

ΠΛΗΡΕΣ ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΜΕΝΟ ΒΟΗΘΗΜΑ

Β' ΤΑΞΗ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Θεωρία · Λυμένα παραδείγματα · Προσοχή & συχνά λάθη · Ασκήσεις με λύσεις

7 Αναλογίες

8 Ομοιότητα

9 Μετρικές σχέσεις

10 Εμβαδά

11 Μέτρηση κύκλου

12 Ευθείες & επίπεδα στο χώρο

13 Στερεά σχήματα



mathgreece.com

Πλήρες & ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών

Πρόλογος

Αγαπητή μαθήτριά, αγαπητέ μαθητή,

η Γεωμετρία της Β' Λυκείου είναι, κατά τη γνώμη μου, το πιο «ώριμο» κομμάτι της σχολικής Γεωμετρίας. Στην Α' Λυκείου μάθαμε να συγκρίνουμε σχήματα: ίσα τρίγωνα, παράλληλες ευθείες, εγγεγραμμένες γωνίες. Στη Β' Λυκείου κάνουμε το μεγάλο βήμα: αρχίζουμε να **μετράμε**. Λόγοι τμημάτων, ομοιότητα, μετρικές σχέσεις, εμβαδά, μήκος και εμβαδόν κύκλου, όγκοι στερεών. Η Γεωμετρία συναντά την Άλγεβρα και από αυτή τη συνάντηση γεννιούνται μερικά από τα ωραιότερα αποτελέσματα των Μαθηματικών.

Το βοήθημα που κρατάς γράφτηκε με έναν στόχο: να μπορείς να μελετήσεις **μόνος σου**, με σιγουριά, όλη την ύλη. Γι' αυτό:

- κάθε **κεφάλαιο** ξεκινά με δική του έγχρωμη σελίδα, όπου βλέπεις όλα τα μαθήματα που περιέχει και τι θα κατακτήσεις·
- κάθε **μάθημα** ξεκινά σε νέα σελίδα με την ένδειξη «ΚΕΦΑΛΑΙΟ ... · ΜΑΘΗΜΑ ...», ενώ στην κορυφή κάθε σελίδας θα βλέπεις πάντα σε ποιο κεφάλαιο και σε ποιο μάθημα βρίσκεσαι· η αρίθμηση των μαθημάτων ακολουθεί τις παραγράφους του σχολικού βιβλίου, ώστε να βρίσκεις αμέσως την αντιστοιχία·
- η θεωρία παρουσιάζεται ολοκληρωμένη, με αποδείξεις, σχήματα και σχόλια που εξηγούν το «γιατί» και όχι μόνο το «τι»·
- σε κάθε μάθημα θα βρεις **λυμένα παραδείγματα** διαβαθμισμένης δυσκολίας, κουτιά «Προσοχή!» και «Συχνό λάθος» με όσα συνήθως κοστίζουν μονάδες στα διαγωνίσματα, καθώς και **μεθοδολογίες** για τις βασικές κατηγορίες ασκήσεων·
- κάθε μάθημα κλείνει με **άλυτες ασκήσεις**, των οποίων οι **πλήρεις λύσεις** βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

Όλα τα παραδείγματα και οι ασκήσεις του βοηθήματος είναι πρωτότυπα, γραμμένα ειδικά για αυτό. Δεν θα τα βρεις στο σχολικό βιβλίο· έτσι, όταν τελειώσεις, θα έχεις δουλέψει πολύ περισσότερο υλικό από όσο σου ζητείται, και αυτό ακριβώς είναι το μυστικό της επιτυχίας.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Το βοήθημα αυτό είναι μέρος ενός μεγαλύτερου έργου. Στο mathgreece.com θα βρεις ένα πλήρες και ολοκληρωμένο **δωρεάν** φροντιστήριο μαθηματικών: θεωρία, βίντεο, επιπλέον ασκήσεις, διαγωνίσματα και θέματα εξετάσεων για όλες τις τάξεις.

Μια τελευταία συμβουλή, από κάποιον που διδάσκει Γεωμετρία πολλά χρόνια: **να σχεδιάζεις πάντα το σχήμα σου**, μεγάλο, καθαρό και με χάρακα. Οι μισές λύσεις «φαίνονται» σε ένα καλό σχήμα. Και μην τρομάζεις όταν μια άσκηση δεν βγαίνει αμέσως· η Γεωμετρία ανταμείβει την υπομονή.

Καλή μελέτη και καλή επιτυχία!

Περιεχόμενα

Πρόλογος	2
Πώς να διαβάσεις αυτό το βοήθημα	5
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 • Αναλογίες	7
7.1–7.3 Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων	8
7.4–7.5 Ανάλογα τμήματα – Αναλογίες	13
7.6 Διαίρεση τμήματος εσωτερικά και εξωτερικά σε δοσμένο λόγο	17
7.7 Θεώρημα του Θαλή	21
7.8 Θεωρήματα των διχοτόμων τριγώνου	27
7.9 Απολλώνιος κύκλος	32
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 • Ομοιότητα	35
8.1 Όμοια ευθύγραμμα σχήματα	36
8.2 Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων	39
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 • Μετρικές σχέσεις	46
9.1 Ορθές προβολές	47
9.2 Το Πυθαγόρειο θεώρημα	50
9.3 Γεωμετρικές κατασκευές	56
9.4 Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος	59
9.5 Θεωρήματα διαμέσων	63
9.6 Βασικοί γεωμετρικοί τόποι	67
9.7 Τέμνουσες κύκλου – Δύναμη σημείου	70
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 • Εμβαδά	75
10.1–10.2 Πολυγωνικά χωρία – Εμβαδόν – Ισοδύναμα σχήματα	76
10.3 Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων	78
10.4 Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου	83
10.5 Λόγος εμβαδών	86
10.6 Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμό του	90
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11 • Μέτρηση κύκλου	93
11.1–11.2 Κανονικά πολύγωνα – Ιδιότητες και στοιχεία	94
11.3 Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο	97
11.4–11.5 Μήκος κύκλου – Μήκος τόξου	100
11.6–11.7 Εμβαδόν κύκλου – Κυκλικός τομέας – Κυκλικό τμήμα	103
11.8 Τετραγωνισμός κύκλου	107
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12 • Ευθείες και επίπεδα στο χώρο	110
12.1–12.3 Το επίπεδο και οι σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων	111
12.4 Ευθείες και επίπεδα παράλληλα – Θεώρημα του Θαλή στον χώρο	114
12.5 Γωνία δύο ευθειών – Ευθεία κάθετη σε επίπεδο	116
12.6 Απόσταση σημείου από επίπεδο – Απόσταση παράλληλων επιπέδων	119
12.7 Διέδρη γωνία – Κάθετα επίπεδα	121
12.8 Προβολή σε επίπεδο – Γωνία ευθείας και επιπέδου	123

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13 · Στερεά σχήματα	125
13.1 Περὶ πολυέδρων	126
13.2–13.4 Πρίσμα – Παραλληλεπίπεδο – Κύβος – Μέτρηση πρίσματος	128
13.5–13.7 Πυραμίδα – Κανονική πυραμίδα – Τετράεδρο – Μέτρηση	131
13.8–13.9 Κόλουρη πυραμίδα	133
13.10–13.15 Στερεά εκ περιστροφής: κύλινδρος, κώνος, κόλουρος κώνος	135
13.16–13.18 Η σφαίρα	138
13.19 Κανονικά πολύεδρα	140

Τυπολόγιο – Όλη η ύλη με μια ματιά	142
---	------------

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ	146
Κεφ. 7 Λύσεις ασκήσεων · Αναλογίες	147
Κεφ. 8 Λύσεις ασκήσεων · Ομοιότητα	149
Κεφ. 9 Λύσεις ασκήσεων · Μετρικές σχέσεις	150
Κεφ. 10 Λύσεις ασκήσεων · Εμβαδά	152
Κεφ. 11 Λύσεις ασκήσεων · Μέτρηση κύκλου	153
Κεφ. 12 Λύσεις ασκήσεων · Ευθείες και επίπεδα στο χώρο	155
Κεφ. 13 Λύσεις ασκήσεων · Στερεά σχήματα	156

Πώς να διαβάσεις αυτό το βοήθημα

Σε όλο το βιβλίο χρησιμοποιούμε τα ίδια «κουτιά», ώστε να αναγνωρίζεις με μια ματιά τι διαβάζεις:

ΟΡΙΣΜΟΣ — Τι είναι

Ο ορισμός μιας νέας έννοιας. Μάθε τον με ακρίβεια· στις εξετάσεις ζητείται συχνά αυτολεξεί το νόημά του.

ΘΕΩΡΗΜΑ — Τι είναι

Ένα θεώρημα ή μια βασική πρόταση της θεωρίας. Ότι βρίσκεται σε τέτοιο κουτί το χρησιμοποιείς ελεύθερα στις ασκήσεις.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η απόδειξη ενός θεωρήματος, γραμμένη βήμα-βήμα. Οι αποδείξεις που σημειώνουμε ως «εξεταστές» αξίζει να τις ξέρεις να τις γράφεις μόνος σου.

ΠΟΡΙΣΜΑ — Τι είναι

Ένα άμεσο συμπέρασμα ενός θεωρήματος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ένα σχόλιο που φωτίζει μια λεπτομέρεια της θεωρίας.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Κάτι που χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή: προϋποθέσεις θεωρημάτων, εξαιρέσεις, λεπτές διατυπώσεις.

ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

Ένα λάθος που κάνουν πολύ συχνά οι μαθητές. Με  σημειώνουμε τη λανθασμένη σκέψη και με  τη σωστή.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Πώς αντιμετωπίζουμε μια κατηγορία ασκήσεων: τα βήματα που ακολουθούμε.

ΛΙΓΗ ΙΣΤΟΡΙΑ

Ιστορικά στοιχεία: πώς γεννήθηκαν οι ιδέες που μελετάμε.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Παραπομπή στο mathgreece.com, όπου θα βρεις επιπλέον υλικό για το αντίστοιχο θέμα.

Η διαβάθμιση των ασκήσεων

Οι άλυτες ασκήσεις κάθε μαθήματος είναι σημειωμένες με κουκκίδες δυσκολίας:

Σήμανση	Επίπεδο	Τι σημαίνει
	Βασική	Άμεση εφαρμογή της θεωρίας· πρέπει να τη λύνεις χωρίς δυσκολία.
	Μέτρια	Συνδυάζει δύο ή περισσότερες ιδέες· τυπικό θέμα διαγωνίσματος.
	Απαιτητική	Για όσους θέλουν να πάνε παραπέρα· τυπικό «τελευταίο θέμα».

Δίπλα σε κάθε άσκηση υπάρχει η ένδειξη «→ Λύση», που σε οδηγεί (και με κλικ, στο ηλεκτρονικό αρχείο) στην αναλυτική λύση στο τέλος του βιβλίου.

Συμβολισμοί που χρησιμοποιούμε

Σύμβολο	Διαβάζεται / σημαίνει
AB	το ευθύγραμμο τμήμα AB ή το μήκος του (ανάλογα με τα συμφραζόμενα)
α, β, γ	τα μήκη των πλευρών $B\Gamma$, ΓA , AB τριγώνου $AB\Gamma$
$\hat{A}, \widehat{BA\Gamma}$	η γωνία A , η γωνία $BA\Gamma$
$\widehat{AB}$	το τόξο AB
$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2, \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$	οι ευθείες είναι παράλληλες, κάθετες
$\nu_\alpha, \mu_\alpha, \delta_\alpha$	ύψος, διάμεσος, διχοτόμος από την κορυφή A (προς την πλευρά α)
τ	η ημιπερίμετρος: $\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$
ρ, R	ακτίνα εγγεγραμμένου, ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου
$(AB\Gamma)$ ή E	το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ (γενικά: του σχήματος)
λ	λόγος (π.χ. λόγος ομοιότητας)
Δ_P	δύναμη του σημείου P ως προς κύκλο

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στις ασκήσεις, όταν δεν αναφέρεται μονάδα μέτρησης, θεωρούμε ότι όλα τα μήκη μετρώνται με την ίδια μονάδα και τα εμβαδά με την αντίστοιχη τετραγωνική μονάδα.

7

Αναλογίες



Τα μαθήματα του κεφαλαίου

- 7.1–7.3** Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων
- 7.4–7.5** Ανάλογα τμήματα – Αναλογίες
- 7.6** Διάρθρωση τμήματος εσωτερικά και εξωτερικά σε δοσμένο λόγο
- 7.7** Θεώρημα του Θαλή
- 7.8** Θεωρήματα των διχοτόμων τριγώνου
- 7.9** Απολλώνιος κύκλος

Τι θα κατακτήσεις

- Να βρίσκεις και να χειρίζεσαι λόγους τμημάτων και αναλογίες.
- Να διαιρείς τμήμα εσωτερικά και εξωτερικά σε δοσμένο λόγο.
- Να εφαρμόζεις το θεώρημα του Θαλή και το αντίστροφό του.
- Να υπολογίζεις τα τμήματα που ορίζουν οι διχοτόμοι τριγώνου.
- Να αναγνωρίζεις τον Απολλώνιο κύκλο.

Ως τώρα συγκρίναμε τμήματα μόνο με τα «ίσο», «μεγαλύτερο», «μικρότερο». Στο κεφάλαιο αυτό μαθαίνουμε να λέμε **πόσες φορές** ένα τμήμα χωράει σε ένα άλλο. Έτσι γεννιούνται ο λόγος και οι αναλογίες, και φτάνουμε σε δύο από τα σπουδαιότερα θεωρήματα της Γεωμετρίας: το θεώρημα του Θαλή και τα θεωρήματα των διχοτόμων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
Αναλογίες

ΜΑΘΗΜΑ 7.1–7.3

Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων

Από τη σύγκριση στη μέτρηση

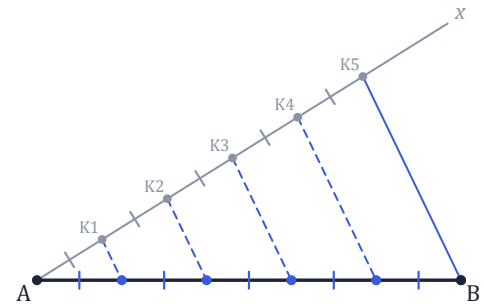
Όταν λέμε ότι ένα θρανίο έχει μήκος 1,2 m, στην πραγματικότητα λέμε ότι το μήκος του θρανίου είναι 1,2 φορές το μήκος ενός «τμήματος-μονάδα», του μέτρου. Κάθε μέτρηση, λοιπόν, είναι μια **σύγκριση με πολλαπλασιασμό**: «πόσες φορές χωράει το ένα μέσα στο άλλο;». Για να το κάνουμε αυτό με αυστηρότητα χρειαζόμαστε τρία εργαλεία: τη διαίρεση ενός τμήματος σε ίσα μέρη, το γινόμενο τμήματος με αριθμό και, τελικά, τον λόγο δύο τμημάτων.

Διαίρεση τμήματος σε n ίσα μέρη

Πώς χωρίζουμε ένα τμήμα AB σε, ας πούμε, 5 ίσα κομμάτια, χωρίς να το μετρήσουμε με τον χάρακα; Η κατασκευή στηρίζεται σε ένα θεώρημα που γνωρίζουμε από την Α' Λυκείου:

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Παράλληλες που ορίζουν ίσα τμήματα

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία που τις τέμνει, τότε ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.



Διαίρεση του AB σε 5 ίσα μέρη

Κατασκευή. Από το A φέρνουμε μια οποιαδήποτε ημιευθεία Ax (όχι πάνω στην AB). Πάνω της παίρνουμε με τον διαβήτη διαδοχικά ίσα τμήματα $AK_1 = K_1K_2 = \dots = K_4K_5$, όσα είναι τα μέρη που θέλουμε. Ενώνουμε το τελευταίο σημείο K_5 με το B και από τα $K_1, \dots, K_4$ φέρνουμε παράλληλες προς την K_5B . Οι παράλληλες αυτές τέμνουν την AB σε σημεία που τη χωρίζουν σε 5 ίσα τμήματα, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα (η παράλληλη από το A προς την K_5B είναι η «πρώτη» από τις παράλληλες).

① **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Το μήκος των ίσων τμημάτων πάνω στην Ax το διαλέγουμε **ελεύθερα**. Ότι άνοιγμα διαβήτη κι αν πάρουμε, η κατασκευή δουλεύει. Αυτό είναι το «μαγικό» της: η πληροφορία «5 ίσα μέρη» μεταφέρεται από την Ax στην AB μέσω των παραλλήλων.

Γινόμενο τμήματος με αριθμό

Αν AB είναι ένα τμήμα και n ένας θετικός ακέραιος, τότε:

- $n \cdot AB$ είναι το τμήμα που προκύπτει αν τοποθετήσουμε διαδοχικά, πάνω σε μια ευθεία, n τμήματα ίσα με το AB .
- $\frac{1}{n} \cdot AB$ είναι καθένα από τα n ίσα μέρη στα οποία χωρίζεται το AB .
- $\frac{\mu}{\nu} \cdot AB$ (με μ, ν θετικούς ακέραιους) είναι το τμήμα $\mu \cdot \left(\frac{1}{\nu} AB\right)$: χωρίζουμε το AB σε ν ίσα μέρη και παίρνουμε μ από αυτά.



Το τμήμα $\Gamma\Delta$ είναι τα $\frac{3}{4}$ του AB

Με προσεγγίσεις (που δεν θα μας απασχολήσουν αναλυτικά) ορίζεται και το γινόμενο $\lambda \cdot AB$ για **κάθε** θετικό πραγματικό αριθμό λ , ακόμη και άρρητο, π.χ. $\sqrt{2} \cdot AB$. Συμφωνούμε επίσης ότι $0 \cdot AB$ είναι το μηδενικό τμήμα (ένα σημείο).

Λόγος δύο ευθύγραμμων τμημάτων

ΟΡΙΣΜΟΣ — Λόγος τμημάτων

Αν για δύο τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ ισχύει $\Gamma\Delta = \lambda \cdot AB$, τότε ο θετικός αριθμός λ λέγεται **λόγος του $\Gamma\Delta$ προς το AB** και γράφουμε

$$\lambda = \frac{\Gamma\Delta}{AB}.$$

Λέγεται επίσης λόγος του $\Gamma\Delta$ προς το AB ή απλώς «λόγος $\Gamma\Delta$ προς AB ».

Δηλαδή ο λόγος απαντά στην ερώτηση: **πόσες φορές το AB κάνει το $\Gamma\Delta$** ; Στο παραπάνω σχήμα $\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{3}{4}$, ενώ $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{4}{3}$.

Κάποια άμεσα συμπεράσματα του ορισμού:

- Αν $\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \lambda$, τότε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{1}{\lambda}$.
- $\frac{\Gamma\Delta}{AB} = 1 \iff \Gamma\Delta = AB$, ενώ $\frac{\Gamma\Delta}{AB} > 1 \iff \Gamma\Delta > AB$.
- Αν M είναι το μέσο του AB , τότε $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$ και $\frac{AB}{MB} = 2$.

Μέτρηση και μήκος — ο λόγος δεν εξαρτάται από τη μονάδα

Αν διαλέξουμε ένα σταθερό τμήμα ε ως **μονάδα μέτρησης**, τότε ο λόγος $\frac{AB}{\varepsilon}$ λέγεται **μήκος** του AB (με μονάδα το ε). Όταν λοιπόν γράφουμε « $AB = 5 \text{ cm}$ », εννοούμε ότι $AB = 5 \cdot (1 \text{ cm})$.

Ένα σημαντικό γεγονός είναι ότι ο λόγος δύο τμημάτων **ισούται με τον λόγο των μηκών τους**, όποια μονάδα κι αν χρησιμοποιήσουμε, αρκεί να είναι **η ίδια** και για τα δύο τμήματα: αν $AB = \alpha \cdot \varepsilon$ και $\Gamma\Delta = \gamma \cdot \varepsilon$, τότε $\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{\gamma}{\alpha}$.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Ο λόγος δύο τμημάτων είναι **καθαρός αριθμός** — δεν έχει μονάδα μέτρησης. Για να τον υπολογίσεις από τα μήκη, τα μήκη πρέπει να είναι εκφρασμένα **στην ίδια μονάδα**.

ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Διαφορετικές μονάδες

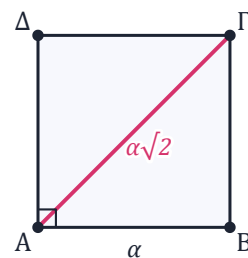
$AB = 3 \text{ cm}$, $\Gamma\Delta = 50 \text{ mm}$. Ο μαθητής γράφει: $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{3}{50}$.

✓ Σωστά: $\Gamma\Delta = 50 \text{ mm} = 5 \text{ cm}$, άρα $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{3}{5}$.

Σύμμετρα και ασύμμετρα τμήματα

Δύο τμήματα λέγονται **σύμμετρα** αν ο λόγος τους είναι **ρητός** αριθμός, δηλαδή αν υπάρχει ένα κοινό «μικρό» τμήμα που χωράει ακέραιες φορές και στα δύο. Αν ο λόγος τους είναι άρρητος, λέγονται **ασύμμετρα**.

Το πιο διάσημο παράδειγμα ασύμμετρων τμημάτων είναι η **πλευρά και η διαγώνιος ενός τετραγώνου**. Αν η πλευρά είναι α , από το Πυθαγόρειο θεώρημα η διαγώνιος είναι $\alpha\sqrt{2}$, οπότε ο λόγος τους είναι $\sqrt{2}$, που είναι άρρητος. Όσο μικρή κι αν πάρουμε μια «κοινή μονάδα», δεν θα χωρέσει ποτέ ακέραιες φορές και στα δύο τμήματα.



Πλευρά και διαγώνιος τετραγώνου

ΛΙΓΗ ΙΣΤΟΡΙΑ

Η ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών αποδίδεται στους Πυθαγόρειους (5ος αι. π.Χ.) και προκάλεσε πραγματική κρίση: μέχρι τότε πίστευαν ότι «όλα είναι αριθμός», δηλαδή λόγος ακεραίων. Η θεωρία των λόγων του Ευδόξου, που διασώζεται στο Ε' βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, έδωσε την αυστηρή λύση στο πρόβλημα.

ΣΥΝΟΨΗ — Τα βασικά του μαθήματος

Έννοια	Τι κρατάμε
Διάρθρωση σε ν ίσα μέρη	ημιευθεία, ν ίσα τμήματα, παράλληλες
$\frac{\mu}{\nu} \cdot AB$	χωρίζω το AB σε ν μέρη, παίρνω τα μ
$\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \lambda$	σημαίνει $\Gamma\Delta = \lambda \cdot AB$
Λόγος	καθαρός αριθμός, ίδιος για κάθε (κοινή) μονάδα
Σύμμετρα / ασύμμετρα	ρητός / άρρητος λόγος

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Χρήση του ορισμού

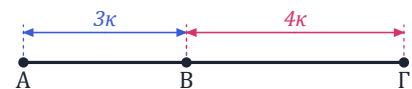
Δίνεται τμήμα $AB = 15$ cm. Να βρεθεί το τμήμα $\Gamma\Delta$ για το οποίο $\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{4}{5}$, καθώς και ο λόγος $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$.

ΛΥΣΗ

Από τον ορισμό, $\Gamma\Delta = \frac{4}{5} \cdot AB = \frac{4}{5} \cdot 15 = 12$ cm. Ο αντίστροφος λόγος είναι $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$ — δηλαδή ο αντίστροφος του $\frac{4}{5}$, όπως περιμέναμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Σημεία πάνω σε ευθεία

Τα σημεία A, B, Γ βρίσκονται με αυτή τη σειρά πάνω σε μια ευθεία και ισχύει $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{3}{4}$. Να βρεθούν οι λόγοι $\frac{AB}{A\Gamma}$ και $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$. Αν επιπλέον $A\Gamma = 28$, να βρεθούν τα AB και $B\Gamma$.



ΛΥΣΗ

Αφού $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{3}{4}$, μπορούμε να θέσουμε $AB = 3\kappa$ και $B\Gamma = 4\kappa$ για κάποιο $\kappa > 0$. Επειδή το B είναι ανάμεσα στα A και Γ , έχουμε $A\Gamma = AB + B\Gamma = 7\kappa$. Επομένως

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{3\kappa}{7\kappa} = \frac{3}{7}, \quad \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{7\kappa}{4\kappa} = \frac{7}{4}.$$

Αν $A\Gamma = 28$, τότε $7\kappa = 28$, άρα $\kappa = 4$, οπότε $AB = 12$ και $B\Gamma = 16$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Η τεχνική του «κ»

Όταν δίνεται ένας λόγος $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$, γράφουμε $x = m\kappa$, $y = n\kappa$ με $\kappa > 0$. Έτσι μετατρέπουμε τον λόγο σε δύο απλές εκφράσεις με έναν άγνωστο και όλα γίνονται άλγεβρα πρώτου βαθμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Κατασκευή τμήματος

Δίνεται τμήμα α . Να κατασκευαστεί τμήμα $x = \frac{2}{3}\alpha$.

ΛΥΣΗ

Χωρίζουμε το α σε 3 ίσα μέρη με την κατασκευή της ημιευθείας και των παραλλήλων. Αν A είναι η αρχή του τμήματος και X_1, X_2 τα σημεία διαιρέσης (με $AX_1 = X_1X_2 = X_2B$), τότε το AX_2 είναι ίσο με δύο από τα τρία ίσα μέρη, δηλαδή $AX_2 = \frac{2}{3}\alpha$. Άρα $x = AX_2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Ο λόγος δεν αλλάζει με τη μονάδα

Ένα τμήμα AB έχει μήκος 2,4 dm και ένα τμήμα $\Gamma\Delta$ έχει μήκος 360 mm. Να βρεθεί ο λόγος $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$ χρησιμοποιώντας (α) εκατοστά (β) χιλιοστά.

ΛΥΣΗ

$$(α) AB = 24 \text{ cm}, \Gamma\Delta = 36 \text{ cm}, \text{ άρα } \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}.$$

$$(β) AB = 240 \text{ mm}, \Gamma\Delta = 360 \text{ mm}, \text{ άρα } \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{240}{360} = \frac{2}{3}.$$

Το αποτέλεσμα είναι, φυσικά, το ίδιο: ο λόγος δεν εξαρτάται από τη μονάδα, αρκεί να είναι κοινή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Μέσα τμημάτων

Δίνεται τμήμα AB , M το μέσο του και N το μέσο του MB . Να βρεθούν οι λόγοι $\frac{AN}{AB}$, $\frac{AM}{NB}$ και $\frac{MN}{AN}$.



ΛΥΣΗ

Θέτουμε $AB = 4\kappa$. Τότε $AM = MB = 2\kappa$ και $MN = NB = \kappa$. Επομένως $AN = AM + MN = 3\kappa$ και

$$\frac{AN}{AB} = \frac{3}{4}, \quad \frac{AM}{NB} = \frac{2\kappa}{\kappa} = 2, \quad \frac{MN}{AN} = \frac{\kappa}{3\kappa} = \frac{1}{3}.$$

Παρατήρησε πώς η επιλογή $AB = 4\kappa$ (αντί για $AB = \kappa$) μας γλίτωσε από τα κλάσματα.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Θέλεις να δεις την κατασκευή της διαίρεσης τμήματος βήμα-βήμα, σε κινούμενο σχήμα; Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρη θεωρία και βίντεο για κάθε μάθημα, εντελώς δωρεάν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 7.1–7.3 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Δίνεται τμήμα $AB = 20$. Να βρεθεί τμήμα $\Gamma\Delta$ τέτοιο ώστε: (α) $\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{3}{4}$ (β) $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{5}{2}$.
●○○ → Λύση 7.1–7.3/1
- 2 Ένα τμήμα έχει μήκος 1,5 m και ένα άλλο 75 cm. Να βρεθεί ο λόγος του πρώτου προς το δεύτερο και ο λόγος του δεύτερου προς το πρώτο.
●○○ → Λύση 7.1–7.3/2
- 3 Σημεία A, B, Γ βρίσκονται με αυτή τη σειρά σε ευθεία, με $AB = 6$ και $B\Gamma = 10$. Να βρεθούν οι λόγοι $\frac{AB}{B\Gamma}$, $\frac{AB}{A\Gamma}$, $\frac{B\Gamma}{A\Gamma}$.
●○○ → Λύση 7.1–7.3/3
- 4 Σημεία A, B, Γ βρίσκονται με αυτή τη σειρά σε ευθεία, ώστε $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{2}{9}$. Να βρεθεί ο λόγος $\frac{AB}{B\Gamma}$. Αν $B\Gamma = 21$, να βρεθεί το $A\Gamma$.
●●○ → Λύση 7.1–7.3/4
- 5 Δίνεται τμήμα AB και σημεία Γ, Δ του AB τέτοια ώστε $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$. Αν M είναι το μέσο του AB , να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{\Gamma M}{AB}$ και $\frac{\Gamma M}{A\Delta}$.
●●○ → Λύση 7.1–7.3/5

- 6 Να περιγράψετε πώς κατασκευάζεται, με κανόνα και διαβήτη, τμήμα $x = \frac{5}{4}\alpha$, όπου α δοσμένο τμήμα.

••○

→ Λύση 7.1–7.3/6

- 7 Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές α και β με $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2}$ και περίμετρο 50. Να βρεθούν οι πλευρές του.

••○

→ Λύση 7.1–7.3/7

- 8 Σημεία A, B, Γ, Δ βρίσκονται με αυτή τη σειρά σε ευθεία, ώστε $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{1}{2}$ και $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{4}{3}$. Να βρεθεί ο λόγος $\frac{A\Gamma}{B\Delta}$.

•••

→ Λύση 7.1–7.3/8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
Αναλογίες

ΜΑΘΗΜΑ 7.4–7.5

Ανάλογα τμήματα – Αναλογίες

◆ Τι σημαίνει «ανάλογα»

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Ανάλογα τμήματα

Τα τμήματα α, β λέγονται **ανάλογα** προς τα τμήματα γ, δ όταν

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Γενικότερα, τα τμήματα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι ανάλογα προς τα $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ όταν

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \dots = \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lambda.$$

Ο κοινός αυτός αριθμός λ λέγεται **λόγος της αναλογίας**.

Μια ισότητα δύο λόγων λέγεται **αναλογία**. Στην αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$:

- τα α και δ λέγονται **άκροι όροι**, ενώ τα β και γ **μέσοι όροι**.
- το δ λέγεται **τέταρτη ανάλογος** των α, β, γ (με αυτή τη σειρά).
- αν οι μέσοι όροι είναι ίσοι, δηλαδή $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\beta}$, το x λέγεται **μέση ανάλογος** των α και β . τότε $x^2 = \alpha\beta$, δηλαδή $x = \sqrt{\alpha\beta}$.

① ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Επειδή μετά την επιλογή μονάδας κάθε τμήμα αντιστοιχεί σε έναν θετικό αριθμό (το μήκος του), όλες οι ιδιότητες των αναλογιών που ξέρουμε από την Άλγεβρα για θετικούς αριθμούς ισχύουν αυτούσιες και για τα τμήματα. Γι' αυτό δουλεύουμε τα ευθύγραμμα τμήματα σαν αριθμούς.

◆ Οι ιδιότητες των αναλογιών

Ας θεωρήσουμε την αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ με θετικούς όρους. Ισχύουν οι εξής ιδιότητες: οι τρεις πρώτες είναι **ισοδυναμίες**, δηλαδή ισχύουν και αντίστροφα.

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Ιδιότητες αναλογιών

1. Γινόμενο άκρων = γινόμενο μέσων: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \alpha\delta = \beta\gamma$.
2. Εναλλαγή όρων: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \iff \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha} \iff \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$.
3. Πρόσθεση/αφαίρεση παρονομαστών: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta} \iff \frac{\alpha-\beta}{\beta} = \frac{\gamma-\delta}{\delta}$ (η τελευταία με $\alpha \neq \beta$ όταν μιλάμε για τμήματα).
4. Ιδιότητα ίσων λόγων: αν $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \dots = \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lambda$, τότε $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n} = \lambda$.

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(1) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ με $\beta\delta \neq 0$ και παίρνουμε $\alpha\delta = \beta\gamma$. αντίστροφα, διαιρούμε την $\alpha\delta = \beta\gamma$ με $\beta\delta$.

(2) Κάθε μία από τις ισότητες ισοδυναμεί, λόγω του (1), με την ίδια σχέση $\alpha\delta = \beta\gamma$.

(3) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \frac{\alpha}{\beta} + 1 = \frac{\gamma}{\delta} + 1 \iff \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$. Όμοια με αφαίρεση του 1.

(4) Από την υπόθεση $\alpha_1 = \lambda\beta_1, \alpha_2 = \lambda\beta_2, \dots, \alpha_\nu = \lambda\beta_\nu$. Προσθέτοντας κατά μέλη: $\alpha_1 + \dots + \alpha_\nu = \lambda(\beta_1 + \dots + \beta_\nu)$, που είναι το ζητούμενο.

→ ΠΟΡΙΣΜΑ — Μια χρήσιμη γενίκευση της (4)

Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$, τότε για οποιουδήποτε θετικούς κ, μ ισχύει $\frac{\kappa\alpha + \mu\gamma}{\kappa\beta + \mu\delta} = \lambda$. Επίσης, αν $\alpha \neq \gamma$, ισχύει και $\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} = \lambda$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

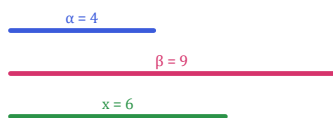
Η ιδιότητα (3) ζητά να προσθέτουμε τον **παρονομαστή** στον αριθμητή **στους δύο λόγους**. Δεν επιτρέπεται να προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό σε όρους: από την $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ **δεν** προκύπτει $\frac{\alpha+1}{\beta+1} = \frac{\gamma+1}{\delta+1}$. (Δοκίμασε $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$: είναι $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{5}$.)

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Λάθος «πρόσθεση κλασμάτων»

Από $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$ ο μαθητής γράφει ✗ $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = 2\lambda$.

✓ Η ιδιότητα των ίσων λόγων δίνει $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \lambda$ — ο λόγος **δεν αλλάζει**. Θυμήσου: «προσθέτουμε αριθμητές με αριθμητές και παρονομαστές με παρονομαστές και ο λόγος μένει ο ίδιος».

◆ Τέταρτη ανάλογος και μέση ανάλογος στην πράξη



Μέση ανάλογος: $x^2 = \alpha\beta$



Τέταρτη ανάλογος: $\alpha/\beta = \gamma/x$

- Τέταρτη ανάλογος των α, β, γ είναι το x με $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$, οπότε $x = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$.
- Μέση ανάλογος των α, β είναι το x με $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\beta}$, οπότε $x = \sqrt{\alpha\beta}$.

Το πώς **κατασκευάζονται** αυτά τα τμήματα με κανόνα και διαβήτη θα το δούμε στο θεώρημα του Θαλή (τέταρτη ανάλογος) και στις μετρικές σχέσεις του Κεφαλαίου 9 (μέση ανάλογος).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Τέταρτη και μέση ανάλογος

Να βρεθεί: (α) η τέταρτη ανάλογος των τμημάτων 4, 6, 10 (β) η μέση ανάλογος των τμημάτων 3 και 12.

ΛΥΣΗ

(α) Ζητάμε x με $\frac{4}{6} = \frac{10}{x}$. Γινόμενο άκρων = γινόμενο μέσων: $4x = 60$, άρα $x = 15$.

(β) Ζητάμε x με $\frac{3}{x} = \frac{x}{12}$, δηλαδή $x^2 = 36$. Επειδή το x είναι μήκος (θετικό), $x = 6$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Λόγος και άθροισμα

Δύο τμήματα x, y έχουν άθροισμα 35 και ισχύει $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$. Να βρεθούν.

ΛΥΣΗ

1ος τρόπος (ιδιότητα (3)). Από $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$ έχουμε $\frac{x+y}{y} = \frac{2+5}{5}$, δηλαδή $\frac{35}{y} = \frac{7}{5}$, άρα $y = 25$ και $x = 10$.

2ος τρόπος (το «κ»). $x = 2\kappa, y = 5\kappa$, οπότε $7\kappa = 35, \kappa = 5, x = 10, y = 25$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Τρία τμήματα σε αναλογία

Τρία τμήματα α, β, γ είναι ανάλογα των αριθμών 3, 4, 5 και έχουν άθροισμα 60. Να βρεθούν, και να εξεταστεί αν μπορούν να είναι πλευρές τριγώνου.

ΛΥΣΗ

Ισχύει $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{5}$. Από την ιδιότητα των ίσων λόγων:

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{5} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3 + 4 + 5} = \frac{60}{12} = 5.$$

Άρα $\alpha = 15$, $\beta = 20$, $\gamma = 25$. Επειδή $25 < 15 + 20$ (το μεγαλύτερο μικρότερο από το άθροισμα των άλλων δύο), υπάρχει τρίγωνο με αυτές τις πλευρές. Μάλιστα $15^2 + 20^2 = 625 = 25^2$, άρα είναι **ορθογώνιο** — αλλά αυτό θα το εκτιμήσουμε περισσότερο στο Κεφάλαιο 9.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Απόδειξη με αναλογίες

Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, να αποδειχθεί ότι $\frac{2\alpha + 3\beta}{2\gamma + 3\delta} = \frac{\beta}{\delta}$.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$, οπότε $\alpha = \lambda\beta$ και $\gamma = \lambda\delta$. Τότε

$$\frac{2\alpha + 3\beta}{2\gamma + 3\delta} = \frac{2\lambda\beta + 3\beta}{2\lambda\delta + 3\delta} = \frac{\beta(2\lambda + 3)}{\delta(2\lambda + 3)} = \frac{\beta}{\delta}.$$

 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πώς αποδεικνύουμε σχέσεις αναλογιών

Ο πιο ασφαλής δρόμος είναι σχεδόν πάντα ο ίδιος: **θέτουμε τον κοινό λόγο ίσο με λ** , εκφράζουμε τους αριθμητές μέσω των παρονομαστών ($\alpha = \lambda\beta$, $\gamma = \lambda\delta$) και αντικαθιστούμε. Τα υπόλοιπα είναι απλή Άλγεβρα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Αναλογία πάνω σε ευθεία

Σε ευθεία παίρνουμε διαδοχικά σημεία A, B, Γ με $\frac{AB}{BG} = \frac{AG}{6}$ και $BG = 3$. Να βρεθεί το AB.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $AB = x$. Τότε $AG = x + 3$ και η σχέση γίνεται $\frac{x}{3} = \frac{x+3}{6}$. Γινόμενο άκρων-μέσων: $6x = 3x + 9$, άρα $x = 3$. Δηλαδή $AB = 3$ και το B είναι το μέσο του AG.

ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Οι αναλογίες είναι το «αλφάβητο» όλου του κεφαλαίου. Αν θέλεις επανάληψη στις αλγεβρικές ιδιότητές τους με επιπλέον λυμένα θέματα, θα τη βρεις στο mathgreece.com, στο δωρεάν φροντιστήριο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 7.4–7.5 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Να βρεθεί το x σε καθεμία από τις αναλογίες: (α) $\frac{x}{8} = \frac{9}{12}$ (β) $\frac{5}{x} = \frac{x}{20}$ (γ) $\frac{x+2}{x} = \frac{7}{5}$.
●○○ → Λύση 7.4–7.5/1
- 2 Να βρεθεί η τέταρτη ανάλογος των τμημάτων 6, 9, 14 και η μέση ανάλογος των τμημάτων 2 και 18.
●○○ → Λύση 7.4–7.5/2
- 3 Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ανάλογες των αριθμών 2, 3, 4 και η περίμετρός του είναι 36. Να βρεθούν οι πλευρές.
●○○ → Λύση 7.4–7.5/3
- 4 Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta}$, όπου $\beta \neq \delta$.
●●○ → Λύση 7.4–7.5/4
- 5 Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\beta^2 + \delta^2} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$.
●●○ → Λύση 7.4–7.5/5
- 6 Δύο τμήματα έχουν διαφορά 12 και λόγο $\frac{7}{4}$. Να βρεθούν.
●●○ → Λύση 7.4–7.5/6
- 7 Τα τμήματα x, y, z ικανοποιούν $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$ και $3x + y - z = 10$. Να βρεθούν.
●●○ → Λύση 7.4–7.5/7
- 8 Αν το τμήμα x είναι μέση ανάλογος των α και β , να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{\alpha + \beta}{2}$. Πότε ισχύει η ισότητα; (Η μέση ανάλογος δεν ξεπερνά τον μέσο όρο.)
●●● → Λύση 7.4–7.5/8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
Αναλογίες

ΜΑΘΗΜΑ 7.6

Διαίρεση τμήματος εσωτερικά και εξωτερικά σε δοσμένο λόγο

Εσωτερική διαίρεση

ΟΡΙΣΜΟΣ — Εσωτερική διαίρεση

Λέμε ότι ένα σημείο M του τμήματος AB **διαίρει εσωτερικά** το AB σε λόγο $\lambda > 0$, όταν

$$\frac{MA}{MB} = \lambda.$$



Το M διαίρει εσωτερικά το AB σε λόγο λ

Στο σχήμα το M διαίρει εσωτερικά το AB σε λόγο $\frac{3}{5}$. Το μέσο ενός τμήματος το διαίρει εσωτερικά σε λόγο 1.

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Μοναδικότητα του σημείου εσωτερικής διαίρεσης

Για κάθε θετικό αριθμό λ υπάρχει **ένα μόνο** σημείο M που διαίρει εσωτερικά το AB σε λόγο λ , και ισχύει

$$MA = \frac{\lambda}{\lambda + 1} AB, \quad MB = \frac{1}{\lambda + 1} AB.$$

✍ **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

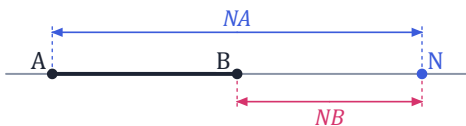
Αν $\frac{MA}{MB} = \lambda$, τότε από την ιδιότητα (3) των αναλογιών $\frac{MA}{MA + MB} = \frac{\lambda}{\lambda + 1}$. Επειδή το M είναι εσωτερικό σημείο, $MA + MB = AB$, οπότε $MA = \frac{\lambda}{\lambda + 1} AB$. Το μήκος MA είναι λοιπόν καθορισμένο, και πάνω στο τμήμα AB υπάρχει ένα μόνο σημείο σε τόση απόσταση από το A . Αντίστροφα, το σημείο αυτό δίνει $MB = AB - MA = \frac{1}{\lambda + 1} AB$, άρα $\frac{MA}{MB} = \lambda$. ■

Εξωτερική διαίρεση

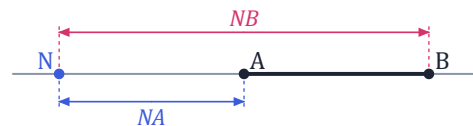
ΟΡΙΣΜΟΣ — Εξωτερική διαίρεση

Λέμε ότι ένα σημείο N της **ευθείας** AB , **έξω** από το τμήμα AB , διαίρει εξωτερικά το AB σε λόγο $\lambda > 0$, όταν

$$\frac{NA}{NB} = \lambda.$$



$\lambda > 1$: το N είναι πέρα από το B



$\lambda < 1$: το N είναι πέρα από το A

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Ύπαρξη και μοναδικότητα του σημείου εξωτερικής διαίρεσης

Για κάθε θετικό $\lambda \neq 1$ υπάρχει **ένα μόνο** σημείο N που διαίρει εξωτερικά το AB σε λόγο λ . Αν $\lambda > 1$, το N βρίσκεται στην προέκταση προς το B και

$$NB = \frac{AB}{\lambda - 1}, \quad NA = \frac{\lambda}{\lambda - 1} AB.$$

Αν $\lambda < 1$, το N βρίσκεται στην προέκταση προς το A . Για $\lambda = 1$ **δεν υπάρχει** τέτοιο σημείο.

