο** του 5 με βάση 2.

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ | Λογάριθμος

Αν $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$, ο **λογάριθμος του θ με βάση α** , $\log_{\alpha} \theta$, είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να πάρουμε τον θ :

$$\log_{\alpha} \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta$$

$$\log_2 8 = 3 \xleftrightarrow{\text{ισοδύναμο}} 2^3 = 8$$

βάση αριθμόςθέτης

🔑 ΑΜΕΣΕΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ

Για $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$:

$$\log_{\alpha} \alpha^x = x, \quad \alpha^{\log_{\alpha} \theta} = \theta \ (\theta > 0), \quad \log_{\alpha} 1 = 0, \quad \log_{\alpha} \alpha = 1.$$

⚠️ ΠΟΤΕ ΟΡΙΖΕΤΑΙ Ο ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ

Ο $\log_{\alpha} \theta$ ορίζεται **μόνο** όταν $\theta > 0$ (και $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$). Παραστάσεις όπως οι $\log_2(-4)$, $\log_3 0$ ή $\log_1 5$ **δεν έχουν νόημα**. Ο λογάριθμος όμως μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός: $\log_2 \frac{1}{8} = -3$.

|| Δεκαδικοί και φυσικοί λογάριθμοι

- ▶ **Δεκαδικός λογάριθμος:** βάση 10, και γράφουμε απλώς $\log \theta$. Για παράδειγμα, $\log 1000 = 3$ και $\log 0,01 = -2$.
- ▶ **Φυσικός λογάριθμος:** βάση e , και γράφουμε $\ln \theta$. Για παράδειγμα, $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$, $\ln e^5 = 5$.

Έτσι $\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$ και $\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$.

Ιδιότητες των λογαρίθμων

🔑 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Για $\alpha > 0, \alpha \neq 1, \theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$:

$$\log_{\alpha}(\theta_1 \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2 \quad (\text{ο λογάριθμος γινομένου})$$

$$\log_{\alpha} \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2 \quad (\text{ο λογάριθμος πηλίκου})$$

$$\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \log_{\alpha} \theta \quad (\text{ο λογάριθμος δύναμης})$$

$$\log_{\alpha} \sqrt[\nu]{\theta} = \frac{1}{\nu} \log_{\alpha} \theta \quad (\text{ο λογάριθμος ρίζας})$$

Απόδειξη

Έστω $\log_{\alpha} \theta_1 = x_1$ και $\log_{\alpha} \theta_2 = x_2$, δηλαδή $\theta_1 = \alpha^{x_1}$ και $\theta_2 = \alpha^{x_2}$. Τότε $\theta_1 \theta_2 = \alpha^{x_1+x_2}$, οπότε από τον ορισμό $\log_{\alpha}(\theta_1 \theta_2) = x_1 + x_2$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύονται οι υπόλοιπες ιδιότητες, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων.

❌ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Οι «ψεύτικες» ιδιότητες

❌ Λάθος

$$\log(\theta_1 + \theta_2) = \log \theta_1 + \log \theta_2$$

$$\log_{\alpha} \theta_1 \cdot \log_{\alpha} \theta_2 = \log_{\alpha}(\theta_1 \theta_2)$$

$$(\log \theta)^2 = 2 \log \theta$$

$$\frac{\log \theta_1}{\log \theta_2} = \log \theta_1 - \log \theta_2$$

✅ Σωστό

Ο λογάριθμος «σπάει» ένα **γινόμενο** σε άθροισμα, όχι ένα άθροισμα. Δεν υπάρχει ιδιότητα για τα $\log(\theta_1 + \theta_2)$, $\log \theta_1 \cdot \log \theta_2$, $\frac{\log \theta_1}{\log \theta_2}$.

Το $(\log \theta)^2$ δεν είναι $\log \theta^2 = 2 \log \theta$.

🔑 ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΗΣ

Για $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha, \beta \neq 1$ και $\theta > 0$:

$$\log_{\beta} \theta = \frac{\log_{\alpha} \theta}{\log_{\alpha} \beta}.$$

$$\text{Ειδικά: } \log_{\beta} \theta = \frac{\log \theta}{\log \beta} = \frac{\ln \theta}{\ln \beta} \quad \text{και} \quad \log_{\alpha} \beta = \frac{1}{\log_{\beta} \alpha}.$$

Απόδειξη

Αν $\log_{\beta} \theta = x$, τότε $\beta^x = \theta$. Παίρνουμε λογαρίθμους με βάση α : $x \log_{\alpha} \beta = \log_{\alpha} \theta$, άρα $x = \frac{\log_{\alpha} \theta}{\log_{\alpha} \beta}$.

💡 Γιατί είναι χρήσιμη η αλλαγή βάσης

Τα κομπιουτεράκια έχουν μόνο τα πλήκτρα $\boxed{\log}$ και $\boxed{\ln}$. Με την αλλαγή βάσης υπολογίζουμε λογάριθμο με οποιαδήποτε βάση: $\log_2 7 = \frac{\ln 7}{\ln 2} \approx \frac{1,946}{0,693} \approx 2,807$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 5.2

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.1 – Υπολογισμός λογαρίθμων

Να υπολογιστούν: $\log_2 32$, $\log_3 \frac{1}{9}$, $\log_{\frac{1}{2}} 8$, $\log_5 \sqrt{5}$, $\log 0,001$, $\ln e^3$, $10^{\log 7}$.

ΛΥΣΗ

$\log_2 32 = 5$ (αφού $2^5 = 32$), $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ (αφού $3^{-2} = \frac{1}{9}$), $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$ (αφού $(\frac{1}{2})^{-3} = 8$),
 $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$, $\log 0,001 = \log 10^{-3} = -3$, $\ln e^3 = 3$, $10^{\log 7} = 7$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.2 – Εύρεση αγνώστου από τον ορισμό

Να βρεθεί ο x σε καθεμιά από τις σχέσεις: α) $\log_x 49 = 2$ β) $\log_2 x = -3$ γ) $\log_4 x = \frac{3}{2}$.

ΛΥΣΗ

α) $x^2 = 49$ με $x > 0$, $x \neq 1$, άρα $x = 7$. β) $x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$. γ) $x = 4^{\frac{3}{2}} = 8$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.3 – Χρήση ιδιοτήτων

Να υπολογιστούν: α) $\log 2 + \log 5$ β) $\log_3 54 - \log_3 2$ γ) $2 \log 5 + \log 4$.

ΛΥΣΗ

α) $\log(2 \cdot 5) = \log 10 = 1$. β) $\log_3 \frac{54}{2} = \log_3 27 = 3$. γ) $\log 5^2 + \log 4 = \log(25 \cdot 4) = \log 100 = 2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.4 – Ανάπτυξη παράστασης

Αν $x, y, z > 0$, να γραφτεί ο $\log \frac{x^2 y}{\sqrt{z}}$ συναρτήσει των $\log x$, $\log y$, $\log z$.

ΛΥΣΗ

$\log \frac{x^2 y}{\sqrt{z}} = \log x^2 + \log y - \log z^{\frac{1}{2}} = 2 \log x + \log y - \frac{1}{2} \log z$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.5 – Με δοσμένες τιμές

Αν $\log 2 \approx 0,301$ και $\log 3 \approx 0,477$, να υπολογιστούν οι $\log 6$, $\log 12$, $\log 5$, $\log 1,5$.

ΛΥΣΗ

$\log 6 = \log 2 + \log 3 \approx 0,778$, $\log 12 = 2 \log 2 + \log 3 \approx 1,079$,
 $\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2 \approx 0,699$, $\log 1,5 = \log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 \approx 0,176$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.6 – Αλλαγή βάσης

Να υπολογιστούν: α) $\log_4 8$ β) $\log_2 3 \cdot \log_3 4$.

ΛΥΣΗ

α) $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$. β) $\frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{\log 4}{\log 2} = \log_2 4 = 2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.7 – Λύση εκθετικής εξίσωσης με λογάριθμο

Να λυθεί η εξίσωση $2^x = 5$.

ΛΥΣΗ

Από τον ορισμό: $x = \log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} \approx \frac{0,699}{0,301} \approx 2,32$.



Οι λογάριθμοι φαίνονται «τρομακτικοί», αλλά είναι απλώς ένας άλλος τρόπος να μιλάμε για εκθέτες! Στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο που εξηγεί τον ορισμό με απλά λόγια, καθώς και παιχνίδια γνώσεων για τις ιδιότητες.

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 5.2

Ορισμός	$\log_a \theta = x \Leftrightarrow a^x = \theta \quad (a > 0, a \neq 1, \theta > 0)$
Βασικά	$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1, \log_a a^x = x, a^{\log_a \theta} = \theta$
Ιδιότητες	γινόμενο $\rightarrow$ άθροισμα, πηλίκο $\rightarrow$ διαφορά, δύναμη $\rightarrow$ συντελεστής
Αλλαγή βάσης	$\log_\beta \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta} = \frac{\ln \theta}{\ln \beta}$
Συμβολισμοί	$\log = \log_{10}, \quad \ln = \log_e$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 5.2

Δυσκολία: ★★☆☆ βασική ★★★ μέτρια ★★★★★ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- 1 ★★☆☆ Να υπολογίσετε: $\log_3 81, \log_2 \frac{1}{16}, \log 10000, \ln \frac{1}{e^2}, \log_9 3$.
- 2 ★★☆☆ Να βρείτε τον x : α) $\log_x 64 = 3$ β) $\log_5 x = -2$ γ) $\log_x \frac{1}{8} = -3$.
- 3 ★★☆☆ Να υπολογίσετε: α) $\log 4 + \log 25$ β) $\log_6 4 + \log_6 9$ γ) $\log_2 40 - \log_2 5$.
- 4 ★★☆☆ Να υπολογίσετε: α) $3^{\log_3 7}$ β) $10^{2 \log 3}$ γ) $e^{\ln 2 + \ln 3}$.
- 5 ★★☆☆ Αν $x, y, z > 0$, να γράψετε τον $\log_a \frac{x^3 \sqrt{y}}{z^2}$ συναρτήσει των $\log_a x, \log_a y, \log_a z$.
- 6 ★★☆☆ Αν $\log 2 \approx 0,301$ και $\log 3 \approx 0,477$, να υπολογίσετε τους $\log 18, \log 0,6$ και $\log \sqrt[3]{12}$.
- 7 ★★☆☆ Να αποδείξετε ότι $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8 = 3$.
- 8 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $3^x = 10$ και να δώσετε μια προσεγγιστική τιμή της λύσης ($\log 3 \approx 0,477$).
- 9 ★★☆☆ Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \frac{\log 8 + \log 27}{\log 6}$.
- 10 ★★☆☆ Αν $\log_a 2 = \kappa$, να εκφράσετε συναρτήσει του κ τους αριθμούς $\log_a (8a^2)$ και $\log_4 a$.

11
★★★

Να αποδείξετε ότι $\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\beta} \alpha = 1$ για $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha, \beta \neq 1$.

12
★★★

Να βρείτε τον $x > 0$ αν $\log x = 2 \log 3 - \log 2 + \frac{1}{3} \log 8$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 • ΕΚΘΕΤΙΚΗ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑ 5.3

Λογαριθμική Συνάρτηση

5.3

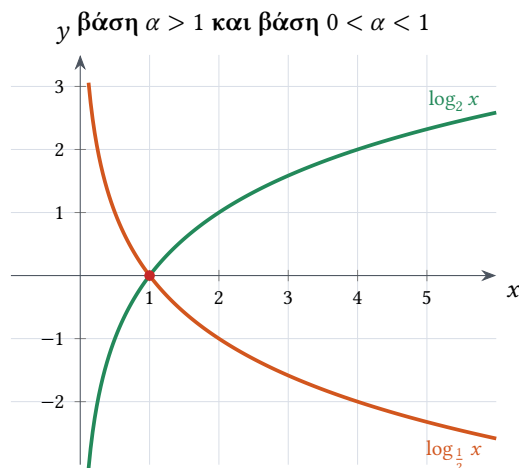
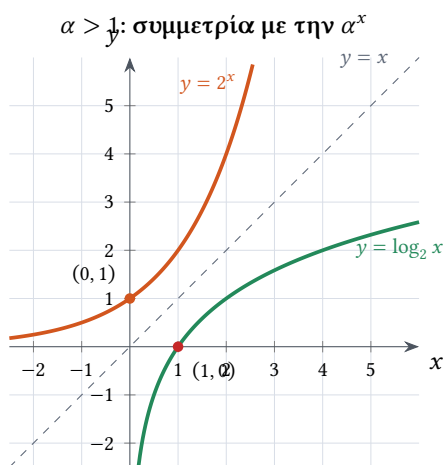
ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ▶ τη λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_{\alpha} x$ και τη σχέση της με την a^x ,
- ▶ πώς βρίσκουμε πεδία ορισμού συναρτήσεων με λογαρίθμους,
- ▶ πώς λύνουμε λογαριθμικές εξισώσεις και ανισώσεις,
- ▶ εφαρμογές: pH, σεισμοί (κλίμακα Richter), εκθετικές εξισώσεις.

Η συνάρτηση $f(x) = \log_{\alpha} x$

ΟΡΙΣΜΟΣ | Λογαριθμική συνάρτηση

Αν $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$, η συνάρτηση $f(x) = \log_{\alpha} x$, με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση α** .

ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ $F(x) = \log_{\alpha} x$

- ▶ Πεδίο ορισμού: $(0, +\infty)$. Σύνολο τιμών: $\mathbb{R}$.
- ▶ Διέρχεται από τα σημεία $(1, 0)$ και $(\alpha, 1)$.
- ▶ Αν $\alpha > 1$, είναι **γνησίως αύξουσα**: $\log_{\alpha} x < 0$ για $0 < x < 1$ και $\log_{\alpha} x > 0$ για $x > 1$.
- ▶ Αν $0 < \alpha < 1$, είναι **γνησίως φθίνουσα**.
- ▶ Ο άξονας y' είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης.
- ▶ Η γραφική της παράσταση είναι **συμμετρική** της γραφικής παράστασης της $y = a^x$ ως προς την ευθεία $y = x$. Οι δύο συναρτήσεις είναι **αντίστροφες**: η μία «αναιρεί» την άλλη.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

Για $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ και $x_1, x_2 > 0$:

$$\log_{\alpha} x_1 = \log_{\alpha} x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

- ▶ Αν $\alpha > 1$: $\log_{\alpha} x_1 < \log_{\alpha} x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$.
- ▶ Αν $0 < \alpha < 1$: $\log_{\alpha} x_1 < \log_{\alpha} x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Λογαριθμική εξίσωση

- α) **Περιορισμοί:** κάθε παράσταση μέσα σε λογάριθμο πρέπει να είναι **θετική**.
- β) Με τις ιδιότητες «μαζεύουμε» τους λογαρίθμους σε μία από τις μορφές:
 - ▶ $\log_{\alpha} A = \log_{\alpha} B \Leftrightarrow A = B$,
 - ▶ $\log_{\alpha} A = \kappa \Leftrightarrow A = \alpha^{\kappa}$.
- γ) Αν εμφανίζεται $\log^2 x$, θέτουμε $\log x = t$ (εδώ το t μπορεί να είναι **οποιοσδήποτε** πραγματικός).
- δ) Λύνουμε και **ελέγχουμε** τις λύσεις με τους περιορισμούς.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 5.3

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.1 – Πεδίο ορισμού

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων: $f(x) = \ln(x - 2)$, $g(x) = \log(4 - x^2)$, $h(x) = \log_3(x^2 - x)$.

ΛΥΣΗ

$f: x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$, δηλαδή $A_f = (2, +\infty)$.

$g: 4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$, δηλαδή $A_g = (-2, 2)$.

$h: x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x(x - 1) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 1$, δηλαδή $A_h = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.2 – Σύγκριση

Να συγκριθούν οι αριθμοί: α) $\log_3 5$ και $\log_3 7$ β) $\log_{0,5} 3$ και $\log_{0,5} 2$.

ΛΥΣΗ

α) Η βάση είναι $3 > 1$ και $5 < 7$, άρα $\log_3 5 < \log_3 7$. β) Η βάση είναι $0,5 < 1$ και $3 > 2$, άρα $\log_{0,5} 3 < \log_{0,5} 2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.3 – Απλή λογαριθμική εξίσωση

Να λυθεί η εξίσωση $\log_2(x + 3) = 3$.

ΛΥΣΗ

Περιορισμός: $x > -3$. Από τον ορισμό, $x + 3 = 2^3 = 8 \Leftrightarrow x = 5$, που είναι δεκτή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.4 – Με απορριπτέα λύση

Να λυθεί η εξίσωση $\log x + \log(x - 3) = 1$.

ΛΥΣΗ

Περιορισμοί: $x > 0$ και $x - 3 > 0$, δηλαδή $x > 3$. Τότε:

$$\log[x(x - 3)] = \log 10 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 10 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ ή } x = -2.$$

Η τιμή $x = -2$ απορρίπτεται, γιατί πρέπει $x > 3$. Άρα $x = 5$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Περιορισμοί μετά την ένωση

Αν γράψεις τους περιορισμούς **αφού** ενώσεις τους λογαρίθμους, σε $\log[x(x - 3)]$, θα πάρεις $x(x - 3) > 0$, δηλαδή $x < 0$ ή $x > 3$, και θα δεχτείς λανθασμένα το $x = -2$! Οι περιορισμοί γράφονται **στην αρχική** εξίσωση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.5 – Αντικατάσταση

Να λυθεί η εξίσωση $\ln^2 x - 3 \ln x + 2 = 0$.

ΛΥΣΗ

Περιορισμός: $x > 0$. Θέτουμε $\ln x = t$: $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ή $t = 2$. Άρα $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ και $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.6 – Εκθετική εξίσωση με διαφορετικές βάσεις

Να λυθεί η εξίσωση $3^x = 2^{x+1}$.

ΛΥΣΗ

Παίρνουμε φυσικούς λογαρίθμους και στα δύο μέλη (είναι θετικά):

$$x \ln 3 = (x + 1) \ln 2 \Leftrightarrow x(\ln 3 - \ln 2) = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln \frac{3}{2}} \approx \frac{0,693}{0,405} \approx 1,71.$$

Λογαριθμικές ανισώσεις**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Λογαριθμική ανίσωση**

- Γράφουμε τους περιορισμούς (παραστάσεις θετικές).
- Φέρνουμε την ανίσωση στη μορφή $\log_a A < \log_a B$ (π.χ. γράφουμε $2 = \log_3 9$).
- Αν $a > 1$ η φορά **διατηρείται**: $A < B$. Αν $0 < a < 1$, η φορά **αλλάζει**: $A > B$.
- Συναληθεύουμε με τους περιορισμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.7 – Βάση μεγαλύτερη του 1

Να λυθεί η ανίσωση $\log_3(2x - 1) < 2$.

ΛΥΣΗ

Περιορισμός: $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Επίσης $2 = \log_3 9$, οπότε $\log_3(2x - 1) < \log_3 9 \Leftrightarrow 2x - 1 < 9 \Leftrightarrow x < 5$. Συναληθεύοντας: $\frac{1}{2} < x < 5$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.8 – Βάση μικρότερη του 1

Να λυθεί η ανίσωση $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) \geq -1$.

ΛΥΣΗ

Περιορισμός: $x > 1$. Επίσης $-1 = \log_{\frac{1}{2}} 2$. Η βάση είναι μικρότερη του 1, οπότε η φορά **αλλάζει**:
 $x - 1 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 3$. Συναληθεύοντας: $1 < x \leq 3$.

Εφαρμογές**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.9 – Οξύτητα (pH)**

Το pH ενός διαλύματος ορίζεται ως $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$, όπου $[\text{H}^+]$ η συγκέντρωση ιόντων υδρογόνου. Να βρεθεί το pH διαλύματος με $[\text{H}^+] = 10^{-3}$, και να συγκριθεί η οξύτητα δύο διαλυμάτων με pH 4 και pH 7.

ΛΥΣΗ

$\text{pH} = -\log 10^{-3} = 3$. Για pH 4 έχουμε $[\text{H}^+] = 10^{-4}$ και για pH 7 έχουμε $[\text{H}^+] = 10^{-7}$. Ο λόγος τους είναι $\frac{10^{-4}}{10^{-7}} = 10^3$: το πρώτο διάλυμα είναι **χίλιες φορές** πιο όξινο. Μια διαφορά 3 μονάδων στην κλίμακα αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό επί 1000!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3.10 – Σεισμοί – κλίμακα Richter

Το μέγεθος ενός σεισμού στην κλίμακα Richter είναι $M = \log \frac{A}{A_0}$, όπου A το πλάτος της σεισμικής κίνησης και A_0 ένα σταθερό πλάτος αναφοράς. Πόσες φορές μεγαλύτερο πλάτος έχει ένας σεισμός 7 βαθμών από έναν σεισμό 5 βαθμών;

ΛΥΣΗ

$7 - 5 = \log \frac{A_1}{A_0} - \log \frac{A_2}{A_0} = \log \frac{A_1}{A_2}$, άρα $\frac{A_1}{A_2} = 10^2 = 100$. Ο σεισμός των 7 βαθμών έχει **εκατό φορές** μεγαλύτερο πλάτος.

🔦 Λογαριθμικές κλίμακες

Όταν ένα μέγεθος παίρνει τιμές από πολύ μικρές έως τεράστιες (ήχος, σεισμοί, οξύτητα), χρησιμοποιούμε **λογαριθμική κλίμακα**. Κάθε μονάδα της κλίμακας σημαίνει **πολλαπλασιασμό** του μεγέθους επί 10, όχι πρόσθεση!



Συγχαρητήρια, ολοκλήρωσες όλη την ύλη της Άλγεβρας της Β' Λυκείου! Για επανάληψη, διαγωνίσματα προσομοίωσης και βιντεομαθήματα για κάθε ενότητα, επισκέψου το mathgreece.com: το πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο για κάθε μαθητή.

ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ – ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 5.3

$f(x) = \log_a x$	$(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, διέρχεται από τα $(1, 0)$ και $(a, 1)$, συμμετρική της a^x ως προς την $y = x$
Μονοτονία	$a > 1$: $\nearrow$ $0 < a < 1$: $\searrow$
Εξισώσεις	περιορισμοί στην αρχική : $\log_a A = \log_a B \Leftrightarrow A = B \cdot \log_a A = \kappa \Leftrightarrow A = a^\kappa$
Ανισώσεις	$a > 1$: ίδια φορά, $0 < a < 1$: αλλάζει η φορά, και συναλήθευση με τους περιορισμούς
Εκθετικές	$a^x = \beta \Leftrightarrow x = \log_a \beta = \frac{\ln \beta}{\ln a}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ 5.3

Δυσκολία: ★★☆☆ βασική ★★★ μέτρια ★★★★★ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- 1 ★★☆☆ Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f(x) = \log_3(5 - x)$ και $g(x) = \ln(x^2 - 9)$.
- 2 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $\log_5(2x + 1) = 2$.
- 3 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $\log(x + 2) = \log(3x - 4)$.
- 4 ★★☆☆ Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\log_{0,3} 2$ και $\log_{0,3} 5$.
- 5 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$.
- 6 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $\log^2 x - \log x - 2 = 0$.
- 7 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $\ln(x + 1) - \ln(x - 1) = \ln 3$.
- 8 ★★☆☆ Να λύσετε την ανίσωση $\log_2(x - 3) < 2$.
- 9 ★★☆☆ Να λύσετε την ανίσωση $\log_{\frac{1}{3}}(x + 1) > -2$.
- 10 ★★☆☆ Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $5^x = 3$ β) $2^x = 3^{x-1}$.
- 11 ★★☆☆ Να λύσετε την εξίσωση $2 \log x = \log(x + 6)$.
- 12 ★★☆☆ Ο χυμός λεμονιού έχει pH 2 και ο χυμός ντομάτας pH 4. Πόσες φορές μεγαλύτερη συγκέντρωση ιόντων H^+ έχει ο χυμός λεμονιού;

13
★★★

Ο πληθυσμός μιας καλλιέργειας είναι $N(t) = 1000 e^{0,1t}$ (t σε ώρες). Μετά από πόσες ώρες θα γίνει 5000; ($\ln 5 \approx 1,609$)

14
★★★

Να λύσετε την ανίσωση $\ln x + \ln(x - 1) \leq \ln 2$.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ · ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ

ΜΑΘΗΜΑ Ε

Επαναληπτικά Θέματα σε Όλη την Ύλη

Ε

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ

- ▶ να συνδυάζεις γνώσεις από διαφορετικά κεφάλαια, όπως γίνεται στα διαγωνίσματα και στις εξετάσεις,
- ▶ να αναγνωρίζεις ποιο «εργαλείο» ταιριάζει σε κάθε ερώτημα,
- ▶ να ελέγχεις την προετοιμασία σου πριν από τις τελικές εξετάσεις.