✍ **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Έστω $\lambda > 1$. Τότε $NA > NB$, άρα το N είναι πιο κοντά στο B , δηλαδή στην προέκταση του AB προς το B . Εκεί $NA = AB + NB$, οπότε η $\frac{NA}{NB} = \lambda$ γίνεται $AB + NB = \lambda \cdot NB$, δηλαδή $NB = \frac{AB}{\lambda - 1}$: μια συγκεκριμένη απόσταση από το B , άρα ένα μόνο σημείο. Η περίπτωση $\lambda < 1$ είναι συμμετρική (εναλλάσσουμε τους ρόλους των A και B). Για $\lambda = 1$ θα έπρεπε $NA = NB$, δηλαδή το N να είναι το μέσο του AB , που όμως είναι εσωτερικό σημείο — άτοπο.

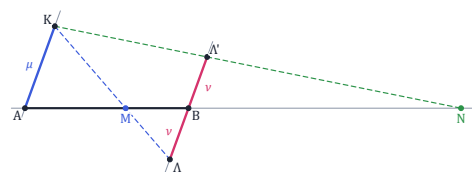
⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

Πριν γράψεις οποιαδήποτε σχέση για εξωτερική διαίρεση, **σχεδίασε πού βρίσκεται το σημείο**. Αν $\lambda > 1$ το σημείο είναι «από τη μεριά» του B , αν $\lambda < 1$ από τη μεριά του A . Η σχέση $NA = AB + NB$ ισχύει μόνο στην πρώτη περίπτωση· στη δεύτερη ισχύει $NB = AB + NA$.

◆ Κατασκευή με κανόνα και διαβήτη

Έστω ότι θέλουμε να διαιρέσουμε το AB σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν δοσμένα τμήματα.

1. Από τα A και B φέρνουμε δύο **παράλληλες** ευθείες.
2. Στην πρώτη παίρνουμε $AK = \mu$.
3. Στη δεύτερη παίρνουμε $BL = \nu$ **αντίθετα** από το K (για εσωτερική διαίρεση) και $BL' = \nu$ **προς την ίδια μεριά** με το K (για εξωτερική).
4. Οι ευθείες KL και KL' τέμνουν την AB στα ζητούμενα σημεία M και N .



Εσωτερική (M) και εξωτερική (N) διαίρεση σε λόγο μ/ν

Γιατί δουλεύει: τα τρίγωνα MAK και MBL έχουν $AK \parallel BL$, οπότε (θα το αποδείξουμε στο επόμενο μάθημα με το θεώρημα του Θαλή, ή στο Κεφάλαιο 8 με ομοιότητα) $\frac{MA}{MB} = \frac{AK}{BL} = \frac{\mu}{\nu}$. Ομοίως $\frac{NA}{NB} = \frac{AK}{BL'} = \frac{\mu}{\nu}$.

◆ Αρμονικά συζυγή σημεία

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Αρμονική τετράδα

Αν τα σημεία M και N διαιρούν το τμήμα AB εσωτερικά και εξωτερικά **στον ίδιο λόγο**, δηλαδή

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \lambda \quad (\lambda \neq 1),$$

λέμε ότι τα M, N είναι **συζυγή αρμονικά** των A, B και ότι τα A, B, M, N αποτελούν **αρμονική τετράδα**.

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Η σχέση είναι «αμφίδρομη»

Αν τα M, N είναι συζυγή αρμονικά των A, B , τότε και τα A, B είναι συζυγή αρμονικά των M, N , δηλαδή $\frac{AM}{AN} = \frac{BM}{BN}$.

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από την $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$ με εναλλαγή των μέσων όρων παίρνουμε $\frac{MA}{NA} = \frac{MB}{NB}$, δηλαδή $\frac{AM}{AN} = \frac{BM}{BN}$. Το A είναι εσωτερικό ή εξωτερικό σημείο του MN και το B το άλλο, άρα τα A, B διαιρούν το MN εσωτερικά και εξωτερικά στον ίδιο λόγο.

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Δύο κομψές σχέσεις (για τον φιλομαθή)

Έστω $\lambda > 1$, οπότε το N είναι πέρα από το B , και O το μέσο του AB . Τότε ισχύουν:

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} \quad \text{και} \quad OB^2 = OM \cdot ON.$$

Η πρώτη αποδεικνύεται αντικαθιστώντας $AM = \frac{\lambda}{\lambda + 1}AB$ και $AN = \frac{\lambda}{\lambda - 1}AB$: $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{(\lambda + 1) + (\lambda - 1)}{\lambda \cdot AB} = \frac{2}{AB}$. Η δεύτερη (σχέση του Νεύτωνα) αφήνεται ως άσκηση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Υπολογισμός σημείων διαίρεσης

Δίνεται τμήμα $AB = 12$. Να βρεθούν οι θέσεις των σημείων M και N που διαιρούν το AB εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\frac{3}{5}$, καθώς και η απόσταση MN .

ΛΥΣΗ

Εσωτερικό σημείο. $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5}$, οπότε $MA = \frac{3}{8} \cdot 12 = 4,5$ και $MB = 7,5$.



Εξωτερικό σημείο. Επειδή $\lambda = \frac{3}{5} < 1$, το N είναι στην προέκταση προς το A , με $NB = NA + 12$. Από $\frac{NA}{NA + 12} = \frac{3}{5}$: $5NA = 3NA + 36$, άρα $NA = 18$ και $NB = 30$.

Τα N και M βρίσκονται εκατέρωθεν του A , άρα $MN = NA + AM = 18 + 4,5 = 22,5$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Αρμονική τετράδα με αριθμούς

Σε ευθεία παίρνουμε διαδοχικά σημεία A, M, B, N με $AM = 4$, $MB = 2$, $BN = 6$. Να εξεταστεί αν τα M, N είναι συζυγή αρμονικά των A, B .

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\frac{MA}{MB} = \frac{4}{2} = 2$ και $\frac{NA}{NB} = \frac{4 + 2 + 6}{6} = \frac{12}{6} = 2$. Οι λόγοι είναι ίσοι, άρα **ναι**, τα A, B, M, N αποτελούν αρμονική τετράδα. Έλεγχος με τον τύπο: $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{2}{AB}$. ✓

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Λόγος από θέση

Το σημείο M διαιρεί εσωτερικά το AB σε λόγο $\frac{2}{3}$ και το N είναι το μέσο του MB . Σε ποιον λόγο διαιρεί το N το τμήμα AB ;

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $MA = 2\kappa$, $MB = 3\kappa$, οπότε $AB = 5\kappa$. Το N είναι μέσο του MB : $MN = NB = 1,5\kappa$. Άρα $NA = 2\kappa + 1,5\kappa = 3,5\kappa$ και $\frac{NA}{NB} = \frac{3,5\kappa}{1,5\kappa} = \frac{7}{3}$. Το N διαιρεί εσωτερικά το AB σε λόγο $\frac{7}{3}$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Λάθος θέση του εξωτερικού σημείου

«Το N διαιρεί εξωτερικά το $AB = 10$ σε λόγο $\frac{1}{4}$.» Ο μαθητής γράφει $\times NA = AB + NB$, οπότε $NB \cdot \frac{1}{4} = 10 + NB$ — και βρίσκει αρνητικό μήκος!

✓ Αφού $\lambda = \frac{1}{4} < 1$, ισχύει $NA < NB$: το N είναι πέρα από το A και $NB = NA + 10$. Τότε $4NA = NA + 10$, $NA = \frac{10}{3}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 7.6 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Δίνεται $AB = 15$. Να βρεθεί το σημείο M που διαιρεί εσωτερικά το AB σε λόγο $\frac{2}{3}$ και το σημείο N που το διαιρεί εξωτερικά στον ίδιο λόγο.

— Λύση 7.6/1

- 2** Ένα σημείο M του τμήματος $AB = 20$ απέχει από το A απόσταση 8. Σε ποιον λόγο διαιρεί το AB ; Υπάρχει σημείο της ευθείας AB που διαιρεί εξωτερικά το AB στον ίδιο λόγο;
→ Λύση 7.6/2
- 3** Σε ευθεία δίνονται διαδοχικά τα σημεία A, M, B, N με $AM = 6$ και $MB = 3$. Να βρεθεί το μήκος BN , ώστε τα M, N να είναι συζυγή αρμονικά των A, B .
→ Λύση 7.6/3
- 4** Αν το M διαιρεί εσωτερικά το AB σε λόγο λ , να αποδείξετε ότι $\frac{AM}{AB} = \frac{\lambda}{\lambda + 1}$ και να βρείτε τον λόγο $\frac{MB}{AB}$. Εφαρμογή:
 $\lambda = \frac{3}{4}$.
→ Λύση 7.6/4
- 5** Τα M, N διαιρούν το $AB = 8$ εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο 3. Να βρεθεί το MN και να επαληθευτεί ότι $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$.
→ Λύση 7.6/5
- 6** Να αποδείξετε ότι, αν τα M, N είναι συζυγή αρμονικά των A, B με λόγο $\lambda > 1$ και O το μέσο του AB , τότε $OB^2 = OM \cdot ON$.
→ Λύση 7.6/6
- 7** Δίνεται τμήμα AB και σημείο M που το διαιρεί εσωτερικά σε λόγο $\lambda \neq 1$. Αν O είναι το μέσο του AB , να αποδείξετε ότι $\frac{OM}{AB} = \frac{|\lambda - 1|}{2(\lambda + 1)}$.
→ Λύση 7.6/7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
Αναλογίες

ΜΑΘΗΜΑ 7.7

Θεώρημα του Θαλή

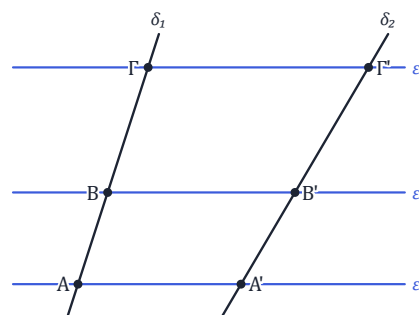
◆ Το θεώρημα

Είναι ίσως το πιο γνωστό θεώρημα της Γεωμετρίας μετά το Πυθαγόρειο, και η «καρδιά» όλου του κεφαλαίου.

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Θεώρημα του Θαλή

Αν τρεις (ή περισσότερες) **παράλληλες ευθείες** τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε ορίζουν σε αυτές τμήματα **ανάλογα**. Δηλαδή, αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ τέμνουν τη δ_1 στα Α, Β, Γ και τη δ_2 στα Α', Β', Γ', τότε

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BG}{B'G'} = \frac{AG}{A'G'}.$$



Θεώρημα του Θαλή: $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$

Με εναλλαγή μέσων όρων, η αναλογία γράφεται ισοδύναμα και ως $\frac{AB}{BG} = \frac{A'B'}{B'G'}$,

$\frac{AB}{AG} = \frac{A'B'}{A'G'}$ κ.λπ. Με λόγια: **κάθε τμήμα της μιας ευθείας προς το αντίστοιχό του στην άλλη έχει τον ίδιο λόγο.**

✍ **ΑΠΟΔΕΙΞΗ** — Ιδέα της απόδειξης

Ας υποθέσουμε ότι τα ΑΒ και ΒΓ είναι σύμμετρα, π.χ. $\frac{AB}{BG} = \frac{3}{5}$. Τότε υπάρχει τμήμα ε με $AB = 3\varepsilon$ και $BG = 5\varepsilon$. Χωρίζουμε το ΑΒ σε 3 και το ΒΓ σε 5 τμήματα ίσα με ε και από κάθε σημείο διαίρεσης φέρνουμε παράλληλη προς την ε_1 . Οι 9 παράλληλες που προκύπτουν ορίζουν 8 ίσα τμήματα στη δ_1 , άρα (θεώρημα της Α' Λυκείου) και 8 ίσα τμήματα, έστω ίσα με ε' , στη δ_2 . Από αυτά, 3 σχηματίζουν το Α'Β' και 5 το Β'Γ', οπότε $\frac{A'B'}{B'G'} = \frac{3\varepsilon'}{5\varepsilon'} = \frac{3}{5} = \frac{AB}{BG}$. Αποδεικνύεται ότι το θεώρημα ισχύει και όταν ο λόγος είναι άρρητος, αλλά η απόδειξη αυτή (με όρια) ξεφεύγει από τη σχολική ύλη.

🏠 **ΛΙΓΗ ΙΣΤΟΡΙΑ**

Ο Θαλής ο Μιλήσιος (περ. 624–546 π.Χ.) θεωρείται ο πρώτος Έλληνας μαθηματικός και φιλόσοφος. Κατά την παράδοση μέτρησε το ύψος της πυραμίδας του Χέοπα συγκρίνοντας τη σκιά της με τη σκιά ενός ραβδιού, την ώρα που «η σκιά κάθε πράγματος είναι ίση με το ύψος του». Η ιδέα των ανάλογων τμημάτων φαίνεται να είναι ήδη εκεί!

◆ Το αντίστροφο

Το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή ισχύει, αλλά με μια προσεκτική διατύπωση: **πρέπει να ξέρουμε ήδη ότι δύο από τις τρεις ευθείες είναι παράλληλες.**

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή

Δύο ευθείες δ_1, δ_2 τέμνουν δύο **παράλληλες** ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα σημεία Α, Β και Α', Β' αντίστοιχα. Αν Γ και Γ' είναι σημεία των δ_1 και δ_2 (προς την ίδια μεριά της ε_2) τέτοια ώστε

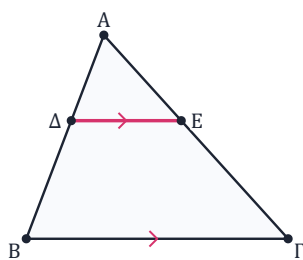
$$\frac{AB}{BG} = \frac{A'B'}{B'G'},$$

τότε η ευθεία ΓΓ' είναι παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2 .

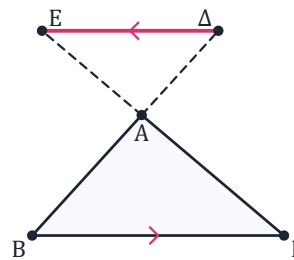
⚠ **ΠΡΟΣΟΧΗ!**

Από τρία ζεύγη σημείων με ανάλογα τμήματα **δεν** μπορούμε να συμπεράνουμε ότι **και οι τρεις** ευθείες είναι παράλληλες. Χρειάζεται να είναι γνωστό ότι δύο από αυτές είναι παράλληλες· τότε μόνο αποδεικνύεται ότι είναι και η τρίτη.

Η πιο χρήσιμη μορφή: παράλληλη σε πλευρά τριγώνου



$\Delta E \parallel B\Gamma$ (εντός των πλευρών)



$\Delta E \parallel B\Gamma$ (στις προεκτάσεις)

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Πόρισμα (παράλληλη προς πλευρά τριγώνου)

Κάθε ευθεία παράλληλη προς μια πλευρά τριγώνου χωρίζει τις άλλες δύο πλευρές (ή τις προεκτάσεις τους) σε μέρη ανάλογα, και αντίστροφα. Δηλαδή, στο τρίγωνο ΑΒΓ με Δ στην ευθεία ΑΒ και Ε στην ευθεία ΑΓ:

$$\Delta E \parallel B\Gamma \iff \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma} \iff \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{AG}.$$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Φέρνουμε από το Α ευθεία $\varepsilon \parallel B\Gamma$. Τότε οι ε , ΔΕ, ΒΓ είναι τρεις παράλληλες που τέμνουν τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ, οπότε από το θεώρημα του Θαλή $\frac{A\Delta}{\Delta E} = \frac{\Delta B}{E\Gamma}$, δηλαδή (εναλλαγή μέσων) $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$. Η δεύτερη ισότητα προκύπτει με την ιδιότητα (3) των αναλογιών. Το αντίστροφο προκύπτει από το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή.

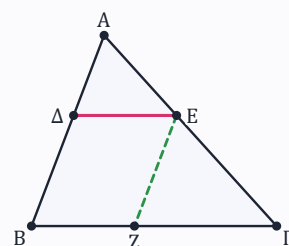
★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Τρίγωνο με πλευρές ανάλογες

Αν $\Delta E \parallel B\Gamma$ (με Δ, Ε στις ευθείες ΑΒ, ΑΓ), τότε το τρίγωνο ΑΔΕ έχει πλευρές **ανάλογες** προς τις πλευρές του ΑΒΓ:

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{DE}{B\Gamma}.$$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η πρώτη ισότητα είναι το πόρισμα. Για τη δεύτερη, φέρνουμε από το Ε την $EZ \parallel AB$ (Ζ στη ΒΓ). Το ΔΕΖΒ είναι παραλληλόγραμμο (απέναντι πλευρές παράλληλες), άρα $\Delta E = BZ$. Η $EZ \parallel AB$ είναι παράλληλη προς πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ (θεωρούμε τώρα την πλευρά ΑΒ), οπότε από το πόρισμα $\frac{AE}{AG} = \frac{BZ}{B\Gamma} = \frac{DE}{B\Gamma}$.



✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Το πιο συχνό λάθος του κεφαλαίου

Στο σχήμα με $\Delta E \parallel B\Gamma$ ο μαθητής γράφει $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{\Delta E}{B\Gamma}$.

✓ Το ΔΕ συγκρίνεται με το ΒΓ όπως το μικρό τρίγωνο με το μεγάλο: $\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB}$ (ολόκληρη πλευρά ΑΒ, όχι το κομμάτι ΔΒ!). Ο λόγος $\frac{A\Delta}{\Delta B}$ χρησιμοποιείται μόνο για κομμάτια των πλευρών.

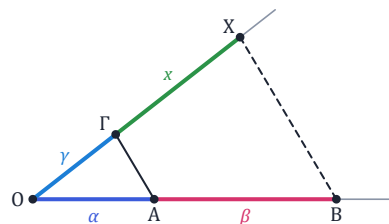
⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

Το αντίστροφο ισχύει με τα κομμάτια των πλευρών ($\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma} \Rightarrow \Delta E \parallel B\Gamma$). Από την ισότητα $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{AG}$ δεν προκύπτει ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$: μπορεί να υπάρχουν δύο θέσεις του Ε πάνω στην ΑΓ που δίνουν το ίδιο μήκος ΔΕ.

Κατασκευή της τέταρτης αναλόγου

Δίνονται τμήματα α, β, γ . Ζητάμε τμήμα x με $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$.

1. Σχεδιάζουμε γωνία με κορυφή O .
2. Στη μία πλευρά παίρνουμε διαδοχικά $OA = \alpha$ και $AB = \beta$.
3. Στην άλλη πλευρά παίρνουμε $OG = \gamma$.
4. Φέρνουμε από το B παράλληλη προς την AG , που τέμνει τη δεύτερη πλευρά στο X .



Κατασκευή του $x = \beta\gamma/\alpha$

Τότε $x = GX$, γιατί από το πόρισμα του Θαλή $\frac{OA}{AB} = \frac{OG}{GX}$, δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Άμεση εφαρμογή

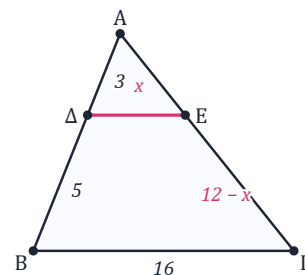
Τρεις παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο ευθείες δ_1, δ_2 στα A, B, Γ και A', B', Γ' αντίστοιχα. Αν $AB = 4$, $B\Gamma = 6$ και $A'\Gamma' = 15$, να βρεθούν τα $A'B'$ και $B'\Gamma'$.

ΛΥΣΗ

Από το θεώρημα του Θαλή $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$. Άρα $A'B' = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$ και $B'\Gamma' = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9$. (Έλεγχος: $6 + 9 = 15$ ✓.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Υπολογισμός σε τρίγωνο

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 8$, $A\Gamma = 12$, $B\Gamma = 16$. Σημείο Δ της AB με $A\Delta = 3$ η παράλληλη από το Δ προς τη $B\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Να βρεθούν τα AE , $E\Gamma$ και ΔE .



ΛΥΣΗ

Από το πόρισμα: $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma}$, δηλαδή $\frac{3}{8} = \frac{AE}{12}$, άρα $AE = 4,5$ και $E\Gamma = 12 - 4,5 = 7,5$.

Για το ΔE χρησιμοποιούμε το θεώρημα των ανάλογων πλευρών: $\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{3}{8}$, άρα $\Delta E = \frac{3}{8} \cdot 16 = 6$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Απόδειξη παραλληλίας

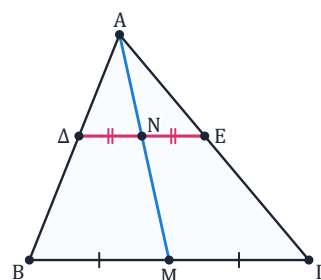
Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ παίρνουμε σημείο Δ της AB με $A\Delta = 4$, $\Delta B = 6$ και σημείο E της $A\Gamma$ με $AE = 6$, $E\Gamma = 9$. Να αποδειχθεί ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$.

ΛΥΣΗ

Είναι $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{E\Gamma} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Αφού $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$, από το αντίστροφο του πορίσματος του Θαλή, $\Delta E \parallel B\Gamma$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Η διάμεσος διχοτομεί κάθε παράλληλη προς τη βάση

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η AM είναι διάμεσος. Μια ευθεία παράλληλη προς τη $B\Gamma$ τέμνει τις AB , AM , $A\Gamma$ στα Δ , N , E . Να αποδειχθεί ότι το N είναι μέσο του ΔE .

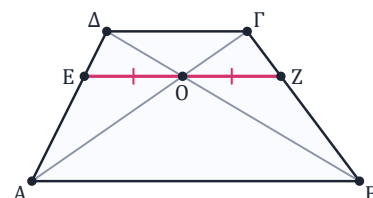


ΛΥΣΗ

Στο τρίγωνο ABM είναι $\Delta N \parallel BM$, οπότε $\frac{\Delta N}{BM} = \frac{AN}{AM}$. Στο τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι $NE \parallel M\Gamma$, οπότε $\frac{NE}{M\Gamma} = \frac{AN}{AM}$. Άρα $\frac{\Delta N}{BM} = \frac{NE}{M\Gamma}$, και επειδή $BM = M\Gamma$ προκύπτει $\Delta N = NE$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Τραπεζίο και τομή διαγωνίων

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) οι διαγώνιοι τέμνονται στο O . Η παράλληλη από το O προς τις βάσεις τέμνει τις $A\Delta$, $B\Gamma$ στα E , Z . Να αποδειχθεί ότι $OE = OZ$ και ότι $\frac{1}{OE} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{\Gamma\Delta}$.



ΛΥΣΗ

Θέτουμε $AB = \alpha$, $\Gamma\Delta = \beta$.

- Στο τρίγωνο ΔAB είναι $EO \parallel AB$, άρα $\frac{OE}{\alpha} = \frac{\Delta O}{\Delta B}$.
- Στο τρίγωνο ΓAB είναι $OZ \parallel AB$, άρα $\frac{OZ}{\alpha} = \frac{\Gamma O}{\Gamma A}$.
- Οι παράλληλες AB , EZ , $\Delta\Gamma$ τέμνουν τις $B\Delta$ και $A\Gamma$, οπότε (Θαλής) $\frac{\Delta O}{OB} = \frac{\Gamma O}{OA}$ και άρα $\frac{\Delta O}{\Delta B} = \frac{\Gamma O}{\Gamma A}$.

Συνεπώς $\frac{OE}{\alpha} = \frac{OZ}{\alpha}$, δηλαδή $OE = OZ$.

Για τη δεύτερη σχέση: στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι $OZ \parallel \Delta\Gamma$, άρα $\frac{OZ}{\beta} = \frac{BO}{B\Delta}$. Προσθέτοντας με την $\frac{OE}{\alpha} = \frac{\Delta O}{\Delta B}$ και επειδή $OE = OZ$:

$$\frac{OE}{\alpha} + \frac{OE}{\beta} = \frac{\Delta O + OB}{\Delta B} = 1 \Rightarrow \frac{1}{OE} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πώς «βλέπουμε» τον Θαλή σε ένα σχήμα

1. Ψάχνουμε **παράλληλες** ευθείες (δοσμένες ή που μπορούμε να φέρουμε εμείς).
2. Εντοπίζουμε **δύο ευθείες που τις τέμνουν** — συχνά δύο πλευρές ενός τριγώνου με κοινή κορυφή.
3. Γράφουμε την αναλογία με τα **αντίστοιχα** τμήματα. Αν εμφανίζεται και το τμήμα της παράλληλης, χρησιμοποιούμε **ολόκληρες** τις πλευρές ($\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{\Delta\Delta}{AB}$).
4. Αν δεν υπάρχει κατάλληλη παράλληλη, **τη φέρνουμε** εμείς — συνήθως από ένα μέσο ή από μια κορυφή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Το βαρύκεντρο και μια παράλληλη

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το Θ είναι το βαρύκεντρο. Η παράλληλη από το Θ προς τη $B\Gamma$ τέμνει την AB στο Δ και την $A\Gamma$ στο E . Να αποδειχθεί ότι $\Delta E = \frac{2}{3}B\Gamma$.

ΛΥΣΗ

Αν AM είναι η διάμεσος, ξέρουμε από την A' Λυκείου ότι $A\Theta = \frac{2}{3}AM$. Στο τρίγωνο ABM η $\Delta\Theta \parallel BM$, άρα $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{A\Theta}{AM} = \frac{2}{3}$. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, αφού $\Delta E \parallel B\Gamma$: $\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$, δηλαδή $\Delta E = \frac{2}{3}B\Gamma$. ■

ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Ο Θαλής εμφανίζεται σε σχεδόν κάθε διαγώνισμα του κεφαλαίου. Για ακόμη περισσότερα λυμένα θέματα, κατηγοριοποιημένα κατά δυσκολία, επισκεψου το mathgreece.com — εκεί θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 7.7 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Τρεις παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο ευθείες στα A, B, Γ και A', B', Γ' . Αν $AB = 5$, $A'B' = 7$ και $B'\Gamma' = 14$, να βρεθεί το $B\Gamma$.
●○○ → Λύση 7.7/1
- 2 Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$ με Δ στην AB και E στην $A\Gamma$. Αν $A\Delta = 6$, $\Delta B = 4$, $AE = 9$ και $B\Gamma = 20$, να βρεθούν τα $E\Gamma$ και ΔE .
●○○ → Λύση 7.7/2
- 3 Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 12$, $A\Gamma = 18$. Σημεία Δ στην AB και E στην $A\Gamma$ με $A\Delta = 8$, $AE = 12$. Είναι η ΔE παράλληλη στη $B\Gamma$?
●○○ → Λύση 7.7/3
- 4 Δίνονται τμήματα $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 5$. Να περιγράψετε την κατασκευή του τμήματος x με $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$ και να υπολογίσετε το μήκος του.
●●○ → Λύση 7.7/4
- 5 Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$, μια ευθεία παράλληλη προς τις βάσεις τέμνει τις $A\Delta$, $B\Gamma$ στα E , Z . Αν $AE = 3$, $E\Delta = 5$ και $B\Gamma = 12$, να βρεθούν τα BZ και $Z\Gamma$.
●●○ → Λύση 7.7/5
- 6 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ παίρνουμε σημείο Δ της $B\Gamma$ με $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{1}{2}$. Η παράλληλη από το Δ προς την $A\Gamma$ τέμνει την AB στο E και η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την $A\Gamma$ στο Z . Αν $AB = 9$ και $A\Gamma = 12$, να βρεθεί η περίμετρος του $AE\Delta Z$.
●●○ → Λύση 7.7/6
- 7 Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το M είναι το μέσο της $B\Gamma$ και Δ σημείο της AM με $\frac{A\Delta}{\Delta M} = 2$. Η $B\Delta$ τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι το E είναι μέσο της $A\Gamma$. (Υπόδειξη: φέρτε από το M παράλληλη προς τη BE .)
●●○ → Λύση 7.7/7
- 8 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της AB με $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{2}{3}$. Η παράλληλη από το Δ προς τη $B\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο E , και η παράλληλη από το E προς την AB τέμνει τη $B\Gamma$ στο Z . Να βρεθεί ο λόγος $\frac{BZ}{Z\Gamma}$ και να αποδειχθεί ότι $\Delta E = BZ$.
●●● → Λύση 7.7/8

- 9 Σε τραπέζιο με βάσεις $AB = 6$ και $ΓΔ = 12$, οι διαγώνιοι τέμνονται στο O και η παράλληλη από το O προς τις βάσεις τέμνει τις μη παράλληλες πλευρές στα E και Z . Να υπολογίσετε το EZ .

→ Λύση 7.7/9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
Αναλογίες

ΜΑΘΗΜΑ 7.8

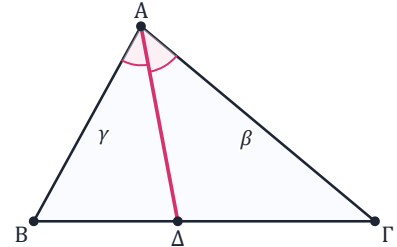
Θεωρήματα των διχοτόμων τριγώνου

♦ Το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου

Η διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου διαιρεί **εσωτερικά** την απέναντι πλευρά σε λόγο ίσο με τον λόγο των **προσκειμένων** πλευρών. Δηλαδή, αν AD είναι η διχοτόμος της $\hat{A}$ στο τρίγωνο $AB\Gamma$:

$$\frac{DB}{\Gamma D} = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}.$$

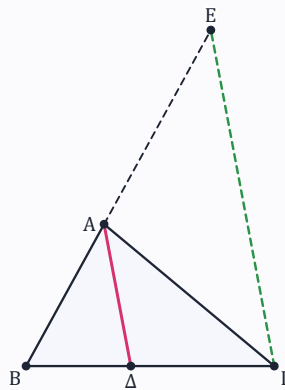
Η εσωτερική διχοτόμος AD

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από το Γ φέρνουμε παράλληλη προς την AD , που τέμνει την προέκταση της BA στο E . Στο τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι $AD \parallel E\Gamma$, οπότε από τον Θαλή

$$\frac{DB}{\Gamma D} = \frac{AB}{AE}. \quad (1)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $AE = A\Gamma$. Οι γωνίες $\widehat{AGE}$ και $\widehat{DAG}$ είναι εντός εναλλάξ (παράλληλες $AD, E\Gamma$ με τέμνουσα AG), ενώ οι $\widehat{AEG}$ και $\widehat{BAD}$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά (τέμνουσα BE). Επειδή $\widehat{BAD} = \widehat{DAG}$ (διχοτόμος), συμπεραίνουμε $\widehat{AGE} = \widehat{AEG}$. Το τρίγωνο AGE είναι ισοσκελές, άρα $AE = A\Gamma$, και η (1) δίνει $\frac{DB}{\Gamma D} = \frac{AB}{A\Gamma}$. ■

♦ Τα μήκη των τμημάτων $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$

Από $\frac{DB}{\Gamma D} = \frac{\gamma}{\beta}$ και την ιδιότητα (3) των αναλογιών παίρνουμε $\frac{DB}{DB + \Delta\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}$. Επειδή $DB + \Delta\Gamma = \alpha$:

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Τύποι εσωτερικής διχοτόμου

$$B\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma}, \quad \Delta\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta + \gamma}.$$

Μνημονικός κανόνας: το τμήμα **δίπλα στο B** παίρνει στον αριθμητή την πλευρά $\gamma = AB$ που επίσης «ακουμπά» το B.

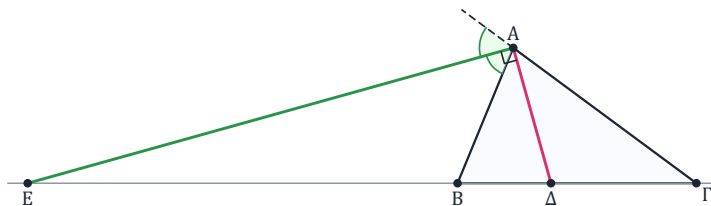
★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Αντίστροφο

Αν ένα σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ ικανοποιεί $\frac{DB}{\Gamma D} = \frac{AB}{A\Gamma}$, τότε η AD είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν AD' είναι η διχοτόμος, τότε $\frac{D'B}{\Gamma D'} = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{DB}{\Delta\Gamma}$. Δηλαδή τα Δ και Δ' διαιρούν εσωτερικά το $B\Gamma$ στον ίδιο λόγο. Λόγω της μοναδικότητας του σημείου εσωτερικής διαίρεσης (μάθημα 7.6), $\Delta = \Delta'$. ■

◆ Το θεώρημα της εξωτερικής διχοτόμου



Εσωτερική (ΑΔ) και εξωτερική (ΑΕ) διχοτόμος με $\beta > \gamma$

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Θεώρημα εξωτερικής διχοτόμου

Η διχοτόμος μιας **εξωτερικής** γωνίας τριγώνου (που δεν είναι παράλληλη στην απέναντι πλευρά) τέμνει την προέκταση της απέναντι πλευράς σε σημείο Ε που τη διαιρεί **εξωτερικά** σε λόγο ίσο με τον λόγο των προσκείμενων πλευρών:

$$\frac{EB}{EG} = \frac{AB}{AG} = \frac{\gamma}{\beta}.$$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από το Β φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΕ, που τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Στο τρίγωνο ΓΑΕ είναι $BZ \parallel AE$, οπότε $\frac{EB}{EG} = \frac{AZ}{AG}$. Αρκεί λοιπόν $AZ = AB$. Η εξωτερική διχοτόμος σχηματίζει με τις ΑΒ και με την προέκταση της ΓΑ ίσες γωνίες· λόγω των παραλλήλων ΑΕ και ΒΖ, οι γωνίες αυτές μεταφέρονται στις $\widehat{ABZ}$ (εντός εναλλάξ) και $\widehat{AZB}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά). Άρα $\widehat{ABZ} = \widehat{AZB}$, το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές και $AZ = AB$. ■

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Τύποι εξωτερικής διχοτόμου ($\beta \neq \gamma$)

$$EB = \frac{\alpha\gamma}{|\beta - \gamma|}, \quad EG = \frac{\alpha\beta}{|\beta - \gamma|}.$$

Το Ε βρίσκεται προς τη μεριά της **μικρότερης** από τις πλευρές β, γ : αν $\beta > \gamma$, το Ε είναι στην προέκταση της ΓΒ προς το Β.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

Αν $\beta = \gamma$ (ισοσκελές με κορυφή Α), η εξωτερική διχοτόμος της $\hat{A}$ είναι **παράλληλη** στη ΒΓ και δεν την τέμνει. Τότε δεν υπάρχει το σημείο Ε — σύμφωνα και με το ότι για λόγο 1 δεν υπάρχει σημείο εξωτερικής διαίρεσης.

◆ Συνέπειες

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Αρμονική τετράδα των διχοτόμων

Τα ίχνη Δ, Ε της εσωτερικής και της εξωτερικής διχοτόμου της $\hat{A}$ διαιρούν το ΒΓ εσωτερικά και εξωτερικά στον ίδιο λόγο $\frac{\gamma}{\beta}$. Είναι επομένως **συζυγή αρμονικά** των Β, Γ. Επιπλέον, επειδή οι δύο διχοτόμοι είναι κάθετες, $\widehat{DAE} = 90^\circ$ και

$$\Delta E = \frac{2\alpha\beta\gamma}{|\beta^2 - \gamma^2|}.$$

Για τον τύπο του ΔΕ: αν $\beta > \gamma$, το Β βρίσκεται ανάμεσα στα Ε και Δ, οπότε $\Delta E = B\Delta + EB = \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma} + \frac{\alpha\gamma}{\beta - \gamma} = \alpha\gamma \cdot \frac{2\beta}{\beta^2 - \gamma^2}$.

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Το έγκεντρο πάνω στη διχοτόμο

Αν I είναι το έγκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ και AD η διχοτόμος, τότε

$$\frac{AI}{ID} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}.$$

✍ **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Η BI είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ στο τρίγωνο $AB\Delta$. Από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου σε αυτό το τρίγωνο: $\frac{IA}{ID} = \frac{BA}{B\Delta} = \frac{\gamma}{\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha}.$

✗ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** — Λάθος αντιστοιχία

Ο μαθητής γράφει ✗ $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{A\Gamma}{AB}.$

✓ Κάθε τμήμα της βάσης αντιστοιχεί στην πλευρά που έχει **κοινό άκρο** μαζί του: το ΔB με την AB , το $\Delta \Gamma$ με την $A\Gamma$. Άρα $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}.$ Ένας γρήγορος έλεγχος: η **μεγαλύτερη** πλευρά «τραβάει» προς το μέρος της το **μεγαλύτερο** κομμάτι της βάσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Υπολογισμός όλων των τμημάτων

Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $\alpha = 7, \beta = 8, \gamma = 6$. Αν AD, AE είναι η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της $\hat{A}$, να βρεθούν τα $B\Delta, \Delta\Gamma, EB, E\Gamma$ και ΔE .

ΛΥΣΗ

Εσωτερική: $B\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma} = \frac{42}{14} = 3$ και $\Delta\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma} = \frac{56}{14} = 4$. (Έλεγχος: $3 + 4 = 7$ ✓ και $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ✓.)

Εξωτερική: Επειδή $\beta > \gamma$, το E είναι στην προέκταση προς το B . $EB = \frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma} = \frac{42}{2} = 21$ και $E\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma} = \frac{56}{2} = 28$. (Έλεγχος: $E\Gamma - EB = 7 = \alpha$ ✓.)

ΔE : $\Delta E = EB + B\Delta = 21 + 3 = 24$. Με τον τύπο: $\frac{2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6}{64 - 36} = \frac{672}{28} = 24$ ✓.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Διχοτόμος και διάμεσος

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 10, A\Gamma = 15$ και $B\Gamma = 20$. Αν AD είναι η διχοτόμος και AM η διάμεσος, να βρεθεί το μήκος ΔM .

ΛΥΣΗ

$B\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma} = \frac{20 \cdot 10}{25} = 8$, ενώ $BM = 10$. Επειδή $B\Delta < BM$, το Δ είναι μεταξύ B και M , οπότε $\Delta M = 10 - 8 = 2$.

❗ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Γενικά, σε τρίγωνο με $\beta \neq \gamma$ το ίχνος της διχοτόμου βρίσκεται **ανάμεσα** στο ίχνος του ύψους και στο μέσο της πλευράς.

Το ΔM υπολογίζεται πάντα ως $\Delta M = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma} = \frac{\alpha(\beta-\gamma)}{2(\beta+\gamma)}$ (για $\beta > \gamma$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Λόγος στο έγκεντρο

Τρίγωνο έχει πλευρές $\alpha = 12$, $\beta = 10$, $\gamma = 8$. Αν I είναι το έγκεντρο και AI η διχοτόμος της $\hat{A}$, να βρεθεί ο λόγος $\frac{AI}{ID}$ και ο λόγος $\frac{AI}{AD}$.

ΛΥΣΗ

$$\frac{AI}{ID} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}. \text{ Άρα } AI = 3\kappa, ID = 2\kappa, AD = 5\kappa \text{ και } \frac{AI}{AD} = \frac{3}{5}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Ισοσκελές και παράλληλη

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) οι διχοτόμοι $B\Delta$ και ΓE των γωνιών της βάσης τέμνουν τις $A\Gamma$ και AB στα Δ και E . Να αποδειχθεί ότι $DE \parallel B\Gamma$.

ΛΥΣΗ

Για τη διχοτόμο $B\Delta$: $\frac{\Delta A}{\Delta \Gamma} = \frac{BA}{B\Gamma} = \frac{\gamma}{\alpha}$. Για τη διχοτόμο ΓE : $\frac{EA}{EB} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\beta}{\alpha}$. Επειδή $\beta = \gamma$, ισχύει $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{\Delta \Gamma}$, οπότε από το αντίστροφο του πορίσματος του Θαλή $DE \parallel B\Gamma$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Εύρεση πλευράς από τη διχοτόμο

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η διχοτόμος $A\Delta$ χωρίζει τη $B\Gamma$ σε τμήματα $B\Delta = 4$ και $\Delta\Gamma = 6$. Αν η περίμετρος του τριγώνου είναι 35, να βρεθούν οι πλευρές AB και $A\Gamma$.

ΛΥΣΗ

$\alpha = 10$, οπότε $\beta + \gamma = 25$. Από το θεώρημα: $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Με «κ»: $\gamma = 2\kappa$, $\beta = 3\kappa$, $5\kappa = 25$, $\kappa = 5$. Άρα $AB = \gamma = 10$ και $A\Gamma = \beta = 15$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πότε σκεφτόμαστε το θεώρημα των διχοτόμων

Όταν στην άσκηση εμφανίζεται **διχοτόμος γωνίας** τριγώνου και ζητείται **λόγος τμημάτων** (ή μήκη τμημάτων) πάνω στην απέναντι πλευρά. Αν η διχοτόμος περνά από σημείο που μας ενδιαφέρει (π.χ. το έγκεντρο), συχνά βοηθά να εφαρμόσουμε το θεώρημα σε **μικρότερο** τρίγωνο, όπως κάναμε για το $\frac{AI}{ID}$.

**ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;**

Τα θεωρήματα των διχοτόμων συνδυάζονται συχνά με τον Θαλή σε ασκήσεις εξετάσεων. Για περισσότερες τέτοιες «συνδυαστικές» ασκήσεις με λύσεις, δες το δωρεάν φροντιστήριο στο mathgreece.com.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 7.8 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 9$, $A\Gamma = 12$ και $B\Gamma = 14$. Να βρεθούν τα τμήματα στα οποία η διχοτόμος $A\Delta$ χωρίζει τη $B\Gamma$.

●○○

→ Λύση 7.8/1

- 2** Στο τρίγωνο του προηγούμενου ερωτήματος, να βρεθούν τα EB , $E\Gamma$, όπου AE η εξωτερική διχοτόμος της $\hat{A}$, και το μήκος DE .