💡 Πώς να δουλέψεις τα επαναληπτικά θέματα

Κάθε θέμα συνδυάζει δύο ή περισσότερα κεφάλαια. Λύσε τα σαν να γράφεις διαγώνισμα: με χρονόμετρο, χωρίς να κοιτάς τη θεωρία, και με πλήρη αιτιολόγηση. Μετά σύγκρινε με τις λύσεις στο τέλος του βιβλίου και σημείωσε σε ποια μαθήματα πρέπει να επιστρέψεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΜΑΘΗΜΑ Ε

Δυσκολία: ★★☆☆ βασική ★★☆☆ μέτρια ★★☆☆ απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

- ★★★ (Συστήματα & Τριγωνομετρία) Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} (\eta\mu\theta)x + (\sigma\upsilon\nu\theta)y = 1 \\ (\sigma\upsilon\nu\theta)x - (\eta\mu\theta)y = 0 \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι έχει μοναδική λύση για κάθε θ και να τη βρείτε.

β) Αν (x_0, y_0) είναι η λύση του, να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x_0, y_0)$ ανήκει στον τριγωνομετρικό κύκλο.
- ★★★ (Πολυώνυμα & Τριγωνομετρία) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^3 x - 3\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 2 = 0$.
- ★★★ (Εκθετική & Πολυώνυμα) Να λύσετε την εξίσωση $2^{3x} - 7 \cdot 2^{2x} + 14 \cdot 2^x - 8 = 0$.
- ★★★ (Τριγωνομετρικές συναρτήσεις & μετατοπίσεις) Δίνεται η $f(x) = 2\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

α) Να εξηγήσετε πώς προκύπτει η C_f από τη γραφική παράσταση της $y = 2\eta\mu x$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών και την περίοδο της f .

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- ★★★ (Τριγωνομετρικές εξισώσεις & γωνία 2α) Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$.

- 6** ★★★ (Μη γραμμικά συστήματα & λογάριθμοι) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$
- 7** ★★★ (Μονοτονία & εκθετική) Δίνεται η $f(x) = e^x + x$.
 α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
 β) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2} + x^2 < e^{3x-2} + 3x - 2$.
- 8** ★★★ (Άρτιες -- περιττές & λογάριθμοι) Δίνεται η $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.
 α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
 β) Να αποδείξετε ότι είναι περιττή.
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 3$ και στη συνέχεια, χωρίς πράξεις, την $f(x) = -\ln 3$.
- 9** ★★★ (Πολυώνυμο & λογάριθμοι) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.
 α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $g(x) = \ln P(x)$.
 β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln P(x) = \ln(x-1) + \ln(x+2)$.
- 10** ★★★ (Διαίρεση πολυωνύμων) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = x^{100} + 3x^{51} - 2$ με το $x^2 - 1$.
- 11** ★★★ (Επίλυση τριγώνου) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\beta = 3$, $\gamma = 5$ και το εμβαδόν του είναι $E = \frac{15\sqrt{3}}{4}$.
 Να βρείτε τη γωνία A και την πλευρά a .
- 12** ★★★ (Εκθετική μεταβολή) Δύο καλλιέργειες βακτηρίων έχουν πληθυσμούς $A(t) = 1000 \cdot 2^t$ και $B(t) = 4000 \cdot (\sqrt{2})^t$, όπου t σε ώρες. Μετά από πόσες ώρες θα έχουν τον ίδιο πληθυσμό; Ποια καλλιέργεια θα είναι μεγαλύτερη μετά από αυτή τη στιγμή;



Θέλεις κι άλλα επαναληπτικά θέματα; Στο mathgreece.com θα βρεις **διαγωνίσματα προσομοίωσης** για όλη την ύλη της Άλγεβρας της Β' Λυκείου, με πλήρεις λύσεις σε βίντεο. Καλή επιτυχία!

Λύσεις των ασκήσεων

Οι λύσεις είναι γραμμένες όπως θα έπρεπε να γραφτούν σε ένα διαγώνισμα: με πλήρη αιτιολόγηση. Σε ορισμένες απλές ασκήσεις δίνεται συνοπτικά η πορεία και το αποτέλεσμα.

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – Συστήματα

1.1 Μάθημα 1.1: Γραμμικά Συστήματα

1.1.1 Λύνουμε ως προς y : $y = \frac{3}{2}x - 3$, άρα $\lambda = \frac{3}{2}$. Για $x = 0$ βρίσκουμε $y = -3$, οπότε τέμνει τον $y'y$ στο $(0, -3)$. Για $y = 0$ βρίσκουμε $x = 2$, οπότε τέμνει τον $x'x$ στο $(2, 0)$. Η ευθεία διέρχεται από τα δύο αυτά σημεία.

1.1.2 Πρέπει $\kappa \cdot 2 + 3(-1) = 5 \Leftrightarrow 2\kappa = 8 \Leftrightarrow \kappa = 4$.

1.1.3 Από την πρώτη, $x = 3y - 1$. Η δεύτερη δίνει $2(3y - 1) + y = 12 \Leftrightarrow 7y = 14 \Leftrightarrow y = 2$. Άρα $x = 5$ και η λύση είναι $(5, 2)$.

1.1.4 Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη επί 2: $10x + 4y = 2$. Προσθέτοντας με τη δεύτερη, $13x = 26$, άρα $x = 2$. Τότε $10 + 2y = 1$, οπότε $y = -\frac{9}{2}$. Η λύση είναι $(2, -\frac{9}{2})$.

1.1.5 $D = 12 - 10 = 2$, $D_x = 16 - 12 = 4$, $D_y = 18 - 20 = -2$. Άρα $x = \frac{4}{2} = 2$ και $y = \frac{-2}{2} = -1$, δηλαδή $(x, y) = (2, -1)$.

1.1.6 α) $D = 4 - 4 = 0$. Η δεύτερη εξίσωση είναι η πρώτη επί (-2) , άρα έχει άπειρες λύσεις, τις $(\kappa, 2\kappa - 3)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$. β) $D = 6 - 6 = 0$ και $D_x = 12 - 15 = -3 \neq 0$, άρα είναι αδύνατο. γ) $D = 1 + 1 = 2 \neq 0$, άρα έχει μοναδική λύση, την $(2, 1)$.

1.1.7 Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη επί 6: $2(2x - y) + 3(x + y) = 24 \Leftrightarrow 7x + y = 24$. Η δεύτερη γίνεται $3x - 6 - 2y + 2 = -1 \Leftrightarrow 3x - 2y = 3$. Από την πρώτη, $y = 24 - 7x$, οπότε $3x - 48 + 14x = 3$, άρα $17x = 51$ και $x = 3$. Τότε $y = 3$. Η λύση είναι $(3, 3)$.

1.1.8 $D = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$, $D_x = \lambda(\lambda + 1) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$, $D_y = 2\lambda - (\lambda + 1) = \lambda - 1$.
• Αν $\lambda \neq \pm 1$, έχει μοναδική λύση $x = \frac{\lambda+2}{\lambda+1}$, $y = \frac{1}{\lambda+1}$.
• Αν $\lambda = 1$, το σύστημα γίνεται $x + y = 2$ (δύο φορές η ίδια εξίσωση), άρα έχει άπειρες λύσεις $(\kappa, 2 - \kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.
• Αν $\lambda = -1$, το σύστημα γίνεται $-x + y = 0$ και $x - y = 2$. Προσθέτοντας παίρνουμε $0 = 2$, άρα είναι αδύνατο.

1.1.9 Πρέπει $D = D_x = D_y = 0$. Από $D_x = 4\beta - 12 = 0$ παίρνουμε $\beta = 3$, και από $D_y = 6\alpha - 12 = 0$ παίρ-

νουμε $\alpha = 2$. Τότε $D = \alpha\beta - 6 = 0$ ✓. Για $\alpha = 2$, $\beta = 3$ το σύστημα γίνεται $2x + 2y = 4$, $3x + 3y = 6$, δηλαδή δύο φορές η $x + y = 2$. Έχει λοιπόν άπειρες λύσεις. Άρα $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

1.1.10 Από την πρώτη, $z = x + 2y - 3$. Η δεύτερη δίνει $2x - y + 3x + 6y - 9 = 6 \Leftrightarrow x + y = 3$. Η τρίτη δίνει $3x + y + x + 2y - 3 = 8 \Leftrightarrow 4x + 3y = 11$. Με $x = 3 - y$ έχουμε $12 - 4y + 3y = 11$, άρα $y = 1$ και $x = 2$. Τέλος $z = 2 + 2 - 3 = 1$. Η λύση είναι $(2, 1, 1)$.

1.1.11 Έστω α η τιμή του εισιτηρίου ενηλίκου και π του παιδικού. Τότε $2\alpha + 3\pi = 36$ και $3\alpha + \pi = 33$. Από τη δεύτερη, $\pi = 33 - 3\alpha$, οπότε $2\alpha + 99 - 9\alpha = 36$, άρα $\alpha = 9$ και $\pi = 6$. Το εισιτήριο ενηλίκου κοστίζει 9 € και το παιδικό 6 €.

1.1.12 Έστω x το ψηφίο των δεκάδων και y των μονάδων. Ο αριθμός είναι $10x + y$. Ισχύουν $x + y = 11$ και $(10y + x) - (10x + y) = 27$, δηλαδή $9(y - x) = 27$, οπότε $y - x = 3$. Λύνοντας, $y = 7$ και $x = 4$. Ο αριθμός είναι ο 47 (πράγματι $74 - 47 = 27$).

1.1.13 α) $D = 1 - \lambda^2$, $D_x = 1 - \lambda^3 = (1 - \lambda)(1 + \lambda + \lambda^2)$, $D_y = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$. Αν $\lambda \neq \pm 1$: $x = \frac{1+\lambda+\lambda^2}{1+\lambda}$, $y = \frac{-\lambda}{1+\lambda}$. Αν $\lambda = 1$: το σύστημα είναι η $x + y = 1$ δύο φορές, άρα έχει άπειρες λύσεις $(1 - \kappa, \kappa)$. Αν $\lambda = -1$: το σύστημα είναι $x - y = 1$ και $-x + y = 1$, οπότε είναι αδύνατο. β) Με $\lambda \neq \pm 1$: $x_0 + y_0 = \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda} = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 = \lambda \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 1$. Η $\lambda = 1$ απορρίπτεται, γιατί δεν δίνει μοναδική λύση. Άρα $\lambda = 0$.

1.1.14 Πρέπει $x, y \neq 0$. Με $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$ το σύστημα γίνεται $2u + 3v = 2$, $4u - 3v = 1$. Προσθέτοντας, $6u = 3$, άρα $u = \frac{1}{2}$. Τότε $3v = 2 - 1 = 1$, άρα $v = \frac{1}{3}$. Επομένως $x = 2$, $y = 3$.

1.1.15 Από το Α: $\gamma = -3$. Από το Β: $\alpha + \beta - 3 = 0$, δηλαδή $\alpha + \beta = 3$. Από το Γ: $\alpha - \beta - 3 = -4$, δηλαδή $\alpha - \beta = -1$. Λύνοντας, $\alpha = 1$ και $\beta = 2$. Άρα $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

1.2 Μάθημα 1.2: Μη Γραμμικά Συστήματα

1.2.1 $x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -1$. Λύσεις: $(3, 9)$ και $(-1, 1)$.

1.2.2 Οι x, y είναι ρίζες της $t^2 - 5t + 6 = 0$, δηλαδή 2 και 3. Λύσεις: $(2, 3)$ και $(3, 2)$.

1.2.3 $x^2 + 4x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Από τη $y = 2x$ βρίσκουμε τις λύσεις $(1, 2)$ και $(-1, -2)$.

1.2.4 $x = y + 2$, οπότε $y^2 + 2y - 15 = 0 \Leftrightarrow y = 3$ ή $y = -5$. Λύσεις: $(5, 3)$ και $(-3, -5)$.

1.2.5 $2xy = (x+y)^2 - (x^2 + y^2) = 36 - 20 = 16$, άρα $xy = 8$. Οι x, y είναι ρίζες της $t^2 - 6t + 8 = 0$, δηλαδή 2 και 4. Λύσεις: $(2, 4)$ και $(4, 2)$.

1.2.6 Η πρώτη γράφεται $x(x+y) = 12$, άρα $4x = 12$ και $x = 3$. Τότε $y = 1$. Λύση: $(3, 1)$.

1.2.7 $(x-y)(x+y) = 21$, άρα $3(x+y) = 21$ και $x+y = 7$. Με $x-y = 3$ βρίσκουμε $x = 5, y = 2$. Λύση: $(5, 2)$.

1.2.8 Από την ευθεία, $x = -\frac{4y}{3}$. Τότε $\frac{16y^2}{9} + y^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{25y^2}{9} = 25 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3$. Για $y = 3$ βρίσκουμε $x = -4$ και για $y = -3$ βρίσκουμε $x = 4$. Τα κοινά σημεία είναι τα $(-4, 3)$ και $(4, -3)$.

1.2.9 $x^2 + 1 = 2x + \kappa \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - \kappa = 0$. Πρέπει $\Delta = 4 - 4(1 - \kappa) = 4\kappa = 0$, άρα $\kappa = 0$. Τότε $x^2 - 2x + 1 = 0$, δηλαδή $x = 1$, και $y = 2$. Το κοινό σημείο είναι το $(1, 2)$.

1.2.10 $x + y = 14$ και $xy = 48$. Οι x, y είναι ρίζες της $t^2 - 14t + 48 = 0$, δηλαδή 6 και 8. Οι διαστάσεις είναι 6 m και 8 m.

1.2.11 $(x+y)^2 = 17 + 8 = 25$, άρα $x+y = \pm 5$. Αν $x+y = 5$, οι x, y είναι ρίζες της $t^2 - 5t + 4 = 0$, δηλαδή 1 και 4. Αν $x+y = -5$, είναι ρίζες της $t^2 + 5t + 4 = 0$, δηλαδή -1 και -4. Λύσεις: $(1, 4), (4, 1), (-1, -4), (-4, -1)$.

1.2.12 Πρέπει $x, y \neq 0$. Έχουμε $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{5}{xy} = \frac{5}{6}$, άρα $xy = 6$. Οι x, y είναι ρίζες της $t^2 - 5t + 6 = 0$, δηλαδή 2 και 3. Λύσεις: $(2, 3)$ και $(3, 2)$. Και οι δύο είναι δεκτές.

1.2.13 Αν $x, y > 0$ είναι οι κάθετες πλευρές, τότε $x^2 + y^2 = 100$ και $\frac{xy}{2} = 24$, δηλαδή $xy = 48$. Έχουμε $(x+y)^2 = 100 + 96 = 196$, και αφού $x+y > 0, x+y = 14$. Οι x, y είναι ρίζες της $t^2 - 14t + 48 = 0$, δηλαδή 6 και 8. Οι κάθετες πλευρές είναι 6 cm και 8 cm.

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – Ιδιότητες Συναρτήσεων

2.1 Μάθημα 2.1: Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρικές Συνάρτησης

2.1.1 Αν $x_1 < x_2$, τότε $5x_1 < 5x_2$, άρα $5x_1 - 7 <$

$5x_2 - 7$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$.

2.1.2 Αν $x_1 < x_2$, τότε $x_1^3 < x_2^3$, άρα $-x_1^3 > -x_2^3$ και $-x_1^3 + 1 > -x_2^3 + 1$, δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$.

2.1.3 Αν $x_1 < x_2 \leq -2$, τότε $x_1 + 2 < x_2 + 2 \leq 0$. Τα μέλη είναι μη θετικά, οπότε πολλαπλασιάζοντας με -1 έχουμε $0 \leq -(x_2 + 2) < -(x_1 + 2)$ και, υψώνοντας στο τετράγωνο, $(x_2 + 2)^2 < (x_1 + 2)^2$. Δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$.

2.1.4 $f: A = \mathbb{R}$ και $f(-x) = 3x^2 - |x| = f(x)$, άρα είναι άρτια. $g: g(-x) = -x^5 - 2x^3 = -g(x)$, άρα είναι περιττή. $h: h(1) = 2$ και $h(-1) = 0$, οπότε $h(-1) \neq \pm h(1)$ και η h δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή. $k: A = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, που είναι συμμετρικό, και $k(-x) = \frac{1}{x^2-4} = k(x)$, άρα είναι άρτια.

2.1.5 $f(x) = (x+2)^2 + 3 \geq 3$, με ισότητα για $x = -2$. Η ελάχιστη τιμή είναι $f(-2) = 3$.

2.1.6 $f(x) = -2(x^2 - 4x) - 3 = -2(x-2)^2 + 8 - 3 = -2(x-2)^2 + 5 \leq 5$, με ισότητα για $x = 2$. Η μέγιστη τιμή είναι $f(2) = 5$.

2.1.7 $A = [1, +\infty)$. Αν $1 \leq x_1 < x_2$, τότε $0 \leq x_1 - 1 < x_2 - 1$, άρα $\sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1}$ και $f(x_1) < f(x_2)$. Επειδή $\sqrt{x-1} \geq 0$, έχουμε $f(x) \geq 3 = f(1)$. Η ελάχιστη τιμή είναι 3, στο $x = 1$.

2.1.8 α) Αν $x_1 < x_2$, τότε $x_1^3 < x_2^3$ και $2x_1 < 2x_2$. Προσθέτοντας κατά μέλη και αφαιρώντας 3: $f(x_1) < f(x_2)$. β) $f(1) = 1 + 2 - 3 = 0$. Επομένως $f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow x > 1$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

2.1.9 $f(-x) = -(\alpha - 1)x^3 + \beta x^2 - x$ και $-f(x) = -(\alpha - 1)x^3 - \beta x^2 - x$. Πρέπει $\beta x^2 = -\beta x^2$ για κάθε x , δηλαδή $2\beta x^2 = 0$ για κάθε x . Άρα $\beta = 0$.

2.1.10 α) $A = \mathbb{R}$ και $f(-x) = \frac{-x}{x^2+1} = -f(x)$. β) Ισχύει $f(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$, που αληθεύει, με ισότητα για $x = 1$. Ομοίως $f(x) \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0$, με ισότητα για $x = -1$. Επομένως η μέγιστη τιμή είναι $f(1) = \frac{1}{2}$ και η ελάχιστη $f(-1) = -\frac{1}{2}$.

2.1.11 α) Επειδή $3,14 < \pi$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, $f(3,14) > f(\pi)$. β) $f(x^2) < f(4) \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 2$.

2.1.12 Έστω $x_1 < x_2 \leq 0$. Τότε $0 \leq -x_2 < -x_1$, και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, $f(-x_2) < f(-x_1)$. Επειδή η f είναι περιττή, αυτό γράφεται $-f(x_2) < -f(x_1)$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$.

2.1.13 α) $f(-x) = (-x)|-x| = -x|x| = -f(x)$. β) Στο $[0, +\infty)$ έχουμε $f(x) = x^2$, που είναι γνησίως αύξουσα

εκεί. Από την προηγούμενη άσκηση, η f είναι γνησίως αύξουσα και στο $(-\infty, 0]$. Μένει η περίπτωση $x_1 < 0 < x_2$: τότε $f(x_1) = -x_1^2 < 0 < x_2^2 = f(x_2)$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

2.2 Μάθημα 2.2: Κατακόρυφη – Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

2.2.1 Η $y = x^2 - 5$ προκύπτει με μετατόπιση 5 μονάδες κάτω, και έχει κορυφή $(0, -5)$. Η $y = (x+4)^2$ προκύπτει με μετατόπιση 4 μονάδες αριστερά, και έχει κορυφή $(-4, 0)$.

2.2.2 Η C_f προκύπτει από την $y = |x|$ με μετατόπιση 1 δεξιά και 3 πάνω, και έχει κορυφή $(1, 3)$. Επειδή $|x-1| \geq 0$, ισχύει $f(x) \geq 3 = f(1)$. Η ελάχιστη τιμή είναι 3.

2.2.3 $f(x) = (x+3)^2 - 4$. Η C_f προκύπτει με μετατόπιση 3 αριστερά και 4 κάτω. Η κορυφή είναι το $(-3, -4)$ και η ελάχιστη τιμή είναι -4 .

2.2.4 $A = \mathbb{R} - \{3\}$. Η C_g προκύπτει από την $y = \frac{2}{x}$ με μετατόπιση 3 δεξιά και 1 κάτω. Οι ασύμπτωτες είναι οι ευθείες $x = 3$ και $y = -1$.

2.2.5 $g(x) = f(x+1) - 2$, άρα $f(x+1) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Επομένως $f(x) = x^2$.

2.2.6 $A = [-4, +\infty)$ και σύνολο τιμών $[-2, +\infty)$. Τομή με τον y' : $f(0) = 2 - 2 = 0$. Τομή με τον x' : $\sqrt{x+4} = 2 \Leftrightarrow x = 0$. Η C_f διέρχεται λοιπόν από την αρχή $O(0, 0)$, και αυτό είναι το μοναδικό κοινό της σημείο με τους άξονες.

2.2.7 Η $y = |x-3| - 2$ έχει κορυφή $(3, -2)$ και τέμνει τον x' στα $x = 1$ και $x = 5$. Βρίσκεται πάνω από τον άξονα ή πάνω σε αυτόν για $x \leq 1$ ή $x \geq 5$. Αλγεβρικά: $|x-3| \geq 2 \Leftrightarrow x-3 \leq -2$ ή $x-3 \geq 2 \Leftrightarrow x \leq 1$ ή $x \geq 5$.

2.2.8 $(x-1)^2 + \kappa = 2x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 + \kappa = 0$. Πρέπει $\Delta = 16 - 4(1 + \kappa) = 0$, άρα $\kappa = 3$. Τότε $x^2 - 4x + 4 = 0$, δηλαδή $x = 2$, και $y = 4$. Το σημείο επαφής είναι το $(2, 4)$.

2.2.9 Η C_h προκύπτει από την $y = \frac{1}{x}$ με μετατόπιση κατά α οριζόντια και β κατακόρυφα, οπότε οι ασύμπτωτες είναι οι $x = \alpha$ και $y = \beta$. Άρα $\alpha = 2$ και $\beta = -1$. Τομή με τον x' : $\frac{1}{x-2} = 1 \Leftrightarrow x = 3$, δηλαδή το σημείο $(3, 0)$.

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – Τριγωνομετρία

3.1 Μάθημα 3.1: Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας

3.1.1 $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$, $210^\circ = \frac{7\pi}{6}$, $330^\circ = \frac{11\pi}{6}$.

3.1.2 $\frac{\pi}{5} = 36^\circ$, $\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$, $\frac{5\pi}{3} = 300^\circ$, $\frac{7\pi}{12} = 105^\circ$.

3.1.3 $\rho = \sqrt{25 + 144} = 13$. Άρα $\eta\mu \omega = -\frac{12}{13}$, $\sigma\upsilon\nu \omega = \frac{5}{13}$, $\epsilon\varphi \omega = -\frac{12}{5}$, $\sigma\varphi \omega = -\frac{5}{12}$.

3.1.4 130° : 2ο τεταρτημόριο, άρα $\eta\mu > 0$. 250° : 3ο, άρα $\sigma\upsilon\nu < 0$. 300° : 4ο, άρα $\epsilon\varphi < 0$. -50° : 4ο, άρα $\sigma\varphi < 0$.

3.1.5 $750 = 2 \cdot 360 + 30$, άρα $\eta\mu 750^\circ = \frac{1}{2}$. $\sigma\upsilon\nu(-720^\circ) = \sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1$. $1125 = 3 \cdot 360 + 45$, άρα $\epsilon\varphi 1125^\circ = 1$. $\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$, άρα $\eta\mu \frac{13\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

3.1.6 $A = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot 1 + 1 = 1 + \frac{3}{2} - 1 + 1 = \frac{5}{2}$.

3.1.7 Πρέπει $-1 \leq \frac{\alpha+1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \alpha+1 \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq \alpha \leq 1$.

3.1.8 Το ημίτονο είναι αρνητικό στο 3ο και στο 4ο τεταρτημόριο, ενώ η εφαπτομένη είναι θετική στο 1ο και στο 3ο. Άρα η ω βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο, όπου $\sigma\upsilon\nu \omega < 0$.

3.1.9 $\epsilon\varphi 60^\circ = \frac{h}{4}$, άρα $h = 4\sqrt{3} \approx 6,93$ m.

3.1.10 Αν d είναι η τελική απόσταση από τη βάση, τότε $h = d \cdot \epsilon\varphi 45^\circ = d$ και $h = (d+40) \epsilon\varphi 30^\circ = \frac{d+40}{\sqrt{3}}$. Άρα $d\sqrt{3} = d+40$, οπότε $d = \frac{40}{\sqrt{3}-1} = 20(\sqrt{3}+1)$. Επομένως $h = 20(\sqrt{3}+1) \approx 54,64$ m.

3.1.11 Σε 60 λεπτά ο λεπτοδείκτης κάνει μια πλήρη στροφή (360°), άρα σε 80 λεπτά διαγράφει $\frac{80}{60} \cdot 360^\circ = 480^\circ$. Η στροφή γίνεται όπως οι δείκτες του ρολογιού, οπότε η γωνία είναι αρνητική: $-480^\circ = -\frac{8\pi}{3}$ rad.

3.2 Μάθημα 3.2: Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

3.2.1 $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$. Στο 4ο τεταρτημόριο $\sigma\upsilon\nu x > 0$, άρα $\sigma\upsilon\nu x = \frac{12}{13}$. Τότε $\epsilon\varphi x = -\frac{5}{12}$ και $\sigma\varphi x = -\frac{12}{5}$.