●○○

→ Λύση 7.8/2

- 3** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ το σημείο Δ της $B\Gamma$ ικανοποιεί $B\Delta = 3$, $\Delta\Gamma = 5$, ενώ $AB = 4,5$ και $A\Gamma = 7,5$. Είναι η $A\Delta$ διχοτόμος;
● ○ → Λύση 7.8/3
-
- 4** Η διχοτόμος $A\Delta$ τριγώνου $AB\Gamma$ ορίζει $B\Delta = 5$ και $\Delta\Gamma = 7$. Αν $A\Gamma - AB = 4$, να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου.
● ○ → Λύση 7.8/4
-
- 5** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 6$, $A\Gamma = 9$ και $B\Gamma = 10$, το I είναι το έγκεντρο και η AI τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ . Να βρεθεί ο λόγος $\frac{AI}{I\Delta}$ και το μήκος $B\Delta$.
● ○ → Λύση 7.8/5
-
- 6** Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η διχοτόμος $A\Delta$ ικανοποιεί $B\Delta = \frac{\alpha}{3}$, να αποδείξετε ότι $\beta = 2\gamma$.
● ○ → Λύση 7.8/6
-
- 7** Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $AB = 6$ και $A\Gamma = 8$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την $A\Gamma$ στο Δ . Να βρεθούν τα $A\Delta$ και $\Delta\Gamma$.
● ○ → Λύση 7.8/7
-
- 8** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ οι διχοτόμοι $A\Delta$, BE , ΓZ των γωνιών του τέμνουν τις απέναντι πλευρές στα Δ , E , Z . Να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \cdot \frac{E\Gamma}{E\Delta} \cdot \frac{Z\Delta}{ZB} = 1$.
● ● → Λύση 7.8/8
-
- 9** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η διάμεσος AM τέμνει τη διχοτόμο $B\Delta$ της γωνίας $\hat{B}$ στο σημείο K . Να αποδείξετε ότι $\frac{AK}{KM} = \frac{2\gamma}{\alpha}$.
● ● → Λύση 7.8/9
-

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
Αναλογίες

ΜΑΘΗΜΑ 7.9

Απολλώνιος κύκλος

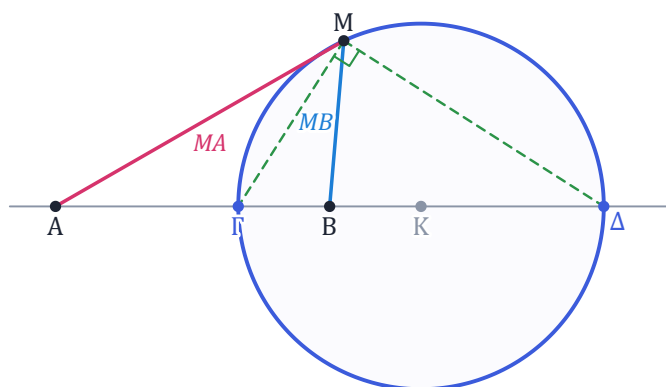
♦ Το πρόβλημα

Δίνονται δύο σημεία A και B. Ποια σημεία M του επιπέδου απέχουν από το A **διπλάσια** απόσταση από ό,τι από το B; Γενικότερα, ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία

$$\frac{MA}{MB} = \lambda,$$

όπου λ σταθερός θετικός αριθμός;

- Αν $\lambda = 1$, τότε $MA = MB$ και ο τόπος είναι, όπως ξέρουμε, η **μεσοκάθετος** του AB.
- Αν $\lambda \neq 1$, η απάντηση είναι ένας **κύκλος**!



Ο Απολλώνιος κύκλος για $\lambda = 2$

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Απολλώνιος κύκλος

Δίνονται σημεία A, B και θετικός αριθμός $\lambda \neq 1$. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία $\frac{MA}{MB} = \lambda$ είναι ο **κύκλος με διάμετρο ΓΔ**, όπου Γ και Δ είναι τα σημεία που διαιρούν το AB εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο λ .

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ — Ευθύ μέρος

Έστω σημείο M (εκτός της ευθείας AB) με $\frac{MA}{MB} = \lambda$. Στο τρίγωνο MAB φέρνουμε την εσωτερική και την εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $\hat{M}$. Από τα θεωρήματα των διχοτόμων, τα ίχνη τους διαιρούν το AB εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\frac{MA}{MB} = \lambda$. Λόγω μοναδικότητας των σημείων διαίρεσης, τα ίχνη αυτά είναι ακριβώς τα Γ και Δ. Όμως η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος μιας γωνίας είναι **κάθετες**, άρα $\widehat{\Gamma M \Delta} = 90^\circ$. Επομένως το M «βλέπει» το ΓΔ υπό ορθή γωνία, δηλαδή ανήκει στον κύκλο με διάμετρο ΓΔ. (Τα Γ, Δ ανήκουν στον τόπο από την κατασκευή τους.)

Αποδεικνύεται και το αντίστροφο: κάθε σημείο M του κύκλου διαμέτρου ΓΔ ικανοποιεί $\frac{MA}{MB} = \lambda$. Η απόδειξη χρησιμοποιεί παράλληλες από το B προς τις ΜΓ και ΜΔ και το θεώρημα του Θαλή· θα τη βρεις αναλυτικά στο mathgreece.com. ■

🏛 ΛΙΓΗ ΙΣΤΟΡΙΑ

Ο Απολλώνιος ο Περγαίος (περ. 262–190 π.Χ.), ο «Μέγας Γεωμέτρης» της αρχαιότητας, έγραψε τα περίφημα «Κωνικά», όπου μελέτησε συστηματικά την έλλειψη, την παραβολή και την υπερβολή. Ο κύκλος που φέρει το όνομά του εμφανίζεται στο έργο του «Επίπεδοι τόποι».

Η θέση του κύκλου

Ο Απολλώνιος κύκλος **δεν** περνά από τα Α και Β· «περικλείει» εκείνο από τα δύο σημεία που είναι πιο κοντά στα σημεία του. Για $\lambda > 1$ (δηλαδή $MA > MB$) ο κύκλος βρίσκεται προς τη μεριά του Β και το Β είναι εσωτερικό του σημείου. Για $\lambda < 1$ ισχύει το ανάποδο. Για κάθε $\lambda \neq 1$ προκύπτει διαφορετικός κύκλος· υπάρχουν λοιπόν **άπειροι** Απολλώνιοι κύκλοι ως προς δύο σημεία Α, Β.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Για να ορισθεί ένας Απολλώνιος κύκλος ως προς τα Α, Β αρκεί να δοθεί **ένα** από τα εξής: ο λόγος λ , ή ένα από τα σημεία Γ, Δ, ή ένα οποιοδήποτε σημείο του κύκλου (από το οποίο υπολογίζεται ο λόγος).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Κατασκευή και ακτίνα

Δίνεται τμήμα $AB = 6$. Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου που αποτελείται από τα σημεία Μ με $MA = 2MB$.

ΛΥΣΗ

Ο λόγος είναι $\lambda = 2$. Το Γ (εσωτερικό) έχει $GA = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$, $GB = 2$. Το Δ (εξωτερικό, πέρα από το Β αφού $\lambda > 1$) έχει $\Delta B = \frac{6}{2-1} = 6$, $\Delta A = 12$. Η διάμετρος $\Gamma\Delta = GB + B\Delta = 2 + 6 = 8$, άρα η ακτίνα είναι 4 και το κέντρο Κ είναι το μέσο του $\Gamma\Delta$, σε απόσταση $AK = 4 + 4 = 8$ από το Α (και 2 από το Β).

Έλεγχος με ένα σημείο: το σημείο Μ του κύκλου «πάνω» από το Κ έχει (Πυθαγόρειο) $MA = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$ και $MB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$, άρα $\frac{MA}{MB} = \sqrt{4} = 2$ ✓.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Μέγιστο εμβαδόν τριγώνου

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $B\Gamma = 6$ και $AB = 2A\Gamma$. Ποιο είναι το μέγιστο δυνατό ύψος από το Α (και, κατά συνέπεια, το μέγιστο εμβαδόν);

ΛΥΣΗ

Η κορυφή Α ικανοποιεί $\frac{AB}{A\Gamma} = 2$, άρα κινείται στον Απολλώνιο κύκλο των Β, Γ με λόγο 2. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα (με $B\Gamma = 6$), η ακτίνα του κύκλου είναι 4 και το κέντρο του βρίσκεται **πάνω στην ευθεία ΒΓ**. Η απόσταση ενός σημείου του κύκλου από την ευθεία ΒΓ γίνεται μέγιστη όταν το σημείο είναι «στην κορυφή» του κύκλου, και τότε ισούται με την ακτίνα. Άρα $v_{\max} = 4$ και $E_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Ανήκει το σημείο στον κύκλο;

Δίνονται σημεία Α, Β με $AB = 10$ και ο Απολλώνιος κύκλος για $\lambda = \frac{3}{2}$. Να εξεταστεί αν ανήκει σε αυτόν σημείο Μ με $MA = 12$ και $MB = 8$, και να βρεθεί η διάμετρος του.

ΛΥΣΗ

$\frac{MA}{MB} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = \lambda$, άρα **ναι**. Για τη διάμετρο: $\Gamma A = \frac{3}{5} \cdot 10 = 6$, $\Gamma B = 4$, και $\Delta B = \frac{10}{\frac{3}{2}-1} = 20$. Επομένως $\Gamma\Delta = \Gamma B + B\Delta = 24$, με ακτίνα 12.

✗ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** — «Ο κύκλος περνά από τα Α και Β»

✗ «Αφού ο τόπος έχει σχέση με τα Α και Β, ο κύκλος θα περνά από αυτά.»

✓ Για το Α θα ισχύει $\frac{AA}{AB} = 0 \neq \lambda$, και για το Β ο λόγος δεν ορίζεται καν. Τα σημεία του κύκλου πάνω στην ευθεία ΑΒ είναι τα Γ και Δ, **όχι** τα Α και Β.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Θέλεις να δεις τον Απολλώνιο κύκλο να «γεννιέται» δυναμικά καθώς αλλάζει ο λόγος λ; Στο mathgreece.com θα βρεις διαδραστικό υλικό και πλήρη θεωρία, δωρεάν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 7.9 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Δίνεται $AB = 8$. Να βρεθεί η ακτίνα του Απολλώνιου κύκλου των σημείων Μ με $\frac{MA}{MB} = 3$.
●○○ → Λύση 7.9/1

- 2 Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ που ισαπέχουν από δύο σημεία Α, Β; Γιατί δεν είναι Απολλώνιος κύκλος;
●○○ → Λύση 7.9/2

- 3 Να αποδείξετε ότι, αν $\lambda > 1$, η ακτίνα του Απολλώνιου κύκλου των Α, Β με λόγο λ είναι $\rho = \frac{\lambda \cdot AB}{\lambda^2 - 1}$.
●●○ → Λύση 7.9/3

- 4 Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $B\Gamma = 10$ ισχύει $AB = 4A\Gamma$. Να βρεθεί το μέγιστο εμβαδόν που μπορεί να έχει το τρίγωνο.
●●○ → Λύση 7.9/4

- 5 Δίνονται σημεία Α, Β με $AB = 4$. Να αποδείξετε ότι το κέντρο Κ του Απολλώνιου κύκλου για $\lambda = 3$ ικανοποιεί $KB \cdot KA = \rho^2$, όπου ρ η ακτίνα του.
●●● → Λύση 7.9/5

8

Ομοιότητα



Τα μαθήματα του κεφαλαίου

8.1 Όμοια ευθύγραμμα σχήματα**8.2** Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων

Τι θα κατακτήσεις

- Να αναγνωρίζεις όμοια πολύγωνα και να βρίσκεις τον λόγο ομοιότητας.
- Να χρησιμοποιείς τα τρία κριτήρια ομοιότητας τριγώνων.
- Να γράφεις σωστά τις αναλογίες των ομόλογων πλευρών.
- Να λύνεις προβλήματα μέτρησης με όμοια τρίγωνα (ύψη, αποστάσεις, κλίμακες).

Ένας χάρτης, μια φωτογραφία σε μεγέθυνση, η μακέτα ενός κτιρίου: όλα έχουν το ίδιο **σχήμα** με το πρωτότυπο, αλλά διαφορετικό **μέγεθος**. Η ομοιότητα είναι η μαθηματική περιγραφή αυτής της ιδέας. Στο κεφάλαιο αυτό ορίζουμε τα όμοια σχήματα και μαθαίνουμε τα τρία κριτήρια με τα οποία αναγνωρίζουμε γρήγορα δύο όμοια τρίγωνα — ένα από τα ισχυρότερα εργαλεία της Γεωμετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8
Ομοιότητα

ΜΑΘΗΜΑ 8.1

Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

♦ Η ιδέα της ομοιότητας

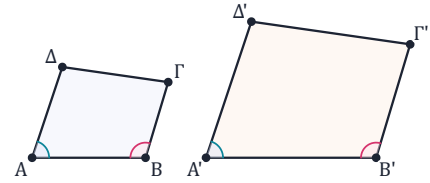
Όταν μεγεθύνουμε μια φωτογραφία στο φωτοτυπικό στο 150%, **όλα** τα μήκη πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό 1,5, ενώ **οι γωνίες μένουν ίδιες**. Αυτά ακριβώς τα δύο χαρακτηριστικά ορίζουν την ομοιότητα.

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

Δύο ευθύγραμμα σχήματα (πολύγωνα) λέγονται **όμοια** όταν:

1. οι πλευρές τους είναι **ανάλογες** (μία προς μία, με κατάλληλη σειρά) και
2. οι γωνίες που σχηματίζονται από αντίστοιχες (ομόλογες) πλευρές είναι **ίσες** μία προς μία.

Ο κοινός λόγος των ομόλογων πλευρών λέγεται **λόγος ομοιότητας** και συμβολίζεται με λ . Η ομοιότητα συμβολίζεται με $\approx$ (ή με $\sim$).



Δύο όμοια τετράπλευρα με λόγο $\lambda = 3/2$

Στο σχήμα: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta'A'}{\Delta A} = \frac{3}{2}$ και $\hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'}, \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma'}, \hat{\Delta} = \hat{\Delta}'$.

Λίγη ορολογία:

- **Ομόλογες κορυφές** είναι οι κορυφές με ίσες γωνίες ($\hat{A}$ και $\hat{A'}$ κ.λπ.).
- **Ομόλογες πλευρές** είναι οι πλευρές που ενώνουν ομόλογες κορυφές (AB και $A'B'$ κ.λπ.).
- Αν $\lambda = 1$, τα σχήματα είναι **ίσα**. Η ισότητα είναι λοιπόν ειδική περίπτωση της ομοιότητας.
- Αν $\lambda > 1$ το δεύτερο σχήμα είναι **μεγέθυνση** του πρώτου, αν $\lambda < 1$ είναι **σμίκρυνση**.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

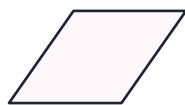
Ο λόγος ομοιότητας εξαρτάται από τη **σειρά** με την οποία συγκρίνουμε. Αν το Σ' έχει λόγο ομοιότητας λ ως προς το Σ , τότε το Σ έχει λόγο $\frac{1}{\lambda}$ ως προς το Σ' . Γράφε πάντα ρητά ποιο σχήμα είναι στον αριθμητή.

♦ Χρειάζονται και οι δύο συνθήκες

Για πολύγωνα με περισσότερες από τρεις πλευρές, **καμία από τις δύο συνθήκες δεν αρκεί μόνη της**:



τετράγωνο



ρόμβος

Ίδιες πλευρές, διαφορετικές γωνίες: όχι όμοια



τετράγωνο



ορθογώνιο

Ίδιες γωνίες, μη ανάλογες πλευρές: όχι όμοια

- Ένα τετράγωνο και ένας ρόμβος με την ίδια πλευρά έχουν **ανάλογες πλευρές** (λόγος 1), αλλά **διαφορετικές γωνίες** — δεν είναι όμοια.
- Ένα τετράγωνο και ένα μη τετράγωνο ορθογώνιο έχουν **ίσες γωνίες** (όλες ορθές), αλλά οι πλευρές τους **δεν** είναι ανάλογες — δεν είναι όμοια.

Θα δούμε στο επόμενο μάθημα ότι για **τρίγωνα** τα πράγματα είναι πολύ πιο απλά: η μία συνθήκη συνεπάγεται την άλλη.

♦ Ο λόγος των περιμέτρων

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Λόγος περιμέτρων

Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων πολυγώνων ισούται με τον λόγο ομοιότητάς τους.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω πολύγωνα $A_1A_2 \dots A_n$ και $A'_1A'_2 \dots A'_n$ όμοια με λόγο λ , δηλαδή $\frac{A'_1A'_2}{A_1A_2} = \frac{A'_2A'_3}{A_2A_3} = \dots = \lambda$. Από την ιδιότητα των ίσων λόγων, το άθροισμα των αριθμητών προς το άθροισμα των παρονομαστών είναι επίσης λ . Αλλά τα αθροίσματα αυτά είναι ακριβώς οι περιμέτροι Π' και Π , οπότε $\frac{\Pi'}{\Pi} = \lambda$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Δύο σχήματα όμοια με ένα τρίτο είναι όμοια και μεταξύ τους. Αν μάλιστα $\Sigma_2 \approx \Sigma_1$ με λόγο λ_1 και $\Sigma_3 \approx \Sigma_2$ με λόγο λ_2 , τότε $\Sigma_3 \approx \Sigma_1$ με λόγο $\lambda_1\lambda_2$. (Μια μεγέθυνση 200% και μετά άλλη μια 150% ισοδυναμούν με μεγέθυνση 300%.)

Κλίμακα χάρτη

Ένας χάρτης ή ένα σχέδιο κάτοψης είναι σχήμα **όμοιο** με την πραγματικότητα. Η **κλίμακα** $1 : K$ σημαίνει ότι ο λόγος ομοιότητας χάρτη προς πραγματικότητα είναι $\lambda = \frac{1}{K} : 1$ cm στον χάρτη αντιστοιχεί σε K cm στην πραγματικότητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Χάρτης

Σε χάρτη κλίμακας $1 : 50\,000$ η απόσταση δύο χωριών είναι 7,4 cm. Ποια είναι η πραγματική τους απόσταση;

ΛΥΣΗ

Η πραγματική απόσταση είναι 50 000 φορές μεγαλύτερη: $7,4 \cdot 50\,000 = 370\,000$ cm = 3 700 m = 3,7 km.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Πλευρές όμοιου πενταγώνου

Ένα πεντάγωνο έχει πλευρές 4, 5, 6, 7, 8. Ένα όμοιό του έχει περίμετρο 45. Να βρεθούν οι πλευρές του.

ΛΥΣΗ

Η περίμετρος του πρώτου είναι $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$. Ο λόγος ομοιότητας (δεύτερο προς πρώτο) είναι $\lambda = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}$. Άρα οι πλευρές του δεύτερου είναι 6; 7,5; 9; 10,5; 12.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Πότε δύο ορθογώνια είναι όμοια

Να αποδειχθεί ότι δύο ορθογώνια με διαστάσεις α, β και α', β' είναι όμοια αν και μόνο αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$.

ΛΥΣΗ

Οι γωνίες είναι όλες ορθές, άρα η δεύτερη συνθήκη ισχύει πάντα. Μένει η αναλογία των πλευρών: οι απέναντι πλευρές είναι ίσες, οπότε οι πλευρές είναι ανάλογες αν και μόνο αν $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta}$, που με εναλλαγή μέσων όρων γράφεται $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$.

Π.χ. τα φύλλα χαρτιού A4 ($21 \times 29,7$) και A5 ($14,8 \times 21$) είναι (σχεδόν) όμοια: $\frac{29,7}{21} \approx 1,414 \approx \frac{21}{14,8}$. Ο λόγος τους είναι $\sqrt{2}$ — δεν είναι σύμπτωση!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Όλα τα κανονικά ν-γωνα είναι όμοια

Να εξηγηθεί γιατί δύο κανονικά εξάγωνα είναι πάντα όμοια.

ΛΥΣΗ

Σε κανονικό εξάγωνο όλες οι πλευρές είναι ίσες και όλες οι γωνίες ίσες με 120° . Αν τα εξάγωνα έχουν πλευρές α και α' , τότε όλοι οι λόγοι ομόλογων πλευρών είναι ίσοι με $\frac{\alpha'}{\alpha}$ και όλες οι αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες. Άρα είναι όμοια με λόγο $\frac{\alpha'}{\alpha}$. Το ίδιο ισχύει για οποιαδήποτε δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών.

✗ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** — «Ίσες γωνίες, άρα όμοια»

✗ «Τα δύο τετράπλευρα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, άρα είναι όμοια.»

✓ Για τετράπλευρα (και γενικά πολύγωνα με $n \geq 4$) οι ίσες γωνίες **δεν αρκούν**: θυμήσου το τετράγωνο και το ορθογώνιο. Μόνο για τρίγωνα αρκούν οι γωνίες.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Στο mathgreece.com θα βρεις δωρεάν φύλλα εργασίας με εφαρμογές της ομοιότητας στην καθημερινή ζωή (χάρτες, μακέτες, φωτογραφία), καθώς και πλήρη θεωρία για όλη την ύλη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 8.1 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Σε σχέδιο κάτοψης κλίμακας 1 : 200 ένα δωμάτιο έχει διαστάσεις 2,5 cm × 2 cm. Ποιες είναι οι πραγματικές διαστάσεις του; ●○○ → Λύση 8.1/1
- 2 Δύο όμοια τετράπλευρα έχουν λόγο ομοιότητας $\frac{2}{5}$ (μικρό προς μεγάλο). Αν η περίμετρος του μεγάλου είναι 40, ποια είναι η περίμετρος του μικρού; ●○○ → Λύση 8.1/2
- 3 Είναι όμοια δύο ορθογώνια με διαστάσεις 6 × 4 και 9 × 6; Είναι όμοια τα ορθογώνια 6 × 4 και 8 × 6; ●○○ → Λύση 8.1/3
- 4 Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις 12 × 8. Ένα όμοιό του έχει περίμετρο 60. Να βρεθούν οι διαστάσεις του. ●●○ → Λύση 8.1/4
- 5 Αν από ένα ορθογώνιο $\alpha \times \beta$ ($\alpha > \beta$) αφαιρέσουμε ένα τετράγωνο πλευράς β , το ορθογώνιο που μένει είναι όμοιο με το αρχικό. Να βρεθεί ο λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$. ●●○ → Λύση 8.1/5
- 6 Ένα τετράπλευρο Σ_2 είναι όμοιο με το Σ_1 με λόγο $\frac{3}{4}$ και ένα τετράπλευρο Σ_3 είναι όμοιο με το Σ_2 με λόγο $\frac{2}{3}$. Αν η περίμετρος του Σ_1 είναι 36, να βρεθεί η περίμετρος του Σ_3 και ο λόγος ομοιότητας του Σ_3 ως προς το Σ_1 . ●●● → Λύση 8.1/6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8
Ομοιότητα

ΜΑΘΗΜΑ 8.2

Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων

◆ Γιατί τα τρίγωνα είναι «ειδικά»

Για να αποφασίσουμε αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, πρέπει να ελέγξουμε **όλες** τις πλευρές και **όλες** τις γωνίες. Στα τρίγωνα όμως αρκούν πολύ λιγότερα στοιχεία, όπως ακριβώς στα κριτήρια ισότητας. Επιπλέον, κάθε πολύγωνο χωρίζεται με διαγωνίους σε τρίγωνα· γι' αυτό η ομοιότητα τριγώνων είναι το βασικό εργαλείο όλου του κεφαλαίου.

❶ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Γράφε τις ομόλογες κορυφές με την ίδια σειρά

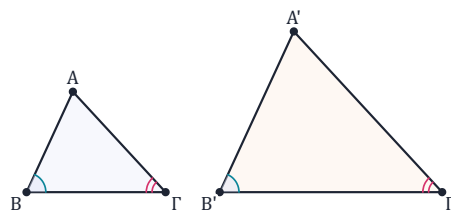
Όταν γράφουμε « $AB\Gamma \approx A'B'\Gamma'$ », εννοούμε ότι $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$. Με αυτή τη σύμβαση οι ομόλογες πλευρές «διαβάζονται» αμέσως: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$. Αυτή η απλή συνήθεια σε γλιτώνει από τα περισσότερα λάθη!

◆ 1ο κριτήριο: δύο γωνίες

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — 1ο κριτήριο ομοιότητας (Γ – Γ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν **δύο γωνίες** τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

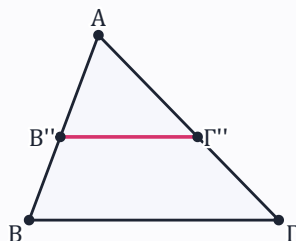
Αφού το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180° , αν δύο γωνίες είναι ίσες τότε είναι ίσες και οι τρίτες.



Δύο γωνίες ίσες $\Rightarrow$ όμοια τρίγωνα

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, οπότε και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$. Αν $A'B' = AB$ τα τρίγωνα είναι ίσα (Γ-Π-Γ). Έστω $A'B' < AB$. Παίρνουμε στην AB σημείο B'' με $AB'' = A'B'$ και φέρνουμε $B''\Gamma'' \parallel B\Gamma$.



- Από το θεώρημα των ανάλογων πλευρών (μάθημα 7.7) το τρίγωνο $AB''\Gamma''$ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του $AB\Gamma$ · επίσης έχει γωνίες ίσες με τις γωνίες του $AB\Gamma$ (κοινή η $\hat{A}$, εντός εκτός και επί τα αυτά οι άλλες). Άρα $AB''\Gamma'' \approx AB\Gamma$.
- Τα τρίγωνα $AB''\Gamma''$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $AB'' = A'B'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{B}'' = \hat{B} = \hat{B}'$, άρα είναι **ίσα** (Γ-Π-Γ).

Επομένως το $A'B'\Gamma'$ είναι ίσο με ένα τρίγωνο όμοιο με το $AB\Gamma$, άρα $A'B'\Gamma' \approx AB\Gamma$.

➔ ΠΟΡΙΣΜΑ — Άμεσες συνέπειες του 1ου κριτηρίου

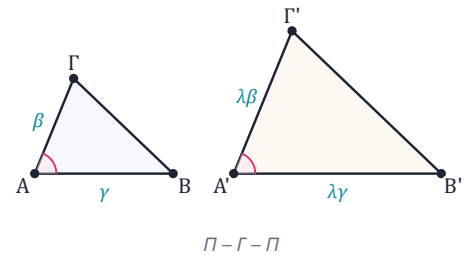
- Δύο **ορθογώνια** τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν **μία οξεία γωνία** ίση.
- Όλα τα **ισόπλευρα** τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.
- Δύο **ισοσκελή** τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν ίσες τις γωνίες της κορυφής ή ίσες τις γωνίες της βάσης.
- Μια ευθεία **παράλληλη** προς μια πλευρά τριγώνου σχηματίζει με τις άλλες δύο (ή τις προεκτάσεις τους) τρίγωνο **όμοιο** με το αρχικό.

2ο κριτήριο: δύο πλευρές ανάλογες και η περιεχόμενη γωνία

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — 2ο κριτήριο ομοιότητας (Π – Γ – Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν **δύο πλευρές ανάλογες** μία προς μία και τις **περιεχόμενες** σε αυτές γωνίες **ίσες**, τότε είναι όμοια.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'G'}{AG} \text{ και } \hat{A} = \hat{A}' \implies ABG \approx A'B'G'.$$



✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $A'B' < AB$. Όπως πριν, παίρνουμε B'' στην AB με $AB'' = A'B'$ και $B''G'' \parallel BG$. Τότε $AB''G'' \approx ABG$, άρα $\frac{AB''}{AB} = \frac{AG''}{AG}$, δηλαδή $\frac{A'B'}{AB} = \frac{AG''}{AG}$. Από την υπόθεση όμως $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'G'}{AG}$, άρα $AG'' = A'G'$. Τα τρίγωνα $AB''G''$ και $A'B'G'$ έχουν δύο πλευρές ίσες και την περιεχόμενη γωνία ίση (Π-Γ-Π), άρα είναι ίσα, και το συμπέρασμα έπεται.

3ο κριτήριο: τρεις πλευρές ανάλογες

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — 3ο κριτήριο ομοιότητας (Π – Π – Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις **πλευρές τους ανάλογες** μία προς μία, τότε είναι όμοια.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'G'}{BG} = \frac{A'G'}{AG} \implies ABG \approx A'B'G'.$$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Με την ίδια κατασκευή ($AB'' = A'B'$, $B''G'' \parallel BG$) έχουμε $\frac{AB''}{AB} = \frac{AG''}{AG} = \frac{B''G''}{BG}$, δηλαδή $\frac{A'B'}{AB} = \frac{AG''}{AG} = \frac{B''G''}{BG}$. Συγκρίνοντας με την υπόθεση παίρνουμε $AG'' = A'G'$ και $B''G'' = B'G'$. Άρα τα τρίγωνα $AB''G''$ και $A'B'G'$ είναι ίσα (Π-Π-Π) και το συμπέρασμα έπεται.

📋 ΣΥΝΟΨΗ — Τα τρία κριτήρια με μια ματιά

Κριτήριο	Τι ελέγχουμε	Αντίστοιχο κριτήριο ισότητας
1ο (Γ – Γ)	δύο γωνίες ίσες	Γ – Π – Γ
2ο (Π – Γ – Π)	δύο πλευρές ανάλογες + περιεχόμενη γωνία ίση	Π – Γ – Π
3ο (Π – Π – Π)	τρεις πλευρές ανάλογες	Π – Π – Π

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Η μεγάλη «ανταμοιβή»

Μόλις αποδείξουμε ότι δύο τρίγωνα είναι όμοια, κερδίζουμε **αμέσως όλα** τα υπόλοιπα στοιχεία: ίσες όλες τις γωνίες και ανάλογες όλες τις πλευρές. Γι' αυτό η ομοιότητα χρησιμοποιείται συχνά ως «ενδιάμεσο βήμα» για να αποδείξουμε μια ισότητα γωνιών ή μια σχέση γινομένων $x \cdot y = z \cdot w$.

♦ Λόγος ομολογων στοιχείων

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Ύψη, διαμέσοι, διχοτόμοι όμοιων τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια με λόγο λ , τότε ο λόγος δύο ομολογων **υψών**, δύο ομολογων **διαμέσων** και δύο ομολογων **διχοτόμων** τους ισούται με λ . Το ίδιο ισχύει για τις **περιμέτρους** και για τις ακτίνες R και r του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου.

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ — Για τα ύψη

Αν $\triangle A\Delta$ και $\triangle A'\Delta'$ είναι τα ύψη από τις ομόλογες κορυφές A, A' , τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AB\Delta$ και $\triangle A'B'\Delta'$ έχουν $\hat{B} = \hat{B}'$, άρα είναι όμοια (πόρισμα του 1ου κριτηρίου). Επομένως $\frac{A'\Delta'}{A\Delta} = \frac{A'B'}{AB} = \lambda$. Για τις διαμέσους χρησιμοποιούμε το 2ο κριτήριο στα τρίγωνα $\triangle ABM$ και $\triangle A'B'M'$ ($\hat{B} = \hat{B}'$ και $\frac{B'M'}{BM} = \frac{B'\Gamma'/2}{B\Gamma'/2} = \lambda$), ενώ για τις διχοτόμους το 1ο κριτήριο στα τρίγωνα $\triangle AB\Delta$ και $\triangle A'B'\Delta'$.

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Λάθος αντιστοιχία πλευρών

Δίνεται ότι $\triangle AB\Gamma \approx \triangle EZ\Delta$ με $\hat{A} = \hat{Z}$, $\hat{B} = \hat{\Delta}$. Ο μαθητής γράφει ✖ $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ}$.

✓ Ομόλογες κορυφές: $A \leftrightarrow Z$, $B \leftrightarrow \Delta$, $\Gamma \leftrightarrow E$. Γράφουμε τα τρίγωνα «στοιχισμένα»: $\triangle AB\Gamma \approx \triangle Z\Delta E$. Τότε $\frac{AB}{Z\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{ZE}$. Οι ομόλογες πλευρές βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Προσοχή στο «Π – Π – Γ»

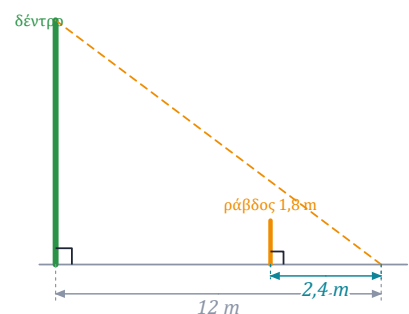
Δύο πλευρές ανάλογες και μια ίση γωνία που **δεν** είναι η περιεχόμενη **δεν** εξασφαλίζουν ομοιότητα — ακριβώς όπως δεν εξασφαλίζουν ισότητα. Στο 2ο κριτήριο η ίση γωνία πρέπει να βρίσκεται **ανάμεσα** στις δύο ανάλογες πλευρές.

💡 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πώς βρίσκουμε τα όμοια τρίγωνα σε μια άσκηση

1. Αν θέλουμε να αποδείξουμε σχέση της μορφής $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$ ή $x \cdot w = y \cdot z$, ψάχνουμε **δύο τρίγωνα**: το ένα να έχει πλευρές x, z και το άλλο y, w (ή το ένα $x, y \dots$ — δοκιμάζουμε).
2. Ψάχνουμε **ίσες γωνίες**: κοινές γωνίες, κατακορυφήν, εντός εναλλάξ από παράλληλες, εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο, γωνίες ορθογωνίων τριγώνων με κοινή οξεία.
3. Συνήθως το 1ο κριτήριο αρκεί. Αν έχουμε δεδομένα μήκη, ελέγχουμε το 2ο ή το 3ο.
4. Γράφουμε την ομοιότητα με **σωστή σειρά κορυφών** και μετά την αναλογία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ύψος δέντρου από τη σκιά

Μια ράβδος ύψους 1,8 m, κάθετη στο έδαφος, ρίχνει σκιά 2,4 m. Την ίδια στιγμή ένα δέντρο ρίχνει σκιά 12 m. Πόσο ψηλό είναι το δέντρο;



ΛΥΣΗ

Οι ακτίνες του ήλιου είναι (πρακτικά) παράλληλες, οπότε σχηματίζουν **ίσες γωνίες** με το έδαφος. Τα δύο ορθογώνια τρίγωνα (ράβδος–σκιά και δέντρο–σκιά) έχουν μία οξεία γωνία ίση, άρα είναι όμοια. Επομένως

$$\frac{h}{1,8} = \frac{12}{2,4} = 5 \Rightarrow h = 9 \text{ m.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Γωνίες και πλευρές

Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $\hat{A} = 50^\circ$, $\hat{B} = 70^\circ$ και $AB = 8$. Τρίγωνο ΔEZ έχει $\hat{\Delta} = 70^\circ$, $\hat{Z} = 60^\circ$ και $E\Delta = 12$. Να εξεταστεί αν είναι όμοια, να βρεθεί ο λόγος ομοιότητας (του ΔEZ ως προς το $AB\Gamma$) και να εκφραστεί η ΔZ συναρτήσει της $B\Gamma$.

ΛΥΣΗ

Στο $AB\Gamma$: $\hat{\Gamma} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Στο ΔEZ : $\hat{E} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$. Άρα $\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{B} = \hat{\Delta}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ και (1ο κριτήριο) $AB\Gamma \approx E\Delta Z$ — προσέξτε τη σειρά των κορυφών!

Ομόλογες πλευρές: $AB \leftrightarrow E\Delta$, $B\Gamma \leftrightarrow \Delta Z$, $A\Gamma \leftrightarrow EZ$. Το ζεύγος $AB = 8$, $E\Delta = 12$ είναι ζεύγος **ομόλογων** πλευρών, άρα $\lambda = \frac{E\Delta}{AB} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ και $\Delta Z = \frac{3}{2}B\Gamma$.

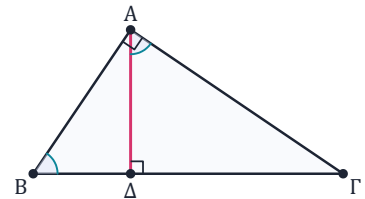
Αν είχαμε αντιστοιχίσει «κατά γράμμα» ($A \leftrightarrow \Delta$, $B \leftrightarrow E$), θα γράφαμε λάθος αναλογίες· η αντιστοίχιση γίνεται **πάντα μέσω των ίσων γωνιών**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το προηγούμενο παράδειγμα δείχνει κάτι σημαντικό: για να βρούμε τον λόγο ομοιότητας χρειαζόμαστε **ένα ζεύγος γνωστών ομόλογων πλευρών**. Πρώτα αντιστοιχίζουμε σωστά τις κορυφές και μετά κοιτάμε τι ξέρουμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Ορθογώνιο τρίγωνο και ύψος

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρνουμε το ύψος $A\Delta$. Να αποδειχθεί ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$.

**ΛΥΣΗ**

Πρώτη σχέση. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔBA (ορθή στο Δ) και $AB\Gamma$ (ορθή στο A) έχουν κοινή την οξεία γωνία $\hat{B}$, άρα είναι όμοια: $\Delta BA \approx AB\Gamma$ (με αντιστοιχία $\Delta \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow B$, $A \leftrightarrow \Gamma$). Επομένως

$$\frac{B\Delta}{BA} = \frac{BA}{B\Gamma} \Rightarrow AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta.$$

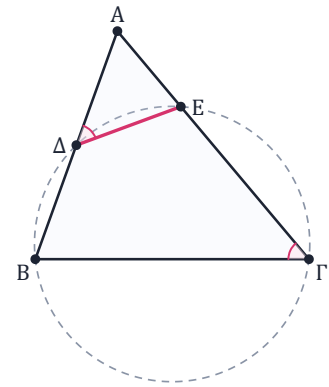
Δεύτερη σχέση. Τα τρίγωνα ΔBA και $\Delta A\Gamma$ είναι ορθογώνια στο Δ , και $\widehat{\Delta A\Gamma} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = \hat{B}$. Άρα $\Delta BA \approx \Delta A\Gamma$ και

$$\frac{\Delta B}{\Delta A} = \frac{\Delta A}{\Delta \Gamma} \Rightarrow A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma.$$

Θα ξανασυναντήσουμε αυτές τις σχέσεις, ως βασικές μετρικές σχέσεις, στο Κεφάλαιο 9.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Αντιπαράλληλη και εγγράψιμο τετράπλευρο

Στις πλευρές AB και $A\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta \cdot AB = AE \cdot A\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι $\widehat{\Delta E} = \hat{\Gamma}$ και ότι το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ είναι εγγράψιμο.



ΛΥΣΗ

Η σχέση γράφεται $\frac{AD}{AG} = \frac{AE}{AB}$. Τα τρίγωνα ADE και AGB έχουν λοιπόν δύο πλευρές ανάλογες ($AD \leftrightarrow AG$, $AE \leftrightarrow AB$) και την περιεχόμενη γωνία $\hat{A}$ κοινή. Από το 2ο κριτήριο $ADE \approx AGB$, οπότε $\widehat{ADE} = \widehat{AGB} = \hat{\Gamma}$.

Η $\widehat{ADE}$ είναι εξωτερική γωνία του τετραπλεύρου $BDE\Gamma$ στην κορυφή Δ και ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία $\hat{\Gamma}$. Άρα το $BDE\Gamma$ είναι εγγράψιμο. ■

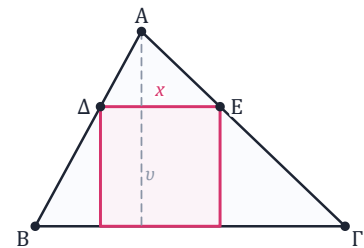
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η ΔE του προηγούμενου παραδείγματος λέγεται **αντιπαράλληλη** της $B\Gamma$: σχηματίζει ίσες γωνίες με τις πλευρές, αλλά «αντίστροφα» από ό,τι μια παράλληλη ($\widehat{ADE} = \hat{\Gamma}$ αντί για $\hat{B}$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Τετράγωνο εγγεγραμμένο σε τρίγωνο

Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει βάση $B\Gamma = \alpha$ και αντίστοιχο ύψος v . Εγγράφουμε σε αυτό τετράγωνο με τη μία πλευρά πάνω στη $B\Gamma$ και τις δύο άλλες κορυφές Δ, E στις $AB, A\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι $x = \frac{\alpha v}{\alpha + v}$.

Εφαρμογή: $\alpha = 12, v = 6$.



ΛΥΣΗ

Η ΔE είναι παράλληλη στη $B\Gamma$ (απέναντι πλευρά του τετραγώνου), άρα $ADE \approx AB\Gamma$. Ο λόγος ομοιότητας ισούται με τον λόγο των βάσεων, αλλά και με τον λόγο των αντίστοιχων υψών από το A . Το ύψος του μικρού τριγώνου είναι $v - x$ (το ύψος του μεγάλου μείον την πλευρά του τετραγώνου). Επομένως

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{v - x}{v} \Rightarrow xv = \alpha v - \alpha x \Rightarrow x(\alpha + v) = \alpha v \Rightarrow x = \frac{\alpha v}{\alpha + v}.$$

Για $\alpha = 12, v = 6$: $x = \frac{72}{18} = 4$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Τραπεζίο: οι διαγώνιοι χωρίζονται σε λόγο βάσεων

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB = 10$ και $\Gamma\Delta = 4$, οι διαγώνιοι τέμνονται στο O . Αν $A\Gamma = 21$, να βρεθούν τα OA και OG .

ΛΥΣΗ

Τα τρίγωνα OAB και $OG\Delta$ έχουν $\widehat{OAB} = \widehat{OG\Delta}$ και $\widehat{OBA} = \widehat{OG\Delta}$ (εντός εναλλάξ, $AB \parallel \Gamma\Delta$). Άρα $OAB \approx OG\Delta$ και

$$\frac{OA}{OG} = \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Με $OA = 5\kappa$, $OG = 2\kappa$ και $AG = 7\kappa = 21$: $\kappa = 3$, οπότε $OA = 15$ και $OG = 6$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 Ομοιότητα με τρεις πλευρές

Να εξεταστεί αν τα τρίγωνα με πλευρές 4, 6, 8 και 6, 9, 12 είναι όμοια· αν ναι, να βρεθεί ο λόγος των περιμέτρων τους και ο λόγος των υψών τους που αντιστοιχούν στις μεγαλύτερες πλευρές.

ΛΥΣΗ

Αντιστοιχίζουμε **μικρότερη με μικρότερη**, μεσαία με μεσαία, μεγαλύτερη με μεγαλύτερη: $\frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$. Από το 3ο κριτήριο τα τρίγωνα είναι όμοια με $\lambda = \frac{3}{2}$. Επομένως ο λόγος των περιμέτρων είναι $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ και ο λόγος των ομόλογων υψών είναι επίσης $\frac{3}{2}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Σωστή αντιστοίχιση στο 3ο κριτήριο

Όταν δίνονται μόνο τα μήκη, **ταξινομούμε** τις πλευρές κάθε τριγώνου κατά μέγεθος και συγκρίνουμε τους λόγους με αυτή τη σειρά. Αν οι τρεις λόγοι βγουν ίσοι, τα τρίγωνα είναι όμοια· αλλιώς δεν είναι (σε κάθε άλλη αντιστοίχιση οι λόγοι σίγουρα δεν θα ήταν ίσοι).



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Η ομοιότητα τριγώνων είναι από τα πιο «αγαπημένα» θέματα των εξετάσεων. Στο mathgreece.com θα βρεις ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο με κατηγοριοποιημένες ασκήσεις ομοιότητας και αναλυτικές λύσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 8.2 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- Ένα κοντάρι ύψους 2 m ρίχνει σκιά 1,5 m, ενώ την ίδια ώρα ένα κτίριο ρίχνει σκιά 18 m. Να βρεθεί το ύψος του κτιρίου.
●○○ → Λύση 8.2/1
- Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια: (α) γωνίες 40° , 75° και 75° , 65° (β) πλευρές 3, 5, 7 και 6, 10, 15 (γ) πλευρές 5, 7 με περιεχόμενη γωνία 48° και πλευρές 15, 21 με περιεχόμενη γωνία 48° .
●○○ → Λύση 8.2/2
- Δύο όμοια τρίγωνα έχουν λόγο ομοιότητας $\frac{4}{3}$. Αν ένα ύψος του μικρού είναι 9 και η περίμετρος του μεγάλου είναι 48, να βρεθεί το ομόλογο ύψος του μεγάλου και η περίμετρος του μικρού.
●○○ → Λύση 8.2/3
- Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 8$, $A\Gamma = 12$ παίρνουμε σημείο Δ της $A\Gamma$ με $A\Delta = \frac{16}{3}$. Να αποδείξετε ότι $\widehat{AB\Delta} = \widehat{\Gamma}$.
●●○ → Λύση 8.2/4
- Δύο χορδές AB και $\Gamma\Delta$ κύκλου τέμνονται στο εσωτερικό σημείο P . Να αποδείξετε, με όμοια τρίγωνα, ότι $PA \cdot PB = \Gamma P \cdot P\Delta$. Εφαρμογή: $PA = 4$, $PB = 9$, $\Gamma P = 3$ · να βρεθεί το $P\Delta$.
●●○ → Λύση 8.2/5

- 6** Σε τρίγωνο με βάση $\alpha = 15$ και αντίστοιχο ύψος $\nu = 10$ εγγράφεται ορθογώνιο με τη μία πλευρά στη βάση, του οποίου η πλευρά που είναι παράλληλη στη βάση είναι διπλάσια από την άλλη. Να βρεθούν οι διαστάσεις του. → Λύση 8.2/6
-
- 7** Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) το ύψος $A\Delta$ χωρίζει την υποτείνουσα σε τμήματα $B\Delta = 4$ και $\Delta\Gamma = 9$. Να βρεθούν τα $A\Delta$, AB και $A\Gamma$. → Λύση 8.2/7
-
- 8** Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ μια ευθεία από το A τέμνει τη διαγώνιο $B\Delta$ στο E , την πλευρά $\Gamma\Delta$ στο Z και την προέκταση της $B\Gamma$ στο H . Να αποδείξετε ότι $AE^2 = EZ \cdot EH$. → Λύση 8.2/8
-
- 9** Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ οι BE και ΓZ είναι ύψη. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEZ είναι όμοιο με το $AB\Gamma$ και ότι $\frac{EZ}{B\Gamma} = \frac{AE}{AB}$. → Λύση 8.2/9
-
- 10** Μια φωτογραφία 10×15 cm μεγεθύνεται ώστε η μικρή της πλευρά να γίνει 24 cm. Πόσες φορές μεγαλύτερη γίνεται η περίμετρος; Χωράει η μεγέθυνση σε κορνίζα 25×35 cm; → Λύση 8.2/10

9

Μετρικές σχέσεις



Τα μαθήματα του κεφαλαίου

- 9.1 Ορθές προβολές
- 9.2 Το Πυθαγόρειο θεώρημα
- 9.3 Γεωμετρικές κατασκευές
- 9.4 Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος
- 9.5 Θεωρήματα διαμέσων
- 9.6 Βασικοί γεωμετρικοί τόποι
- 9.7 Τέμνουσες κύκλου – Δύναμη σημείου

Τι θα κατακτήσεις

- Να βρίσκεις προβολές τμημάτων και πλευρών.
- Να εφαρμόζεις το Πυθαγόρειο θεώρημα και τις μετρικές σχέσεις του ορθογωνίου τριγώνου.
- Να κατασκευάζεις τμήματα όπως $\sqrt{\alpha\beta}$, $\alpha\sqrt{\nu}$, $\sqrt{\alpha^2 \pm \beta^2}$.
- Να αναγνωρίζεις το είδος ενός τριγώνου από τις πλευρές του και να εφαρμόζεις τη γενίκευση του Πυθαγορείου.
- Να υπολογίζεις διαμέσους και να λύνεις προβλήματα γεωμετρικών τόπων.
- Να χρησιμοποιείς τη δύναμη σημείου ως προς κύκλο.

Μετρικές σχέσεις λέμε τις ισότητες που συνδέουν τα **μήκη** των στοιχείων ενός σχήματος: πλευρές, ύψη, διαμέσους, προβολές, τμήματα χορδών. Ξεκινάμε από το πιο διάσημο θεώρημα όλων των εποχών, το Πυθαγόρειο, και το γενικεύουμε σε κάθε τρίγωνο. Στη συνέχεια υπολογίζουμε διαμέσους, βρίσκουμε γεωμετρικούς τόπους και ανακαλύπτουμε τη «δύναμη» ενός σημείου ως προς κύκλο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9
Μετρικές σχέσεις

ΜΑΘΗΜΑ 9.1

Ορθές προβολές

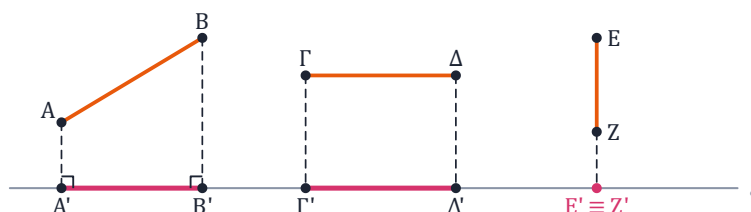
◆ Προβολή σημείου και τμήματος

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Ορθή προβολή σημείου

Ορθή προβολή (ή απλά προβολή) ενός σημείου A πάνω σε μια ευθεία ε λέγεται το ίχνος A' της κάθετης που φέρνουμε από το A προς την ε . Αν το A ανήκει στην ε , η προβολή του είναι το ίδιο το A .

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Ορθή προβολή τμήματος

Προβολή ενός τμήματος AB πάνω σε ευθεία ε λέγεται το τμήμα $A'B'$ που έχει άκρα τις προβολές A', B' των άκρων του.



Οι τρεις περιπτώσεις: γενική θέση, $AB \parallel \varepsilon$, $AB \perp \varepsilon$

Από το σχήμα φαίνονται αμέσως τα εξής:

- Αν $AB \parallel \varepsilon$, τότε $A'B' = AB$ (το $ABB'A'$ είναι ορθογώνιο).
- Αν $AB \perp \varepsilon$, η προβολή του είναι ένα **σημείο** (μηδενικό τμήμα).
- Σε κάθε άλλη περίπτωση η προβολή είναι **μικρότερη** από το τμήμα: $A'B' < AB$.

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Μήκος της προβολής

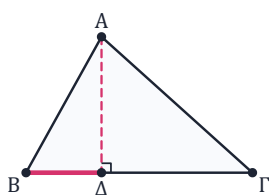
Η προβολή $A'B'$ ενός τμήματος AB σε ευθεία ε ικανοποιεί $A'B' \leq AB$, με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $AB \parallel \varepsilon$ (ή AB πάνω στην ε).

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

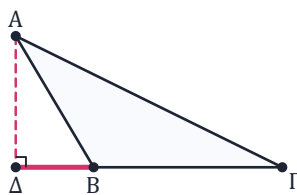
Αν $AB \parallel \varepsilon$, φέρνουμε από το A παράλληλη προς την ε που τέμνει την BB' στο K . Τότε $AK = A'B'$ (ορθογώνιο $AKB'A'$) και στο ορθογώνιο τρίγωνο AKB το AK είναι κάθετη πλευρά ενώ το AB υποτείνουσα. Άρα $A'B' = AK < AB$. ■

◆ Προβολές πλευρών σε τρίγωνο

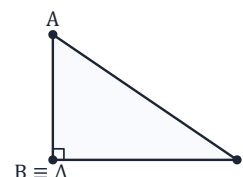
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, έστω Δ το ύψος από την κορυφή A . Η προβολή της πλευράς AB πάνω στην ευθεία $B\Gamma$ είναι το $B\Delta$ και η προβολή της $A\Gamma$ είναι το $\Gamma\Delta$. Η **θέση** του ίχνους Δ εξαρτάται από το είδος των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$:



B, Γ οξείες: το Δ στη $B\Gamma$



B αμβλεία: το Δ έξω από τη $B\Gamma$



B ορθή: $\Delta \equiv B$

- Αν $\hat{B}$ οξεία, το Δ βρίσκεται στην ημιευθεία $B\Gamma$.
- Αν $\hat{B}$ αμβλεία, το Δ βρίσκεται στην **προέκταση** της $B\Gamma$ προς το B .
- Αν $\hat{B} = 90^\circ$, το Δ ταυτίζεται με το B και η προβολή της AB στη $B\Gamma$ είναι μηδενική.

❶ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Σύνδεση με την τριγωνομετρία

Αν το τμήμα AB σχηματίζει γωνία φ με την ευθεία ε , τότε η προβολή του είναι $A'B' = AB \cdot |\sin \varphi|$. Για παράδειγμα, σε τρίγωνο με οξεία $\hat{B}$: $BD = \gamma \sin B$. Η σχέση αυτή θα μας δώσει αργότερα τον νόμο των συνημιτόνων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Προβολή υπό γωνία 60°

Ένα τμήμα $AB = 10$ σχηματίζει γωνία 60° με μια ευθεία ε . Να βρεθεί το μήκος της προβολής του στην ε .

ΛΥΣΗ

Αν $A'B'$ είναι η προβολή, φέρνοντας από το A παράλληλη προς την ε σχηματίζεται ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα $AB = 10$ και γωνία 60° στο A . Η άλλη οξεία γωνία είναι 30° , και η κάθετη πλευρά απέναντι από αυτή (που είναι ίση με την προβολή) ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Άρα $A'B' = 5$. (Με τριγωνομετρία: $10 \cdot \sin 60^\circ = 5$.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Ισοσκελές τρίγωνο

Ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει βάση $B\Gamma = 10$ και σκέλη $AB = A\Gamma = 13$. Να βρεθεί η προβολή της AB στη $B\Gamma$ και το ύψος AD .

ΛΥΣΗ

Στο ισοσκελές το ύψος AD είναι και διάμεσος, άρα D είναι το μέσο της $B\Gamma$ και η προβολή της AB στη $B\Gamma$ είναι $BD = 5$. Από το Πυθαγόρειο (που θα δούμε αναλυτικά στο επόμενο μάθημα) $AD = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Πού «πέφτει» το ύψος;

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = 110^\circ$. Να εξηγηθεί πού βρίσκεται η προβολή της κορυφής A στην ευθεία $B\Gamma$ και ποια είναι η προβολή της πλευράς $A\Gamma$ στη $B\Gamma$.

ΛΥΣΗ

Αφού η $\hat{B}$ είναι αμβλεία, το ίχνος D του ύψους από το A βρίσκεται στην προέκταση της $B\Gamma$, πέρα από το B . Η προβολή της $A\Gamma$ στη $B\Gamma$ είναι το τμήμα $\Delta\Gamma = \Delta B + B\Gamma$, δηλαδή **μεγαλύτερο** από την πλευρά $B\Gamma$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Η προβολή «πάντα μέσα στην πλευρά»

✗ «Η προβολή της AB στη $B\Gamma$ είναι πάντα ένα κομμάτι της πλευράς $B\Gamma$.»

✓ Αυτό ισχύει μόνο αν η γωνία $\hat{B}$ είναι οξεία **και** η $\hat{\Gamma}$ οξεία. Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο το ύψος μπορεί να πέφτει έξω από την πλευρά. Σχεδίαζε πάντα το σχήμα σύμφωνα με τα δεδομένα!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 9.1 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Τμήμα μήκους 8 σχηματίζει με ευθεία ε γωνία 45° . Να βρεθεί η προβολή του στην ε .

●○○

→ Λύση 9.1/1

2 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, ποια είναι η προβολή της AB πάνω στην $A\Gamma$; Ποια είναι η προβολή της $B\Gamma$ πάνω στην $A\Gamma$;

●○○

→ Λύση 9.1/2

3. Ισοσκελές τρίγωνο έχει σκέλη 10 και γωνία κορυφής 120° . Να βρεθεί η προβολή ενός σκέλους πάνω στη βάση και το μήκος της βάσης.

→ Λύση 9.1/3

4. Να αποδείξετε ότι οι προβολές δύο ίσων και παράλληλων τμημάτων σε μια ευθεία είναι ίσες.

→ Λύση 9.1/4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9
Μετρικές σχέσεις

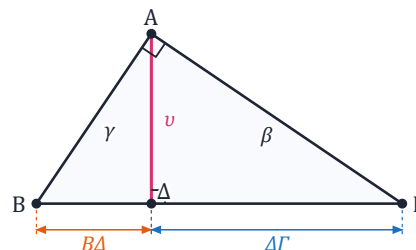
ΜΑΘΗΜΑ 9.2

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα

◆ Οι βασικές μετρικές σχέσεις του ορθογώνιου τριγώνου

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, υποτείνουσα $B\Gamma = \alpha$, κάθετες πλευρές $AG = \beta$, $AB = \gamma$ και ύψος $AD = \upsilon$. Τα $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ είναι οι προβολές των κάθετων πλευρών πάνω στην υποτείνουσα.

Το ύψος χωρίζει το τρίγωνο σε δύο μικρότερα ορθογώνια τρίγωνα, ΔBA και $\Delta A\Gamma$. Και τα τρία τρίγωνα ($AB\Gamma$, ΔBA , $\Delta A\Gamma$) είναι **όμοια** μεταξύ τους, αφού είναι ορθογώνια και έχουν ανά δύο μια κοινή οξεία γωνία. Από αυτή την απλή παρατήρηση πηγάζουν όλα τα επόμενα.

Ορθογώνιο τρίγωνο με ύψος AD ★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Θεώρημα I (κάθετη πλευρά και προβολή)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς ισούται με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής πάνω στην υποτείνουσα:

$$AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta, \quad AG^2 = B\Gamma \cdot \Delta\Gamma.$$

✍ **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔBA και $AB\Gamma$ έχουν κοινή την οξεία γωνία $\hat{B}$, άρα είναι όμοια, με ομόλογες πλευρές $B\Delta \leftrightarrow BA$ (προσκειμένες στη $\hat{B}$ κάθετες πλευρές) και $BA \leftrightarrow B\Gamma$ (υποτείνουσες). Επομένως $\frac{B\Delta}{BA} = \frac{BA}{B\Gamma}$, δηλαδή $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$. Όμοια από τα τρίγωνα $\Delta A\Gamma$ και $AB\Gamma$ (κοινή η $\hat{\Gamma}$) παίρνουμε $AG^2 = B\Gamma \cdot \Delta\Gamma$.

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Πυθαγόρειο Θεώρημα

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2.$$

✍ **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις του Θεωρήματος I:

$$AB^2 + AG^2 = B\Gamma \cdot B\Delta + B\Gamma \cdot \Delta\Gamma = B\Gamma (B\Delta + \Delta\Gamma) = B\Gamma \cdot B\Gamma = B\Gamma^2.$$

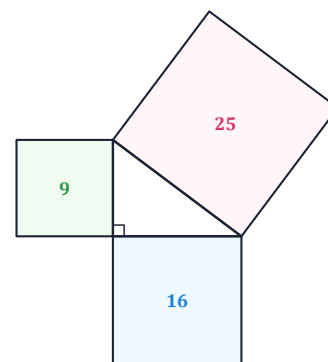
(Χρησιμοποιήσαμε ότι το Δ βρίσκεται μεταξύ B και Γ , αφού οι $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ είναι οξείες.)

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Αντίστροφο του Πυθαγορείου

Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

✍ **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ με $\hat{A}' = 90^\circ$ και κάθετες πλευρές $A'\Gamma' = \beta$, $A'B' = \gamma$. Από το Πυθαγόρειο, $B'\Gamma'^2 = \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$, άρα $B'\Gamma' = \alpha$. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες, οπότε είναι ίσα, και επομένως $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$.

Η κλασική εικόνα: $9 + 16 = 25$

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Θεώρημα II (το ύψος)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα:

$$v^2 = A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma.$$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta B\Lambda$ και $\Delta A\Gamma$ έχουν $\widehat{\Delta A\Gamma} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = \hat{B}$, άρα είναι όμοια: $\frac{\Delta B}{\Delta A} = \frac{\Delta A}{\Delta\Gamma}$, οπότε $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$. ■

→ ΠΟΡΙΣΜΑ — Δύο ακόμη χρήσιμες σχέσεις

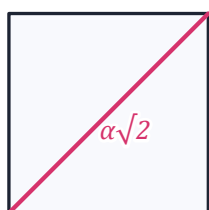
$$\beta \cdot \gamma = \alpha \cdot v \quad \text{και} \quad \frac{1}{v^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}.$$

Η πρώτη προκύπτει από την ομοιότητα $\Delta A\Gamma \approx \Delta B\Gamma$ ($\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{B\Gamma}$) — ή, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 10, από το ότι το εμβαδόν γράφεται και $\frac{1}{2}\beta\gamma$ και $\frac{1}{2}\alpha v$. Η δεύτερη προκύπτει από την πρώτη: $\frac{1}{v^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2\gamma^2} = \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\beta^2}$.

📋 ΣΥΝΟΨΗ — Τυπολόγιο ορθογωνίου τριγώνου ($\hat{A} = 90^\circ$)

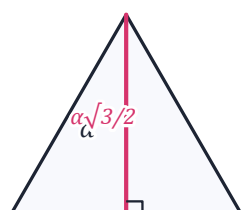
Σχέση	Τι λέει
$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$	Πυθαγόρειο θεώρημα
$\gamma^2 = \alpha \cdot B\Delta, \beta^2 = \alpha \cdot \Gamma\Delta$	κάθετη πλευρά ² = υποτείνουσα × προβολή
$v^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$	ύψος ² = γινόμενο προβολών
$\beta\gamma = \alpha v$	γινόμενο καθέτων = υποτείνουσα × ύψος
$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$	αντίστροφα τετράγωνα

🔵 Χρήσιμες εφαρμογές που πρέπει να ξέρεις «απέξω»



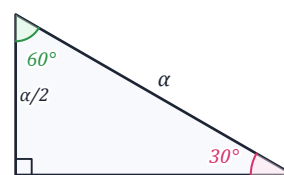
α

Διαγώνιος τετραγώνου



$\alpha/2$

Ύψος ισοπλεύρου



$\alpha\sqrt{3}/2$

Τρίγωνο $30^\circ-60^\circ-90^\circ$

Σχήμα	Αποτέλεσμα
Τετράγωνο πλευράς α	διαγώνιος $\delta = \alpha\sqrt{2}$
Ορθογώνιο $\alpha \times \beta$	διαγώνιος $\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
Ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α	ύψος $v = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$
Ορθογώνιο τρίγωνο με γωνία 30° και υποτείνουσα α	κάθετες πλευρές $\frac{\alpha}{2}$ (απέναντι από 30°) και $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$
Ορθογώνιο ισοσκελές με κάθετες α	υποτείνουσα $\alpha\sqrt{2}$

Πυθαγόρειες τριάδες

Τριάδες θετικών ακεραίων (x, y, z) με $x^2 + y^2 = z^2$ λέγονται **Πυθαγόρειες τριάδες**. Οι πιο γνωστές: $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(8, 15, 17)$, $(7, 24, 25)$, $(20, 21, 29)$, καθώς και όλα τα πολλαπλάσιά τους, π.χ. $(6, 8, 10)$, $(9, 12, 15)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Πώς «φτιάχνουμε» Πυθαγόρειες τριάδες

Για οποιουσδήποτε ακεραίους $\mu > \nu > 0$, οι αριθμοί $\mu^2 - \nu^2$, $2\mu\nu$, $\mu^2 + \nu^2$ αποτελούν Πυθαγόρεια τριάδα, γιατί $(\mu^2 - \nu^2)^2 + (2\mu\nu)^2 = \mu^4 - 2\mu^2\nu^2 + \nu^4 + 4\mu^2\nu^2 = (\mu^2 + \nu^2)^2$. Π.χ. $\mu = 2, \nu = 1$ δίνει $(3, 4, 5)$. $\mu = 3, \nu = 2$ δίνει $(5, 12, 13)$. $\mu = 4, \nu = 1$ δίνει $(15, 8, 17)$.

ΛΙΓΗ ΙΣΤΟΡΙΑ

Το θεώρημα φέρει το όνομα του Πυθαγόρα (6ος αι. π.Χ.), όμως πήλινες πινακίδες της Βαβυλώνας (όπως η περίφημη Plimpton 322, περ. 1800 π.Χ.) περιέχουν ήδη καταλόγους Πυθαγόρειων τριάδων. Η συμβολή των Ελλήνων ήταν η **απόδειξη**: η μετατροπή μιας εμπειρικής γνώσης σε θεώρημα. Σήμερα είναι γνωστές εκατοντάδες διαφορετικές αποδείξεις του — μία από αυτές οφείλεται σε έναν μελλοντικό πρόεδρο των ΗΠΑ, τον Τζέιμς Γκάρφιλντ!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Όλα τα στοιχεία ορθογωνίου τριγώνου

Ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) έχει $AB = 9$ και $A\Gamma = 12$. Να βρεθούν η υποτείνουσα, οι προβολές των κάθετων πλευρών και το ύψος AD .

ΛΥΣΗ

- Υποτείνουσα: $\alpha = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$.
- Προβολές: $B\Delta = \frac{\gamma^2}{\alpha} = \frac{81}{15} = 5,4$ και $\Delta\Gamma = \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{144}{15} = 9,6$ (έλεγχος: $5,4 + 9,6 = 15$ ✓).
- Ύψος: $v = \frac{\beta\gamma}{\alpha} = \frac{108}{15} = 7,2$. Επαλήθευση με το θεώρημα II: $5,4 \cdot 9,6 = 51,84 = 7,2^2$ ✓.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Είναι ορθογώνιο;

Να εξεταστεί αν είναι ορθογώνια τα τρίγωνα με πλευρές: (α) 20, 21, 29 (β) 6, 7, 9 (γ) $\sqrt{3}, \sqrt{5}, 2\sqrt{2}$.

ΛΥΣΗ

Συγκρίνουμε το τετράγωνο της **μεγαλύτερης** πλευράς με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων:

(α) $29^2 = 841$ και $20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841$. Ίσα, άρα ορθογώνιο (ορθή απέναντι από την πλευρά 29).

(β) $9^2 = 81$ και $6^2 + 7^2 = 85$. Δεν είναι ίσα, άρα **όχι** ορθογώνιο. (Στο μάθημα 9.4 θα δούμε ότι, αφού $81 < 85$, είναι οξυγώνιο.)

(γ) Η μεγαλύτερη είναι η $2\sqrt{2}$ (αφού $8 > 5 > 3$): $(2\sqrt{2})^2 = 8 = 3 + 5$. Ορθογώνιο.

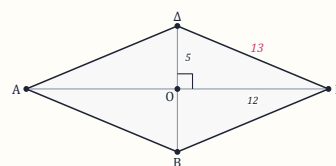
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Ρόμβος

Οι διαγώνιοι ενός ρόμβου έχουν μήκη 10 και 24. Να βρεθεί η πλευρά του και το ύψος του.

ΛΥΣΗ

Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα. Σχηματίζονται 4 ίσα ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 5 και 12, οπότε η πλευρά είναι $\sqrt{25 + 144} = 13$.

Για το ύψος: το ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΓΔ$ έχει υποτείνουσα 13 και ύψος προς αυτήν $\frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}$. Το ύψος του ρόμβου είναι η απόσταση των παράλληλων



πλευρών $AB, \Gamma\Delta$, που είναι διπλάσια από την απόσταση του κέντρου O από την $\Gamma\Delta$: $v = \frac{120}{13}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Η σκάλα που γλιστράει

Μια σκάλα μήκους 5 m ακουμπά σε κατακόρυφο τοίχο, με τη βάση της 1,4 m μακριά από τον τοίχο. (α) Σε ποιο ύψος φτάνει; (β) Αν η κορυφή της γλιστρήσει 0,8 m προς τα κάτω, πόσο θα απομακρυνθεί η βάση;

ΛΥΣΗ

$$(α) h = \sqrt{5^2 - 1,4^2} = \sqrt{25 - 1,96} = \sqrt{23,04} = 4,8 \text{ m.}$$

(β) Το νέο ύψος είναι 4 m, οπότε η νέα απόσταση της βάσης είναι $\sqrt{25 - 16} = 3$ m. Η βάση απομακρύνθηκε $3 - 1,4 = 1,6$ m — διπλάσια απόσταση από όση κατέβηκε η κορυφή!

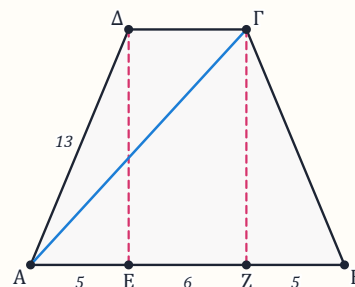
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Ισοσκελές τραπέζιο

Ισοσκελές τραπέζιο έχει βάσεις 16 και 6 και μη παράλληλες πλευρές 13. Να βρεθούν το ύψος και η διαγώνίός του.

ΛΥΣΗ

Φέρνουμε τα ύψη ΔE και ΓZ . Το $\Delta \Gamma Z E$ είναι ορθογώνιο, άρα $EZ = 6$, και λόγω συμμετρίας $AE = ZB = \frac{16 - 6}{2} = 5$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta E \Delta$: $\Delta E = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

Για τη διαγώνιο $A\Gamma$: στο ορθογώνιο τρίγωνο $AZ\Gamma$ είναι $AZ = 5 + 6 = 11$ και $\Gamma Z = 12$, άρα $A\Gamma = \sqrt{11^2 + 12^2} = \sqrt{265}$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Απόδειξη με το Πυθαγόρειο

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και τυχαίο σημείο M στο εσωτερικό του. Να αποδειχθεί ότι $MA^2 + M\Gamma^2 = MB^2 + M\Delta^2$.

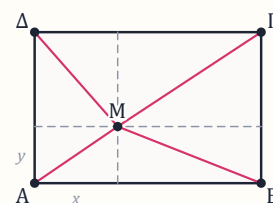
ΛΥΣΗ

Φέρνουμε από το M παράλληλες προς τις πλευρές. Αν οι αποστάσεις του M από τις AD, AB είναι x, y και οι διαστάσεις του ορθογωνίου α (οριζόντια) και β (κατακόρυφα), τότε από το Πυθαγόρειο:

$$MA^2 = x^2 + y^2, \quad M\Gamma^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2,$$

$$MB^2 = (\alpha - x)^2 + y^2, \quad M\Delta^2 = x^2 + (\beta - y)^2.$$

Τα δύο αθροίσματα $MA^2 + M\Gamma^2$ και $MB^2 + M\Delta^2$ περιέχουν ακριβώς τους ίδιους τέσσερις όρους, άρα είναι ίσα.



✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Το Πυθαγόρειο σε μη ορθογώνιο τρίγωνο

✗ «Στο τρίγωνο με πλευρές 5, 6, x έχουμε $x^2 = 25 + 36$, άρα $x = \sqrt{61}$ »

✓ Το Πυθαγόρειο ισχύει **μόνο** σε ορθογώνιο τρίγωνο και η υποτείνουσα είναι η πλευρά **απέναντι από την ορθή**. Αν δεν ξέρουμε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο (και ποια γωνία είναι ορθή), δεν μπορούμε να το εφαρμόσουμε.

✗ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** — Λάθος «πρόσθεση ριζών»

✗ $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7.$

✓ $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$ Η ρίζα **δεν** «σπάει» σε άθροισμα: $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$

🔗 **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ** — Στρατηγική σε προβλήματα με ορθογώνια τρίγωνα

1. Εντόπισε (ή **δημιούργησε**, φέρνοντας ένα ύψος) ορθογώνια τρίγωνα.
2. Ονόμασε με x το άγνωστο μήκος και γράψε το Πυθαγόρειο σε **κάθε** ορθογώνιο τρίγωνο που περιέχει το x .
3. Αν υπάρχει ύψος προς την υποτείνουσα, σκέψου αμέσως τις σχέσεις $\gamma^2 = \alpha \cdot \text{ΒΔ}$, $v^2 = \text{ΒΔ} \cdot \Delta\Gamma$, $\beta\gamma = \alpha v$.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Θέλεις δεκάδες επιπλέον ασκήσεις στο Πυθαγόρειο θεώρημα, από τις πιο απλές μέχρι επίπεδο Πανελληνίων; Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με λύσεις βήμα-βήμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 9.2 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Σε ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες πλευρές είναι 8 και 15. Να βρεθούν η υποτείνουσα και το ύψος προς αυτήν.
●○○ → Λύση 9.2/1
- 2 Σε ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα είναι 25 και μία κάθετη πλευρά 7. Να βρεθούν η άλλη κάθετη πλευρά και οι προβολές των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα.
●○○ → Λύση 9.2/2
- 3 Να βρεθεί η διαγώνιος ορθογωνίου με διαστάσεις 12×5 και η διαγώνιος τετραγώνου πλευράς 7.
●○○ → Λύση 9.2/3
- 4 Ισόπλευρο τρίγωνο έχει ύψος 6. Να βρεθεί η πλευρά του.
●○○ → Λύση 9.2/4
- 5 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) το ύψος $A\Delta$ ορίζει $B\Delta = 3$ και $\Delta\Gamma = 12$. Να βρεθούν τα $A\Delta$, AB , $A\Gamma$ και να επαληθευτεί το Πυθαγόρειο.
●●○ → Λύση 9.2/5
- 6 Ένα τρίγωνο έχει πλευρές x , $x+7$ και $x+8$. Για ποια τιμή του x είναι ορθογώνιο;
●●○ → Λύση 9.2/6
- 7 Σε κύκλο ακτίνας 13 μια χορδή απέχει 5 από το κέντρο. Να βρεθεί το μήκος της.
●●○ → Λύση 9.2/7
- 8 Σε ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες πλευρές έχουν λόγο 3 : 4 και το ύψος προς την υποτείνουσα είναι 12. Να βρεθούν οι πλευρές του.
●●○ → Λύση 9.2/8
- 9 Να αποδείξετε ότι σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με ύψος $A\Delta$ ισχύει $\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$.
●●○ → Λύση 9.2/9
- 10 Δύο κύκλοι με ακτίνες 9 και 4 εφάπτονται εξωτερικά. Να βρεθεί το μήκος του κοινού εξωτερικού εφαπτόμενου τμήματος (μεταξύ των σημείων επαφής).
●●● → Λύση 9.2/10

- 11** Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η διάμεσος AM και το ύψος $A\Delta$ έχουν μήκη $\frac{25}{2}$ και 12 αντίστοιχα. Να βρεθούν οι πλευρές.

→ Λύση 9.2/11

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9
Μετρικές σχέσεις

ΜΑΘΗΜΑ 9.3

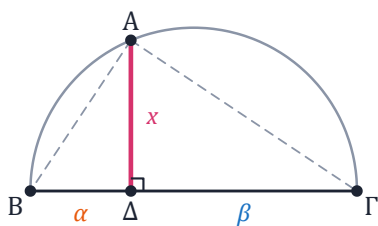
Γεωμετρικές κατασκευές

Η ιδέα: «διαβάζουμε» έναν τύπο ως σχήμα

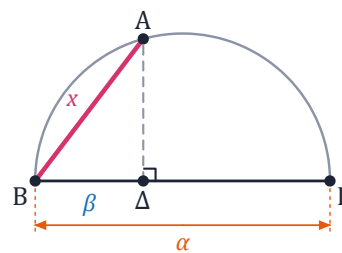
Οι μετρικές σχέσεις μάς επιτρέπουν να κατασκευάζουμε με κανόνα και διαβήτη τμήματα που δίνονται από αλγεβρικούς τύπους. Το κόλπο είναι να αναγνωρίσουμε σε κάθε τύπο μια γνωστή σχέση:

Τύπος	Τον «βλέπουμε» ως	Κατασκευή
$x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$	υποτείνουσα με κάθετες α, β	ορθή γωνία, α και β στις πλευρές της
$x = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ ($\alpha > \beta$)	κάθετη πλευρά με υποτείνουσα α	ημικύκλιο διαμέτρου α , χορδή β
$x = \sqrt{\alpha\beta}$	μέση ανάλογος: ύψος ή κάθετη πλευρά	ημικύκλιο (βλ. παρακάτω)
$x = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$	τέταρτη ανάλογος	θεώρημα του Θαλή (μάθημα 7.7)
$x = \alpha\sqrt{\nu}$	διαδοχικές υποτείνουσες	«σπείρα» ή $\sqrt{\alpha \cdot \nu\alpha}$

Κατασκευή της μέσης αναλόγου $x = \sqrt{\alpha\beta}$



1ος τρόπος: $x = \text{ύψος}$ ($u^2 = BD \cdot \Delta\Gamma$)



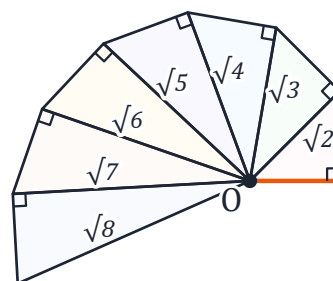
2ος τρόπος: $x = \text{κάθετη πλευρά}$ ($\gamma^2 = \alpha \cdot \beta\Delta$)

1ος τρόπος. Πάνω σε ευθεία παίρνουμε διαδοχικά $B\Delta = \alpha$ και $\Delta\Gamma = \beta$ και γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου $B\Gamma$. Η κάθετη στο Δ τέμνει το ημικύκλιο στο A . Η γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, άρα ορθή, και το $A\Delta$ είναι ύψος προς την υποτείνουσα. Από το Θεώρημα II: $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma = \alpha\beta$, δηλαδή $x = A\Delta$.

2ος τρόπος (για $\alpha > \beta$). Γράφουμε ημικύκλιο με διάμετρο $B\Gamma = \alpha$, παίρνουμε $B\Delta = \beta$ πάνω στη διάμετρο και φέρνουμε κάθετη στο Δ που τέμνει το ημικύκλιο στο A . Από το Θεώρημα I: $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta = \alpha\beta$, δηλαδή $x = AB$.

Τα τμήματα $\alpha\sqrt{2}, \alpha\sqrt{3}, \dots, \alpha\sqrt{\nu}$

Επειδή $(\alpha\sqrt{2})^2 = \alpha^2 + \alpha^2$, το $\alpha\sqrt{2}$ είναι η υποτείνουσα ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου με κάθετες πλευρές α . Στη συνέχεια $(\alpha\sqrt{3})^2 = (\alpha\sqrt{2})^2 + \alpha^2$: το $\alpha\sqrt{3}$ είναι υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες $\alpha\sqrt{2}$ και α . Συνεχίζοντας, κάθε φορά φέρνουμε στο άκρο της προηγούμενης υποτείνουσας κάθετο τμήμα ίσο με α , και παίρνουμε διαδοχικά τα $\alpha\sqrt{4} = 2\alpha$, $\alpha\sqrt{5}$, $\alpha\sqrt{6}$, ... Το σχήμα που προκύπτει λέγεται **σπείρα του Θεόδωρου**, από τον Θεόδωρο τον Κυρηναίο, δάσκαλο του Πλάτωνα.



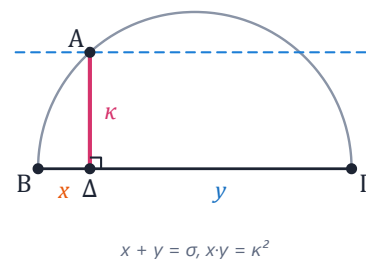
Η «σπείρα του Θεόδωρου»

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Ένας γρηγορότερος δρόμος

Επειδή $\alpha\sqrt{\nu} = \sqrt{\alpha \cdot (\nu\alpha)}$, το $\alpha\sqrt{\nu}$ είναι η μέση ανάλογος των τμημάτων α και $\nu\alpha$, και κατασκευάζεται με **μία** μόνο κατασκευή ημικυκλίου.

◆ Δύο τμήματα με γνωστό άθροισμα και γνωστό γινόμενο

Ζητάμε τμήματα x, y με $x + y = \sigma$ και $xy = \kappa^2$ (όπου σ, κ δοσμένα τμήματα). Αλγεβρικά, τα x, y είναι οι ρίζες της $t^2 - \sigma t + \kappa^2 = 0$. Γεωμετρικά: γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου $B\Gamma = \sigma$ και φέρνουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ σε απόσταση κ . Αν τέμνει το ημικύκλιο σε ένα σημείο A με προβολή Δ , τότε $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$, δηλαδή $x = B\Delta$ και $y = \Delta\Gamma$ είναι τα ζητούμενα.



Διερεύνηση: η παράλληλη τέμνει το ημικύκλιο μόνο αν $\kappa \leq \frac{\sigma}{2}$, δηλαδή $\kappa^2 \leq \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2$ — ακριβώς η συνθήκη μη αρνητικής διακρίνουσας της εξίσωσης! Η Γεωμετρία και η Άλγεβρα λένε το ίδιο πράγμα με δύο γλώσσες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Κατασκευή του $\sqrt{6}$

Δίνεται μοναδιαίο τμήμα. Να περιγραφούν δύο τρόποι κατασκευής τμήματος μήκους $\sqrt{6}$.

ΛΥΣΗ

Ως μέση ανάλογος: $\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3}$. Παίρνουμε διαδοχικά τμήματα 2 και 3 πάνω σε ευθεία, γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου 5 και φέρνουμε κάθετη στο σημείο ένωσης. Το τμήμα της κάθετης μέχρι το ημικύκλιο έχει μήκος $\sqrt{6}$.

Ως υποτείνουσα: $6 = 1 + 5 = 1 + (\sqrt{5})^2$, ή καλύτερα $6 = (\sqrt{2})^2 + 2^2$. Κατασκευάζουμε το $\sqrt{2}$ (διαγώνιος μοναδιαίου τετραγώνου) και ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες $\sqrt{2}$ και 2· η υποτείνουσά του είναι $\sqrt{6}$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Τμήμα από σύνθετο τύπο

Δίνονται τμήματα α, β, γ με $\alpha^2 + \beta^2 > \gamma^2$. Να κατασκευαστεί τμήμα $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}$.

ΛΥΣΗ

Κατασκευάζουμε πρώτα $\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ως υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες α και β . Τότε $x = \sqrt{\delta^2 - \gamma^2}$ και (αφού $\delta > \gamma$) το x είναι κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα δ και άλλη κάθετη γ : γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου δ , από το ένα άκρο παίρνουμε χορδή γ , και η χορδή από το άλλο άκρο προς το ίδιο σημείο είναι το x (η γωνία στο ημικύκλιο είναι ορθή). ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Η τρίτη ανάλογος

Δίνονται τμήματα α και β . Να κατασκευαστεί τμήμα $x = \frac{\beta^2}{\alpha}$.

ΛΥΣΗ

Η σχέση γράφεται $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{x}$, δηλαδή το x είναι η τέταρτη ανάλογος των α, β, β (λέγεται και **τρίτη ανάλογος** των α, β).

Την κατασκευάζουμε με το θεώρημα του Θαλή: σε γωνία O παίρνουμε $OA = \alpha$, $AB = \beta$ στη μία πλευρά, $OG = \beta$ στην άλλη, και από το B φέρνουμε παράλληλη στην AG που τέμνει τη δεύτερη πλευρά στο X : τότε $x = GX$.

Εναλλακτικά, αν $\beta < \alpha$, με το θεώρημα I του προηγούμενου μαθήματος: γράφουμε ημικύκλιο με διάμετρο $B\Gamma = \alpha$ και από το B φέρνουμε χορδή $BA = \beta$. Η προβολή $B\Delta$ της χορδής πάνω στη διάμετρο ικανοποιεί $BA^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$, δηλαδή $B\Delta = \frac{\beta^2}{\alpha} = x$. ■

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

Σε κάθε κατασκευαστικό πρόβλημα πρέπει να γίνεται **διερεύνηση**: για ποιες τιμές των δεδομένων υπάρχει λύση; Για παράδειγμα το $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ κατασκευάζεται μόνο αν $\alpha > \beta$ (ή $\alpha = \beta$, οπότε είναι μηδενικό).



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Στο mathgreece.com θα βρεις τις κατασκευές αυτού του μαθήματος σε κινούμενα σχήματα βήμα-βήμα, μαζί με πλήρες δωρεάν φροντιστήριο για όλη την ύλη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 9.3 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Δίνεται τμήμα α . Να περιγράψετε την κατασκευή τμημάτων $\alpha\sqrt{2}$ και $\alpha\sqrt{5}$.

●○○ → Λύση 9.3/1
- 2** Δίνονται τμήματα $\alpha = 4$ και $\beta = 9$. Να κατασκευάσετε τη μέση ανάλογό τους και να υπολογίσετε το μήκος της.

●○○ → Λύση 9.3/2
- 3** Δίνεται μοναδιαίο τμήμα. Να κατασκευάσετε τμήμα μήκους $\sqrt{7}$ με δύο τρόπους.

●●○ → Λύση 9.3/3
- 4** Να κατασκευάσετε δύο τμήματα x, y με $x + y = 10$ και $xy = 16$ (μοναδιαίο τμήμα δοσμένο). Να βρείτε και αλγεβρικά τα μήκη τους.

●●○ → Λύση 9.3/4
- 5** Δίνεται τμήμα α . Να κατασκευάσετε τμήμα $x = \frac{\alpha\sqrt{11}}{2}$. (Υπόδειξη: γράψτε το $\frac{11\alpha^2}{4}$ ως διαφορά δύο τετραγώνων.)