3.2.2 $\eta\mu^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. Στο 3ο τεταρτημόριο $\eta\mu x < 0$, άρα $\eta\mu x = -\frac{4}{5}$. Τότε $\epsilon\varphi x = \frac{4}{3}$ και $\sigma\varphi x = \frac{3}{4}$.

3.2.3 $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$, άρα $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{16}{25}$. Στο 2ο τεταρτημόριο $\sigma\upsilon\nu x < 0$, άρα $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{4}{5}$. Τότε $\eta\mu x = \epsilon\varphi x \sigma\upsilon\nu x = \frac{3}{5}$.

3.2.4 $(1 + \eta\mu x)(1 - \eta\mu x) = 1 - \eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\nu^2 x$.

3.2.5 $\epsilon\varphi^2 x - \eta\mu^2 x = \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \eta\mu^2 x = \frac{\eta\mu^2 x(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu^2 x \cdot \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \epsilon\varphi^2 x \eta\mu^2 x$.

$$\text{3.2.6} \quad \text{Κάνουμε} \quad \text{ομώνυμα:} \quad \frac{\eta\mu^2 x + (1 + \sigma\upsilon\nu x)^2}{\eta\mu x(1 + \sigma\upsilon\nu x)} = \frac{\eta\mu^2 x + 1 + 2\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x(1 + \sigma\upsilon\nu x)} = \frac{2 + 2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x(1 + \sigma\upsilon\nu x)} = \frac{2(1 + \sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x(1 + \sigma\upsilon\nu x)} = \frac{2}{\eta\mu x}.$$

$$\text{3.2.7} \quad A = \frac{(\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x)(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x} = \frac{(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x.$$

$$\text{3.2.8} \quad \text{Υψώνοντας στο τετράγωνο:} \quad 1 - 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{9}, \text{ άρα } \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{9}.$$

$$\text{3.2.9} \quad \frac{1}{1 + \epsilon\varphi^2 x} = \sigma\upsilon\nu^2 x \text{ και } \frac{1}{1 + \sigma\varphi^2 x} = \eta\mu^2 x. \text{ Το άθροισμα είναι } \sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x = 1.$$

$$\text{3.2.10} \quad \text{Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με } \sigma\upsilon\nu^2 x \text{ και χρησιμοποιούμε την } \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1 + \epsilon\varphi^2 x: \\ B = \frac{\epsilon\varphi^2 x - \epsilon\varphi x}{(1 + \epsilon\varphi^2 x) + 1} = \frac{4 + 2}{5 + 1} = 1.$$

$$\text{3.2.11} \quad \eta\mu \theta = x - 2 \text{ και } \sigma\upsilon\nu \theta = 1 - y, \text{ οπότε } (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1. \text{ Το σημείο } (x, y) \text{ βρίσκεται στον κύκλο με κέντρο } (2, 1) \text{ και ακτίνα } 1.$$

$$\text{3.2.12} \quad 1 = (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^3 = \eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x + 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) = \eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x + 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x.$$

3.3 Μάθημα 3.3: Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο

$$\text{3.3.1} \quad \eta\mu 135^\circ = \eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sigma\upsilon\nu 240^\circ = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ = -\frac{1}{2}, \epsilon\varphi 150^\circ = -\epsilon\varphi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \eta\mu 300^\circ = -\eta\mu 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sigma\upsilon\nu(-45^\circ) = \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{3.3.2} \quad \eta\mu \frac{5\pi}{6} = \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3} = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \epsilon\varphi \frac{7\pi}{4} = -\epsilon\varphi \frac{\pi}{4} = -1, \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{3.3.3} \quad 870 = 2 \cdot 360 + 150, \text{ άρα } \eta\mu 870^\circ = \eta\mu 150^\circ = \frac{1}{2}, 1020 = 2 \cdot 360 + 300, \text{ άρα } \sigma\upsilon\nu 1020^\circ = \sigma\upsilon\nu 300^\circ = \frac{1}{2}, \epsilon\varphi(-1140^\circ) = -\epsilon\varphi 1140^\circ = -\epsilon\varphi 60^\circ = -\sqrt{3}, \text{ αφού } 1140 = 3 \cdot 360 + 60.$$

$$\text{3.3.4} \quad A = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -1.$$

$$\text{3.3.5} \quad B = \frac{(-\sigma\upsilon\nu x)(-\epsilon\varphi x)}{-\eta\mu x} = -\frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{\eta\mu x} = -1.$$

$$\text{3.3.6} \quad \Gamma = \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + (-\eta\mu x) \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x.$$

$$\text{3.3.7} \quad \eta\mu 80^\circ = \eta\mu(90^\circ - 10^\circ) = \sigma\upsilon\nu 10^\circ, \text{ άρα η παράσταση είναι } \eta\mu^2 10^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 10^\circ = 1.$$

$$\text{3.3.8} \quad \sigma\upsilon\nu 170^\circ = -\sigma\upsilon\nu 10^\circ \text{ και } \sigma\upsilon\nu 130^\circ = -\sigma\upsilon\nu 50^\circ, \text{ οπότε οι όροι ανά δύο είναι αντίθετοι και } \Sigma = 0.$$

$$\text{3.3.9} \quad A + B = \pi - \Gamma, \text{ άρα } \epsilon\varphi(A + B) = \epsilon\varphi(\pi - \Gamma) = -\epsilon\varphi \Gamma, \text{ οπότε } \epsilon\varphi(A + B) + \epsilon\varphi \Gamma = 0. \text{ Επίσης } \frac{A+B}{2} = \frac{\pi - \Gamma}{2}, \text{ άρα } \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} = \eta\mu \frac{\Gamma}{2}.$$

$$\text{3.3.10} \quad \text{Επειδή } \epsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi \omega, \text{ έχουμε } \epsilon\varphi \omega \cdot \epsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \epsilon\varphi \omega \sigma\varphi \omega = 1. \text{ Ζευγαρώνουμε τους παράγοντες } 1^\circ \text{ με } 89^\circ, 2^\circ \text{ με } 88^\circ, \dots, 44^\circ \text{ με } 46^\circ, \text{ και κάθε ζεύγος δίνει γινόμενο } 1. \text{ Μένει ο παράγοντας } \epsilon\varphi 45^\circ = 1. \text{ Άρα } \Pi = 1.$$

3.4 Μάθημα 3.4: Οι Τριγωνομετρικές Συνάρτησεις

$$\text{3.4.1} \quad f: T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \text{ μέγιστο } 5, \text{ ελάχιστο } -5. g: T = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi, \text{ μέγιστο } \frac{1}{2}, \text{ ελάχιστο } -\frac{1}{2}. h: \text{ η } \epsilon\varphi \text{ έχει περίοδο } \pi, \text{ άρα η } \epsilon\varphi 2x \text{ έχει περίοδο } \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{3.4.2} \quad -1 \leq \eta\mu x \leq 1, \text{ άρα } 0 \leq f(x) \leq 2, \text{ και το σύνολο τιμών είναι το } [0, 2]. -1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1, \text{ άρα } -2 \leq -2\sigma\upsilon\nu x \leq 2 \text{ και } 1 \leq g(x) \leq 5, \text{ οπότε το σύνολο τιμών είναι το } [1, 5].$$

$$\text{3.4.3} \quad \alpha) \text{ Η } \eta\mu \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \text{ και } \frac{2\pi}{3} < \frac{3\pi}{4}, \text{ άρα } \eta\mu \frac{2\pi}{3} > \eta\mu \frac{3\pi}{4}. \beta) \text{ Η } \epsilon\varphi \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και } 1 < 1,2 < \frac{\pi}{2} \approx 1,57, \text{ άρα } \epsilon\varphi 1 < \epsilon\varphi 1,2.$$

$$\text{3.4.4} \quad T = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi. \text{ Στα σημεία } 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi \text{ η } f \text{ παίρνει τις τιμές } 0, 3, 0, -3, 0. \text{ Ενώνουμε τα σημεία με ημιτονοειδή καμπύλη.}$$

$$\text{3.4.5} \quad \rho = 4 \text{ και } \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{3}, \text{ άρα } \omega = 6. \text{ Τότε } f\left(\frac{\pi}{9}\right) = 4 \sigma\upsilon\nu \frac{6\pi}{9} = 4 \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

$$\text{3.4.6} \quad \text{Η μέγιστη τιμή της } (\alpha - 1) \eta\mu 2x \text{ είναι } |\alpha - 1|. \text{ Πρέπει } |\alpha - 1| = 3, \text{ άρα } \alpha = 4 \text{ ή } \alpha = -2.$$

$$\text{3.4.7} \quad f(-x) = \eta\mu(-x) + \eta\mu(-3x) = -\eta\mu x - \eta\mu 3x = -f(x). \text{ Επίσης } f(x + 2\pi) = \eta\mu(x + 2\pi) + \eta\mu(3x + 6\pi) = \eta\mu x + \eta\mu 3x = f(x).$$

$$\text{3.4.8} \quad \text{Επειδή } -1 \leq \sigma\upsilon\nu \frac{\pi t}{12} \leq 1, \text{ έχουμε } 12 \leq \theta(t) \leq 24. \text{ Ελάχιστη θερμοκρασία } 12^\circ\text{C} \text{ όταν } \sigma\upsilon\nu \frac{\pi t}{12} = 1, \text{ δηλαδή } t = 0 \text{ ή } t = 24 \text{ (μεσάνυχτα)}. \text{ Μέγιστη θερμοκρασία } 24^\circ\text{C} \text{ όταν } \sigma\upsilon\nu \frac{\pi t}{12} = -1, \text{ δηλαδή } \frac{\pi t}{12} = \pi, \text{ άρα } t = 12 \text{ (μεσημέρι)}.$$

$$\text{3.4.9} \quad \text{Θέτουμε } u = \eta\mu x \in [-1, 1]. \text{ Τότε } f = u^2 - 2u + 3 = (u - 1)^2 + 2. \text{ Στο } [-1, 1] \text{ η παράσταση } (u - 1)^2 \text{ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η ελάχιστη τιμή είναι } 2 \text{ (για } u = 1, \text{ δηλαδή } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \text{ και η μέγιστη είναι } (-2)^2 + 2 = 6 \text{ (για } u = -1, \text{ δηλαδή } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi).$$

3.5 Μάθημα 3.5: Βασικές Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

$$\text{3.5.1} \quad \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{3.5.2} \quad \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{3.5.3} \quad \epsilon\varphi x = \epsilon\varphi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

3.5.4 $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3}$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{4\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

3.5.5 α) $2x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$. β) $\frac{x}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 4\kappa\pi + \pi$. γ) Αδύνατη, γιατί $\frac{\pi}{2} > 1$.

3.5.6 $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3}$. Στο $[0, 2\pi]$ παίρνουμε μόνο $\kappa = 0$ και στις δύο περιπτώσεις, οπότε οι λύσεις είναι $x = \frac{\pi}{3}$ και $x = \frac{2\pi}{3}$.

3.5.7 $x + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}$. Άρα $x = 2\kappa\pi$ ή $x = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

3.5.8 $2x = 2\kappa\pi + x + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$, ή $2x = 2\kappa\pi + \pi - x - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 3x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

3.5.9 $3x = 2\kappa\pi \pm x$. Με το +: $2x = 2\kappa\pi$, άρα $x = \kappa\pi$. Με το -: $4x = 2\kappa\pi$, άρα $x = \frac{\kappa\pi}{2}$. Η δεύτερη οικογένεια περιέχει την πρώτη, οπότε όλες οι λύσεις είναι $x = \frac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

3.5.10 Με $u = \sin x$: $2u^2 - u - 1 = 0$, άρα $u = 1$ ή $u = -\frac{1}{2}$. Για $\sin x = 1$: $x = 2\kappa\pi$. Για $\sin x = -\frac{1}{2}$: $\sin \frac{2\pi}{3}: x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}$.

3.5.11 $\eta\mu^2 x = \frac{3}{4}$, άρα $\eta\mu x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Από την $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3}$. Από την $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$: $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{4\pi}{3}$. Συνολικά: $x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

3.5.12 $\eta\mu x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, άρα $2x = 2\kappa\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Με το +: $3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, άρα $x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$. Με το -: $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$. Η δεύτερη οικογένεια περιέχεται στην πρώτη (για $\kappa = 3\lambda - 1$), οπότε αρκεί να γράψουμε $x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

3.5.13 $2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 2$ (απορρίπτεται) ή $\sin x = -\frac{1}{2}$. Άρα $x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

3.5.14 $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$. Για $\kappa = 0, 1$ παίρνουμε τις λύσεις $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$. Για άλλες τιμές του κ βγαίνουμε από το διάστημα.