●●● → Λύση 9.3/5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9
Μετρικές σχέσεις

ΜΑΘΗΜΑ 9.4

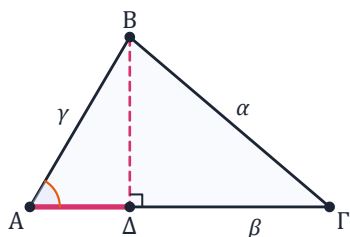
Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος

Τι γίνεται όταν η γωνία δεν είναι ορθή;

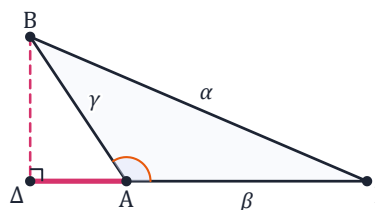
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Αν «κλείσουμε» τη γωνία $\hat{A}$, η πλευρά α μικραίνει· αν την «ανοίξουμε», μεγαλώνει. Άρα περιμένουμε:

$$\hat{A} < 90^\circ \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2, \quad \hat{A} > 90^\circ \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2.$$

Τα επόμενα θεωρήματα λένε **ακριβώς πόσο** διαφέρουν οι δύο ποσότητες.



Οξεία γωνία A



Αμβλεία γωνία A

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Θεώρημα I (απέναντι από οξεία γωνία)

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από **οξεία** γωνία ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών **ελαττωμένο** κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή:

$$\hat{A} < 90^\circ \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta,$$

όπου $A\Delta$ η προβολή της $\gamma = AB$ πάνω στην ευθεία AG .

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Θεώρημα II (απέναντι από αμβλεία γωνία)

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από **αμβλεία** γωνία ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών **αυξημένο** κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή:

$$\hat{A} > 90^\circ \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta.$$

✍ **ΑΠΟΔΕΙΞΗ** — (των Θεωρημάτων I και II)

Έστω $B\Delta$ το ύψος από το B προς την ευθεία AG . Στα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $B\Delta A$:

$$\alpha^2 = B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2, \quad B\Delta^2 = \gamma^2 - A\Delta^2.$$

- Αν $\hat{A}$ οξεία (και, για να είμαστε συγκεκριμένοι, $\hat{\Gamma}$ οξεία), το Δ είναι μεταξύ A και Γ και $\Delta\Gamma = \beta - A\Delta$. Τότε $\alpha^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 + (\beta - A\Delta)^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$. (Αν η $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία, $\Delta\Gamma = A\Delta - \beta$ και ο υπολογισμός δίνει το ίδιο, αφού το $\Delta\Gamma$ εμφανίζεται στο τετράγωνο.)
- Αν $\hat{A}$ αμβλεία, το Δ είναι στην προέκταση της GA πέρα από το A, οπότε $\Delta\Gamma = \beta + A\Delta$ και $\alpha^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 + (\beta + A\Delta)^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$.

🕒 **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Τα θεωρήματα αυτά **γενικεύουν** το Πυθαγόρειο: αν $\hat{A} = 90^\circ$, η προβολή $A\Delta$ είναι μηδέν και παίρνουμε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

Ποιο είναι το είδος του τριγώνου;

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Κριτήριο είδους γωνίας

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ:

$$\hat{A} < 90^\circ \iff \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2, \quad \hat{A} = 90^\circ \iff \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \quad \hat{A} > 90^\circ \iff \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2.$$

Επειδή η μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά, για να βρούμε το είδος ενός τριγώνου **αρκεί να ελέγξουμε τη μεγαλύτερη πλευρά**:

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Πώς βρίσκουμε το είδος τριγώνου από τις πλευρές του

Αν α είναι η **μεγαλύτερη** πλευρά:

- $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow$ το τρίγωνο είναι **οξυγώνιο**,
- $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow$ **ορθογώνιο**,
- $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow$ **αμβλυγώνιο**.

Ο νόμος των συνημιτόνων

Η προβολή ΑΔ της γ πάνω στην ΑΓ ισούται με $\gamma \cdot \sin A$ όταν η $\hat{A}$ είναι οξεία, και με $-\gamma \cdot \sin A$ όταν είναι αμβλεία (γιατί τότε $\sin A < 0$). Αντικαθιστώντας στα θεωρήματα Ι και ΙΙ, **και οι δύο περιπτώσεις γράφονται με τον ίδιο τύπο**:

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Νόμος των συνημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin A,$$

και αναλόγως $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \sin B$, $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \sin \Gamma$.

Υπολογισμός του ύψους από τις πλευρές

Από το Θεώρημα Ι υπολογίζουμε πρώτα την προβολή, π.χ. $B\Delta = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha}$ (προβολή της γ στην α , όταν η $\hat{B}$ είναι οξεία), και μετά το ύψος με Πυθαγόρειο: $v_\alpha^2 = \gamma^2 - B\Delta^2$. Με λίγη άλγεβρα (παραγοντοποίηση διαφορών τετραγώνων) καταλήγουμε σε έναν κομψό τύπο:

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Ύψος συναρτήσει των πλευρών

$$v_\alpha = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}, \quad \text{όπου } \tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}.$$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ — Σύνοψη των βημάτων

$$v_\alpha^2 = \gamma^2 - \frac{(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2} = \frac{(2\alpha\gamma - (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2))(2\alpha\gamma + (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2))}{4\alpha^2} = \frac{(\beta^2 - (\alpha - \gamma)^2)((\alpha + \gamma)^2 - \beta^2)}{4\alpha^2}.$$

Αναλύοντας και τις δύο διαφορές τετραγώνων παίρνουμε το γινόμενο $(\beta - \alpha + \gamma)(\beta + \alpha - \gamma)(\alpha + \gamma - \beta)(\alpha + \gamma + \beta) = 2(\tau - \alpha) \cdot 2(\tau - \gamma) \cdot 2(\tau - \beta) \cdot 2\tau$, οπότε $v_\alpha^2 = \frac{4}{\alpha^2} \tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Είδος τριγώνου

Να βρεθεί το είδος των τριγώνων με πλευρές: (α) 8, 10, 13 (β) 7, 8, 10 (γ) 10, 24, 26.

ΛΥΣΗ

(α) Μεγαλύτερη 13: 169 έναντι $64 + 100 = 164$. Είναι $169 > 164$, άρα **αμβλυγώνιο**.

(β) Μεγαλύτερη 10: 100 έναντι $49 + 64 = 113$. Είναι $100 < 113$, άρα **οξυγώνιο**.

(γ) Μεγαλύτερη 26: 676 έναντι $100 + 576 = 676$. **Ορθογώνιο.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Γωνία από τις πλευρές

Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $\alpha = 7, \beta = 8, \gamma = 5$. Να βρεθούν η γωνία $\hat{A}$, η προβολή της AB πάνω στην $A\Gamma$ και το ύψος από το B .

ΛΥΣΗ

Από τον νόμο των συνημιτόνων: $\text{συν}A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{64 + 25 - 49}{80} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$, άρα $\hat{A} = 60^\circ$.

Η $\hat{A}$ είναι οξεία, οπότε από το Θεώρημα I: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$, δηλαδή $49 = 89 - 16 \cdot A\Delta$, άρα $A\Delta = 2,5$.

Ύψος από το B : $v_\beta = B\Delta = \sqrt{\gamma^2 - A\Delta^2} = \sqrt{25 - 6,25} = \sqrt{18,75} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. (Ταιριάζει με το ότι $A\Delta = \gamma \text{ συν}60^\circ = 2,5$ και $B\Delta = \gamma \text{ ημ}60^\circ$.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Το τρίγωνο 13 – 14 – 15

Να υπολογιστεί το ύψος v_α του τριγώνου με $\alpha = 14, \beta = 15, \gamma = 13$.

ΛΥΣΗ

$\tau = \frac{14 + 15 + 13}{2} = 21$, και $\tau - \alpha = 7, \tau - \beta = 6, \tau - \gamma = 8$. Άρα

$$v_\alpha = \frac{2}{14} \sqrt{21 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{1}{7} \sqrt{7056} = \frac{84}{7} = 12.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Υπολογισμός πλευράς απέναντι από αμβλεία

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma} = 120^\circ, \alpha = 3$ και $\beta = 5$. Να βρεθεί η γ .

ΛΥΣΗ

Με το Θεώρημα II: η προβολή της $\alpha = \Gamma B$ πάνω στην ευθεία ΓA (που πέφτει στην προέκταση, αφού η $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία) σχηματίζει με την ΓB γωνία 60° , άρα ισούται με $\frac{3}{2}$. Τότε $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta \cdot \frac{3}{2} = 9 + 25 + 15 = 49$, άρα $\gamma = 7$.

Με τον νόμο των συνημιτόνων: $\gamma^2 = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Σχέση πλευρών που «δείχνει» γωνία

Αν σε τρίγωνο ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$, να αποδειχθεί ότι $\hat{A} = 120^\circ$.

ΛΥΣΗ

Από τον νόμο των συνημιτόνων $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \text{ συν}A$. Συγκρίνοντας με τη δοσμένη σχέση: $-2\beta\gamma \text{ συν}A = \beta\gamma$, άρα $\text{συν}A = -\frac{1}{2}$ και $\hat{A} = 120^\circ$.

Χωρίς τριγωνομετρία: επειδή $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, η $\hat{A}$ είναι αμβλεία. Από το Θεώρημα II, $2\beta \cdot A\Delta = \beta\gamma$, άρα $A\Delta = \frac{\gamma}{2}$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ η κάθετη πλευρά $A\Delta$ είναι το μισό της υποτείνουσας $AB = \gamma$, οπότε $\widehat{BA\Delta} = 30^\circ$ και $\widehat{A\Delta B} = 60^\circ$. Η $\hat{A}$ είναι παραπληρωματική της $\widehat{A\Delta B}$, δηλαδή 120° .

✗ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** — Λάθος προβολή

Στο θεώρημα Ι ο μαθητής γράφει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \text{ΒΔ}$, όπου ΒΔ το ύψος.

✓ Στον τύπο εμφανίζεται η **προβολή** μιας πλευράς πάνω στην άλλη (ένα τμήμα **πάνω** στην ευθεία ΑΓ), όχι το ύψος. Θυμήσου: «η μια πλευρά **επί** την προβολή της άλλης **πάνω σε αυτή**».

✗ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** — Έλεγχος με λάθος πλευρά

Για το τρίγωνο 5, 6, 8 ο μαθητής ελέγχει $5^2 = 25 < 36 + 64$ και συμπεραίνει «οξυγώνιο».

✓ Ο έλεγχος με τη μικρότερη πλευρά λέει μόνο ότι η **μικρότερη** γωνία είναι οξεία (κάτι που ισχύει πάντα!). Πρέπει να ελέγξουμε τη **μεγαλύτερη**: $64 > 25 + 36 = 61$, άρα το τρίγωνο είναι **αμβλυγώνιο**.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Ο νόμος των συνημιτόνων συνδέει τη Γεωμετρία με την Τριγωνομετρία. Στο mathgreece.com θα βρεις δωρεάν πλήρες φροντιστήριο και για τα δύο μαθήματα, με εκατοντάδες λυμένες ασκήσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 9.4 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Να βρείτε το είδος των τριγώνων με πλευρές (α) 4, 5, 6 (β) 3, 5, 7 (γ) 9, 40, 41.
●○○ → Λύση 9.4/1
- 2 Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\beta = 6, \gamma = 4$ και $\hat{A} = 60^\circ$. Να βρεθεί η α.
●○○ → Λύση 9.4/2
- 3 Τρίγωνο έχει πλευρές $\alpha = 13, \beta = 14, \gamma = 15$. Να βρεθεί το ύψος $υ_\beta$.
●○○ → Λύση 9.4/3
- 4 Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = 6, \beta = 5, \gamma = 4$. Να βρεθεί η προβολή της ΑΓ πάνω στη ΒΓ.
●●○ → Λύση 9.4/4
- 5 Για ποιες τιμές του θετικού x το τρίγωνο με πλευρές x, 8, 10 (όπου 10 η μεγαλύτερη πλευρά) είναι αμβλυγώνιο;
●●○ → Λύση 9.4/5
- 6 Σε τρίγωνο ισχύει $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$. Να βρεθεί η γωνία $\hat{\Gamma}$.
●●○ → Λύση 9.4/6
- 7 Παραλληλόγραμμο έχει πλευρές 5 και 8 και μία γωνία του 60° . Να βρεθούν οι διαγώνιοί του.
●●○ → Λύση 9.4/7
- 8 Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 135^\circ, \beta = 3\sqrt{2}$ και $\gamma = 2$, να βρεθεί η α χωρίς τριγωνομετρία (με το θεώρημα ΙΙ).
●●● → Λύση 9.4/8
- 9 Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2(\alpha\beta \sin \Gamma + \beta\gamma \sin \alpha + \gamma\alpha \sin \beta)$.
●●● → Λύση 9.4/9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9
Μετρικές σχέσεις

ΜΑΘΗΜΑ 9.5

Θεωρήματα διαμέσων

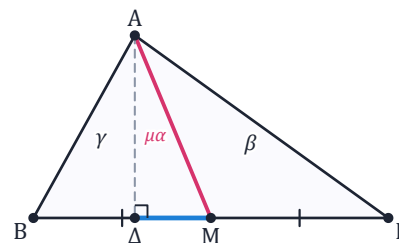
◆ Το 1ο θεώρημα διαμέσων

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ συμβολίζουμε με μ_α τη διάμεσο AM προς την πλευρά α (και ανάλογα μ_β, μ_γ). Πόσο είναι το μήκος της, αν ξέρουμε τις πλευρές;

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — 1ο θεώρημα διαμέσων

Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ τους, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}.$$

Διάμεσος AM και ύψος AD

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $\beta = \gamma$, η διάμεσος είναι και ύψος και η σχέση προκύπτει άμεσα από το Πυθαγόρειο. Έστω $\beta > \gamma$. Φέρνουμε το ύψος AD · τότε το Δ βρίσκεται μεταξύ B και M (ή στην προέκτασή πέρα από το B) και η $\widehat{AM\Gamma}$ είναι **αμβλεία**, ενώ η $\widehat{AMB}$ **οξεία**. Εφαρμόζουμε τη γενίκευση του Πυθαγορείου:

- στο τρίγωνο $AM\Gamma$ (αμβλεία στο M): $\beta^2 = \mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} + 2 \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot M\Delta$,
- στο τρίγωνο AMB (οξεία στο M): $\gamma^2 = \mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} - 2 \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot M\Delta$.

Προσθέτοντας κατά μέλη, οι όροι με το $M\Delta$ φεύγουν: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$.

Λύνοντας ως προς τη διάμεσο:

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Τύπος διαμέσου

$$\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}, \quad \mu_\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}.$$

$$\text{Ανάλογα } \mu_\beta^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} \text{ και } \mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}.$$

◆ Το 2ο θεώρημα διαμέσων

Αν **αφαιρέσουμε** (αντί να προσθέσουμε) τις δύο σχέσεις της απόδειξης, οι όροι μ_α^2 και $\frac{\alpha^2}{4}$ φεύγουν και μένει κάτι εξίσου χρήσιμο:

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — 2ο θεώρημα διαμέσων

Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω σε αυτή:

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot M\Delta \quad (\beta > \gamma).$$

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

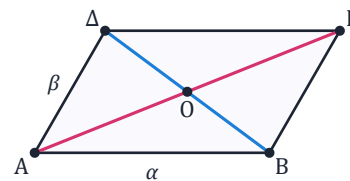
Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές ($\beta = \gamma$), τότε $M \equiv \Delta$ και το 2ο θεώρημα δίνει απλώς $0 = 0$.

Εφαρμογή: ο νόμος του παραλληλογράμμου

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Άθροισμα τετραγώνων διαγωνίων

Σε κάθε παραλληλόγραμμο, το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του:

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2).$$



Παραλληλόγραμμο: $\delta_1^2 + \delta_2^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Οι διαγώνιοι διχοτομούνται στο Ο. Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΑΟ είναι διάμεσος (προς τη ΒΔ = δ_2) με μήκος $\frac{\delta_1}{2}$. Από το 1ο θεώρημα διαμέσων: $\alpha^2 + \beta^2 = 2\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2 + \frac{\delta_2^2}{2} = \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2}{2}$.

■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Διάμεσος στο τρίγωνο 13 – 14 – 15

Τρίγωνο έχει $\alpha = 14$, $\beta = 15$, $\gamma = 13$. Να βρεθεί η διάμεσος μ_α και η απόσταση ΜΔ του μέσου της ΒΓ από το ίχνος του ύψους ΑΔ.

ΛΥΣΗ

$$\mu_\alpha^2 = \frac{2 \cdot 225 + 2 \cdot 169 - 196}{4} = \frac{450 + 338 - 196}{4} = \frac{592}{4} = 148, \text{ άρα } \mu_\alpha = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}.$$

Από το 2ο θεώρημα: $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \text{ΜΔ}$, δηλαδή $225 - 169 = 28 \cdot \text{ΜΔ}$, άρα $\text{ΜΔ} = 2$.

Έλεγχος: γνωρίζουμε (μάθημα 9.4) ότι $v_\alpha = 12$, τότε $\mu_\alpha^2 = v_\alpha^2 + \text{ΜΔ}^2 = 144 + 4 = 148$ ✓.

■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Η διάμεσος προς την υποτείνουσα

Με το 1ο θεώρημα διαμέσων να αποδειχθεί ότι σε ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^\circ$) η διάμεσος προς την υποτείνουσα ισούται με το μισό της.

ΛΥΣΗ

$$\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \frac{2\alpha^2 - \alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4} \text{ (αφού } \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 \text{)}. \text{ Άρα } \mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}. \text{ Ένα γνωστό αποτέλεσμα της Α' Λυκείου, αποδεδειγμένο τώρα «αλγεβρικά».$$

■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Η άλλη διαγώνιος

Παραλληλόγραμμο έχει πλευρές 5 και 7 και μία διαγώνιο 8. Να βρεθεί η άλλη διαγώνιος.

ΛΥΣΗ

$$\delta_2^2 = 2(25 + 49) - 64 = 148 - 64 = 84, \text{ άρα } \delta_2 = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}.$$

■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Άθροισμα τετραγώνων των διαμέσων

Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$.

ΛΥΣΗ

Προσθέτουμε τους τρεις τύπους διαμέσων:

$$\mu_{\alpha}^2 + \mu_{\beta}^2 + \mu_{\gamma}^2 = \frac{(2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2) + (2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2) + (2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2)}{4} = \frac{3\alpha^2 + 3\beta^2 + 3\gamma^2}{4}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Έσες διάμεσοι $\Rightarrow$ ισοσκελές

Αν σε τρίγωνο ισχύει $\mu_{\beta} = \mu_{\gamma}$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ΛΥΣΗ

$$\mu_{\beta}^2 = \mu_{\gamma}^2 \iff 2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2 \iff 3\gamma^2 = 3\beta^2 \iff \beta = \gamma.$$

🔑 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πότε χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα διαμέσων

- Όταν εμφανίζεται **μέσο** τμήματος και τετράγωνα αποστάσεων ($MA^2 + MB^2$ ή $MA^2 - MB^2$).
- Όταν ζητείται **μήκος διαμέσου** από τις πλευρές.
- Σε παραλληλόγραμμα, όπου οι διαγώνιοι διχοτομούνται (το κέντρο είναι μέσο **και** των δύο διαγωνίων).

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Λάθος συντελεστές στον τύπο

$$\text{✗ } \mu_{\alpha}^2 = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{4} \text{ ή } \text{✗ } \mu_{\alpha}^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{2}.$$

$$\text{✓ } \mu_{\alpha}^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}. \text{ Γρήγορος έλεγχος: σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς } \alpha \text{ πρέπει να βγαίνει το ύψος } \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}, \text{ δηλαδή } \mu^2 = \frac{3\alpha^2}{4}. \text{ Πράγματι } \frac{2\alpha^2 + 2\alpha^2 - \alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4} \text{ ✓.}$$

🌐 ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Θέλεις να εξασκηθείς σε θέματα με διαμέσους από παλαιότερα διαγωνίσματα; Επισκέψου το mathgreece.com για πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο με αναλυτικές λύσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 9.5 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Τρίγωνο έχει πλευρές $\alpha = 8, \beta = 6, \gamma = 4$. Να βρεθεί η διάμεσος μ_{α} .

●○○

→ Λύση 9.5/1

- 2** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 5, A\Gamma = 9$ και $B\Gamma = 8$. Να βρεθεί η απόσταση $M\Delta$ του μέσου M της $B\Gamma$ από το ίχνος Δ του ύψους $A\Delta$.

●○○

→ Λύση 9.5/2

- 3** Παραλληλόγραμμα έχει πλευρές 6 και 8 και διαγώνιο 10. Να βρεθεί η άλλη διαγώνιος. Τι είδους παραλληλόγραμμα είναι;

●○○

→ Λύση 9.5/3

- 4** Οι πλευρές τριγώνου είναι $\alpha = 10, \beta = 8, \gamma = 6$. Να βρεθούν οι τρεις διάμεσοι και να επαληθευτεί ο τύπος για το άθροισμα των τετραγώνων τους.

●●○

→ Λύση 9.5/4

- 5** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η διάμεσος AM είναι ίση με την πλευρά AB . Να αποδείξετε ότι $2\beta^2 = 2\gamma^2 + \alpha^2$.

●●○

→ Λύση 9.5/5

- 6 Αν Θ είναι το βαρύκεντρο τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\Theta A^2 + \Theta B^2 + \Theta \Gamma^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{3}$.

••○

→ Λύση 9.5/6

- 7 Σε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα K, Λ είναι τα μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$. Να αποδείξετε ότι $AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + \Delta A^2 = A\Gamma^2 + B\Delta^2 + 4K\Lambda^2$ (θεώρημα του Euler).

•••

→ Λύση 9.5/7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9
Μετρικές σχέσεις

ΜΑΘΗΜΑ 9.6

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

♦ Δύο κλασικά προβλήματα

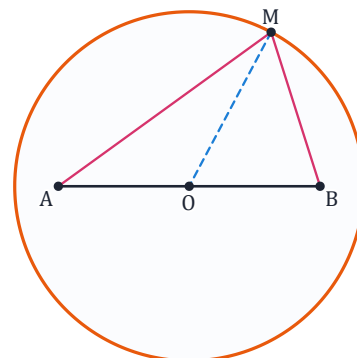
Με τα θεωρήματα των διαμέσων λύνονται δύο πολύ χαρακτηριστικά προβλήματα γεωμετρικών τόπων. Και στα δύο δίνονται δύο σταθερά σημεία A, B και ένα τμήμα $k \cdot O$ είναι το μέσο του AB .

♦ Τόπος 1: $MA^2 + MB^2 = k^2$

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Ο τόπος των σημείων με $MA^2 + MB^2 = k^2$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M με $MA^2 + MB^2 = k^2$ είναι:

- ο κύκλος με κέντρο το μέσο O του AB και ακτίνα $\rho = \sqrt{\frac{k^2}{2} - \frac{AB^2}{4}} = \frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}$, αν $2k^2 > AB^2$.
- το σημείο O , αν $2k^2 = AB^2$.
- το κενό σύνολο, αν $2k^2 < AB^2$.



Ο τόπος είναι κύκλος κέντρου O

✍ **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Για οποιοδήποτε σημείο M , στο τρίγωνο MAB (ή εκφυλισμένο, αν το M είναι στην ευθεία AB) η MO είναι διάμεσος, οπότε από το 1ο θεώρημα διαμέσων

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

Άρα $MA^2 + MB^2 = k^2 \iff MO^2 = \frac{k^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$. Η ισοδυναμία αυτή αποδεικνύει **ταυτόχρονα** το ευθύ και το αντίστροφο: ένα σημείο ανήκει στον τόπο αν και μόνο αν απέχει από το σταθερό σημείο O τη σταθερή απόσταση $\sqrt{\frac{k^2}{2} - \frac{AB^2}{4}}$.



① **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ** — Μια ωραία επιβεβαίωση

Αν $k = AB$, η ακτίνα γίνεται $\sqrt{\frac{AB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}} = \frac{AB}{2}$: ο τόπος είναι ο κύκλος με διάμετρο AB . Πράγματι, $MA^2 + MB^2 = AB^2$ σημαίνει (Πυθαγόρειο και αντίστροφο) ότι $\angle AMB = 90^\circ$!

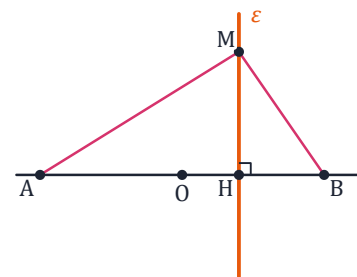
♦ Τόπος 2: $MA^2 - MB^2 = k^2$

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Ο τόπος των σημείων με $MA^2 - MB^2 = k^2$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M με $MA^2 - MB^2 = k^2$ ($k > 0$) είναι η **ευθεία** ε που είναι κάθετη στην AB στο σημείο H του τμήματος OB (ή της προέκτασής του) με

$$OH = \frac{k^2}{2AB}.$$

Για $k = 0$ ο τόπος είναι η μεσοκάθετος του AB .



Ο τόπος είναι ευθεία κάθετη στην AB

✍ **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Έστω M σημείο εκτός της ευθείας AB και H η προβολή του στην AB . Από το 2ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο MAB (διάμεσος MO , προβολή της OH):

$$MA^2 - MB^2 = 2AB \cdot OH$$

(με το H προς τη μεριά του B όταν $MA > MB$ · η σχέση ισχύει και για σημεία τι $k^2 \iff OH = \frac{k^2}{2AB}$, δηλαδή το M ανήκει στον τόπο αν και μόνο αν η προβολή του αν και μόνο αν το M ανήκει στην κάθετη ε στο H .

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

Στο 2ο πρόβλημα το σημείο H βρίσκεται **προς το μέρος του B** (του σημείου από το οποίο το M απέχει λιγότερο). Επίσης, για μεγάλο k το H μπορεί να βγει **έξω** από το τμήμα AB , πέρα από το B (όταν $OH > \frac{AB}{2}$, δηλαδή $k > AB$). Ο τόπος υπάρχει πάντα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Τόπος με αριθμούς (άθροισμα)

Δίνεται τμήμα $AB = 6$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M με $MA^2 + MB^2 = 50$.

ΛΥΣΗ

$k^2 = 50$, $AB^2 = 36$. Είναι $2k^2 = 100 > 36$, άρα ο τόπος είναι κύκλος με κέντρο το μέσο O του AB και ακτίνα $\rho = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Έλεγχος με ένα σημείο: το σημείο του κύκλου πάνω στην ευθεία AB , πέρα από το B , απέχει $3 + 4 = 7$ από το A και 1 από το B : $49 + 1 = 50$ ✓.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Τόπος με αριθμούς (διαφορά)

Δίνεται τμήμα $AB = 6$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M με $MA^2 - MB^2 = 24$.

ΛΥΣΗ

$OH = \frac{24}{2 \cdot 6} = 2$. Ο τόπος είναι η κάθετη στην AB στο σημείο H που απέχει 2 από το μέσο O , προς το B (δηλαδή $AH = 5$, $HB = 1$). Έλεγχος με το ίδιο το H : $HA^2 - HB^2 = 25 - 1 = 24$ ✓.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Τόπος σε ορθογώνιο

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 8$ και $B\Gamma = 6$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία $MA^2 + M\Gamma^2 = 100$ και να εξεταστεί αν τα B , Δ ανήκουν σε αυτόν.

ΛΥΣΗ

Η διαγώνιος $A\Gamma = \sqrt{64 + 36} = 10$, άρα $k = 10 = A\Gamma$: ο τόπος είναι ο κύκλος με διάμετρο $A\Gamma$ (κέντρο το κέντρο του ορθογωνίου, ακτίνα 5) — δηλαδή ο **περιγεγραμμένος κύκλος** του ορθογωνίου. Τα B και Δ ανήκουν σε αυτόν· πράγματι $BA^2 + B\Gamma^2 = 64 + 36 = 100$ ✓.

💡 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πώς δουλεύουμε σε προβλήματα τόπων με τετράγωνα αποστάσεων

1. Εντοπίζουμε το **μέσο** O του τμήματος με τα σταθερά άκρα.
2. Αν δίνεται **άθροισμα** τετραγώνων: 1ο θεώρημα διαμέσων $\implies$ σταθερό $MO \implies$ κύκλος.
3. Αν δίνεται **διαφορά** τετραγώνων: 2ο θεώρημα διαμέσων $\implies$ σταθερή προβολή $\implies$ ευθεία κάθετη στο τμήμα.
4. Πάντα **διερεύνηση**: υπάρχει ο τόπος;

ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Οι γεωμετρικοί τόποι συνήθως «φοβίζουν» τους μαθητές. Στο mathgreece.com θα βρεις δωρεάν πλήρες φροντιστήριο με μεθοδολογία και πολλά λυμένα θέματα τόπων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 9.6 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Δίνεται $AB = 8$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M με $MA^2 + MB^2 = 82$.

●○○ → Λύση 9.6/1
- 2** Δίνεται $AB = 4$. Υπάρχουν σημεία M με $MA^2 + MB^2 = 6$;

●○○ → Λύση 9.6/2
- 3** Δίνεται $AB = 10$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M με $MA^2 - MB^2 = 40$ και να βρεθούν τα σημεία του τόπου που απέχουν 5 από την ευθεία AB .

●●○ → Λύση 9.6/3
- 4** Να αποδείξετε ότι, για κάθε σημείο M του επιπέδου, $MA^2 + MB^2 \geq \frac{AB^2}{2}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

●●○ → Λύση 9.6/4
- 5** Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 4\alpha^2$.

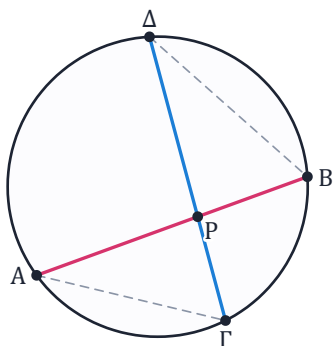
●●● → Λύση 9.6/5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9
Μετρικές σχέσεις

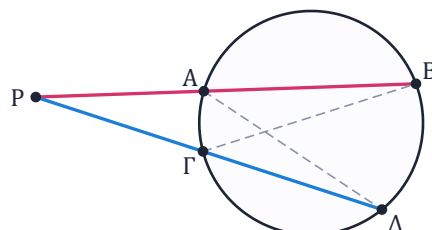
ΜΑΘΗΜΑ 9.7

Τέμνουσες κύκλου – Δύναμη σημείου

Το θεώρημα των τεμνουσών



P εσωτερικό σημείο



P εξωτερικό σημείο

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Θεώρημα I (τεμνόμενες χορδές / τέμνουσες)

Αν δύο χορδές AB και ΓΔ ενός κύκλου, ή οι προεκτάσεις τους, τέμνονται σε ένα σημείο P, τότε

$$PA \cdot PB = PG \cdot PD.$$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα PAΓ και PΔB.

- **P εσωτερικό:** $\widehat{AP\Gamma} = \widehat{DPB}$ (κατακορυφήν) και $\widehat{PA\Gamma} = \widehat{PDB}$ (εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{GB}$).
- **P εξωτερικό:** η $\hat{P}$ είναι κοινή και $\widehat{PA\Gamma} = \widehat{PDB}$, γιατί το ABΔΓ είναι εγγεγραμμένο και η $\widehat{PA\Gamma}$ είναι εξωτερική γωνία του, ίση με την απέναντι εσωτερική.

Και στις δύο περιπτώσεις τα τρίγωνα είναι όμοια (1ο κριτήριο), οπότε $\frac{PA}{PD} = \frac{PG}{PB}$, δηλαδή $PA \cdot PB = PG \cdot PD$.

Το θεώρημα λέει κάτι εντυπωσιακό: **όποια** ευθεία κι αν φέρουμε από το P που να τέμνει τον κύκλο, το γινόμενο των αποστάσεων του P από τα δύο σημεία τομής είναι **πάντα το ίδιο**. Εξαρτάται μόνο από το P και τον κύκλο.

Η οριακή περίπτωση: η εφαπτομένη

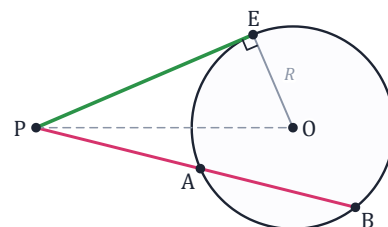
★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Θεώρημα II (εφαπτόμενο τμήμα)

Αν από εξωτερικό σημείο P κύκλου φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα PE και μια τέμνουσα που τέμνει τον κύκλο στα A, B, τότε

$$PE^2 = PA \cdot PB.$$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\delta = OP$. Η ευθεία PO τέμνει τον κύκλο σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία που απέχουν από το P αποστάσεις $\delta - R$ και $\delta + R$. Από το Θεώρημα I, $PA \cdot PB = (\delta - R)(\delta + R) = \delta^2 - R^2$. Από την άλλη, η ακτίνα OE είναι κάθετη στην εφαπτομένη, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο OEP: $PE^2 = OP^2 - OE^2 = \delta^2 - R^2$. Άρα $PE^2 = PA \cdot PB$.



$$PE^2 = PA \cdot PB$$

Δύναμη σημείου ως προς κύκλο

Από την απόδειξη φάνηκε ότι για εξωτερικό σημείο $PA \cdot PB = \delta^2 - R^2$. Όμοια αποδεικνύεται ότι για εσωτερικό σημείο $PA \cdot PB = R^2 - \delta^2$. Αυτό οδηγεί σε έναν ενιαίο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ — Δύναμη σημείου

Η διαφορά $\delta^2 - R^2$, όπου $\delta = OP$ η απόσταση του σημείου P από το κέντρο του κύκλου (O, R) , λέγεται **δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο** και συμβολίζεται

$$\Delta_{(O,R)}^P = OP^2 - R^2.$$

Θέση του P	Πρόσημο της δύναμης	Γεωμετρική σημασία
εξωτερικό ($\delta > R$)	θετική	$= PA \cdot PB = PE^2$
πάνω στον κύκλο ($\delta = R$)	μηδέν	—
εσωτερικό ($\delta < R$)	αρνητική	$= -PA \cdot PB$

Τα αντίστροφα

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Αντίστροφο του Θεωρήματος I

Αν τα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ (ή οι προεκτάσεις τους) τέμνονται σε σημείο P και ισχύει $PA \cdot PB = PG \cdot PD$, τότε τα σημεία A, B, Γ, Δ είναι **ομοκυκλικά** (το τετράπλευρο με κορυφές αυτά τα σημεία είναι εγγράψιμο).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η σχέση γράφεται $\frac{PA}{PG} = \frac{PD}{PB}$ και, μαζί με την ίση γωνία στο P (κοινή ή κατακορυφήν), δίνει από το 2ο κριτήριο $\triangle PAD \sim \triangle PGB$. Άρα $\widehat{PAD} = \widehat{PGB}$, από όπου προκύπτει ότι το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο (μία πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες, ή μια εξωτερική γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική).

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Αντίστροφο του Θεωρήματος II

Αν σε μια ευθεία βρίσκονται τα σημεία P, A, B με το A μεταξύ των P, B και ένα σημείο E εκτός της ευθείας ικανοποιεί $PE^2 = PA \cdot PB$, τότε η PE εφάπτεται στον κύκλο που διέρχεται από τα A, B, E .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

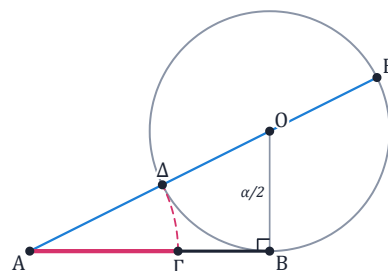
Αν (O, R) είναι ο κύκλος των A, B, E , τότε $PE^2 = PA \cdot PB = OP^2 - R^2 = OP^2 - OE^2$, δηλαδή $PE^2 + OE^2 = OP^2$. Από το αντίστροφο του Πυθαγορείου, $\widehat{OEP} = 90^\circ$, άρα η PE είναι κάθετη στην ακτίνα OE στο άκρο της, δηλαδή εφαπτομένη.

Η χρυσή τομή

Ένα από τα πιο «φημισμένα» προβλήματα της αρχαιότητας: να χωρίσουμε ένα τμήμα $AB = \alpha$ με σημείο Γ σε δύο άνισα τμήματα, ώστε το **μεγαλύτερο** ($A\Gamma = x$) να είναι **μέση ανάλογος** του μικρότερου και του ολόκληρου:

$$A\Gamma^2 = AB \cdot \Gamma B \iff x^2 = \alpha(\alpha - x) \iff x(x + \alpha) = \alpha^2.$$

Κατασκευή. Γράφουμε κύκλο με ακτίνα $\frac{\alpha}{2}$ που εφάπτεται στο AB στο B (κέντρο O πάνω στην κάθετη στο B). Η ευθεία AO τέμνει τον κύκλο στα Δ (πλησιέστερο) και E . Από το Θεώρημα II: $AB^2 = A\Delta \cdot AE = A\Delta(A\Delta + \alpha)$, αφού ΔE είναι διάμετρος ίση με α . Επομένως το $A\Delta$ ικανοποιεί την εξίσωση $x(x + \alpha) = \alpha^2$, και το ζητούμενο Γ βρίσκεται πάνω στο AB με $A\Gamma = A\Delta$ (κύκλος κέντρου A , ακτίνας $A\Delta$).



Διαίρεση του AB σε μέσο και άκρο λόγο

Αλγεβρικά, $x = \frac{\alpha(\sqrt{5}-1)}{2}$ και ο λόγος $\frac{\alpha}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \approx 1,618$ είναι ο **χρυσός λόγος**.

ΛΙΓΗ ΙΣΤΟΡΙΑ

Το σύμβολο φ προέρχεται από το όνομα του γλύπτη **Φειδία**, που επέβλεψε τη διακόσμηση του Παρθενώνα. Ο χρυσός λόγος εμφανίζεται στο κανονικό πεντάγωνο (ο λόγος διαγωνίου προς πλευρά είναι φ), στην ακολουθία Fibonacci, στην αρχιτεκτονική και στη ζωγραφική, και θεωρείται από την αρχαιότητα «λόγος αρμονίας».

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Για τον φιλομαθή: ριζικός άξονας

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν **ίση δύναμη** ως προς δύο μη ομόκεντρους κύκλους είναι μια ευθεία κάθετη στη διάκεντρο, που λέγεται **ριζικός άξονας** των δύο κύκλων. (Απόδειξη: $MO_1^2 - R_1^2 = MO_2^2 - R_2^2 \iff MO_1^2 - MO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$ — τόπος 2 του μαθήματος 9.6!) Αν οι κύκλοι τέμνονται, ο ριζικός άξονας είναι η ευθεία της κοινής χορδής τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Τέμνουσες από εξωτερικό σημείο

Από σημείο P εκτός κύκλου φέρνουμε δύο τέμνουσες PAB και PΓΔ (με τα Α, Γ πλησιέστερα στο P). Αν $PA = 3$, $AB = 9$ και $PG = 4$, να βρεθούν τα ΓΔ και το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος από το P.

ΛΥΣΗ

$PB = PA + AB = 12$. Από το Θεώρημα I: $PA \cdot PB = PG \cdot PD$, δηλαδή $36 = 4 \cdot PD$, άρα $PD = 9$ και $GD = 9 - 4 = 5$.

Εφαπτόμενο τμήμα: $PE^2 = PA \cdot PB = 36$, άρα $PE = 6$. ■

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — «PA · AB» αντί για «PA · PB»

✗ $PA \cdot AB = PG \cdot GD$.

✓ Στο θεώρημα εμφανίζονται οι αποστάσεις **από το P** προς τα δύο σημεία τομής: $PA \cdot PB = PG \cdot PD$, με $PB = PA + AB$ για εξωτερικό P. Το «εσωτερικό» κομμάτι AB της χορδής δεν μπαίνει μόνο του στο γινόμενο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Τεμνόμενες χορδές

Δύο χορδές AB και ΓΔ τέμνονται στο εσωτερικό σημείο P. Αν $PA = 6$, $PB = 4$ και $GD = 11$, να βρεθούν τα PG και PD.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $PG = x$, οπότε $PD = 11 - x$. Από το Θεώρημα I: $x(11 - x) = 24$, δηλαδή $x^2 - 11x + 24 = 0$, με ρίζες $x = 3$ ή $x = 8$. Άρα τα τμήματα είναι 3 και 8 (με οποιαδήποτε σειρά — και οι δύο λύσεις αντιστοιχούν σε έγκυρο σχήμα). ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Δύναμη σημείου με αριθμούς

Κύκλος έχει κέντρο O και ακτίνα 5. (α) Ένα σημείο P απέχει 13 από το O· να βρεθεί η δύναμή του και το εφαπτόμενο τμήμα από αυτό. (β) Ένα σημείο Σ απέχει 3 από το O· να βρεθεί η δύναμή του και το μήκος της μικρότερης χορδής που διέρχεται από το Σ.

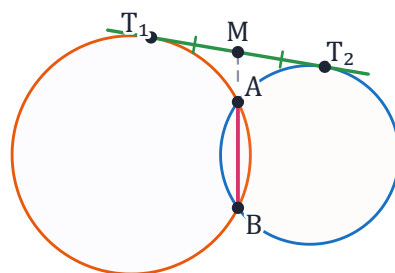
ΛΥΣΗ

(α) $\Delta = 13^2 - 5^2 = 144 > 0$ (εξωτερικό σημείο) και εφαπτόμενο τμήμα $\sqrt{144} = 12$.

(β) $\Delta = 3^2 - 5^2 = -16 < 0$ (εσωτερικό). Για κάθε χορδή AB από το Σ είναι $SA \cdot SB = 16$. Η μικρότερη χορδή είναι η κάθετη στην ΟΣ (που απέχει τη μέγιστη απόσταση 3 από το κέντρο), και τη χωρίζει το Σ σε δύο ίσα κομμάτια: $SA = SB = 4$. Άρα το μήκος της είναι 8. (Έλεγχος με Πυθαγόρειο: $2\sqrt{25 - 9} = 8$ ✓.) ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Η κοινή χορδή διχοτομεί τις κοινές εφαπτόμενες

Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Μια κοινή εφαπτομένη τους εφάπτεται στα T_1, T_2 . Να αποδειχθεί ότι η ευθεία ΑΒ διέρχεται από το μέσο του T_1T_2 .



ΛΥΣΗ

Έστω Μ το σημείο όπου η ευθεία ΑΒ τέμνει την T_1T_2 . Το Μ είναι εξωτερικό σημείο και των δύο κύκλων, και η ΜΑΒ είναι τέμνουσα και για τους δύο. Από το Θεώρημα ΙΙ:

$$MT_1^2 = MA \cdot MB \quad \text{και} \quad MT_2^2 = MA \cdot MB.$$

Άρα $MT_1 = MT_2$, δηλαδή το Μ είναι μέσο του T_1T_2 .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Ομοκυκλικά σημεία

Στις πλευρές μιας γωνίας $\widehat{xOy}$ παίρνουμε σημεία Α, Β στην Οx με $OA = 2, OB = 9$ και σημεία Γ, Δ στην Oy με $OG = 3, OD = 6$. Να αποδειχθεί ότι τα Α, Β, Γ, Δ είναι ομοκυκλικά.