3.6 Μάθημα 3.6: Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Αθροίσματος Γωνιών

3.6.1 $\eta\mu 15^\circ = \eta\mu(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Επίσης $\sin 75^\circ = \eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

3.6.2 $\eta\mu(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

3.6.3 α) $\sin(80^\circ - 20^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}$. β) $\eta\mu(50^\circ + 10^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.6.4 Είναι το $\epsilon\phi(25^\circ + 20^\circ) = \epsilon\phi 45^\circ = 1$.

3.6.5 $\eta\mu \alpha = \frac{3}{5}$ (2ο τεταρτημόριο) και $\sin \beta = -\frac{5}{13}$ (3ο τεταρτημόριο). Τότε $\sin(\alpha - \beta) = \left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) + \frac{3}{5}\left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{20-36}{65} = -\frac{16}{65}$ και $\eta\mu(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{13}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{-15+48}{65} = \frac{33}{65}$.

3.6.6 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\eta\mu x + \sin x) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \eta\mu x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\eta\mu x = \sqrt{2}\eta\mu x$.

3.6.7 Το γινόμενο είναι $(\sin \alpha \sin \beta)^2 - (\eta\mu \alpha \eta\mu \beta)^2 = \sin^2 \alpha (1 - \eta\mu^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \eta\mu^2 \beta = \sin^2 \alpha - \eta\mu^2 \beta$.

3.6.8 Το πρώτο μέλος είναι το $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Άρα $x + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, δηλαδή $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

3.6.9 $\epsilon\phi(\alpha + \beta) = \frac{2+3}{1-6} = -1$. Επειδή $\epsilon\phi \alpha > 1$ και $\epsilon\phi \beta > 1$, έχουμε $\alpha, \beta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε $\alpha + \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Στο διάστημα αυτό η μόνη γωνία με εφαπτομένη -1 είναι η $\frac{3\pi}{4}$.

3.6.10 $A + B = \pi - \Gamma$, άρα $\epsilon\phi(A + B) = -\epsilon\phi \Gamma$, δηλαδή $\frac{\epsilon\phi A + \epsilon\phi B}{1 - \epsilon\phi A \epsilon\phi B} = -\epsilon\phi \Gamma$. Επομένως $\epsilon\phi A + \epsilon\phi B = -\epsilon\phi \Gamma + \epsilon\phi A \epsilon\phi B \epsilon\phi \Gamma$, που είναι η ζητούμενη σχέση.

3.6.11 $\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \eta\mu x$ και $\sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \eta\mu x$. Το άθροισμα αυτών των δύο είναι $-\sin x$. Μαζί με τον πρώτο όρο, η παράσταση είναι 0.

3.7 Μάθημα 3.7: Τριγωνομετρικοί Αριθμοί της Γωνίας 2α

3.7.1 $\eta\mu \alpha = -\frac{5}{13}$ (4ο τεταρτημόριο). Τότε $\eta\mu 2\alpha = 2\left(-\frac{5}{13}\right)\frac{12}{13} = -\frac{120}{169}$, $\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{144}{169} - 1 = \frac{119}{169}$ και $\epsilon\phi 2\alpha = -\frac{120}{119}$.

3.7.2 α) $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$. β) $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. γ) $\epsilon\phi 45^\circ = 1$.

3.7.3 $\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x \sin x + \sin^2 x = 1 + \eta\mu 2x$.

3.7.4 $\eta\mu^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \sin \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$. Επειδή $\eta\mu \frac{\pi}{12} > 0$, έχουμε $\eta\mu \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$. (Ισούται με $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, όπως βρήκαμε στο Μάθημα 3.6.)

3.7.5 $(\sin^2 x - \eta\mu^2 x)(\sin^2 x + \eta\mu^2 x) = \sin 2x \cdot 1 = \sin 2x$.

3.7.6 $\frac{2\eta\mu x \sin x}{2\sin^2 x} = \frac{\eta\mu x}{\sin x} = \epsilon\phi x$.

3.7.7 $2\sin^2 x - 1 = \sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1$ ή $\sin x = -\frac{1}{2}$. Άρα $x = 2\kappa\pi$ ή $x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

3.7.8 $\eta\mu x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$. Από την $\eta\mu x = 0$: $x = \kappa\pi$. Από την $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}$.

3.7.9 $\eta\mu 2x = \frac{2 \cdot 2}{1+4} = \frac{4}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu 2x = \frac{1-4}{1+4} = -\frac{3}{5}$.

3.7.10 $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = \sigma\upsilon\nu 2\alpha \sigma\upsilon\nu \alpha - \eta\mu 2\alpha \eta\mu \alpha = (2\sigma\upsilon\nu^2 \alpha - 1)\sigma\upsilon\nu \alpha - 2\eta\mu^2 \alpha \sigma\upsilon\nu \alpha = 2\sigma\upsilon\nu^3 \alpha - \sigma\upsilon\nu \alpha - 2(1 - \sigma\upsilon\nu^2 \alpha)\sigma\upsilon\nu \alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3 \alpha - 3\sigma\upsilon\nu \alpha$.

3.7.11 $f(x) = 2\eta\mu 2x + 1$. Η περίοδος είναι $T = \pi$. Επειδή $-1 \leq \eta\mu 2x \leq 1$, έχουμε $-1 \leq f(x) \leq 3$. Η μέγιστη τιμή 3 επιτυγχάνεται για $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ και η ελάχιστη -1 για $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$.

3.7.12 $\frac{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2}{(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)} = \frac{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}$. Διααιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με $\sigma\upsilon\nu x$ και παίρνουμε $\frac{1+\epsilon\varphi x}{1-\epsilon\varphi x}$.

3.8 Μάθημα 3.8: Μετασχηματισμοί Τριγωνομετρικών Παραστάσεων

3.8.1 α) $\eta\mu 4x + \eta\mu 2x$. β) $\sigma\upsilon\nu 7x + \sigma\upsilon\nu 3x$.

3.8.2 $2\eta\mu 45^\circ \sigma\upsilon\nu 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.8.3 $2\sigma\upsilon\nu 60^\circ \sigma\upsilon\nu 45^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.8.4 $\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 3x = -2\eta\mu 2x \eta\mu(-x) = 2\eta\mu 2x \eta\mu x$ και $\eta\mu 3x - \eta\mu x = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu 2x$. Το πηλίκο είναι $\frac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x} = \epsilon\varphi 2x$.

3.8.5 $2\eta\mu 2x \sigma\upsilon\nu 3x = 0$. Από την $\eta\mu 2x = 0$: $x = \frac{\kappa\pi}{2}$. Από την $\sigma\upsilon\nu 3x = 0$: $x = \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

3.8.6 $2\sigma\upsilon\nu 2x \sigma\upsilon\nu x = 0$. Από την $\sigma\upsilon\nu 2x = 0$: $x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$. Από την $\sigma\upsilon\nu x = 0$: $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

3.8.7 $\eta\mu 5x + \eta\mu x = 2\eta\mu 3x \sigma\upsilon\nu 2x$. Προσθέτοντας το $\eta\mu 3x$ παίρνουμε $\eta\mu 3x(2\sigma\upsilon\nu 2x + 1)$.

3.8.8 $\eta\mu 20^\circ \eta\mu 40^\circ = \frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu 20^\circ - \sigma\upsilon\nu 60^\circ) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 20^\circ - \frac{1}{4}$. Πολλαπλασιάζουμε με $\eta\mu 80^\circ$: $\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 20^\circ \eta\mu 80^\circ - \frac{1}{4}\eta\mu 80^\circ = \frac{1}{4}(\eta\mu 100^\circ + \eta\mu 60^\circ) - \frac{1}{4}\eta\mu 80^\circ$. Επειδή $\eta\mu 100^\circ = \eta\mu 80^\circ$, μένει $\frac{1}{4}\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

3.8.9 $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} = 2\eta\mu \frac{\Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu \Gamma = 1 - 2\eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2}$. Το άθροισμα είναι $1 + 2\eta\mu \frac{\Gamma}{2} [\sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} - \eta\mu \frac{\Gamma}{2}]$. Επειδή $\eta\mu \frac{\Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$, η αγκύλη είναι $\sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} = 2\eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2}$, που δίνει το ζητούμενο.

3.8.10 $\eta\mu 3x + \eta\mu x = 2\eta\mu 2x \sigma\upsilon\nu x$, άρα η εξίσωση γίνεται $\eta\mu 2x(2\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$. Από την $\eta\mu 2x = 0$: $x = \frac{\kappa\pi}{2}$. Από την $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$: $x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

3.9 Μάθημα 3.9: Η Συνάρτηση $f(x) = \alpha \eta\mu x + \beta \sigma\upsilon\nu x$

3.9.1 $\rho = 2$, $\sigma\upsilon\nu \varphi = \frac{1}{2}$, $\eta\mu \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα $\varphi = \frac{\pi}{3}$ και $f(x) = 2\eta\mu(x + \frac{\pi}{3})$.

3.9.2 $\alpha = -1$, $\beta = 1$, οπότε $\rho = \sqrt{2}$, $\sigma\upsilon\nu \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\eta\mu \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ και $g(x) = \sqrt{2}\eta\mu(x + \frac{3\pi}{4})$.

3.9.3 $\rho = \sqrt{25 + 144} = 13$. Η μέγιστη τιμή είναι 13 και η ελάχιστη -13 .

3.9.4 Το πρώτο μέλος είναι $2\eta\mu(x - \frac{\pi}{3})$ (εδώ $\sigma\upsilon\nu \varphi = \frac{1}{2}$, $\eta\mu \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα $\varphi = -\frac{\pi}{3}$). Η εξίσωση γίνεται $\eta\mu(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. Άρα $x - \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$, δηλαδή $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, ή $x - \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$, δηλαδή $x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}$.

3.9.5 $2\eta\mu(x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \eta\mu(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα $x + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$, δηλαδή $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{12}$, ή $x + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4}$, δηλαδή $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{12}$.

3.9.6 Πρέπει $\lambda^2 \leq 4 + 1 = 5$, δηλαδή $-\sqrt{5} \leq \lambda \leq \sqrt{5}$.

3.9.7 $-5 \leq 3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x \leq 5$, άρα $2 \leq f(x) \leq 12$. Το σύνολο τιμών είναι το $[2, 12]$.

3.9.8 $\sqrt{2}\eta\mu(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα $x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$, δηλαδή $x = 2\kappa\pi$, ή $x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4}$, δηλαδή $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$.

3.9.9 $f(x) = 2\eta\mu(2x + \frac{\pi}{6})$, με περίοδο $\frac{2\pi}{2} = \pi$. Η μέγιστη τιμή είναι 2, όταν $2x + \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, δηλαδή $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

3.10 Μάθημα 3.10: Επίλυση Τριγώνων

3.10.1 $A = 75^\circ$. $\gamma = \frac{6\eta\mu 45^\circ}{\eta\mu 60^\circ} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$. $\alpha = \frac{6\eta\mu 75^\circ}{\eta\mu 60^\circ} = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$.

3.10.2 $\alpha^2 = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (-\frac{1}{2}) = 34 + 15 = 49$, άρα $\alpha = 7$.

3.10.3 $\sigma\upsilon\nu \theta = \frac{25+64-49}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$, άρα $\theta = 60^\circ$.

3.10.4 $E = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 10$.

3.10.5 Η μεγαλύτερη πλευρά είναι η 10, με $10^2 = 100 > 36 + 49 = 85$. Επομένως η απέναντι γωνία είναι αμβλεία και το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

3.10.6 $2R = \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10\sqrt{2}$, άρα $R = 5\sqrt{2}$.

3.10.7 α) $\eta\mu B = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα $B = 60^\circ$ ή $B = 120^\circ$. Και οι δύο τιμές είναι δεκτές, οπότε υπάρχουν δύο τρίγωνα, με $\Gamma = 75^\circ$ ή $\Gamma = 15^\circ$ αντίστοιχα. β) $\eta\mu B = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Επειδή $\beta < \alpha$, έχουμε $B < A = 60^\circ$, οπότε δεκτή είναι μόνο η οξεία λύση ($B \approx 35,3^\circ$). Υπάρχει ένα μόνο τρίγωνο, με $\Gamma \approx 84,7^\circ$.

3.10.8 Μετά από 2 ώρες έχουν διανύσει 40 km και 60 km. Η απόστασή τους είναι $d^2 = 40^2 + 60^2 - 2 \cdot$

$$40 \cdot 60 \cdot \frac{1}{2} = 1600 + 3600 - 2400 = 2800, \text{ δηλαδή} \\ d = 20\sqrt{7} \approx 52,9 \text{ km.}$$

3.10.9 Από τον νόμο των συνημιτόνων: $\beta \text{ συν } \Gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$ και $\gamma \text{ συν } \beta = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}$. Το άθροισμα είναι $\frac{2\alpha^2}{2\alpha} = \alpha$.