ΛΥΣΗ

Οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Ο και $OA \cdot OB = 18 = OG \cdot OD$. Από το αντίστροφο του Θεωρήματος Ι, τα τέσσερα σημεία είναι ομοκυκλικά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Χρυσή τομή με αριθμούς

Να χωριστεί τμήμα $AB = 2$ σε μέσο και άκρο λόγο και να βρεθούν τα δύο κομμάτια.

ΛΥΣΗ

Λύνουμε $x^2 = 2(2 - x)$, δηλαδή $x^2 + 2x - 4 = 0$, με θετική ρίζα $x = -1 + \sqrt{5} \approx 1,236$. Το άλλο κομμάτι είναι $2 - x = 3 - \sqrt{5} \approx 0,764$. Έλεγχος του λόγου: $\frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$ ✓.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πότε σκεφτόμαστε δύναμη σημείου

- Όταν εμφανίζονται **γινόμενα** τμημάτων πάνω σε ευθείες που τέμνουν κύκλο.
- Όταν υπάρχει **εφαπτόμενο τμήμα** και τέμνουσα από το ίδιο σημείο.
- Για να αποδείξουμε ότι τέσσερα σημεία είναι **ομοκυκλικά** (αντίστροφο) ή ότι μια ευθεία είναι **εφαπτομένη**.
- Όταν το ίδιο σημείο «συνδέεται» με **δύο κύκλους** (π.χ. σημείο της κοινής χορδής): έχει ίση δύναμη ως προς αυτούς.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Η δύναμη σημείου είναι από τα πιο κομψά εργαλεία της Γεωμετρίας και αγαπημένο θέμα διαγωνισμών. Στο mathgreece.com θα βρεις δωρεάν πλήρες φροντιστήριο με προχωρημένες εφαρμογές και λυμένα θέματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

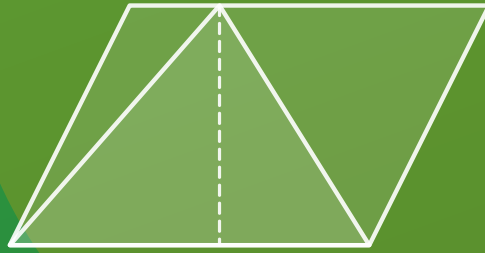
Μάθημα 9.7 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Δύο χορδές AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο P . Αν $PA = 5$, $PB = 8$ και $P\Gamma = 4$, να βρεθεί το $P\Delta$.
●○○ → Λύση 9.7/1
- 2 Από σημείο P που απέχει 10 από το κέντρο κύκλου ακτίνας 6 φέρνουμε εφαπτόμενο τμήμα. Να βρεθεί το μήκος του και η δύναμη του P .
●○○ → Λύση 9.7/2
- 3 Από εξωτερικό σημείο P το εφαπτόμενο τμήμα σε κύκλο έχει μήκος 12 και μια τέμνουσα PAB έχει $PA = 8$. Να βρεθεί η χορδή AB .
●○○ → Λύση 9.7/3
- 4 Σημείο P βρίσκεται μέσα σε κύκλο ακτίνας 10 και απέχει 6 από το κέντρο. Μια χορδή που διέρχεται από το P χωρίζεται από αυτό σε τμήματα με λόγο 1 : 4. Να βρεθεί το μήκος της χορδής.
●●○ → Λύση 9.7/4
- 5 Από σημείο P εκτός κύκλου φέρνουμε την τέμνουσα PAB που διέρχεται από το κέντρο. Αν $PA = 4$ και το εφαπτόμενο τμήμα είναι $PE = 8$, να βρεθεί η ακτίνα του κύκλου.
●●○ → Λύση 9.7/5
- 6 Σε ευθεία ε παίρνουμε διαδοχικά σημεία P, A, B με $PA = 4$, $AB = 5$, και σε άλλη ευθεία από το P σημείο E με $PE = 6$. Να αποδείξετε ότι η PE εφάπτεται στον κύκλο που διέρχεται από τα A, B, E .
●●○ → Λύση 9.7/6
- 7 Δύο κύκλοι τέμνονται στα A, B . Από σημείο M της προέκτασης της AB φέρνουμε τέμνουσα $M\Gamma\Delta$ στον πρώτο κύκλο και τέμνουσα MEZ στον δεύτερο. Να αποδείξετε ότι τα Γ, Δ, E, Z είναι ομοκυκλικά.
●●○ → Λύση 9.7/7
- 8 Σε ημικύκλιο διαμέτρου $AB = 2R$ παίρνουμε σημείο Γ και φέρνουμε την κάθετη $\Gamma\Delta$ στη διάμετρο. Με τη βοήθεια της δύναμης σημείου (ή των μετρικών σχέσεων), να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta^2 = A\Delta \cdot \Delta B$ και να βρείτε τότε το $\Gamma\Delta$ γίνεται μέγιστο.
●●● → Λύση 9.7/8
- 9 Δίνεται κύκλος με διάμετρο AB και τυχαίο σημείο P . Να αποδείξετε ότι η δύναμη του P ως προς τον κύκλο ισούται με $\frac{PA^2 + PB^2 - AB^2}{2}$ και ότι το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου αν και μόνο αν $PA^2 + PB^2 > AB^2$.
●●● → Λύση 9.7/9

10

Εμβαδά



Τα μαθήματα του κεφαλαίου

- 10.1–10.2** Πολυγωνικά χωρία – Εμβαδόν – Ισοδύναμα σχήματα
- 10.3** Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων
- 10.4** Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου
- 10.5** Λόγος εμβαδών
- 10.6** Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμό του

Τι θα κατακτήσεις

- Να κατανοείς την έννοια του εμβαδού και των ισοδύναμων σχημάτων.
- Να υπολογίζεις εμβαδά τετραγώνων, ορθογωνίων, παραλληλογράμμων, τριγώνων, τραπεζών και ρόμβων.
- Να χρησιμοποιείς τους τύπους του Ήρωνα, $\frac{1}{2} \beta \gamma$ ημΑ, $\tau \rho$ και $\frac{\alpha \beta \gamma}{4R}$.
- Να βρίσκεις λόγους εμβαδών τριγώνων και όμοιων σχημάτων.
- Να μετασχηματίζεις πολύγωνα σε ισοδύναμα τρίγωνα και τετράγωνα.

Πόσο «χώρο» πιάνει ένα σχήμα; Το εμβαδόν είναι ίσως η πιο πρακτική έννοια της Γεωμετρίας: με αυτό υπολογίζουμε οικόπεδα, πατώματα, επιφάνειες για βάψιμο. Στο κεφάλαιο αυτό χτίζουμε την έννοια από την αρχή, βρίσκουμε τύπους για όλα τα βασικά σχήματα, γνωρίζουμε τον περίφημο τύπο του Ήρωνα και μαθαίνουμε να συγκρίνουμε εμβαδά με λόγους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10
Εμβαδά

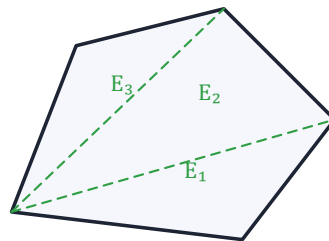
ΜΑΘΗΜΑ 10.1–10.2

Πολυγωνικά χωρία – Εμβαδόν – Ισοδύναμα σχήματα

◆ Τι μετράμε όταν μετράμε εμβαδόν

Ένα **πολυγωνικό χωρίο** είναι ένα πολύγωνο **μαζί με το εσωτερικό του**. Όταν λέμε «εμβαδόν ενός τριγώνου», εννοούμε στην πραγματικότητα το εμβαδόν του τριγωνικού χωρίου. Κάθε πολυγωνικό χωρίο μπορεί να **διαμεριστεί** (χωριστεί) σε τρίγωνα, π.χ. φέρνοντας τις διαγωνίους από μια κορυφή, όπως στο σχήμα.

Για να μετρήσουμε την έκταση ενός χωρίου, διαλέγουμε ως **μονάδα** ένα τετράγωνο πλευράς 1 (π.χ. 1 cm^2 , 1 m^2) και ρωτάμε: πόσες τέτοιες μονάδες «χωράνε» μέσα στο χωρίο;



Ένα πολυγωνικό χωρίο και η διαμέρισή του σε τρίγωνα

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Εμβαδόν

Σε κάθε πολυγωνικό χωρίο αντιστοιχίζεται ένας θετικός αριθμός, το **εμβαδόν** του, έτσι ώστε:

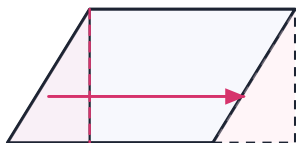
1. **Ίσα** πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.
2. Αν ένα χωρίο διαμερίζεται σε δύο (ή περισσότερα) χωρία, το εμβαδόν του ισούται με το **άθροισμα** των εμβαδών τους.
3. Το εμβαδόν του **τετραγώνου με πλευρά 1** (μοναδιαίο τετράγωνο) είναι 1.

Το εμβαδόν ενός σχήματος συμβολίζεται συνήθως με E , ή με τα γράμματα των κορυφών του σε παρένθεση: $(AB\Gamma)$ για τρίγωνο, $(AB\Gamma\Delta)$ για τετράπλευρο.

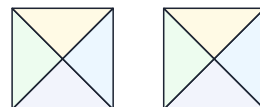
◆ Ισοδύναμα σχήματα

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Ισοδύναμα σχήματα

Δύο σχήματα που έχουν **ίσα εμβαδά** λέγονται **ισοδύναμα**.



Το παραλληλόγραμμο και το ορθογώνιο είναι ισοδύναμα



Τάγκραμ: ίδια κομμάτια, διαφορετικά σχήματα

Προσοχή: δύο ίσα σχήματα είναι πάντα ισοδύναμα, αλλά **το αντίστροφο δεν ισχύει**: ένα τετράγωνο 4×4 και ένα ορθογώνιο 8×2 έχουν το ίδιο εμβαδόν 16, αλλά δεν είναι ίσα (ούτε καν όμοια). Ένας χρήσιμος τρόπος να δείξουμε ότι δύο σχήματα είναι ισοδύναμα είναι να τα «κόψουμε» σε κομμάτια που είναι ανά δύο ίσα (όπως στο τάγκραμ).

⚠️ ΠΡΟΣΟΧΗ!

Ίσα σχήματα $\Rightarrow$ **ισοδύναμα**. **Ισοδύναμα** σχήματα $\nRightarrow$ **ίσα**. Στις ασκήσεις πρόσεξε ποια λέξη χρησιμοποιείται!

🕒 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Μονάδες εμβαδού

Αν η μονάδα μήκους μικρύνει 10 φορές, η μονάδα εμβαδού μικραίνει $10^2 = 100$ φορές: $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$. Επίσης $1 \text{ στρέμμα} = 1000 \text{ m}^2$ και $1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Λάθος μετατροπή μονάδων

$\times 3 \text{ m}^2 = 300 \text{ cm}^2$.

$\checkmark 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$, άρα $1 \text{ m}^2 = 100 \cdot 100 = 10\,000 \text{ cm}^2$ και $3 \text{ m}^2 = 30\,000 \text{ cm}^2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Διαμέριση σε τρίγωνα

Ένα πολύγωνο n πλευρών (κυρτό) διαμερίζεται φέρνοντας όλες τις διαγωνίους από μια κορυφή. Σε πόσα τρίγωνα χωρίζεται;

ΛΥΣΗ

Από μια κορυφή φέρνουμε διαγωνίους προς όλες τις κορυφές εκτός από την ίδια και τις δύο γειτονικές: $n - 3$ διαγωνίοι. Αυτές χωρίζουν το πολύγωνο σε $n - 2$ τρίγωνα. (Γι' αυτό, παρεμπιπτόντως, το άθροισμα των γωνιών του είναι $(n - 2) \cdot 180^\circ$.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Ισοδύναμα αλλά όχι ίσα

Να δοθούν παραδείγματα: (α) δύο ισοδύναμων ορθογωνίων που δεν είναι ίσα (β) ενός τριγώνου και ενός ορθογωνίου που είναι ισοδύναμα.

ΛΥΣΗ

(α) Ορθογώνια 6×2 και 4×3 : εμβαδόν 12 και τα δύο. (β) Ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 6 και 4 (εμβαδόν $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$) και ένα ορθογώνιο 4×3 (εμβαδόν 12). Τους τύπους θα τους δικαιολογήσουμε στο επόμενο μάθημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 10.1–10.2 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Να μετατρέψετε: (α) $2,5 \text{ m}^2$ σε cm^2 (β) 4800 cm^2 σε m^2 (γ) 3 στρέμματα σε m^2 .

●○○

→ Λύση 10.1–10.2/1

- 2** Σε πόσα τρίγωνα χωρίζεται ένα κυρτό οκτάγωνο με τις διαγωνίους από μια κορυφή του;

●○○

→ Λύση 10.1–10.2/2

- 3** Να εξηγήσετε γιατί κάθε διάμεσος ενός τριγώνου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα. (Χρησιμοποιήστε τον τύπο $E = \frac{1}{2} \cdot \text{βάση} \cdot \text{ύψος}$, που θα αποδείξουμε στο επόμενο μάθημα.)

●●○

→ Λύση 10.1–10.2/3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10
Εμβαδά

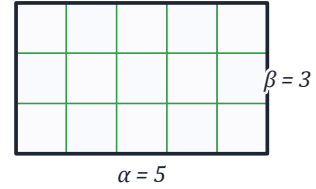
ΜΑΘΗΜΑ 10.3

Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων

◆ Τετράγωνο και ορθογώνιο

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Εμβαδόν τετραγώνου και ορθογωνίου

- Τετράγωνο πλευράς α : $E = \alpha^2$.
- Ορθογώνιο με διαστάσεις α και β : $E = \alpha \cdot \beta$.

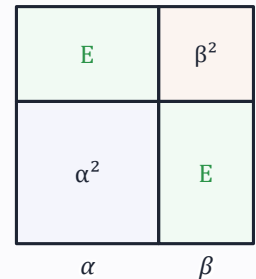
Ορθογώνιο 5×3 : χωράει 15 μοναδιαία τετράγωνα

Για ακέραιες πλευρές, το αποτέλεσμα φαίνεται αμέσως από το «πλέγμα» των μοναδιαίων τετραγώνων. Το γενικό αποτέλεσμα (για οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς α, β) αποδεικνύεται, για το ορθογώνιο, με ένα έξυπνο τέχνασμα:

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ — Το ορθογώνιο από το τετράγωνο

Δεχόμαστε τον τύπο $E = \alpha^2$ για τετράγωνο. Κατασκευάζουμε τετράγωνο πλευράς $\alpha + \beta$ και το χωρίζουμε, όπως στο σχήμα, σε ένα τετράγωνο πλευράς α , ένα τετράγωνο πλευράς β και δύο ίσα ορθογώνια $\alpha \times \beta$ με εμβαδόν E το καθένα. Από την ιδιότητα (2) του εμβαδού:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2E \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2E \Rightarrow E = \alpha\beta.$$

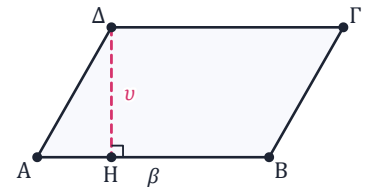


◆ Παραλληλόγραμμο

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Εμβαδόν παραλληλογράμμου

Το εμβαδόν παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο ύψος:

$$E = \beta \cdot v.$$



$$E = \beta \cdot v$$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από το Δ φέρνουμε το ύψος ΔH προς την AB και από το Γ το ύψος ΓZ προς την προέκταση της AB . Τα ορθογώνια τρίγωνα $AH\Delta$ και $BZ\Gamma$ είναι ίσα (υποτείνουσες $A\Delta = B\Gamma$ και κάθετες $\Delta H = \Gamma Z$). Αν από το τραπέζιο $AZ\Gamma\Delta$ αφαιρέσουμε το $BZ\Gamma$ παίρνουμε το παραλληλόγραμμο, ενώ αν αφαιρέσουμε το ίσο του $AH\Delta$ παίρνουμε το ορθογώνιο $HZ\Gamma\Delta$. Άρα τα δύο σχήματα είναι ισοδύναμα και $(AB\Gamma\Delta) = (HZ\Gamma\Delta) = HZ \cdot \Delta H = \beta \cdot v$, αφού $HZ = AB = \beta$.

◆ Τρίγωνο

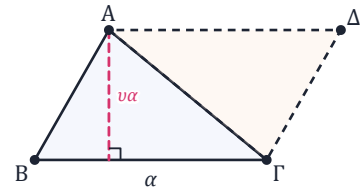
★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Εμβαδόν τριγώνου

Το εμβαδόν τριγώνου ισούται με το μισό του γινομένου μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο ύψος:

$$E = \frac{1}{2} \alpha v_\alpha = \frac{1}{2} \beta v_\beta = \frac{1}{2} \gamma v_\gamma.$$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από το Α φέρνουμε παράλληλη προς τη ΒΓ και από το Γ παράλληλη προς την ΑΒ· τέμνονται στο Δ. Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο με βάση α και ύψος v_α , και η διαγώνιος ΑΓ το χωρίζει σε δύο ίσα τρίγωνα. Άρα $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{2}\alpha v_\alpha$.



Δύο ίσα τρίγωνα σχηματίζουν παραλληλόγραμμο

→ ΠΟΡΙΣΜΑ — Χρήσιμες συνέπειες

- Σε **ορθογώνιο** τρίγωνο ($\hat{A} = 90^\circ$): $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$ (μία κάθετη πλευρά είναι ύψος της άλλης). Συγκρίνοντας με το $E = \frac{1}{2}\alpha v_\alpha$ ξαναβρίσκουμε $\beta\gamma = \alpha v_\alpha$.
- Κάθε **διάμεσος** χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα.
- Τρίγωνα με **κοινή βάση** και κορυφές πάνω σε **ευθεία παράλληλη** προς τη βάση είναι ισοδύναμα (έχουν ίδιο ύψος).
- Σε **ισόπλευρο** τρίγωνο πλευράς α: $E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$.

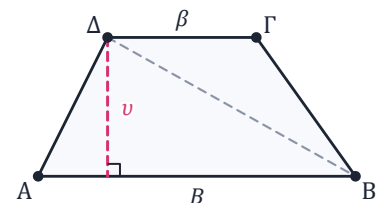
◆ Τραπεζίο

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Εμβαδόν τραπεζίου

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων επί το ύψος:

$$E = \frac{B + \beta}{2} \cdot v.$$

Επειδή η διάμεσος του τραπεζίου είναι $\delta = \frac{B+\beta}{2}$, ισχύει επίσης $E = \delta \cdot v$.



$$E = (B + \beta)/2 \cdot v$$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

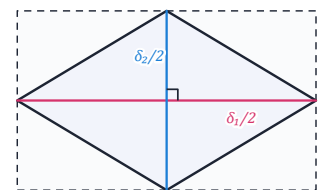
Η διαγώνιος ΒΔ χωρίζει το τραπεζίο σε δύο τρίγωνα με το ίδιο ύψος v (την απόσταση των παράλληλων βάσεων): $(\text{ΑΒΔ}) = \frac{1}{2}Bv$ και $(\text{ΒΓΔ}) = \frac{1}{2}\beta v$. Προσθέτοντας: $E = \frac{1}{2}(B + \beta)v$.

◆ Ρόμβος και τετράπλευρο με κάθετες διαγωνίους

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Εμβαδόν ρόμβου

Το εμβαδόν ενός ρόμβου (και γενικά κάθε κυρτού τετραπλεύρου με **κάθετες διαγωνίους**) ισούται με το μισό του γινομένου των διαγωνίων του:

$$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}.$$



$$E = \delta_1 \delta_2 / 2$$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $\text{ΑΓ} \perp \text{ΒΔ}$, η διαγώνιος ΑΓ = δ_1 χωρίζει το τετράπλευρο σε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ με κοινή βάση ΑΓ και ύψη τα τμήματα στα οποία το σημείο τομής χωρίζει τη ΒΔ. Το άθροισμα των υψών είναι $\text{ΒΔ} = \delta_2$, άρα $E = \frac{1}{2}\delta_1 \cdot (\text{ύψος}_1 + \text{ύψος}_2) = \frac{1}{2}\delta_1\delta_2$. Το σχήμα δείχνει και μια «οπτική» απόδειξη για τον ρόμβο: είναι το μισό του ορθογωνίου $\delta_1 \times \delta_2$.

ΣΥΝΟΨΗ — Τυπολόγιο εμβαδών

Σχήμα	Εμβαδόν
Τετράγωνο πλευράς α	α^2 (ή $\frac{\delta^2}{2}$, όπου δ η διαγώνιος)
Ορθογώνιο $\alpha \times \beta$	$\alpha\beta$
Παραλληλόγραμμο	$\beta \cdot \upsilon$ (βάση $\times$ αντίστοιχο ύψος)
Τρίγωνο	$\frac{1}{2}\alpha \upsilon_\alpha$
Ορθογώνιο τρίγωνο	$\frac{1}{2}\beta\gamma$ (γινόμενο καθέτων / 2)
Ισόπλευρο τρίγωνο	$\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$
Τραπεζίο	$\frac{B+\beta}{2}\upsilon$
Ρόμβος / κάθετες διαγώνιοι	$\frac{\delta_1\delta_2}{2}$

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Λάθος ύψος σε παραλληλόγραμμο

Παραλληλόγραμμο με πλευρές 8 και 5. Ο μαθητής γράφει ✗ $E = 8 \cdot 5 = 40$.

✓ Το 5 είναι **πλευρά**, όχι ύψος! Μόνο στο ορθογώνιο η πλευρά είναι και ύψος. Χρειάζεται το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση 8: αν π.χ. η γωνία είναι 30° , το ύψος είναι $\frac{5}{2}$ και $E = 8 \cdot 2,5 = 20$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

Σε **αμβλυγώνιο** τρίγωνο το ύψος προς μια πλευρά μπορεί να πέφτει **έξω** από αυτήν. Ο τύπος $E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha$ ισχύει κανονικά — το ύψος είναι απλώς η απόσταση της κορυφής από την **ευθεία** της πλευράς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Τρίγωνο και τα τρία ύψη του

Τρίγωνο έχει πλευρά $\alpha = 12$ με αντίστοιχο ύψος $\upsilon_\alpha = 5$. Αν $\beta = 10$ και $\gamma = 8$, να βρεθούν τα ύψη υ_β και υ_γ .

ΛΥΣΗ

$$E = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30. \text{ Τότε } \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = 30 \Rightarrow \upsilon_\beta = \frac{60}{10} = 6 \text{ και } \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma = 30 \Rightarrow \upsilon_\gamma = \frac{60}{8} = 7,5.$$

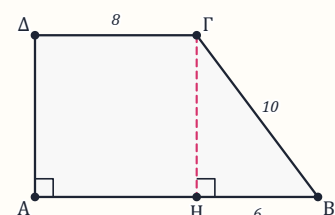
📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από το $\alpha\upsilon_\alpha = \beta\upsilon_\beta = \gamma\upsilon_\gamma = 2E$ προκύπτει ότι **τα ύψη είναι αντιστρόφως ανάλογα των πλευρών**: στη μεγαλύτερη πλευρά αντιστοιχεί το μικρότερο ύψος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Τραπεζίο

Ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$) έχει βάσεις $AB = 14$, $\Delta\Gamma = 8$ και πλευρά $B\Gamma = 10$. Να βρεθεί το εμβαδόν του.

ΛΥΣΗ



Φέρνουμε το ύψος ΓΗ. Τότε $AH = \Delta\Gamma = 8$, $HB = 14 - 8 = 6$ και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΗΒ: $\Gamma\text{H} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Άρα $E = \frac{14+8}{2} \cdot 8 = 88$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Ισόπλευρο τρίγωνο

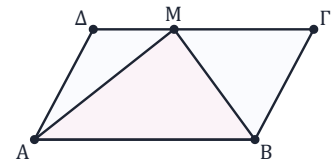
Να βρεθεί το εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου με περίμετρο 18, καθώς και η πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου με εμβαδόν $16\sqrt{3}$.

ΛΥΣΗ

Πλευρά $\alpha = 6$, $E = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$. Για το δεύτερο: $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \Rightarrow \alpha^2 = 64 \Rightarrow \alpha = 8$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Απόδειξη ισοδυναμίας

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΓΔ. Να αποδειχθεί ότι $(MAB) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$ και ότι $(MA\Delta) + (MB\Gamma) = (MAB)$.



ΛΥΣΗ

Το τρίγωνο ΜΑΒ έχει βάση ΑΒ και ύψος την απόσταση του Μ από την ΑΒ, που είναι ίση με το ύψος v του παραλληλογράμμου (αφού το Μ ανήκει στη $\Gamma\Delta \parallel AB$). Άρα $(MAB) = \frac{1}{2}AB \cdot v = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$. Τα τρία τρίγωνα ΜΑΔ, ΜΑΒ, ΜΒΓ διαμερίζουν το παραλληλόγραμμο, οπότε $(MA\Delta) + (MB\Gamma) = (AB\Gamma\Delta) - (MAB) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta) = (MAB)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Ρόμβος

Ένας ρόμβος έχει πλευρά 10 και μία διαγώνιο 12. Να βρεθεί το εμβαδόν και το ύψος του.

ΛΥΣΗ

Οι διαγώνιοι διχοτομούνται κάθετα: η μισή άλλη διαγώνιος είναι $\sqrt{100 - 36} = 8$, οπότε $\delta_2 = 16$. Εμβαδόν $E = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96$. Ο ρόμβος είναι και παραλληλόγραμμο, άρα $E = \alpha \cdot v \Rightarrow v = \frac{96}{10} = 9,6$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πώς βρίσκουμε εμβαδά «περίεργων» σχημάτων

- Χωρίζουμε το σχήμα σε γνωστά κομμάτια (τρίγωνα, ορθογώνια) και προσθέτουμε.
- Ή το συμπληρώνουμε σε ένα γνωστό σχήμα και αφαιρούμε ό,τι περισσεύει.
- Αν λείπει ένα ύψος, το βρίσκουμε συνήθως με Πυθαγόρειο.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Στο mathgreece.com θα βρεις ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο με εκατοντάδες ασκήσεις εμβαδών, από τις πιο απλές μέχρι επίπεδο εξετάσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 10.3 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Να βρεθεί το εμβαδόν: (α) τετραγώνου με διαγώνιο 10 (β) ορθογωνίου με διαγώνιο 13 και πλευρά 5 (γ) ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες 7 και 24.
●○○ → Λύση 10.3/1
- 2 Παραλληλόγραμμο έχει πλευρές 9 και 6 και το ύψος προς την πλευρά 9 είναι 4. Να βρεθεί το ύψος προς την πλευρά 6.
●○○ → Λύση 10.3/2
- 3 Τραπεζίο έχει βάσεις 15 και 9 και εμβαδόν 96. Να βρεθεί το ύψος του.
●○○ → Λύση 10.3/3
- 4 Ισοσκελές τρίγωνο έχει βάση 16 και σκέλη 17. Να βρεθεί το εμβαδόν του και το ύψος προς ένα σκέλος.
●●○ → Λύση 10.3/4
- 5 Ισοσκελές τραπέζιο έχει βάσεις 20 και 10 και γωνία βάσης 45° . Να βρεθεί το εμβαδόν του.
●●○ → Λύση 10.3/5
- 6 Σε τρίγωνο ΑΒΓ το Μ είναι το μέσο της ΒΓ και το Ν το μέσο της ΑΜ. Να εκφράσετε το (ΝΒΓ) συναρτήσει του (ΑΒΓ).
●●○ → Λύση 10.3/6
- 7 Ένα κυρτό τετράπλευρο έχει κάθετες διαγωνίους με μήκη 9 και 14. Να βρεθεί το εμβαδόν του. Αν το τετράπλευρο ήταν ρόμβος, ποια θα ήταν η πλευρά του;
●●○ → Λύση 10.3/7
- 8 Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α παίρνουμε σημεία Δ, Ε, Ζ με $ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ = \frac{\alpha}{3}$. Να αποδείξετε ότι $(\Delta ΕΖ) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})$.
●●● → Λύση 10.3/8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10
Εμβαδά

ΜΑΘΗΜΑ 10.4

Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

◆ Οι τέσσερις «νέοι» τύποι

Ο τύπος $E = \frac{1}{2}av_\alpha$ απαιτεί να γνωρίζουμε ένα ύψος. Συχνά όμως γνωρίζουμε άλλα στοιχεία: τις τρεις πλευρές, δύο πλευρές και τη γωνία τους, τις ακτίνες του εγγεγραμμένου ή του περιγεγραμμένου κύκλου. Για καθεμιά από αυτές τις περιπτώσεις υπάρχει ειδικός τύπος.

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Τύποι εμβαδού τριγώνου

Για κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ με ημιπερίμετρο $\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$:

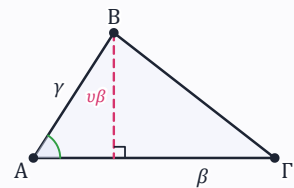
1. Τύπος του Ήρωνα: $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$
2. Δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία: $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu\hat{A}$
3. Ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου: $E = \tau \cdot \rho$
4. Ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου: $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$
5. Ακτίνα παρεγγεγραμμένου κύκλου: $E = (\tau - \alpha)\rho_\alpha$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ — (1) Ήρωνας

Στο μάθημα 9.4 αποδείξαμε ότι $v_\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$. Άρα $E = \frac{1}{2}av_\alpha = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$. ■

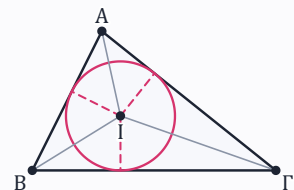
✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ — (2) Με το ημίτονο

Αν v_β είναι το ύψος από το B, από το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται είναι $v_\beta = \gamma\eta\mu\hat{A}$ (και όταν η $\hat{A}$ είναι αμβλεία, αφού $\eta\mu(180^\circ - A) = \eta\mu A$). Άρα $E = \frac{1}{2}\beta v_\beta = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu\hat{A}$. ■



✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ — (3) Με το έγκεντρο

Ενώνουμε το έγκεντρο I με τις κορυφές. Το τρίγωνο χωρίζεται στα $IB\Gamma$, $I\Gamma A$, IAB , καθένα με ύψος ρ (η ακτίνα είναι κάθετη στην εφαπτομένη πλευρά). Άρα $E = \frac{1}{2}\alpha\rho + \frac{1}{2}\beta\rho + \frac{1}{2}\gamma\rho = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\rho = \tau\rho$. ■



✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ — (4) Με τον περιγεγραμμένο κύκλο

Φέρνουμε το ύψος $A\Delta$ και τη διάμετρο AE του περιγεγραμμένου κύκλου. Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Gamma E$ (ορθή στο Γ , γιατί η $\widehat{A\Gamma E}$ βαίνει σε ημικύκλιο) έχουν $\hat{B} = \hat{E}$ (εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο $\widehat{AG}$). Άρα είναι όμοια: $\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB}{AE}$, δηλαδή $v_\alpha = \frac{\beta\gamma}{2R}$. Τότε $E = \frac{1}{2}av_\alpha = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$. ■

ΛΙΓΗ ΙΣΤΟΡΙΑ

Ο Ηρων ο Αλεξανδρεύς (1ος αι. μ.Χ.) ήταν μαθηματικός και μηχανικός· κατασκεύασε μεταξύ άλλων την «αιολόσφαιρα», έναν πρόδρομο της ατμομηχανής! Ο τύπος για το εμβαδόν από τις τρεις πλευρές περιέχεται στο έργο του «Μετρικά», αν και ίσως ήταν γνωστός ήδη στον Αρχιμήδη.

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Ποιον τύπο διαλέγω;

Γνωρίζω	Χρησιμοποιώ
μια πλευρά και το αντίστοιχο ύψος	$\frac{1}{2}av_a$
τις τρεις πλευρές	Ήρωνα
δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία	$\frac{1}{2}b\gamma\eta\mu A$
περίμετρο και ρ (ή ζητώ το ρ)	$\tau\rho$
πλευρές και R (ή ζητώ το R)	$\frac{a\beta\gamma}{4R}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Το «κλασικό» τρίγωνο 13 – 14 – 15

Να βρεθούν το εμβαδόν, τα ύψη και οι ακτίνες ρ και R του τριγώνου με πλευρές 13, 14, 15.

ΛΥΣΗ

$$\tau = 21. \text{ Ήρωνα: } E = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84.$$

$$\text{Ύψη: } v_{13} = \frac{168}{13}, v_{14} = \frac{168}{14} = 12, v_{15} = \frac{168}{15} = 11,2.$$

$$\text{Ακτίνες: } \rho = \frac{E}{\tau} = \frac{84}{21} = 4 \text{ και } R = \frac{a\beta\gamma}{4E} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{336} = \frac{2730}{336} = \frac{65}{8} = 8,125.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Με γωνία

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\beta = 8, \gamma = 5$ και $\hat{A} = 30^\circ$. Να βρεθεί το εμβαδόν. Τι θα άλλαζε αν ήταν $\hat{A} = 150^\circ$;

ΛΥΣΗ

$E = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \eta\mu 30^\circ = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$. Αν $\hat{A} = 150^\circ$, τότε $\eta\mu 150^\circ = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$ και το εμβαδόν θα ήταν **πάλι 10** — παρόλο που τα τρίγωνα είναι εντελώς διαφορετικά!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Ακτίνες ορθογωνίου τριγώνου

Για το ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 6, 8, 10 να βρεθούν ρ και R .

ΛΥΣΗ

$E = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24, \tau = 12, \rho = \frac{24}{12} = 2. R = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4 \cdot 24} = 5$ — το μισό της υποτείνουσας, όπως αναμενόταν (το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου ορθογωνίου τριγώνου είναι το μέσο της υποτείνουσας).

🕒 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Ένας χρήσιμος τύπος για το ορθογώνιο τρίγωνο

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^\circ$) ισχύει $\rho = \tau - \alpha = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$. Στο προηγούμενο παράδειγμα: $\frac{6+8-10}{2} = 2 \checkmark$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Ήρωνα με ρίζες

Να βρεθεί το εμβαδόν τριγώνου με πλευρές 5, 5, 6 με δύο τρόπους.

ΛΥΣΗ

Ήρωνας: $\tau = 8$, $E = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{144} = 12$. **Με το ύψος:** το τρίγωνο είναι ισοσκελές· το ύψος προς τη βάση 6 είναι $\sqrt{25 - 9} = 4$, άρα $E = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$ ✓.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Ο τύπος του Ήρωνα με την περίμετρο

✗ $E = \sqrt{\Pi(\Pi - \alpha)(\Pi - \beta)(\Pi - \gamma)}$, όπου Π η περίμετρος.

✓ Ο τύπος χρησιμοποιεί την ημιπερίμετρο $\tau = \frac{\Pi}{2}$. Ένας γρήγορος έλεγχος: όλοι οι παράγοντες $\tau - \alpha$, $\tau - \beta$, $\tau - \gamma$ πρέπει να βγαίνουν θετικοί (λόγω τριγωνικής ανισότητας). Αν κάποιος βγει αρνητικός ή μηδέν, κάτι πήγε στραβά.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Λάθος γωνία στον τύπο του ημιτόνου

✗ $E = \frac{1}{2}\alpha\beta \eta\mu A$.

✓ Η γωνία πρέπει να είναι η περιεχόμενη στις δύο πλευρές: $\frac{1}{2}\alpha\beta \eta\mu\Gamma$, $\frac{1}{2}\beta\gamma \eta\mu A$, $\frac{1}{2}\gamma\alpha \eta\mu B$.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Οι τύποι του εμβαδού συνδυάζονται συχνά με τριγωνομετρία. Για μια ολοκληρωμένη επανάληψη και των δύο, με βίντεο και λυμένα θέματα, επισκέψου το mathgreece.com — το φροντιστήριο είναι εντελώς δωρεάν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 10.4 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Να βρεθεί με τον τύπο του Ήρωνα το εμβαδόν τριγώνου με πλευρές 7, 8, 9.
○○○ → Λύση 10.4/1
- 2 Δύο πλευρές τριγώνου είναι 6 και 10 και η περιεχόμενη γωνία 60° . Να βρεθεί το εμβαδόν.
○○○ → Λύση 10.4/2
- 3 Τρίγωνο έχει περίμετρο 30 και ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου 2. Ποιο είναι το εμβαδόν του;
○○○ → Λύση 10.4/3
- 4 Να βρεθούν τα ρ και R του τριγώνου με πλευρές 5, 12, 13.
●●○ → Λύση 10.4/4
- 5 Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $\alpha\beta\gamma = 4R\rho\tau$.
●●○ → Λύση 10.4/5
- 6 Να βρεθεί το εμβαδόν ισοσκελούς τριγώνου με σκέλη 10 και γωνία κορυφής 120° , καθώς και η βάση του.
●●○ → Λύση 10.4/6
- 7 Παραλληλόγραμμο έχει πλευρές α, β και γωνία φ . Να αποδείξετε ότι $E = \alpha\beta \eta\mu\varphi$. Εφαρμογή: $\alpha = 7$, $\beta = 4$, $\varphi = 45^\circ$.
●●○ → Λύση 10.4/7
- 8 Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $\frac{1}{v_\alpha} + \frac{1}{v_\beta} + \frac{1}{v_\gamma} = \frac{1}{\rho}$.
●●● → Λύση 10.4/8
- 9 Τρίγωνο έχει πλευρές $\alpha = 4$, $\beta = 13$, $\gamma = 15$. Να βρείτε το εμβαδόν του, το ύψος v_α και να εξηγήσετε γιατί το ίχνος αυτού του ύψους βρίσκεται έξω από την πλευρά α .
●●● → Λύση 10.4/9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10
Εμβαδά

ΜΑΘΗΜΑ 10.5

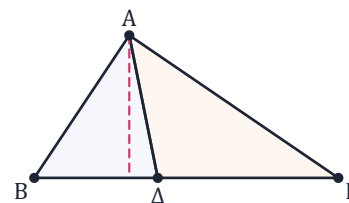
Λόγος εμβαδών

♦ Τρίγωνα με κοινό ύψος ή κοινή βάση

Από τον τύπο $E = \frac{1}{2} \text{ βάση} \cdot \text{ύψος}$ προκύπτουν αμέσως δύο πολύ χρήσιμα συμπεράσματα:

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Λόγος εμβαδών με κοινό ύψος ή κοινή βάση

- Αν δύο τρίγωνα έχουν **ίσα ύψη**, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των αντίστοιχων **βάσεων**.
- Αν δύο τρίγωνα έχουν **ίσες βάσεις**, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των αντίστοιχων **υψών**.



Κοινό ύψος: $(ABD)/(A\Gamma D) = BD/\Delta\Gamma$

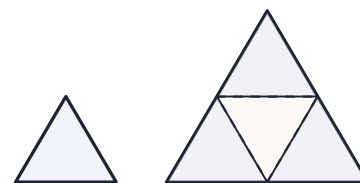
Ειδικά: αν το Δ είναι σημείο της $B\Gamma$, τότε $\frac{(AB\Delta)}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$ (κοινό ύψος από το A).

♦ Όμοια τρίγωνα και όμοια πολύγωνα

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Λόγος εμβαδών όμοιων σχημάτων

Αν δύο τρίγωνα (ή γενικά δύο πολύγωνα) είναι **όμοια** με λόγο ομοιότητας λ , τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το **τετράγωνο** του λόγου ομοιότητας:

$$\frac{E'}{E} = \lambda^2.$$



$\lambda = 2 \Rightarrow$ το εμβαδόν τετραπλασιάζεται

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για τρίγωνα: ο λόγος των βάσεων είναι λ και (μάθημα 8.2) ο λόγος των αντίστοιχων υψών είναι επίσης λ . Άρα $\frac{E'}{E} = \frac{\frac{1}{2}\alpha'v'_\alpha}{\frac{1}{2}\alpha v_\alpha} = \lambda \cdot \lambda = \lambda^2$.

Για πολύγωνα: φέρνοντας τις διαγωνίους από δύο ομόλογες κορυφές, τα πολύγωνα χωρίζονται σε ισάριθμα, ανά δύο όμοια, τρίγωνα με λόγο λ . Κάθε ζεύγος έχει λόγο εμβαδών λ^2 , οπότε (ιδιότητα ίσων λόγων) $\frac{E'_1 + E'_2 + \dots}{E_1 + E_2 + \dots} = \lambda^2$. ■

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Μεγάλη προσοχή!

Αν διπλασιάσεις όλα τα μήκη ενός σχήματος, η περίμετρος διπλασιάζεται, αλλά το εμβαδόν **τετραπλασιάζεται**. Αν τα τριπλασιάσεις, το εμβαδόν γίνεται **9 φορές** μεγαλύτερο. Ο λόγος των εμβαδών είναι λ^2 , όχι λ !

♦ Τρίγωνα με μία γωνία ίση ή παραπληρωματική

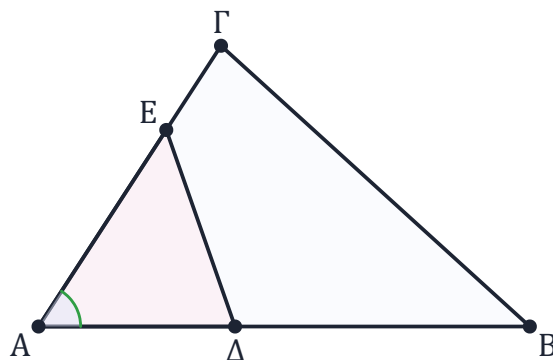
★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Λόγος εμβαδών με κοινή γωνία

Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι **ίση** ή **παραπληρωματική** με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των **γινομένων των πλευρών που περιέχουν** τις γωνίες αυτές:

$$\hat{A} = \hat{A}' \text{ ή } \hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ \Rightarrow \frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'}.$$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Και στις δύο περιπτώσεις $\eta\mu A = \eta\mu A'$. Διαιρώντας κατά μέλη τα $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$ και $E' = \frac{1}{2}\beta'\gamma'\eta\mu A'$ προκύπτει το ζητούμενο. ■



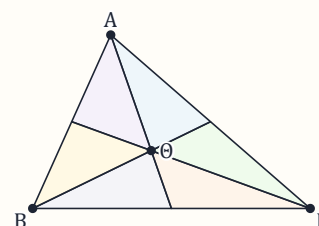
Το κλασικό σχήμα: $(A\Delta E)/(A\Gamma) = (\Delta A \cdot AE)/(AB \cdot A\Gamma)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Τα έξι τρίγωνα των διαμέσων

Να αποδειχθεί ότι οι τρεις διάμεσοι ενός τριγώνου το χωρίζουν σε έξι ισοδύναμα τρίγωνα.