3.10.10 $\text{συν } A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{-\beta\gamma}{2\beta\gamma} = -\frac{1}{2}$, άρα $A = 120^\circ$.

3.10.11 Από τους νόμους ημιτόνων και συνημιτόνων: $\frac{\alpha}{2R} = 2 \cdot \frac{\beta}{2R} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$, δηλαδή $\alpha = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{\beta}$. Επομένως $\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2$, άρα $\beta^2 = \gamma^2$ και $\beta = \gamma$. (Εναλλακτικά: $\eta\mu A = \eta\mu(B + \Gamma) = \eta\mu B \text{ συν } \Gamma + \text{συν } B \eta\mu \Gamma$, οπότε η σχέση δίνει $\eta\mu(B - \Gamma) = 0$, δηλαδή $B = \Gamma$.)

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – Πολυώ- νυμα – Πολυωνυμικές Εξισώσεις

4.1 Μάθημα 4.1: Πολυώνυμα

4.1.1 Η Α είναι πολυώνυμο 4ου βαθμού, η Γ 3ου βαθμού και η Ε μηδενικού βαθμού (σταθερό). Οι Β και Δ δεν είναι πολυώνυμα, γιατί περιέχουν x^{-1} και $x^{1/2}$ αντίστοιχα.

4.1.2 $P(0) = -3$, $P(1) = 2 - 1 + 4 - 3 = 2$, $P(-1) = -2 - 1 - 4 - 3 = -10$, $P(2) = 16 - 4 + 8 - 3 = 17$.

4.1.3 $\alpha + 2 = 5$ και $\beta - 1 = 3$, άρα $\alpha = 3$ και $\beta = 4$.

4.1.4 $P(2) = 8 - 4\kappa + 2 + 2 = 12 - 4\kappa = 0$, άρα $\kappa = 3$.

4.1.5 Αν $\mu \neq \pm 2$, το $P(x)$ είναι 2ου βαθμού. Αν $\mu = 2$, $P(x) = 4x + 3$, δηλαδή 1ου βαθμού. Αν $\mu = -2$, $P(x) = 3$, δηλαδή σταθερό (μηδενικού βαθμού).

4.1.6 $\gamma = 3$, $\beta = \gamma - 1 = 2$, $\alpha = \beta = 2$.

4.1.7 $(x-1)(x^2+3x+2) = x^3+3x^2+2x-x^2-3x-2 = x^3+2x^2-x-2$. Άρα $\alpha = 2$ και $\beta = -1$.

4.1.8 Το άθροισμα των συντελεστών είναι $P(1) = 1^{10} \cdot 1^3 = 1$ και ο σταθερός όρος είναι $P(0) = 1 \cdot (-2)^3 = -8$.

4.1.9 Έστω $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Τότε $P(x+1) - P(x) = \alpha(2x+1) + \beta = 2\alpha x + \alpha + \beta$. Πρέπει $2\alpha = 2$ και $\alpha + \beta = 0$, δηλαδή $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Από την $P(0) = 1$ παίρνουμε $\gamma = 1$. Άρα $P(x) = x^2 - x + 1$.

4.1.10 Ο βαθμός του $P(x)Q(x)$ είναι $3 + 2 = 5$, του $[Q(x)]^3$ είναι $2 \cdot 3 = 6$, και του $P(x) + Q(x)$ είναι 3 (ο όρος x^3 του P δεν μπορεί να αναιρεθεί από τους όρους του Q).

4.2 Μάθημα 4.2: Διαιρέση Πολυωνύμων

4.2.1 Πηλίκο $x - 2$, υπόλοιπο $2x + 1$. Πράγματι, $(x^2 + 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, και προσθέτοντας $2x + 1$ παίρνουμε τον διαιρετέο. Άρα $x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = (x^2 + 1)(x - 2) + 2x + 1$.

4.2.2 Συντελεστές 2, -5, 1, 4 και $\rho = 2: 2 \rightarrow -1 \rightarrow -1 \rightarrow 2$. Πηλίκο $2x^2 - x - 1$, υπόλοιπο 2.

4.2.3 $P(-1) = -1 - 3 - 1 + 4 = -1$.

4.2.4 $P(3) = 27 - 9 - 15 - 3 = 0$, άρα ναι, το $x - 3$ είναι παράγοντας.

4.2.5 $P(-2) = -16 + 4\kappa + 14 + 6 = 4\kappa + 4 = 0$, άρα $\kappa = -1$. Με Horner ($\rho = -2$) στο $2x^3 - x^2 - 7x + 6$: $2 \rightarrow -5 \rightarrow 3 \rightarrow 0$. Άρα $P(x) = (x + 2)(2x^2 - 5x + 3) = (x + 2)(x - 1)(2x - 3)$.

4.2.6 $P(1) = 1 + \alpha + \beta + 6 = 0$, δηλαδή $\alpha + \beta = -7$. $P(2) = 8 + 4\alpha + 2\beta + 6 = 0$, δηλαδή $2\alpha + \beta = -7$. Αφαιρώντας, $\alpha = 0$, οπότε $\beta = -7$. Άρα $P(x) = x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$.

4.2.7 $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$, οπότε $P(x) = (x + 1)(x - 3)\pi(x) + \alpha x + \beta$. Από $P(-1) = -2$: $-\alpha + \beta = -2$. Από $P(3) = 6$: $3\alpha + \beta = 6$. Άρα $\alpha = 2$, $\beta = 0$ και το υπόλοιπο είναι $v(x) = 2x$.

4.2.8 Horner με $\rho = \frac{2}{3}$ στους συντελεστές 3, -2, 1, -1: $3 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow -\frac{1}{3}$. Άρα $P(x) = (x - \frac{2}{3})(3x^2 + 1) - \frac{1}{3} = (3x - 2)(x^2 + \frac{1}{3}) - \frac{1}{3}$. Πηλίκο $x^2 + \frac{1}{3}$, υπόλοιπο $-\frac{1}{3}$.

4.2.9 $P(1) = 1 - 1 = 0$ και $P(-1) = (-1)^{2\nu} - 1 = 1 - 1 = 0$. Από το κριτήριο του παράγοντα, και το $x - 1$ και το $x + 1$ είναι παράγοντες του $P(x)$.

4.2.10 Αφού έχει ρίζες ± 1 , γράφεται $P(x) = (x - 1)(x + 1)(2x + \gamma)$. Από $P(2) = 3(4 + \gamma) = 18$ παίρνουμε $\gamma = 2$. Άρα $P(x) = (x^2 - 1)(2x + 2) = 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2$.

4.3 Μάθημα 4.3: Πολυωνυμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις

4.3.1 α) $x(x - 3)(x + 3) = 0$, άρα $x \in \{0, 3, -3\}$. β) $x^2(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)^2(x - 1) = 0$, άρα $x = -1$ (διπλή ρίζα) ή $x = 1$.

4.3.2 $P(1) = 0$. Με Horner: $(x - 1)(x^2 + x - 6) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$. Ρίζες: 1, 2, -3.

4.3.3 Με $u = x^2 \geq 0$: $u^2 - 13u + 36 = 0$, άρα $u = 4$ ή $u = 9$. Οι ρίζες είναι ± 2 και ± 3 .

4.3.4 $P(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$. Με Horner ($\rho = -1$): $1 \rightarrow 1 \rightarrow -6 \rightarrow 0$, άρα $(x + 1)(x^2 + x - 6) = (x + 1)(x - 2)(x + 3)$. Ρίζες: -1, 2, -3.

4.3.5 $P(1) = 2 + 1 - 5 + 2 = 0$. Με Horner: $2 \rightarrow 3 \rightarrow -2 \rightarrow 0$, άρα $(x-1)(2x^2 + 3x - 2) = 0$. Η δευτεροβάθμια έχει ρίζες $x = \frac{-3 \pm 5}{4}$, δηλαδή $\frac{1}{2}$ και -2 . Ρίζες: $1, \frac{1}{2}, -2$.

4.3.6 $P(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$, οπότε $P(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 6) = (x+1)(x-2)(x-3)$. Από τον πίνακα προσήμων, $P(x) < 0$ για $x < -1$ ή $2 < x < 3$.

4.3.7 Το $x^2 + 2x + 5$ έχει $\Delta = -16 < 0$, άρα είναι πάντα θετικό. Η ανίσωση ισοδυναμεί με $x^2 - 4 \geq 0$, δηλαδή $x \leq -2$ ή $x \geq 2$.

4.3.8 $x^2(x^2 - 1) \leq 0$. Για $x = 0$ ισχύει. Για $x \neq 0$ είναι $x^2 > 0$, οπότε πρέπει $x^2 - 1 \leq 0$, δηλαδή $-1 \leq x \leq 1$. Λύσεις: $[-1, 1]$.

4.3.9 $-8 + 4\alpha + 2 - 2 = 0$, άρα $\alpha = 2$. Με Horner στο $x^3 + 2x^2 - x - 2$ για $\rho = -2$: $1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0$, άρα $(x+2)(x^2 - 1) = 0$. Οι άλλες ρίζες είναι ± 1 .

4.3.10 Θέλουμε $x^3 < 4x \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) < 0$. Από τον πίνακα προσήμων: $x < -2$ ή $0 < x < 2$.

4.3.11 Οι υποψήφιες ακέραιες ρίζες είναι οι $\pm 1, \pm 3$. Έχουμε $P(1) = 5, P(-1) = 1, P(3) = 33, P(-3) = -27$. Κανένας δεν είναι μηδέν, άρα η εξίσωση δεν έχει ακέραιες ρίζες. (Έχει όμως μία πραγματική, μη ακέραιη, ρίζα στο $(-2, -1)$, αφού $P(-2) = -7 < 0 < P(-1)$.)

4.4 Μάθημα 4.4: Εξισώσεις και Ανισώσεις που Ανάγονται σε Πολυωνυμικές

4.4.1 Περιορισμοί: $x \neq 0$ και $x \neq -2$. Πολλαπλασιάζοντας με $x(x+2)$: $2(x+2) + 3x = x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -1$. Και οι δύο λύσεις είναι δεκτές.

4.4.2 $x + 2 \geq 0$ και $x + 2 = 16$, άρα $x = 14$.

4.4.3 $(x+2)(x-5) > 0 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 5$.

4.4.4 Περιορισμοί: $x \neq \pm 1$. Πολλαπλασιάζοντας με $x^2 - 1$: $x(x+1) - 2(x-1) = 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -1$. Η τιμή $x = -1$ απορρίπτεται, άρα $x = 2$.

4.4.5 $\frac{x+3-2x+2}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5-x}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow (5-x)(x-1) \geq 0$ και $x \neq 1$. Άρα $1 < x \leq 5$.

4.4.6 Περιορισμοί: $x \geq 1$. Υψώνοντας: $3x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 5$. Η τιμή 0 απορρίπτεται, άρα $x = 5$ (επαλήθευση: $\sqrt{16} = 4$ ✓).

4.4.7 Με $\sqrt{x} = t \geq 0$: $t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ ή $t = -3$ (απορρίπτεται). Άρα $x = 4$.

4.4.8 Με $u = x^2 - 3x$: $u^2 - 2u - 8 = 0 \Leftrightarrow u = 4$ ή $u = -2$. Από την $x^2 - 3x - 4 = 0$: $x = 4$ ή $x = -1$. Από

την $x^2 - 3x + 2 = 0$: $x = 1$ ή $x = 2$.

4.4.9 Περιορισμός: $x \geq 0$. Έχουμε $\sqrt{x+7} = 1 + \sqrt{x}$, και υψώνοντας: $x + 7 = 1 + 2\sqrt{x} + x$, άρα $\sqrt{x} = 3$ και $x = 9$. Επαλήθευση: $4 - 3 = 1$ ✓

4.4.10 $\frac{(x-2)(x+2)}{x(x+1)} \leq 0$, με $x \neq 0$ και $x \neq -1$. Οι ρίζες αριθμητή και παρονομαστή είναι $-2, -1, 0, 2$. Από τον πίνακα προσήμων: η παράσταση είναι θετική για $x < -2$, αρνητική στο $(-2, -1)$, θετική στο $(-1, 0)$ και αρνητική στο $(0, 2)$. Επομένως λύσεις: $[-2, -1) \cup (0, 2]$.

4.4.11 Περιορισμός: $x \geq -3$. Αν $x + 1 < 0$, δηλαδή $-3 \leq x < -1$, η ανίσωση ισχύει, αφού το πρώτο μέλος είναι ≥ 0 και το δεύτερο αρνητικό. Αν $x \geq -1$, υψώνουμε: $x + 3 > x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$, οπότε $-1 \leq x < 1$. Συνολικά: $-3 \leq x < 1$.

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρ- τηση

5.1 Μάθημα 5.1: Εκθετική Συνάρτηση

5.1.1 $16^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8, 32^{-\frac{2}{5}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}, \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$.

5.1.2 $3^{x-2} = 3^4 \Leftrightarrow x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 6$.

5.1.3 α) $2^{2x} = 2^3$, άρα $x = \frac{3}{2}$. β) $5^{-x} = 5^3$, άρα $x = -3$.

5.1.4 Η βάση είναι $0,7 < 1$, οπότε η $(0,7)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα. Αφού $1,2 < 1,5$, έχουμε $(0,7)^{1,2} > (0,7)^{1,5}$.

5.1.5 $x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -1$.

5.1.6 Με $3^x = t > 0$: $t^2 - 4t + 3 = 0$, άρα $t = 1$ ή $t = 3$. Επομένως $x = 0$ ή $x = 1$.

5.1.7 $4 \cdot 2^x - 2^x = 3 \cdot 2^x = 24$, άρα $2^x = 8$ και $x = 3$.

5.1.8 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Η βάση είναι μικρότερη του 1 , οπότε $2x - 1 < 3$, δηλαδή $x < 2$.

5.1.9 Με $2^x = t > 0$: $t^2 - 3t - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (t-4)(t+1) \geq 0$. Επειδή $t + 1 > 0$, πρέπει $t \geq 4$, δηλαδή $2^x \geq 2^2$, άρα $x \geq 2$.

5.1.10 Πρέπει $0 < \alpha - 1 < 1$, δηλαδή $1 < \alpha < 2$.

5.1.11 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$, άρα $\frac{t}{8} = 4$ και $t = 32$ ημέρες.

5.1.12 $K_2 = 1000 \cdot 1,04^2 = 1000 \cdot 1,0816 = 1081,60$ €. Ο συνολικός τόκος είναι 81,60 €.

5.1.13 Με $u = 2^x > 0$ και $v = 2^y > 0$: $u + v = 6$ και $uv = 8$. Οι u, v είναι ρίζες της $t^2 - 6t + 8 = 0$, δηλαδή 2 και 4. Άρα $(x, y) = (1, 2)$ ή $(2, 1)$.

5.2 Μάθημα 5.2: Λογάριθμοι

5.2.1 4, -4, 4, -2, $\frac{1}{2}$ (αφού $9^{1/2} = 3$).

5.2.2 α) $x^3 = 64$, άρα $x = 4$. β) $x = 5^{-2} = \frac{1}{25}$. γ) $x^{-3} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$, άρα $x = 2$.

5.2.3 α) $\log 100 = 2$. β) $\log_6 36 = 2$. γ) $\log_2 8 = 3$.

5.2.4 α) 7. β) $10^{\log 9} = 9$. γ) $e^{\ln 6} = 6$.

5.2.5 $3 \log_a x + \frac{1}{2} \log_a y - 2 \log_a z$.

5.2.6 $\log 18 = \log 2 + 2 \log 3 \approx 1,255$. $\log 0,6 = \log 6 - 1 \approx -0,222$. $\log \sqrt[3]{12} = \frac{1}{3}(2 \log 2 + \log 3) \approx \frac{1,079}{3} \approx 0,360$.

5.2.7 Με αλλαγή σε δεκαδικούς λογαρίθμους: $\frac{\log 3}{\log 2}$. $\frac{\log 5}{\log 3} \cdot \frac{\log 8}{\log 5} = \frac{\log 8}{\log 2} = \log_2 8 = 3$.

5.2.8 $x = \log_3 10 = \frac{\log 10}{\log 3} = \frac{1}{\log 3} \approx 2,096$.

5.2.9 $\log 8 + \log 27 = 3 \log 2 + 3 \log 3 = 3 \log 6$, άρα $A = 3$.

5.2.10 $\log_a(8\alpha^2) = \log_a 8 + \log_a \alpha^2 = 3\kappa + 2$. $\log_4 \alpha = \frac{\log_a \alpha}{\log_a 4} = \frac{1}{2\kappa}$.

5.2.11 Από την αλλαγή βάσης: $\log_a \beta \cdot \log_\beta \alpha = \frac{\log \beta}{\log \alpha} \cdot \frac{\log \alpha}{\log \beta} = 1$.

5.2.12 $\frac{1}{3} \log 8 = \log 2$, οπότε $\log x = \log 9 - \log 2 + \log 2 = \log 9$. Άρα $x = 9$.

5.3 Μάθημα 5.3: Λογαριθμική Συνάρτηση

5.3.1 $f: 5 - x > 0$, άρα $A_f = (-\infty, 5)$. $g: x^2 > 9$, άρα $A_g = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

5.3.2 Περιορισμός: $x > -\frac{1}{2}$. $2x + 1 = 25$, άρα $x = 12$.

5.3.3 Περιορισμοί: $x > -2$ και $x > \frac{4}{3}$. Τότε $x + 2 = 3x - 4$, άρα $x = 3$, που είναι δεκτή.

5.3.4 Η βάση είναι $0,3 < 1$, οπότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα. Αφού $2 < 5$, έχουμε $\log_{0,3} 2 > \log_{0,3} 5$.

5.3.5 Περιορισμός: $x > 2$. Η εξίσωση γίνεται $x(x - 2) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -2$. Δεκτή είναι μόνο η $x = 4$.

5.3.6 Με $\log x = t: t^2 - t - 2 = 0$, άρα $t = 2$ ή $t = -1$. Επομένως $x = 100$ ή $x = \frac{1}{10}$.

5.3.7 Περιορισμός: $x > 1$. Η εξίσωση γίνεται $\frac{x+1}{x-1} = 3 \Leftrightarrow x + 1 = 3x - 3 \Leftrightarrow x = 2$, που είναι δεκτή.

5.3.8 Περιορισμός: $x > 3$. $x - 3 < 4$, άρα $x < 7$. Λύσεις: $3 < x < 7$.

5.3.9 Περιορισμός: $x > -1$. Έχουμε $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$ και η βάση είναι μικρότερη του 1, οπότε η φορά αλλάζει: $x + 1 < 9$, δηλαδή $x < 8$. Λύσεις: $-1 < x < 8$.

5.3.10 α) $x = \frac{\ln 3}{\ln 5} \approx 0,683$. β) $x \ln 2 = (x - 1) \ln 3 \Leftrightarrow x(\ln 3 - \ln 2) = \ln 3 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 3}{\ln \frac{3}{2}} \approx 2,71$.

5.3.11 Περιορισμοί: $x > 0$ και $x > -6$, δηλαδή $x > 0$. Η εξίσωση γίνεται $\log x^2 = \log(x + 6)$, οπότε $x^2 = x + 6$ και $x = 3$ ή $x = -2$. Δεκτή είναι μόνο η $x = 3$.

5.3.12 $\frac{10^{-2}}{10^{-4}} = 10^2 = 100$ φορές.

5.3.13 $e^{0,1t} = 5 \Leftrightarrow 0,1t = \ln 5 \Leftrightarrow t = 10 \ln 5 \approx 16,1$ ώρες.

5.3.14 Περιορισμός: $x > 1$. Η ανίσωση γίνεται $\ln[x(x - 1)] \leq \ln 2$, και αφού η βάση $e > 1$, $x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$. Συναληθεύοντας με τον περιορισμό: $1 < x \leq 2$.

ΛΥΣΕΙΣ

Επαναληπτικά Θέματα

Ε Μάθημα Ε: Επαναληπτικά Θέματα σε Όλη την Ύλη

E.1 α) $D = -\eta\mu^2 \theta - \sigma\upsilon\nu^2 \theta = -1 \neq 0$ για κάθε θ , άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση. $D_x = -\eta\mu \theta$ και $D_y = -\sigma\upsilon\nu \theta$, οπότε $x_0 = \eta\mu \theta$ και $y_0 = \sigma\upsilon\nu \theta$. β) $x_0^2 + y_0^2 = \eta\mu^2 \theta + \sigma\upsilon\nu^2 \theta = 1$, άρα το M ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$.

E.2 α) Όπως στο Παράδειγμα 4.3.3, οι ρίζες είναι $-1, \frac{1}{2}, 2$. β) Η εξίσωση είναι η $P(\eta\mu x) = 0$, άρα $\eta\mu x \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$. Η $\eta\mu x = 2$ είναι αδύνατη. Από την $\eta\mu x = -1: x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$. Από την $\eta\mu x = \frac{1}{2}: x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

E.3 Με $2^x = t > 0: t^3 - 7t^2 + 14t - 8 = 0$. Για $t = 1: 1 - 7 + 14 - 8 = 0$. Με Horner: $(t - 1)(t^2 - 6t + 8) = (t - 1)(t - 2)(t - 4) = 0$. Άρα $t \in \{1, 2, 4\}$, δηλαδή $x \in \{0, 1, 2\}$.

E.4 α) Με οριζόντια μετατόπιση κατά $\frac{\pi}{6}$ προς τα δεξιά και κατακόρυφη κατά 1 προς τα πάνω. β)

Επειδή $-2 \leq 2 \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 2$, το σύνολο τιμών είναι το $[-1, 3]$. Η περίοδος είναι 2π . γ) $\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Άρα $x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$, δηλαδή $x = 2k\pi$, ή $x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6}$, δηλαδή $x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}$.

E.5 $2 \sigma\upsilon\nu^2 x - 1 + \sigma\upsilon\nu x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x(2 \sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$. Από την $\sigma\upsilon\nu x = 0$: $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$. Από την $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$: $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$.

E.6 Περιορισμοί: $x, y > 0$. Η πρώτη εξίσωση γίνεται $\log(xy) = 1$, δηλαδή $xy = 10$. Οι x, y είναι ρίζες της $t^2 - 7t + 10 = 0$, δηλαδή 2 και 5. Λύσεις: (2, 5) και (5, 2), και οι δύο δεκτές.

E.7 α) Αν $x_1 < x_2$, τότε $e^{x_1} < e^{x_2}$, αφού η e^x είναι γνησίως αύξουσα. Προσθέτοντας κατά μέλη με την $x_1 < x_2$, παίρνουμε $f(x_1) < f(x_2)$. β) Η ανίσωση γράφεται $f(x^2) < f(3x - 2)$. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, ισοδυναμεί με $x^2 < 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

E.8 α) $\frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, άρα $A = (-1, 1)$, που είναι συμμετρικό. β) $f(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = -\ln \frac{1-x}{1+x} = -f(x)$. γ) $\frac{1-x}{1+x} = 3 \Leftrightarrow 1-x = 3+3x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. Αφού η

f είναι περιττή, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\ln 3$. Η f είναι γνησίως μονότονη (αφού $\frac{1-x}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}$ είναι γνησίως φθίνουσα), άρα η λύση της $f(x) = -\ln 3$ είναι μοναδική: $x = \frac{1}{2}$.

E.9 α) $P(x) = (x-1)(x-2)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 1) \cup (2, +\infty)$ (βλ. Παράδειγμα 4.3.5). β) Περιορισμοί: $P(x) > 0$, $x > 1$ και $x > -2$, δηλαδή $x > 2$. Η εξίσωση γίνεται $(x-1)(x-2)(x+2) = (x-1)(x+2)$, και αφού $(x-1)(x+2) \neq 0$, παίρνουμε $x-2 = 1$, δηλαδή $x = 3$, που είναι δεκτή.

E.10 $P(x) = (x^2 - 1)\pi(x) + \alpha x + \beta$. Για $x = 1$: $\alpha + \beta = P(1) = 2$. Για $x = -1$: $-\alpha + \beta = P(-1) = 1 - 3 - 2 = -4$. Άρα $\beta = -1$ και $\alpha = 3$, οπότε το υπόλοιπο είναι $v(x) = 3x - 1$.

E.11 $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \eta\mu A = \frac{15\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \eta\mu A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα $A = 60^\circ$ ή $A = 120^\circ$. Αν $A = 60^\circ$: $\alpha^2 = 9 + 25 - 15 = 19$, άρα $\alpha = \sqrt{19}$. Αν $A = 120^\circ$: $\alpha^2 = 9 + 25 + 15 = 49$, άρα $\alpha = 7$. Υπάρχουν λοιπόν δύο τρίγωνα.

E.12 $1000 \cdot 2^t = 4000 \cdot 2^{t/2} \Leftrightarrow 2^{t/2} = 4 \Leftrightarrow t = 4$ ώρες. Για $t > 4$ ισχύει $2^{t/2} > 4$, δηλαδή $A(t) > B(t)$, οπότε η καλλιέργεια A είναι μεγαλύτερη.



Συνέχισε τη μελέτη σου στο mathgreece.com! Βιντεομαθήματα, λυμένες ασκήσεις, τεστ και διαγωνίσματα για όλη την ύλη. Δωρεάν φροντιστήριο για κάθε μαθητή.