ΛΥΣΗ

Έστω Θ το βαρύκεντρο. Τα τρίγωνα $\Theta B M_\alpha$ και $\Theta M_\alpha \Gamma$ έχουν ίσες βάσεις ($B M_\alpha = M_\alpha \Gamma$) και κοινό ύψος από το Θ : είναι ισοδύναμα· έστω εμβαδόν x το καθένα. Όμοια, τα ζεύγη στις άλλες πλευρές έχουν εμβαδά y, y και z, z . Η διάμεσος $A M_\alpha$ χωρίζει το $AB\Gamma$ σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα: $x + 2z = x + 2y$, άρα $y = z$. Ομοίως από άλλη διάμεσο $x = y$. Άρα και τα έξι τρίγωνα έχουν εμβαδόν $\frac{1}{6}(AB\Gamma)$. ■



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Όμοια τρίγωνα

Δύο όμοια τρίγωνα έχουν ομόλογες πλευρές 6 και 9. Αν το εμβαδόν του μικρού είναι 20, ποιο είναι το εμβαδόν του μεγάλου;

ΛΥΣΗ

$\lambda = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, οπότε $\frac{E'}{20} = \frac{9}{4}$ και $E' = 45$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Παράλληλη που χωρίζει το εμβαδόν στη μέση

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 10$, ζητάμε σημείο Δ στην AB ώστε η παράλληλη από το Δ προς τη $B\Gamma$ να χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα μέρη. Να βρεθεί το $A\Delta$.

ΛΥΣΗ

Αν η παράλληλη τέμνει την $A\Gamma$ στο E , τότε $A\Delta E \approx AB\Gamma$ με $\lambda = \frac{A\Delta}{AB}$, και θέλουμε $(A\Delta E) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$. Άρα $\lambda^2 = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$, και $A\Delta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10 = 5\sqrt{2} \approx 7,07$ — όχι 5! ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Λόγος με κοινή γωνία

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 8$ και $A\Gamma = 12$. Παίρνουμε Δ στην AB με $A\Delta = 3$ και E στην $A\Gamma$ με $AE = 4$. Να βρεθεί ο

λόγος $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$ και ο λόγος $\frac{(A\Delta E)}{(\Delta B\Gamma E)}$.

ΛΥΣΗ

Κοινή γωνία $\hat{A}$: $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 12} = \frac{12}{96} = \frac{1}{8}$. Τότε $(\Delta B\Gamma E) = (AB\Gamma) - (A\Delta E) = \frac{7}{8}(AB\Gamma)$, άρα $\frac{(A\Delta E)}{(\Delta B\Gamma E)} = \frac{1}{7}$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Τραπεζίο: τα τέσσερα τρίγωνα των διαγωνίων

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) οι διαγώνιοι τέμνονται στο O . Αν $(OAB) = 9$ και $(O\Gamma\Delta) = 4$, να βρεθεί το εμβαδόν του τραπέζιου.

ΛΥΣΗ

Τα OAB και $O\Gamma\Delta$ είναι όμοια (μάθημα 8.2) με $\lambda^2 = \frac{9}{4}$, άρα $\lambda = \frac{OA}{O\Gamma} = \frac{3}{2}$. Τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ έχουν κοινό ύψος από το B , οπότε $\frac{(OAB)}{(O\Gamma\Delta)} = \frac{OA}{O\Gamma} = \frac{3}{2}$, άρα $(O\Gamma\Delta) = 6$. Όμοια $(O\Delta\Gamma) = 6$. Συνολικά $E = 9 + 4 + 6 + 6 = 25$. (Παρατήρηση: $(O\Gamma\Delta)^2 = (OAB) \cdot (O\Gamma\Delta)$.) ■

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Λόγος εμβαδών ίσος με τον λόγο ομοιότητας

✗ «Τα τρίγωνα είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{3}$, άρα το μικρό έχει το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του μεγάλου.»

✓ Το μικρό έχει το $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ του εμβαδού. Ο λόγος λ αφορά μήκη (πλευρές, ύψη, περιμέτρους)· για εμβαδά παίρνουμε λ^2 .

💡 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Στρατηγική για λόγους εμβαδών

- Ψάχνουμε τρίγωνα με **κοινή κορυφή** και βάσεις πάνω στην **ίδια ευθεία** (κοινό ύψος $\Rightarrow$ λόγος βάσεων).
- Ψάχνουμε **όμοια** τρίγωνα ($\Rightarrow \lambda^2$).
- Ψάχνουμε **κοινή γωνία** ($\Rightarrow$ λόγος γινομένων πλευρών).
- Συχνά συμφέρει να θέσουμε ένα εμβαδόν ίσο με x και να εκφράσουμε τα άλλα μέσω αυτού.

🌐 ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Οι λόγοι εμβαδών είναι από τα πιο «έξυπνα» θέματα της Γεωμετρίας. Για περισσότερες ασκήσεις με αναλυτικές λύσεις, επισκέψου το mathgreece.com — πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 10.5 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Δύο όμοια πολύγωνα έχουν λόγο ομοιότητας $\frac{2}{5}$. Αν το εμβαδόν του μεγαλύτερου είναι 150, ποιο είναι του μικρότερου; ●○○ → Λύση 10.5/1
- 2 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ το Δ είναι σημείο της $B\Gamma$ με $B\Delta = 4$ και $\Delta\Gamma = 6$. Αν $(AB\Gamma) = 40$, να βρεθούν τα $(AB\Delta)$ και $(A\Delta\Gamma)$. ●○○ → Λύση 10.5/2
- 3 Δύο όμοια τρίγωνα έχουν εμβαδά 18 και 50. Να βρεθεί ο λόγος ομοιότητας και ο λόγος των περιμέτρων τους. ●○○ → Λύση 10.5/3
- 4 Στις πλευρές AB , $A\Gamma$ τριγώνου παίρνουμε σημεία Δ , E με $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{3}{4}$. Αν $(AB\Gamma) = 36$, να βρεθεί το $(A\Delta E)$. ●●○ → Λύση 10.5/4
- 5 Ένα τρίγωνο χωρίζεται με δύο παράλληλες προς τη βάση σε τρία μέρη ισοδύναμα (ίσα εμβαδά). Σε ποια σημεία της πλευράς $AB = 9$ πρέπει να φέρουμε τις παράλληλες; ●●○ → Λύση 10.5/5

- 6 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η διχοτόμος $A\Delta$ χωρίζει τη $B\Gamma$. Να αποδείξετε, με λόγο εμβαδών, το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου $\frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{A\Gamma}{A\Delta}$.

→ Λύση 10.5/6

- 7 Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ οι διαγώνιοι τέμνονται στο O . Αν $(OAB) = \alpha^2$ και $(O\Gamma\Delta) = \beta^2$, να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma\Delta) = (\alpha + \beta)^2$.

→ Λύση 10.5/7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10
Εμβαδά

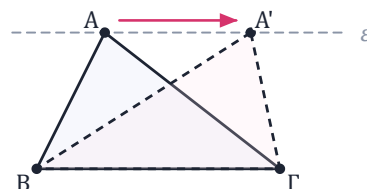
ΜΑΘΗΜΑ 10.6

Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμό του

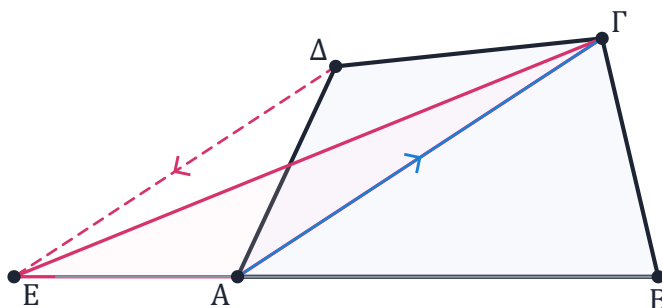
◆ Η ιδέα: «σπρώχνουμε» μια κορυφή παράλληλα

Το «μυστικό» όλων των μετασχηματισμών είναι μια απλή παρατήρηση: **αν μετακινήσουμε την κορυφή Α ενός τριγώνου πάνω σε ευθεία παράλληλη προς τη βάση ΒΓ, το εμβαδόν δεν αλλάζει** (η βάση και το ύψος μένουν ίδια).

Με αυτό το εργαλείο μπορούμε, με κανόνα και διαβήτη, να μετασχηματίσουμε οποιοδήποτε πολύγωνο σε ένα **ισοδύναμο** τρίγωνο και στη συνέχεια σε ισοδύναμο τετράγωνο.



Το Α μετακινείται στην παράλληλη ε: $(A'BG) = (ABG)$

◆ Από ν-γωνο σε $(n - 1)$ -γωνο

Το τετράπλευρο ABGD μετασχηματίζεται στο ισοδύναμο τρίγωνο ABE

Έστω πολύγωνο, για παράδειγμα το τετράπλευρο ABGD. Φέρνουμε τη διαγώνιο AG, που «αποκόπτει» το τρίγωνο AGD. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την AG, που τέμνει την προέκταση της BA (ή της AB, ανάλογα με το σχήμα) σε ένα σημείο E. Τότε:

- $(AGD) = (AGE)$, γιατί έχουν κοινή βάση AG και οι κορυφές Δ, Ε βρίσκονται σε παράλληλη προς τη βάση.
- Επομένως $(ABGD) = (ABG) + (AGD) = (ABG) + (AGE) = (EBG)$.

Το τετράπλευρο έγινε **τρίγωνο** με το ίδιο εμβαδόν. Γενικά, με κάθε τέτοιο βήμα ένα ν-γωνο γίνεται ισοδύναμο $(n - 1)$ -γωνο· επαναλαμβάνοντας, καταλήγουμε σε ισοδύναμο **τρίγωνο**.

◆ Από τρίγωνο σε τετράγωνο

Ένα τρίγωνο με βάση α και ύψος ν έχει εμβαδόν $\frac{1}{2}\alpha\nu$. Ψάχνουμε τετράγωνο πλευράς x με $x^2 = \frac{1}{2}\alpha\nu = \frac{\alpha}{2} \cdot \nu$. Άρα το x είναι η **μέση ανάλογος** των τμημάτων $\frac{\alpha}{2}$ και ν, και κατασκευάζεται όπως στο μάθημα 9.3 (ημικύκλιο με διάμετρο $\frac{\alpha}{2} + \nu$ και κάθετη στο σημείο ένωσης).

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Τετραγωνισμός πολυγώνου

Κάθε πολύγωνο μπορεί να μετασχηματιστεί, με κανόνα και διαβήτη, σε **ισοδύναμο τετράγωνο**.

🏠 ΛΙΓΗ ΙΣΤΟΡΙΑ

Οι αρχαίοι Έλληνες ονόμαζαν «τετραγωνισμό» ενός σχήματος την κατασκευή ισοδύναμου τετραγώνου. Ήξεραν να τετραγωνίζουν κάθε πολύγωνο, αλλά προσπάθησαν μάταια για αιώνες να τετραγωνίσουν τον **κύκλο**. Το 1882 ο Lindemann απέδειξε ότι αυτό είναι **αδύνατο** με κανόνα και διαβήτη — θα το συζητήσουμε στο Κεφάλαιο 11.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ορθογώνιο σε τετράγωνο

Να περιγραφεί πώς κατασκευάζεται τετράγωνο ισοδύναμο με ορθογώνιο 9×4 και να βρεθεί η πλευρά του.

ΛΥΣΗ

Θέλουμε $x^2 = 9 \cdot 4$, δηλαδή $x =$ μέση ανάλογος των 9 και 4. Παίρνουμε σε ευθεία διαδοχικά τμήματα 9 και 4, γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου 13 και υψώνουμε κάθετη στο σημείο ένωσης· το τμήμα της μέχρι το ημικύκλιο είναι $x = \sqrt{36} = 6$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Τρίγωνο ισοδύναμο με παραλληλόγραμμο

Να κατασκευαστεί τρίγωνο ισοδύναμο με δοσμένο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, που να έχει τη μία πλευρά του πάνω στην ευθεία AB .

ΛΥΣΗ

Προεκτείνουμε την AB κατά $BE = AB$. Το τρίγωνο $AE\Delta$ έχει βάση $AE = 2AB$ και ύψος ίσο με το ύψος v του παραλληλογράμμου, άρα $(AE\Delta) = \frac{1}{2} \cdot 2AB \cdot v = AB \cdot v = (AB\Gamma\Delta)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Πεντάγωνο σε τρίγωνο

Να περιγραφούν τα βήματα για τη μετατροπή ενός κυρτού πενταγώνου $AB\Gamma\Delta E$ σε ισοδύναμο τρίγωνο.

ΛΥΣΗ

Βήμα 1: Φέρνουμε τη διαγώνιο ΓE και από το Δ παράλληλη προς την ΓE , που τέμνει την προέκταση της AE στο Z . Τότε $(\Gamma\Delta E) = (\Gamma Z E)$ και το πεντάγωνο γίνεται το ισοδύναμο τετράπλευρο $AB\Gamma Z$.

Βήμα 2: Στο $AB\Gamma Z$ φέρνουμε τη διαγώνιο $A\Gamma$ και από το B παράλληλη προς την $A\Gamma$, που τέμνει την προέκταση της ZA στο H . Τότε $(AB\Gamma) = (AH\Gamma)$ και το τετράπλευρο γίνεται το ισοδύναμο τρίγωνο $H\Gamma Z$.

Σε κάθε βήμα «εξαφανίζεται» μία κορυφή, ενώ το εμβαδόν μένει σταθερό.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η μέθοδος αυτή είναι η θεωρητική βάση για τον υπολογισμό εμβαδών **χωραφιών** με ακανόνιστο σχήμα (τοπογραφία): χωρίζουμε σε τρίγωνα ή μετασχηματίζουμε το πολύγωνο σε απλούστερο σχήμα.

ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Θέλεις να δεις τους μετασχηματισμούς σε κίνηση; Στο mathgreece.com θα βρεις δωρεάν πλήρες φροντιστήριο με διαδραστικά σχήματα και επιπλέον ασκήσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 10.6 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να βρεθεί η πλευρά τετραγώνου ισοδύναμου με τρίγωνο βάσης 12 και ύψους 6.

●○○

→ Λύση 10.6/1

2 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ παίρνουμε σημείο M της $B\Gamma$. Να κατασκευάσετε ευθεία από το M που χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα μέρη.

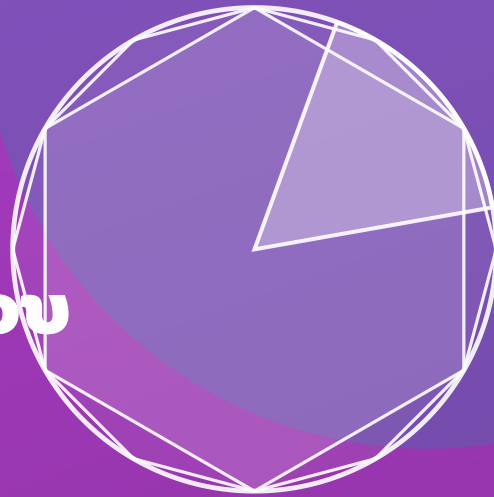
●●○

→ Λύση 10.6/2

- 3 Να εξηγήσετε πώς κατασκευάζεται τετράγωνο ισοδύναμο με το άθροισμα δύο δοσμένων τετραγώνων πλευρών α και β .
 → Λύση 10.6/3
- 4 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο ισοδύναμο με αυτό, με βάση την πλευρά ΒΓ.
 → Λύση 10.6/4

11

Μέτρηση κύκλου



Τα μαθήματα του κεφαλαίου

- 11.1–11.2** Κανονικά πολύγωνα – Ιδιότητες και στοιχεία
- 11.3** Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο
- 11.4–11.5** Μήκος κύκλου – Μήκος τόξου
- 11.6–11.7** Εμβαδόν κύκλου – Κυκλικός τομέας – Κυκλικό τμήμα
- 11.8** Τετραγωνισμός κύκλου

Τι θα κατακτήσεις

- Να γνωρίζεις τα στοιχεία των κανονικών πολυγώνων και τις σχέσεις τους.
- Να υπολογίζεις πλευρά, απόστημα και εμβαδόν τετραγώνου, εξαγώνου, ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένων σε κύκλο.
- Να υπολογίζεις μήκος κύκλου και τόξου (σε μοίρες και σε ακτίνια).
- Να υπολογίζεις εμβαδόν κύκλου, κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος.
- Να γνωρίζεις το ιστορικό πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου.

Ο κύκλος είναι το πιο «τέλειο» σχήμα, αλλά και το πιο δύσκολο να μετρηθεί: δεν έχει ευθύγραμμες πλευρές για να εφαρμόσουμε τους τύπους των προηγούμενων κεφαλαίων. Η λύση έρχεται από τα κανονικά πολύγωνα, που «πλησιάζουν» τον κύκλο όσο αυξάνεται ο αριθμός των πλευρών τους. Έτσι θα γνωρίσουμε τον περίφημο αριθμό π , θα υπολογίσουμε μήκη τόξων, εμβαδά κύκλων, τομέων και τμημάτων και θα μάθουμε γιατί ο «τετραγωνισμός του κύκλου» είναι αδύνατος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11
Μέτρηση κύκλου

ΜΑΘΗΜΑ 11.1–11.2

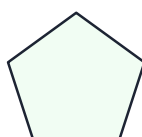
Κανονικά πολύγωνα – Ιδιότητες και στοιχεία

Ορισμός

ΟΡΙΣΜΟΣ — Κανονικό πολύγωνο

Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό** όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.

Τα πιο γνωστά κανονικά πολύγωνα είναι το **ισόπλευρο τρίγωνο** και το **τετράγωνο**. Ακολουθούν το κανονικό πεντάγωνο, εξαγώνο κ.λπ.

 $\nu = 3$  $\nu = 4$  $\nu = 5$  $\nu = 6$  $\nu = 8$

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Και οι δύο συνθήκες χρειάζονται

Ένας **ρόμβος** (που δεν είναι τετράγωνο) έχει όλες τις πλευρές ίσες, αλλά όχι όλες τις γωνίες. Ένα **ορθογώνιο** (που δεν είναι τετράγωνο) έχει όλες τις γωνίες ίσες, αλλά όχι όλες τις πλευρές. Κανένα από τα δύο δεν είναι κανονικό. (Μόνο για τα τρίγωνα η μία συνθήκη συνεπάγεται την άλλη.)

Κάθε κανονικό πολύγωνο έχει «κέντρο»

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Εγγεγραμμένος και περιγεγραμμένος κύκλος

Κάθε κανονικό πολύγωνο είναι **εγγράψιμο** σε κύκλο και **περιγράψιμο** σε κύκλο. Οι δύο κύκλοι είναι **ομόκεντροι**.

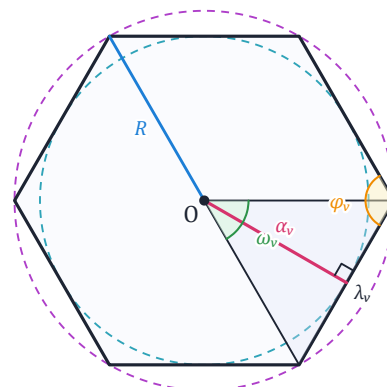
✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ — Σκιαγράφηση

Οι μεσοκάθετοι δύο διαδοχικών πλευρών (π.χ. των AB και BC) τέμνονται σε ένα σημείο O με $OA = OB = OC$. Τα τρίγωνα OAB και OBC είναι ισοσκελή και ίσα, και επειδή όλες οι γωνίες του πολυγώνου είναι ίσες, οι OB , OC διχοτομούν τις γωνίες $\hat{B}$, $\hat{C}$. Συνεχίζοντας, βρίσκουμε ότι το O ισαπέχει από **όλες** τις κορυφές (άρα υπάρχει περιγεγραμμένος κύκλος) και ότι όλα τα τρίγωνα OAB , OBC , ... είναι ίσα, οπότε τα ύψη τους από το O είναι ίσα: το O ισαπέχει και από **όλες** τις πλευρές (άρα υπάρχει εγγεγραμμένος κύκλος με το ίδιο κέντρο). ■

Τα στοιχεία ενός κανονικού ν -γώνου

Για ένα κανονικό πολύγωνο ν πλευρών ορίζουμε:

- **Κέντρο** O : το κοινό κέντρο του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου.
- **Ακτίνα** R : η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου (απόσταση κέντρου από κορυφή).
- **Απόστημα** α_ν : η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου (απόσταση κέντρου από πλευρά).
- **Πλευρά** λ_ν .
- **Κεντρική γωνία** ω_ν : η γωνία με την οποία «φαίνεται» μια πλευρά από το κέντρο: $\omega_\nu = \frac{360^\circ}{\nu}$.
- **Γωνία** του πολυγώνου φ_ν : $\varphi_\nu = 180^\circ - \omega_\nu = 180^\circ - \frac{360^\circ}{\nu}$.



Τα στοιχεία του κανονικού εξαγώνου

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Βασικές σχέσεις

Σε κάθε κανονικό ν -γωνο:

1. $\frac{\lambda_\nu^2}{4} + \alpha_\nu^2 = R^2$.
2. Περίμετρος: $P_\nu = \nu \cdot \lambda_\nu$.
3. Εμβαδόν: $E_\nu = \frac{1}{2}P_\nu \cdot \alpha_\nu$.

✍ **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

(1) Το απόστημα OM προς την πλευρά AB είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου OAB , άρα και διάμεσος: $MA = \frac{\lambda_\nu}{2}$.
Πυθαγόρειο στο OMA : $\left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 + \alpha_\nu^2 = R^2$.

(3) Το πολύγωνο χωρίζεται σε ν ίσα τρίγωνα OAB , καθένα με εμβαδόν $\frac{1}{2}\lambda_\nu\alpha_\nu$. Άρα $E_\nu = \nu \cdot \frac{1}{2}\lambda_\nu\alpha_\nu = \frac{1}{2}(\nu\lambda_\nu)\alpha_\nu = \frac{1}{2}P_\nu\alpha_\nu$.

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Ομοιότητα κανονικών πολυγώνων

Δύο κανονικά πολύγωνα με τον **ίδιο αριθμό πλευρών** είναι **όμοια**. Ο λόγος ομοιότητάς τους ισούται με τον λόγο των ακτίνων τους και με τον λόγο των αποστημάτων τους:

$$\frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \frac{R}{R'} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha'_\nu}.$$

❶ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ** — Πώς σχεδιάζουμε κανονικό ν -γωνο

Αρκεί να χωρίσουμε έναν κύκλο σε ν **ίσα τόξα** (δηλαδή να κατασκευάσουμε την κεντρική γωνία $\frac{360^\circ}{\nu}$) και να ενώσουμε διαδοχικά τα σημεία διαίρεσης. Οι χορδές ίσων τόξων είναι ίσες και οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα είναι ίσες, άρα το πολύγωνο είναι κανονικό.

📋 **ΣΥΝΟΨΗ** — Γωνίες κανονικών πολυγώνων

ν	3	4	5	6	8	10	12
ω_ν	120°	90°	72°	60°	45°	36°	30°
φ_ν	60°	90°	108°	120°	135°	144°	150°

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Πλήθος πλευρών από τη γωνία

Ένα κανονικό πολύγωνο έχει γωνία $\varphi_\nu = 140^\circ$. Πόσες πλευρές έχει;

ΛΥΣΗ

$\omega_\nu = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ και $\frac{360^\circ}{\nu} = 40^\circ$, άρα $\nu = 9$ (κανονικό εννεάγωνο).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Υπάρχει κανονικό πολύγωνο με γωνία 100° ;

Να εξεταστεί αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο του οποίου κάθε γωνία είναι 100° .

ΛΥΣΗ

Θα έπρεπε $\omega_\nu = 80^\circ$, δηλαδή $\nu = \frac{360}{80} = 4,5$, που δεν είναι ακέραιος. Άρα **δεν** υπάρχει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Από την ακτίνα και το απόστημα στο πολύγωνο

Ένα κανονικό πολύγωνο έχει ακτίνα $R = 10$ και απόστημα $\alpha_n = 5\sqrt{3}$. Να βρεθούν η πλευρά του, το πλήθος των πλευρών του και το εμβαδόν του.

ΛΥΣΗ

$\frac{\lambda_n^2}{4} = R^2 - \alpha_n^2 = 100 - 75 = 25$, άρα $\lambda_n = 10$. Επειδή $\lambda_n = R$, το τρίγωνο OAB είναι ισόπλευρο, οπότε $\omega_n = 60^\circ$ και $n = \frac{360}{60} = 6$: πρόκειται για κανονικό **εξάγωνο**. Εμβαδόν: $E_6 = \frac{1}{2} P_6 \alpha_6 = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 5\sqrt{3} = 150\sqrt{3}$. ■

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Για δεδομένο n , τα R , λ_n , α_n **δεν είναι ανεξάρτητα**: αν ξέρουμε ένα από αυτά, τα άλλα δύο καθορίζονται. Γι' αυτό σε μια άσκηση πρόσεχε να μη «δώσεις» (ή να μην υποθέσεις) αντιφατικά δεδομένα.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Σύγχυση R και απόστημα

✗ «Το εμβαδόν του κανονικού n -γώνου είναι $\frac{1}{2} P_n \cdot R$.»

✓ Στον τύπο μπαίνει το **απόστημα** α_n (το ύψος κάθε τριγώνου OAB), όχι η ακτίνα R . Το R είναι η **πλευρά** OA του τριγώνου, όχι το ύψος του.

ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με ασκήσεις στα κανονικά πολύγωνα, καθώς και εφαρμογές τους στην αρχιτεκτονική και στη φύση (κηρήθρες, κρύσταλλοι, νιφάδες).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 11.1–11.2 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Να βρεθούν η κεντρική γωνία και η γωνία κανονικού δεκαπενταγώνου.
●○○ → Λύση 11.1–11.2/1
- 2 Πόσες πλευρές έχει κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία 18° ; Πόση είναι η γωνία του;
●○○ → Λύση 11.1–11.2/2
- 3 Κανονικό πολύγωνο έχει απόστημα 12 και ακτίνα 13. Να βρεθεί η πλευρά του.
●○○ → Λύση 11.1–11.2/3
- 4 Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κανονικού n -γώνου είναι $(n - 2)180^\circ$, χρησιμοποιώντας τον τύπο $\varphi_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$.
●●○ → Λύση 11.1–11.2/4
- 5 Δύο κανονικά εξάγωνα έχουν ακτίνες 4 και 6. Να βρεθεί ο λόγος των περιμέτρων και ο λόγος των εμβαδών τους.
●●○ → Λύση 11.1–11.2/5
- 6 Για ποιες τιμές του n η γωνία φ_n κανονικού n -γώνου είναι ακέραιος αριθμός μοιρών; Πόσα τέτοια κανονικά πολύγωνα υπάρχουν;
●●● → Λύση 11.1–11.2/6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11
Μέτρηση κύκλου

ΜΑΘΗΜΑ 11.3

Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο

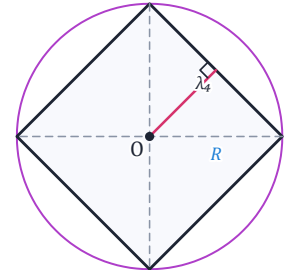
Τετράγωνο

Φέρνουμε δύο **κάθετες διαμέτρους** ΑΓ και ΒΔ. Τα άκρα τους χωρίζουν τον κύκλο σε 4 ίσα τόξα (90° το καθένα), οπότε το ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο. Στο ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ:

ΚΛΕΙΔΙ — Τετράγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R

$$\lambda_4 = R\sqrt{2}, \quad \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}, \quad E_4 = 2R^2.$$

(Πράγματι $\lambda_4^2 = R^2 + R^2$, $\alpha_4 = \frac{\lambda_4}{2}$ και $E_4 = \lambda_4^2 = 2R^2$.)



Εγγεγραμμένο τετράγωνο

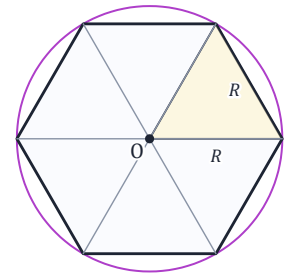
Κανονικό εξάγωνο

Η κεντρική γωνία είναι $\omega_6 = 60^\circ$. Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές ($OA = OB = R$) με γωνία κορυφής 60° , άρα **ισόπλευρο**: η πλευρά του εξαγώνου ισούται με την ακτίνα! Γι' αυτό το εξάγωνο σχεδιάζεται τόσο εύκολα: με άνοιγμα διαβήτη ίσο με R «βαδίζουμε» πάνω στον κύκλο έξι φορές.

ΚΛΕΙΔΙ — Κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R

$$\lambda_6 = R, \quad \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}, \quad E_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2.$$

(Το απόστημα είναι το ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου ΟΑΒ, και το εξάγωνο αποτελείται από 6 τέτοια ισόπλευρα τρίγωνα: $E_6 = 6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.)



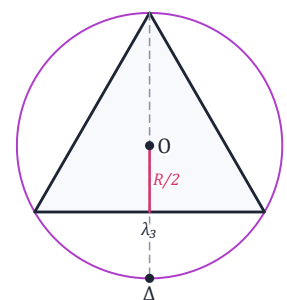
Εγγεγραμμένο εξάγωνο: $\lambda_6 = R$

Ισόπλευρο τρίγωνο

Αν πάρουμε **μία ανά δύο** κορυφές του κανονικού εξαγώνου, σχηματίζεται ισόπλευρο τρίγωνο. Η πλευρά του ΒΓ και η διάμετρος ΑΔ που περνά από την απέναντι κορυφή: το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο (βαίνει σε ημικύκλιο) με $ΑΔ = 2R$ και $ΒΔ = \lambda_6 = R$, οπότε $AB = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$. Το απόστημα είναι $\alpha_3 = \frac{R}{2}$ (το κέντρο είναι και βαρύκεντρο, άρα χωρίζει το ύψος $\frac{3R}{2}$ σε R και $\frac{R}{2}$).

ΚΛΕΙΔΙ — Ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R

$$\lambda_3 = R\sqrt{3}, \quad \alpha_3 = \frac{R}{2}, \quad E_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$



Εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο

ΣΥΝΟΨΗ — Ο «χρυσός» πίνακας του μαθήματος

	Πλευρά λ_n	Απόστημα α_n	Εμβαδόν E_n
Ισόπλευρο τρίγωνο	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$
Τετράγωνο	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2R^2$
Κανονικό εξάγωνο	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Μνημονικός κανόνας

Οι πλευρές είναι $R\sqrt{3}$, $R\sqrt{2}$, $R\sqrt{1}$ για $\nu = 3, 4, 6$ — η ρίζα «μικραίνει» όσο αυξάνεται το ν . Και πάντα ισχύει $\frac{\lambda_\nu^2}{4} + \alpha_\nu^2 = R^2$: αν θυμάσαι την πλευρά, βρίσκεις αμέσως το απόστημα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Για τον φιλομαθή: από το ν -γωνο στο 2ν -γωνο

Αν γνωρίζουμε την πλευρά λ_ν , μπορούμε να υπολογίσουμε την πλευρά του κανονικού 2ν -γώνου του ίδιου κύκλου: $\lambda_{2\nu}^2 = 2R(R - \alpha_\nu)$. Για παράδειγμα, από το εξάγωνο παίρνουμε το κανονικό δωδεκάγωνο: $\lambda_{12}^2 = 2R\left(R - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right) = R^2(2 - \sqrt{3})$, άρα $\lambda_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Με αυτή τη μέθοδο ο Αρχιμήδης υπολόγισε το π , φτάνοντας μέχρι το 96-γωνο!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ο ίδιος κύκλος, τρία πολύγωνα

Σε κύκλο ακτίνας $R = 6$ εγγράφουμε ισόπλευρο τρίγωνο, τετράγωνο και κανονικό εξάγωνο. Να βρεθούν οι πλευρές, τα αποστήματα και τα εμβαδά τους.

ΛΥΣΗ

	Πλευρά	Απόστημα	Εμβαδόν
Τρίγωνο	$6\sqrt{3}$	3	$27\sqrt{3} \approx 46,8$
Τετράγωνο	$6\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	72
Εξάγωνο	6	$3\sqrt{3}$	$54\sqrt{3} \approx 93,5$

Παρατήρησε ότι το εμβαδόν **αυξάνεται** με το ν και «πλησιάζει» το εμβαδόν του κύκλου $36\pi \approx 113,1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Από την πλευρά στην ακτίνα

Ένα τετράγωνο έχει πλευρά 8. Να βρεθεί η ακτίνα του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου του.

ΛΥΣΗ

$\lambda_4 = R\sqrt{2} = 8 \Rightarrow R = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$. Η ακτίνα του εγγεγραμμένου είναι το απόστημα: $\alpha_4 = \frac{\lambda_4}{2} = 4$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Λόγοι εμβαδών

Σε κύκλο ακτίνας R εγγράφουμε ισόπλευρο τρίγωνο και κανονικό εξάγωνο. Να αποδειχθεί ότι το εξάγωνο έχει διπλάσιο εμβαδόν από το τρίγωνο.

ΛΥΣΗ

$\frac{E_6}{E_3} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}R^2} = 2$. Γεωμετρικά: το εξάγωνο αποτελείται από το τρίγωνο και τρία ακόμη τρίγωνα (π.χ. ΑΒΓ με Β κορυφή του εξαγώνου), καθένα ίσο με το $\frac{1}{3}$ του ισοπλεύρου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο εξάγωνο

Να βρεθεί ο λόγος των εμβαδών του κανονικού εξαγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R προς το κανονικό εξάγωνο που είναι περιγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο.

ΛΥΣΗ

Στο **περιγεγραμμένο** εξάγωνο ο κύκλος είναι ο εγγεγραμμένος του, άρα το απόστημά του είναι R . Επειδή $\alpha_6 = \frac{R'\sqrt{3}}{2}$, η ακτίνα του είναι $R' = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Τα δύο εξάγωνα είναι όμοια με λόγο $\frac{R}{R'} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα ο λόγος των εμβαδών είναι $\frac{3}{4}$.

I

✗ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** — Λάθος απόστημα τριγώνου

✗ $\alpha_3 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

✓ Αυτό είναι το απόστημα του **εξαγώνου**. Για το ισόπλευρο τρίγωνο $\alpha_3 = \frac{R}{2}$. Έλεγχος: $\frac{\lambda_3^2}{4} + \alpha_3^2 = \frac{3R^2}{4} + \frac{R^2}{4} = R^2$ ✓.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Ο πίνακας με τα λ_n , α_n , E_n «πέφτει» πολύ συχνά στις εξετάσεις. Στο mathgreece.com θα βρεις δωρεάν πλήρες φροντιστήριο με επαναληπτικά τεστ για να τον κατακτήσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 11.3 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Σε κύκλο ακτίνας 4 να βρεθούν η πλευρά και το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου και του εγγεγραμμένου τετραγώνου.
●○○ → Λύση 11.3/1
- 2 Ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά 9. Να βρεθούν οι ακτίνες του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου.
●○○ → Λύση 11.3/2
- 3 Κανονικό εξάγωνο έχει εμβαδόν $24\sqrt{3}$. Να βρεθεί η περίμετρος και το απόστημά του.
●●○ → Λύση 11.3/3
- 4 Σε κύκλο ακτίνας R είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο και περιγεγραμμένο τετράγωνο. Να βρεθεί ο λόγος των εμβαδών τους.
●●○ → Λύση 11.3/4
- 5 Σε κύκλο ακτίνας R να υπολογίσετε την πλευρά του εγγεγραμμένου κανονικού οκταγώνου.
●●○ → Λύση 11.3/5
- 6 Σε κύκλο (O, R) είναι εγγεγραμμένο κανονικό εξάγωνο $ΑΒΓΔΕΖ$. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΓΕ$ και του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$.
●●● → Λύση 11.3/6

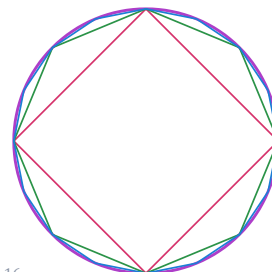
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11
Μέτρηση κύκλου

ΜΑΘΗΜΑ 11.4–11.5

Μήκος κύκλου – Μήκος τόξου

◆ Το μήκος του κύκλου και ο αριθμός π

Αν εγγράψουμε σε έναν κύκλο κανονικά πολύγωνα με όλο και περισσότερες πλευρές (4, 8, 16, 32, ...), οι περιμετροί τους αυξάνονται και πλησιάζουν όσο θέλουμε έναν ορισμένο αριθμό. Αυτόν τον αριθμό τον ονομάζουμε **μήκος του κύκλου** L . Μάλιστα, επειδή κανονικά πολύγωνα με ίδιο ν είναι όμοια, ο λόγος $\frac{P_n}{2R}$ είναι ο ίδιος για όλους τους κύκλους. Άρα και ο λόγος $\frac{L}{2R}$ — μήκος κύκλου προς διάμετρο — είναι ο **ίδιος για όλους τους κύκλους**. Αυτή η σταθερά συμβολίζεται με π .



$\nu = 4, 8, 16$

Εγγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα «πλησιάζουν» τον κύκλο

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Μήκος κύκλου

Το μήκος κύκλου ακτίνας R είναι

$$L = 2\pi R,$$

όπου $\pi \approx 3,14159 \dots$ ο λόγος του μήκους οποιουδήποτε κύκλου προς τη διάμετρό του.

🏠 **ΛΙΓΗ ΙΣΤΟΡΙΑ**

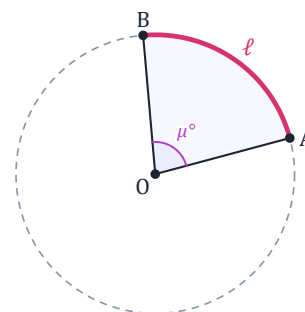
Ο Αρχιμήδης (3ος αι. π.Χ.) εγγράφοντας και περιγράφοντας κανονικά 96-γωνα απέδειξε ότι $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, δηλαδή $3,1408 < \pi < 3,1429$. Το 1761 ο Lambert απέδειξε ότι το π είναι **άρρητος** αριθμός και το 1882 ο Lindemann ότι είναι **υπερβατικός** (δεν είναι ρίζα καμίας πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές). Σήμερα έχουν υπολογιστεί τρισεκατομμύρια δεκαδικά ψηφία του! Στις ασκήσεις χρησιμοποιούμε συνήθως $\pi \approx 3,14$, εκτός αν ζητείται ακριβές αποτέλεσμα (οπότε αφήνουμε το π).

◆ Μήκος τόξου

Το μήκος ενός τόξου είναι **ανάλογο** της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας. Ολόκληρος ο κύκλος (360°) έχει μήκος $2\pi R$, άρα ένα τόξο 1° έχει μήκος $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$ και ένα τόξο μ° :

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Μήκος τόξου (σε μοίρες)

$$\ell = \frac{\pi R \mu}{180}.$$



Τόξο μ° σε κύκλο ακτίνας R

◆ Το ακτίνιο

📖 **ΟΡΙΣΜΟΣ** — Ακτίνιο (rad)

Ακτίνιο (1 rad) λέγεται το τόξο (και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία) που έχει **μήκος ίσο με την ακτίνα** του κύκλου.

Επειδή όλος ο κύκλος έχει μήκος $2\pi R$, «χωράει» 2π ακτίνια: $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$, δηλαδή $180^\circ = \pi \text{ rad}$. Αν ένα τόξο είναι $\alpha \text{ rad}$, τότε

$$\ell = \alpha \cdot R \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}.$$

Μοίρες	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
Ακτίνια	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$. Ο τύπος $\ell = \alpha R$ είναι πολύ πιο «καθαρός» από τον $\ell = \frac{\pi R \mu}{180}$ — γι' αυτό στα ανώτερα μαθηματικά οι γωνίες μετρώνται σχεδόν πάντα σε ακτίνια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ρόδα ποδηλάτου

Μια ρόδα ποδηλάτου έχει διάμετρο 70 cm. Πόσες στροφές κάνει σε διαδρομή 1,1 km; ($\pi \approx \frac{22}{7}$)

ΛΥΣΗ

Σε μία στροφή η ρόδα διανύει το μήκος της: $L = \pi \cdot 70 \approx \frac{22}{7} \cdot 70 = 220 \text{ cm} = 2,2 \text{ m}$. Στροφές: $\frac{1100}{2,2} = 500$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Τόξα σε μοίρες και ακτίνια

Σε κύκλο ακτίνας 9 να βρεθεί το μήκος τόξου (α) 40° (β) $\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$. (γ) Πόσες μοίρες είναι ένα τόξο μήκους 6π ;

ΛΥΣΗ

(α) $\ell = \frac{\pi \cdot 9 \cdot 40}{180} = 2\pi$. (β) $\ell = \frac{2\pi}{3} \cdot 9 = 6\pi$. (γ) $6\pi = \frac{\pi \cdot 9 \cdot \mu}{180} \Rightarrow \mu = 120^\circ$ — συνεπές με το (β), αφού $\frac{2\pi}{3} \text{ rad} = 120^\circ$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Περίμετρος «φέτας»

Να βρεθεί η περίμετρος κυκλικού τομέα με ακτίνα 6 και γωνία 150° .

ΛΥΣΗ

Η περίμετρος αποτελείται από δύο ακτίνες και το τόξο: $\Pi = 2 \cdot 6 + \frac{\pi \cdot 6 \cdot 150}{180} = 12 + 5\pi \approx 27,7$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Η Γη και ο ισημερινός

Αν μπορούσαμε να «δέσουμε» ένα σχοινί γύρω από τον ισημερινό της Γης και μετά το μακραίναμε κατά 1 μόλις μέτρο, πόσο θα «σηκωνόταν» το σχοινί από το έδαφος (αν παρέμενε κυκλικό και ομόκεντρο);

ΛΥΣΗ

Αν R η ακτίνα της Γης και $R + h$ η νέα ακτίνα: $2\pi(R + h) = 2\pi R + 1 \Rightarrow h = \frac{1}{2\pi} \approx 0,16 \text{ m} = 16 \text{ cm}$! Η απάντηση **δεν εξαρτάται** από το μέγεθος του κύκλου — το ίδιο θα συνέβαινε και με ένα πορτοκάλι. Πολλοί μαθητές μαντεύουν «σχεδόν μηδέν» — η Γεωμετρία μάς διαψεύδει. ■

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Μοίρες αντί για ακτίνια

Τόξο 60° σε κύκλο ακτίνας 3. Ο μαθητής γράφει ✗ $\ell = \alpha R = 60 \cdot 3 = 180$.

✓ Ο τύπος $\ell = \alpha R$ θέλει τη γωνία σε **ακτίνια**: $60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$, οπότε $\ell = \frac{\pi}{3} \cdot 3 = \pi$. (Ή με τον τύπο των μοιρών: $\frac{\pi \cdot 3 \cdot 60}{180} = \pi$.)

ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Θέλεις να δεις πώς ο Αρχιμήδης «παγίδευσε» τον αριθμό π ανάμεσα σε δύο πολύγωνα; Στο mathgreece.com θα βρεις δωρεάν πλήρες φροντιστήριο με διαδραστικές εφαρμογές και επιπλέον ασκήσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 11.4–11.5 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

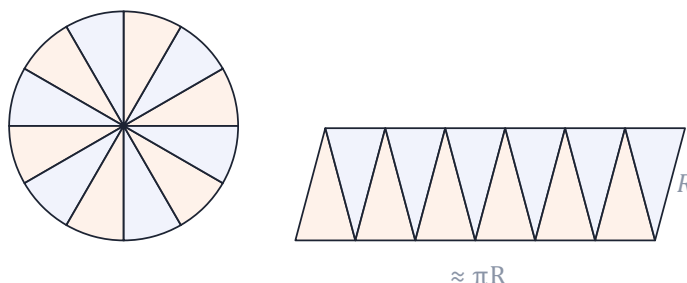
- 1 Να βρεθεί το μήκος κύκλου με ακτίνα 5 και η ακτίνα κύκλου με μήκος 18π .
●○○ → Λύση 11.4–11.5/1
- 2 Να μετατραπούν σε ακτίνια οι γωνίες 15° , 135° , 210° και σε μοίρες οι $\frac{\pi}{5}$, $\frac{5\pi}{6}$ rad.
●○○ → Λύση 11.4–11.5/2
- 3 Σε κύκλο ακτίνας 12 να βρεθεί το μήκος τόξου 75° .
●○○ → Λύση 11.4–11.5/3
- 4 Ένα τόξο έχει μήκος 4π και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία είναι $\frac{\pi}{3}$ rad. Να βρεθεί η ακτίνα του κύκλου και το μήκος του.
●●○ → Λύση 11.4–11.5/4
- 5 Ένα ρολόι έχει λεπτοδείκτη μήκους 10 cm. Πόση απόσταση διανύει η άκρη του σε 20 λεπτά; Πόση ο ωροδείκτης μήκους 6 cm στο ίδιο διάστημα;
●●○ → Λύση 11.4–11.5/5
- 6 Σε κύκλο ακτίνας R μια χορδή είναι ίση με R . Να βρεθεί το μήκος του μικρότερου τόξου που ορίζει.
●●○ → Λύση 11.4–11.5/6
- 7 Τέσσερις σωλήνες με διάμετρο 20 cm δέρονται σφιχτά με ένα λουρί έτσι ώστε τα κέντρα τους να σχηματίζουν τετράγωνο. Να βρεθεί το μήκος του λουριού.
●●● → Λύση 11.4–11.5/7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11
Μέτρηση κύκλου

ΜΑΘΗΜΑ 11.6–11.7

Εμβαδόν κύκλου – Κυκλικός τομέας – Κυκλικό τμήμα

◆ Εμβαδόν κύκλου



Ο κύκλος «ξεδιπλώνεται» σε σχεδόν-ορθογώνιο

Όπως με το μήκος, έτσι και με το εμβαδόν: τα εμβαδά των εγγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων $E_n = \frac{1}{2}P_n\alpha_n$ πλησιάζουν έναν αριθμό, το **εμβαδόν του κύκλου**. Καθώς το n μεγαλώνει, η περίμετρος P_n πλησιάζει το $2\pi R$ και το απόστημα α_n πλησιάζει την ακτίνα R , οπότε το εμβαδόν πλησιάζει το $\frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$. Το σχήμα δείχνει και μια διαισθητική εικόνα: κόβοντας τον κύκλο σε πολλές λεπτές «φέτες» και τοποθετώντας τις εναλλάξ, παίρνουμε σχεδόν ένα ορθογώνιο με διαστάσεις πR (μισή περιφέρεια) και R .

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Εμβαδόν κύκλου

$$E = \pi R^2.$$

◆ Κυκλικός τομέας

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Κυκλικός τομέας

Κυκλικός τομέας λέγεται το μέρος του κυκλικού δίσκου που περικλείεται από δύο ακτίνες και το τόξο ανάμεσά τους (η «φέτα πίτσας»).

Το εμβαδόν του τομέα είναι ανάλογο της γωνίας του: ολόκληρος ο κύκλος (360°) έχει πR^2 , άρα:

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Τομέας γωνίας μ° (ή α rad) σε κύκλο ακτίνας R :

$$E_{\text{τομ}} = \frac{\pi R^2 \mu}{360} = \frac{1}{2} \alpha R^2 = \frac{1}{2} \ell R,$$

όπου ℓ το μήκος του τόξου του.

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ο τύπος $E = \frac{1}{2} \ell R$ μοιάζει εντυπωσιακά με τον τύπο του εμβαδού τριγώνου $\frac{1}{2} \cdot \text{βάση} \cdot \text{ύψος}$: ο τομέας συμπεριφέρεται σαν ένα «τρίγωνο» με βάση το τόξο και ύψος την ακτίνα.

◆ Κυκλικό τμήμα

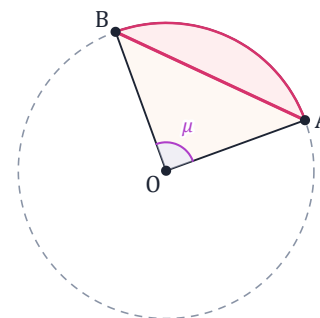
📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Κυκλικό τμήμα

Κυκλικό τμήμα λέγεται το μέρος του κυκλικού δίσκου που περικλείεται από μια χορδή AB και το αντίστοιχο τόξο.

Για το κυκλικό τμήμα που αντιστοιχεί σε τόξο $\mu^\circ < 180^\circ$, αφαιρούμε από τον τομέα το τρίγωνο ΟΑΒ:

$$E_{\tau\mu} = E_{\tau\omicron\mu} - (\text{ΟΑΒ}) = \frac{\pi R^2 \mu}{360} - \frac{1}{2} R^2 \eta\mu\mu.$$

Για $\mu > 180^\circ$ το τρίγωνο **προστίθεται** (ή, απλούστερα, αφαιρούμε από τον κύκλο το «μικρό» κυκλικό τμήμα).



Κυκλικό τμήμα = τομέας – τρίγωνο

ΣΥΝΟΨΗ — Τυπολόγιο κύκλου

Μέγεθος	Τύπος
Μήκος κύκλου	$L = 2\pi R$
Μήκος τόξου	$\ell = \frac{\pi R \mu}{180} = \alpha R$
Εμβαδόν κύκλου	$E = \pi R^2$
Εμβαδόν τομέα	$\frac{\pi R^2 \mu}{360} = \frac{1}{2} \alpha R^2 = \frac{1}{2} \ell R$
Εμβαδόν κυκλικού τμήματος	τομέας – τρίγωνο ΟΑΒ
Κυκλικός δακτύλιος	$\pi(R^2 - \rho^2)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Κυκλικός δακτύλιος

Δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες 5 και 3. Να βρεθεί το εμβαδόν του δακτυλίου ανάμεσά τους. Να αποδειχθεί επίσης ότι, αν μια χορδή του μεγάλου κύκλου εφάπτεται στον μικρό και έχει μήκος $2t$, τότε το εμβαδόν του δακτυλίου είναι πt^2 .

ΛΥΣΗ

$$E = \pi(25 - 9) = 16\pi.$$

Γενικά: η ακτίνα του μικρού κύκλου προς το σημείο επαφής είναι κάθετη στη χορδή και τη διχοτομεί. Πυθαγόρειο: $t^2 + \rho^2 = R^2$, άρα $E = \pi(R^2 - \rho^2) = \pi t^2$. (Στο παράδειγμα $t = 4$, 16π ✓.) Το εμβαδόν εξαρτάται **μόνο** από το μήκος της χορδής!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Τομέας και τμήμα

Σε κύκλο ακτίνας 6 να βρεθούν τα εμβαδά του τομέα και του κυκλικού τμήματος που αντιστοιχούν σε τόξο 60° .

ΛΥΣΗ

Τομέας: $\frac{\pi \cdot 36 \cdot 60}{360} = 6\pi$. Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο πλευράς 6: $(\text{ΟΑΒ}) = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$. Κυκλικό τμήμα: $6\pi - 9\sqrt{3} \approx 18,85 - 15,59 = 3,26$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Τομέας από το τόξο

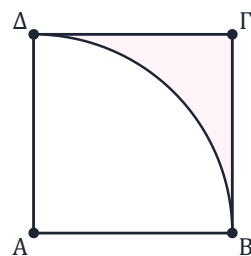
Ένας κυκλικός τομέας έχει ακτίνα 8 και μήκος τόξου 6. Να βρεθεί το εμβαδόν του και η γωνία του.

ΛΥΣΗ

$$E = \frac{1}{2} \ell R = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24. \text{ Γωνία: } \alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{6}{8} = 0,75 \text{ rad} \approx 43^\circ.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Σκιασμένο σχήμα σε τετράγωνο

Τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά 4. Με κέντρο το A και ακτίνα 4 γράφουμε τόξο $B\Delta$ μέσα στο τετράγωνο. Να βρεθεί το εμβαδόν του μέρους του τετραγώνου που είναι έξω από τον τομέα (σκιασμένο).



ΛΥΣΗ

Τετράγωνο: 16. Τομέας τεταρτοκυκλίου: $\frac{\pi \cdot 16}{4} = 4\pi$. Σκιασμένο: $16 - 4\pi \approx 3,43$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Εγγεγραμμένος κύκλος σε τετράγωνο

Σε τετράγωνο πλευράς 10 είναι εγγεγραμμένος κύκλος. Τι ποσοστό του τετραγώνου καλύπτει ο κύκλος;

ΛΥΣΗ

$R = 5$, $E_K = 25\pi$, $E_T = 100$. Ποσοστό $\frac{25\pi}{100} = \frac{\pi}{4} \approx 78,5\%$ — για **κάθε** τετράγωνο, ανεξάρτητα από το μέγεθος.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Σύγχυση τομέα και τμήματος

✗ «Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος 60° σε κύκλο ακτίνας 6 είναι 6π .»

✓ Το 6π είναι το εμβαδόν του **τομέα** (μαζί με το τρίγωνο). Το **τμήμα** είναι μόνο το κομμάτι ανάμεσα στη χορδή και στο τόξο: $6\pi - 9\sqrt{3}$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Διάμετρος αντί για ακτίνα

Κύκλος με διάμετρο 10. ✗ $E = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$.

✓ $R = 5$, $E = 25\pi$. Πριν χρησιμοποιήσεις οποιονδήποτε τύπο, γράψε ρητά « $R = \dots$ ».

💡 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πώς λύνουμε ασκήσεις με «σκιασμένα» σχήματα

1. Αναλύουμε το σκιασμένο χωρίο σε **αθροίσματα και διαφορές** γνωστών σχημάτων (κύκλοι, τομείς, τρίγωνα, τετράγωνα).
2. Εκμεταλλευόμαστε **συμμετρίες**: συχνά το σχήμα αποτελείται από ίσα κομμάτια.
3. Βρίσκουμε πρώτα όλες τις **ακτίνες και γωνίες** που χρειάζονται.
4. Αφήνουμε το αποτέλεσμα σε ακριβή μορφή (με π , $\sqrt{3}$), εκτός αν ζητείται προσέγγιση.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Οι ασκήσεις με σκιασμένα σχήματα είναι πολύ αγαπητές στα διαγωνίσματα. Στο mathgreece.com θα βρεις δωρεάν πλήρες φροντιστήριο με δεκάδες τέτοιες ασκήσεις, λυμένες βήμα-βήμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 11.6–11.7 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Να βρεθεί το εμβαδόν κύκλου με μήκος 14π .
●○○ → Λύση 11.6–11.7/1
- 2 Σε κύκλο ακτίνας 10 να βρεθεί το εμβαδόν τομέα 72° .
●○○ → Λύση 11.6–11.7/2
- 3 Κύκλος έχει εμβαδόν 36π . Να βρεθεί το μήκος του.
●○○ → Λύση 11.6–11.7/3
- 4 Σε κύκλο ακτίνας 4 να βρεθεί το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που αντιστοιχεί σε τόξο 90° .
●●○ → Λύση 11.6–11.7/4
- 5 Μια πίτσα με διάμετρο 30 cm κοστίζει 9 ευρώ και μια πίτσα με διάμετρο 40 cm κοστίζει 15 ευρώ. Ποια συμφέρει περισσότερο (τιμή ανά cm^2);
●●○ → Λύση 11.6–11.7/5
- 6 Σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 6 είναι εγγεγραμμένος κύκλος. Να βρεθεί το εμβαδόν του μέρους του τριγώνου που είναι έξω από τον κύκλο.
●●○ → Λύση 11.6–11.7/6
- 7 Ένας κυκλικός τομέας έχει περίμετρο 20 και ακτίνα 5. Να βρεθεί το εμβαδόν του.
●●○ → Λύση 11.6–11.7/7
- 8 Να βρεθεί το εμβαδόν του «φύλλου» που σχηματίζεται μέσα σε τετράγωνο πλευράς a από δύο τόξα τεταρτοκυκλίων με κέντρα δύο απέναντι κορυφές και ακτίνα a .
●●● → Λύση 11.6–11.7/8
- 9 Σε κύκλο ακτίνας R εγγράφουμε ισόπλευρο τρίγωνο. Να βρεθεί το εμβαδόν καθενός από τα τρία κυκλικά τμήματα που δημιουργούνται.
●●● → Λύση 11.6–11.7/9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11
Μέτρηση κύκλου

ΜΑΘΗΜΑ 11.8

Τετραγωνισμός κύκλου

◆ Ένα πρόβλημα 2.300 ετών

Στο μάθημα 10.6 είδαμε ότι **κάθε** πολύγωνο μπορεί να μετασχηματιστεί με κανόνα και διαβήτη σε ισοδύναμο τετράγωνο. Το φυσικό επόμενο ερώτημα, που απασχόλησε τους αρχαίους Έλληνες, είναι:

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου

Δίνεται κύκλος ακτίνας R . Να κατασκευαστεί, **μόνο με κανόνα και διαβήτη** και σε **πεπερασμένο αριθμό βημάτων**, τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του κύκλου.

Αλγεβρικά, ζητάμε τετράγωνο πλευράς x με $x^2 = \pi R^2$, δηλαδή $x = R\sqrt{\pi}$. Επομένως το πρόβλημα ισοδυναμεί με την κατασκευή τμήματος μήκους $\sqrt{\pi}$ (με μονάδα την ακτίνα) — ή, ισοδύναμα, τμήματος μήκους π .

◆ Γιατί είναι αδύνατο

Με κανόνα και διαβήτη, ξεκινώντας από ένα μοναδιαίο τμήμα, μπορούμε να κατασκευάσουμε τμήματα που προκύπτουν από τις πράξεις $+$, $-$, $\times$, $\div$ και **τετραγωνικές ρίζες** (όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 9). Τέτοιοι αριθμοί είναι πάντα **αλγεβρικοί**: ρίζες πολυωνυμικών εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές.

Το 1882 ο Γερμανός μαθηματικός **Ferdinand von Lindemann** απέδειξε ότι το π **δεν** είναι αλγεβρικός αριθμός (είναι **υπερβατικός**). Άρα ούτε το $\sqrt{\pi}$ είναι κατασκευάσιμο, και

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Θεώρημα (Lindemann, 1882)

Ο τετραγωνισμός του κύκλου με κανόνα και διαβήτη είναι **αδύνατος**.

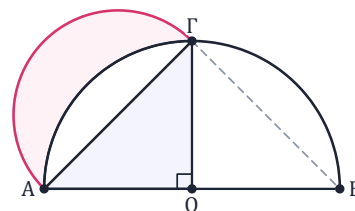
🏠 ΛΙΓΗ ΙΣΤΟΡΙΑ — Τα τρία άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας

Ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι ένα από τα **τρία διάσημα προβλήματα** της αρχαίας ελληνικής Γεωμετρίας, μαζί με τον **διπλασιασμό του κύβου** (το «Δήλιο πρόβλημα»: κατασκευή κύβου με διπλάσιο όγκο) και την **τριχοτόμηση γωνίας**. Και τα τρία αποδείχθηκαν αδύνατα με κανόνα και διαβήτη τον 19ο αιώνα. Η αναζήτηση λύσεων όμως, επί δύο χιλιετίες, γέννησε τεράστιο πλούτο Μαθηματικών: κωνικές τομές, καμπύλες όπως η τετραγωνίζουσα του Ιππία, και τελικά την αφηρημένη Άλγεβρα. Η φράση «τετραγωνίζω τον κύκλο» χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα για να δηλώσει κάτι ακατόρθωτο.

◆ Οι μηνίσκοι του Ιπποκράτη: ένας «τετραγωνισμός» που πετυχαίνει!

Ο **Ιπποκράτης ο Χίος** (5ος αι. π.Χ.) έδειξε ότι ορισμένα σχήματα με **καμπύλα** όρια μπορούν να τετραγωνιστούν. Ο απλούστερος από τους «μηνίσκους» του κατασκευάζεται ως εξής:

Σε ημικύκλιο διαμέτρου $AB = 2R$ παίρνουμε το μέσο Γ του τόξου, οπότε το $\triangle A\Gamma B$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο με $A\Gamma = \Gamma B = R\sqrt{2}$. Με διάμετρο την $A\Gamma$ γράφουμε ημικύκλιο **προς τα έξω**. Ο **μηνίσκος** είναι το «φεγγάρι» ανάμεσα στο μικρό ημικύκλιο και στο τόξο $A\Gamma$ του μεγάλου κύκλου.



Ο μηνίσκος (κόκκινος) έχει εμβαδόν ίσο με το τρίγωνο $\triangle A\Gamma B$

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Μηνίσκος του Ιπποκράτη

Το εμβαδόν του μηνίσκου ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle A\Gamma B$ (δηλαδή με $\frac{R^2}{2}$).

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Μικρό ημικύκλιο (διάμετρος $A\Gamma = R\sqrt{2}$, ακτίνα $\frac{R\sqrt{2}}{2}$): εμβαδόν $\frac{1}{2}\pi \frac{2R^2}{4} = \frac{\pi R^2}{4}$.
- Κυκλικό τμήμα $A\Gamma$ του μεγάλου κύκλου (τόξο 90°): τομέας $\frac{\pi R^2}{4}$ μείον τρίγωνο $\triangle A\Gamma B$ ($\frac{R^2}{2}$), δηλαδή $\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}$.

- Μηνίσκος = μικρό ημικύκλιο – κυκλικό τμήμα $= \frac{\pi R^2}{4} - \left(\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} \right) = \frac{R^2}{2} = (\text{ΑΟΓ})$.

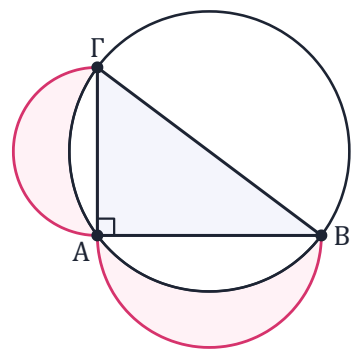
Το π «εξαφανίστηκε»! Το εμβαδόν του μηνίσκου είναι ίσο με εμβαδόν τριγώνου, άρα ο μηνίσκος τετραγωνίζεται με κανόνα και διαβήτη.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Τέτοιες επιτυχίες έδωσαν στους αρχαίους την ελπίδα ότι και ο κύκλος θα τετραγωνιζόταν. Σήμερα ξέρουμε ότι υπάρχουν ακριβώς πέντε τύποι μηνίσκων που τετραγωνίζονται με κανόνα και διαβήτη (τρεις βρήκε ο Ιπποκράτης) — αλλά ο κύκλος όχι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Οι μηνίσκοι ορθογωνίου τριγώνου

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) γράφουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο (διάμετρος $B\Gamma$) και, προς τα έξω, ημικύκλια με διαμέτρους τις κάθετες πλευρές AB και $A\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο μηνίσκων (κόκκινα) ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου.



ΛΥΣΗ

Ημικύκλια στις κάθετες: $\frac{\pi}{8}\gamma^2 + \frac{\pi}{8}\beta^2 = \frac{\pi}{8}(\beta^2 + \gamma^2) = \frac{\pi}{8}\alpha^2$, δηλαδή όσο το ημικύκλιο με διάμετρο την υποτείνουσα (Πυθαγόρειο!). Οι μηνίσκοι προκύπτουν αν από τα δύο μικρά ημικύκλια αφαιρέσουμε τα δύο κυκλικά τμήματα του μεγάλου κύκλου πάνω από τις AB , $A\Gamma$. Αλλά το ημικύκλιο της υποτείνουσας αποτελείται ακριβώς από το τρίγωνο **και** αυτά τα δύο κυκλικά τμήματα. Επομένως:

$$\text{μηνίσκοι} = \frac{\pi}{8}\alpha^2 - (\text{τμήματα}) = \frac{\pi}{8}\alpha^2 - \left(\frac{\pi}{8}\alpha^2 - (\text{ΑΒΓ}) \right) = (\text{ΑΒΓ}).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Μια καλή προσέγγιση

Ένας αρχαίος αιγυπτιακός κανόνας (πάπυρος Rhind, περ. 1650 π.Χ.) έλεγε: «το εμβαδόν κύκλου διαμέτρου d ισούται με το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς $\frac{8}{9}d$ ». Ποια τιμή του π αντιστοιχεί σε αυτόν τον κανόνα;

ΛΥΣΗ

$\pi \frac{d^2}{4} = \frac{64}{81}d^2 \Rightarrow \pi = \frac{256}{81} \approx 3,1605$. Σφάλμα μόλις 0,6% — εντυπωσιακό για την εποχή, αλλά όχι ακριβής τετραγωνισμός.

ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Η ιστορία των τριών άλυτων προβλημάτων της αρχαιότητας είναι συναρπαστική. Στο mathgreece.com θα βρεις περισσότερα ιστορικά σημειώματα, καθώς και πλήρες δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών για όλες τις τάξεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

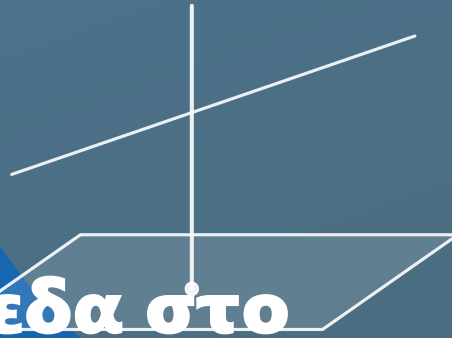
Μάθημα 11.8 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Να βρεθεί η πλευρά τετραγώνου ισοδύναμου με κύκλο ακτίνας 3 (με τη βοήθεια υπολογιστή, προσεγγιστικά). Γιατί αυτό δεν αποτελεί «τετραγωνισμό» του κύκλου;
●○○ → Λύση 11.8/1
- 2 Στον μηνίσκο του Ιπποκράτη (με ακτίνα του μεγάλου κύκλου $R = 4$) να υπολογίσετε το εμβαδόν του μηνίσκου και την πλευρά του ισοδύναμου τετραγώνου.
●●○ → Λύση 11.8/2
- 3 Στο σχήμα του Παραδείγματος 1 (μηνίσκοι ορθογωνίου τριγώνου), αν $AB = 8$ και $AG = 6$, να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε μηνίσκου ξεχωριστά.
●●● → Λύση 11.8/3

12

Ευθείες και επίπεδα στο χώρο



Τα μαθήματα του κεφαλαίου

- 12.1–12.3** Το επίπεδο και οι σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων
- 12.4** Ευθείες και επίπεδα παράλληλα – Θεώρημα του Θαλή στον χώρο
- 12.5** Γωνία δύο ευθειών – Ευθεία κάθετη σε επίπεδο
- 12.6** Απόσταση σημείου από επίπεδο – Απόσταση παράλληλων επιπέδων
- 12.7** Διέδρη γωνία – Κάθετα επίπεδα
- 12.8** Προβολή σε επίπεδο – Γωνία ευθείας και επιπέδου

Τι θα κατακτήσεις

- Να γνωρίζεις πώς καθορίζεται ένα επίπεδο.
- Να αναγνωρίζεις τις σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων (και τις ασύμβατες ευθείες).
- Να εφαρμόζεις το κριτήριο καθετότητας ευθείας–επιπέδου και το θεώρημα των τριών καθέτων.
- Να υπολογίζεις αποστάσεις, διέδρες γωνίες και γωνίες ευθείας–επιπέδου.

Ως τώρα όλα τα σχήματά μας ζούσαν σε ένα επίπεδο — στη σελίδα του τετραδίου. Ο κόσμος όμως έχει τρεις διαστάσεις. Στο κεφάλαιο αυτό βγαίνουμε στον χώρο: μελετάμε πώς ορίζεται ένα επίπεδο, πώς μπορούν να βρίσκονται μεταξύ τους ευθείες και επίπεδα, τι σημαίνει μια ευθεία να είναι κάθετη σε ένα επίπεδο και πώς μετράμε αποστάσεις και γωνίες στον χώρο. Είναι η απαραίτητη προετοιμασία για τα στερεά του Κεφαλαίου 13.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12
 Ευθείες και
 επίπεδα στο
 χώρο
ΜΑΘΗΜΑ 12.1–12.3
Το επίπεδο και οι σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ελέγξτε με τον καθηγητή σας αν τα Κεφάλαια 12 και 13 περιλαμβάνονται στην εξεταστέα ύλη της χρονιάς σας. Είτε περιλαμβάνονται είτε όχι, αποτελούν πολύτιμη προετοιμασία για τη Στερεομετρία και τα Μαθηματικά των επόμενων ετών.

Από το επίπεδο στον χώρο

Στη Στερεομετρία δουλεύουμε με **σημεία**, **ευθείες** και **επίπεδα**, που τα δεχόμαστε ως πρωταρχικές έννοιες. Ένα επίπεδο το φανταζόμαστε ως μια απεριόριστη, απόλυτα επίπεδη επιφάνεια (σαν ένα «άπειρο» τραπέζι) και το σχεδιάζουμε ως **παράλληλόγραμμο** σε προοπτική. Τα επίπεδα συμβολίζονται με μικρά ελληνικά γράμματα ($p, q, \dots$) ή με κεφαλαία ($\Pi, \Sigma, \dots$).

Ορισμένες βασικές ιδιότητες τις δεχόμαστε χωρίς απόδειξη (αξιώματα):

- Αν δύο σημεία μιας ευθείας ανήκουν σε ένα επίπεδο, τότε **ολόκληρη** η ευθεία ανήκει στο επίπεδο.
- Από τρία σημεία που **δεν** είναι συνευθειακά διέρχεται **ένα και μόνο** επίπεδο.
- Αν δύο διαφορετικά επίπεδα έχουν ένα κοινό σημείο, τότε έχουν και μια **κοινή ευθεία** (την **τομή** τους), που διέρχεται από αυτό το σημείο.
- Υπάρχουν τέσσερα σημεία που δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο (ο χώρος δεν είναι «επίπεδος»).

Πώς καθορίζεται ένα επίπεδο

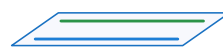

τρία μη συνευθειακά σημεία



ευθεία και σημείο εκτός της



δύο τεμνόμενες ευθείες



δύο παράλληλες ευθείες

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Καθορισμός επιπέδου

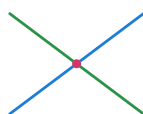
Ένα επίπεδο ορίζεται μονοσήμαντα από:

1. τρία σημεία που δεν είναι συνευθειακά·
2. μια ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής·
3. δύο τεμνόμενες ευθείες·
4. δύο παράλληλες ευθείες.

Οι περιπτώσεις 2–4 ανάγονται στην 1: σε καθεμία διαλέγουμε τρία μη συνευθειακά σημεία (π.χ. δύο σημεία της ευθείας και το σημείο εκτός της).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Γιατί τα τραπέζια με τρία πόδια δεν «κουτσαίνουν»

Οι άκρες τριών ποδιών ορίζουν **πάντα** ένα επίπεδο, οπότε ακουμπούν όλες στο πάτωμα. Με τέσσερα πόδια, αν το ένα είναι λίγο κοντύτερο, οι τέσσερις άκρες δεν είναι συνεπίπεδες — και το τραπέζι «κουτσαίνει»!

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών


τεμνόμενες



παράλληλες



ασύμβατες

Τεμνόμενες, παράλληλες, ασύμβατες ευθείες

Δύο ευθείες του χώρου μπορεί να είναι:

- **τεμνόμενες:** έχουν ένα κοινό σημείο (και τότε είναι συνεπίπεδες).
- **παράλληλες:** είναι **συνεπίπεδες** και δεν έχουν κοινό σημείο.
- **ασύμβατες:** δεν υπάρχει επίπεδο που να τις περιέχει και τις δύο. (Τότε φυσικά δεν τέμνονται, αλλά ούτε είναι παράλληλες.)

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Νέο φαινόμενο του χώρου!

Στο επίπεδο, δύο ευθείες που δεν τέμνονται είναι παράλληλες. Στον **χώρο** αυτό δεν ισχύει: μπορεί να είναι **ασύμβατες**. Παράδειγμα: σε ένα δωμάτιο, μια ακμή του δαπέδου και μια ακμή του ταβανιού που δεν είναι παράλληλες μεταξύ τους.

◆ Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου

Μια ευθεία ε και ένα επίπεδο p μπορεί:

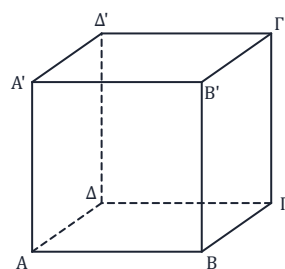
- η ε να **περιέχεται** στο p (άπειρα κοινά σημεία).
- η ε να **τέμνει** το p (ένα κοινό σημείο, το **ίχνος** της).
- η ε να είναι **παράλληλη** στο p (κανένα κοινό σημείο).

◆ Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων

Δύο διαφορετικά επίπεδα είτε **τέμνονται** κατά μια ευθεία, είτε είναι **παράλληλα** (δεν έχουν κανένα κοινό σημείο).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ακμές κύβου

Στον κύβο $ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ'$ να βρεθεί η σχετική θέση των ευθειών: (α) $ΑΒ$ και $Γ'Δ'$ (β) $ΑΒ$ και $ΒΒ'$ (γ) $ΑΒ$ και $ΓΓ'$ (δ) $ΑΒ$ και του επιπέδου $Α'Β'Γ'Δ'$.



ΛΥΣΗ

(α) **Παράλληλες:** $ΑΒ \parallel ΔΓ \parallel Δ'Γ'$ (και είναι συνεπίπεδες, στο επίπεδο $ΑΒΓ'Δ'$). (β) **Τεμνόμενες** στο $Β$. (γ) **Ασύμβατες:** δεν τέμνονται, και αν ήταν συνεπίπεδες το επίπεδό τους θα περιείχε τα $Α, Β, Γ$ — δηλαδή θα ήταν το επίπεδο της βάσης, που όμως δεν περιέχει το $Γ'$. (δ) Η $ΑΒ$ είναι **παράλληλη** στο επίπεδο της πάνω έδρας (δεν έχει κοινό σημείο μαζί του).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Πόσα επίπεδα;

Πόσα επίπεδα ορίζουν τέσσερα σημεία, από τα οποία ανά τρία δεν είναι συνευθειακά και τα τέσσερα δεν είναι συνεπίπεδα;

ΛΥΣΗ

Κάθε τριάδα ορίζει ένα επίπεδο, και διαφορετικές τριάδες δίνουν διαφορετικά επίπεδα (αλλιώς τα τέσσερα σημεία θα ήταν συνεπίπεδα). Οι τριάδες είναι $\binom{4}{3} = 4$, άρα **4 επίπεδα** — οι τέσσερις έδρες ενός τετραέδρου.

⊗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — «Δεν τέμνονται, άρα παράλληλες»

✗ «Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ του χώρου δεν έχουν κοινό σημείο, άρα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.»

✓ Για να είναι παράλληλες πρέπει επιπλέον να είναι **συνεπίπεδες**. Αλλιώς είναι ασύμβατες.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Η Στερεομετρία θέλει «φαντασία στον χώρο». Στο mathgreece.com θα βρεις δωρεάν πλήρες φροντιστήριο με τριδιάστατα κινούμενα σχήματα που βοηθούν πολύ στην κατανόηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 12.1–12.3 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Σε κύβο $AB\Gamma\Delta A'B'\Gamma'\Delta'$ να βρείτε όλες τις ακμές που είναι ασύμβατες με την AA' .

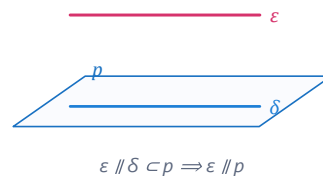
●○○ → Λύση 12.1–12.3/1
- 2** Να εξηγήσετε γιατί μια πόρτα που περιστρέφεται γύρω από τους μεντεσέδες της «σαρώνει» διαφορετικά επίπεδα που έχουν όλα μια κοινή ευθεία.

●○○ → Λύση 12.1–12.3/2
- 3** Τρεις ευθείες ανά δύο τέμνονται, αλλά δεν διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο. Να αποδείξετε ότι είναι συνεπίπεδες.

●●○ → Λύση 12.1–12.3/3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12
 Ευθείες και
 επίπεδα στο
 χώρο
ΜΑΘΗΜΑ 12.4
**Ευθείες και επίπεδα παράλληλα – Θεώρημα του
 Θαλή στον χώρο**
Παραλληλία ευθείας και επιπέδου
★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Κριτήριο παραλληλίας ευθείας-επιπέδου

Αν μια ευθεία ε , που δεν ανήκει σε ένα επίπεδο p , είναι παράλληλη σε μια ευθεία δ του p , τότε ε είναι παράλληλη στο p .

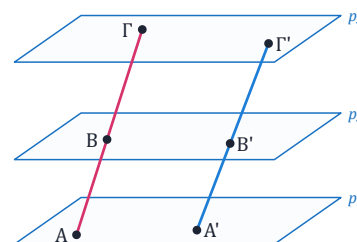

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Ιδιότητες παραλλήλων

- Αν μια ευθεία ε είναι παράλληλη σε επίπεδο p , τότε κάθε επίπεδο που περιέχει την ε και τέμνει το p , το τέμνει κατά ευθεία **παράλληλη** στην ε .
- Δύο ευθείες παράλληλες προς **τρίτη** είναι παράλληλες μεταξύ τους (ισχύει και στον χώρο).
- Αν δύο τεμνόμενες ευθείες ενός επιπέδου q είναι παράλληλες σε ένα επίπεδο p , τότε $q \parallel p$.
- Αν δύο **παράλληλα** επίπεδα τέμνονται από τρίτο επίπεδο, οι τομές είναι **παράλληλες** ευθείες.

Το θεώρημα του Θαλή στον χώρο
★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Θεώρημα του Θαλή στον χώρο

Αν τρία (ή περισσότερα) **παράλληλα επίπεδα** τέμνουν δύο ευθείες δ_1 και δ_2 στα σημεία A, B, Γ και A', B', Γ' αντίστοιχα, τότε

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}.$$



Παράλληλα επίπεδα ορίζουν ανάλογα τμήματα

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν οι δ_1, δ_2 είναι συνεπίπεδες, το επίπεδό τους τέμνει τα τρία παράλληλα επίπεδα κατά τρεις παράλληλες ευθείες και εφαρμόζουμε τον Θαλή του επιπέδου. Αλλιώς, φέρνουμε την $A\Gamma'$, που τέμνει το μεσαίο επίπεδο σε ένα σημείο M . Το επίπεδο των δ_1 και $A\Gamma'$ τέμνει τα επίπεδα p_2, p_3 κατά παράλληλες ευθείες $BM \parallel \Gamma\Gamma'$, άρα $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{AM}{M\Gamma'}$. Ομοίως, το επίπεδο των $A\Gamma'$ και δ_2 δίνει $AA' \parallel MB'$, άρα $\frac{AM}{M\Gamma'} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$. Συνδυάζοντας, $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Εφαρμογή του Θαλή στον χώρο

Τρία παράλληλα επίπεδα τέμνουν μια ευθεία στα A, B, Γ με $AB = 4$, $B\Gamma = 6$ και μια άλλη ευθεία στα A', B', Γ' με $A'\Gamma' = 25$. Να βρεθούν τα $A'B'$ και $B'\Gamma'$.

ΛΥΣΗ

$$\frac{A'B'}{4} = \frac{B'\Gamma'}{6} = \frac{25}{10} = 2,5, \text{ άρα } A'B' = 10 \text{ και } B'\Gamma' = 15.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Μέσα ακμών τετραέδρου

Σε τετράεδρο $AB\Gamma\Delta$ τα K, Λ, M, N είναι τα μέσα των ακμών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$. Να αποδειχθεί ότι το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο και ότι η AG είναι παράλληλη στο επίπεδό του.

ΛΥΣΗ

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η $K\Lambda$ ενώνει μέσα πλευρών, άρα $K\Lambda \parallel AG$ και $K\Lambda = \frac{AG}{2}$. Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ όμοια $NM \parallel AG$ και $NM = \frac{AG}{2}$. Άρα $K\Lambda \parallel NM$ (παράλληλες προς την ίδια ευθεία) και $K\Lambda = NM$: το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο (και συνεπίπεδο, αφού έχει δύο παράλληλες πλευρές). Η AG είναι παράλληλη στην $K\Lambda$, που ανήκει στο επίπεδο $K\Lambda MN$, και η AG δεν ανήκει σε αυτό· άρα $AG \parallel (K\Lambda MN)$. ■

ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Θέλεις περισσότερες ασκήσεις Στερεομετρίας με αναλυτικές λύσεις και σχήματα; Επισκέψου το mathgreece.com, όπου θα βρεις πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 12.4 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Δύο παράλληλα επίπεδα τέμνονται από τρίτο επίπεδο. Τι σχέση έχουν οι δύο τομές;
●○○ → Λύση 12.4/1
- 2 Τρία παράλληλα επίπεδα τέμνουν δύο ευθείες. Στη μία ορίζουν τμήματα 3 και x , και στην άλλη $x + 1$ και 8. Να βρεθεί το x .
●●○ → Λύση 12.4/2
- 3 Σε τετράεδρο $AB\Gamma\Delta$ με $AG = 10$ και $B\Delta = 6$, να βρεθεί η περίμετρος του παραλληλογράμμου $K\Lambda MN$ του Παραδείγματος 2.
●●○ → Λύση 12.4/3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12
Ευθείες και
επίπεδα στο
χώρο

ΜΑΘΗΜΑ 12.5

Γωνία δύο ευθειών – Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

◆ Γωνία ασύμβατων ευθειών

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Γωνία δύο ευθειών του χώρου

Γωνία δύο ασύμβατων ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ λέγεται η γωνία δύο **τεμνόμενων** ευθειών που φέρνουμε από ένα οποιοδήποτε σημείο του χώρου, παράλληλες προς τις ε_1 και ε_2 . (Το μέτρο της δεν εξαρτάται από το σημείο.) Αν η γωνία αυτή είναι ορθή, οι ευθείες λέγονται **ορθογώνιες**.

Παράδειγμα: σε έναν κύβο, οι ακμές AB και $\Gamma\Gamma'$ είναι ασύμβατες και **ορθογώνιες**, αφού $\Gamma\Gamma' \parallel BB'$ και $AB \perp BB'$.

◆ Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

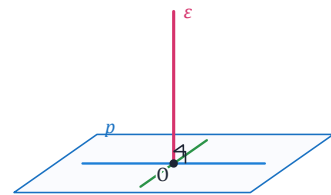
📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Κάθετη σε επίπεδο

Μια ευθεία ε που τέμνει ένα επίπεδο p στο σημείο O λέγεται **κάθετη στο επίπεδο** όταν είναι κάθετη σε **κάθε** ευθεία του p που διέρχεται από το O .

Ο ορισμός ζητά καθετότητα σε **άπειρες** ευθείες. Το επόμενο θεώρημα, ένα από τα πιο χρήσιμα της Στερεομετρίας, λέει ότι αρκούν **δύο**:

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Κριτήριο καθετότητας ευθείας και επιπέδου

Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε **δύο τεμνόμενες** ευθείες ενός επιπέδου στο σημείο τομής τους, τότε είναι κάθετη στο επίπεδο.



Κάθετη σε δύο τεμνόμενες $\Rightarrow$ κάθετη στο επίπεδο

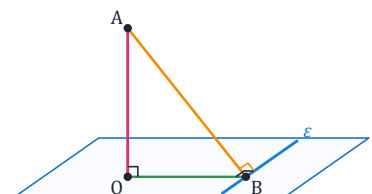
→ ΠΟΡΙΣΜΑ — Συνέπειες

- Από ένα σημείο διέρχεται **μία μόνο** ευθεία κάθετη σε δοσμένο επίπεδο, και **ένα μόνο** επίπεδο κάθετο σε δοσμένη ευθεία.
- Δύο ευθείες κάθετες στο ίδιο επίπεδο είναι **παράλληλες**.
- Δύο επίπεδα κάθετα στην ίδια ευθεία είναι **παράλληλα**.
- Το **μεσοκάθετο επίπεδο** ενός τμήματος AB (κάθετο στο AB στο μέσο του) είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από τα A και B .

◆ Το θεώρημα των τριών καθέτων

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Θεώρημα των τριών καθέτων

Έστω AO κάθετη σε επίπεδο p (με $O \in p$) και ε μια ευθεία του p που δεν διέρχεται από το O . Αν OB είναι η κάθετη από το O προς την ε ($B \in \varepsilon$), τότε και η AB είναι κάθετη στην ε .



$AO \perp p, OB \perp \varepsilon \Rightarrow AB \perp \varepsilon$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$H \varepsilon$ είναι κάθετη στην OB (υπόθεση) και στην AO (αφού η AO είναι κάθετη στο p , άρα και σε κάθε ευθεία του — και η παράλληλη προς την ε από το O είναι ευθεία του p). Η ε είναι λοιπόν ορθογώνια με δύο τεμνόμενες ευθείες AO, OB του

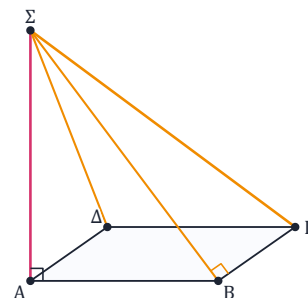
επιπέδου AOB , άρα είναι κάθετη σε αυτό το επίπεδο, και επομένως και στην AB που

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Πού χρησιμοποιείται

Το θεώρημα των τριών καθέτων είναι το βασικό εργαλείο για να βρούμε την **απόσταση ενός σημείου από μια ευθεία** που βρίσκεται σε ένα επίπεδο (π.χ. από την κορυφή μιας πυραμίδας ως μια ακμή της βάσης), καθώς και για να κατασκευάσουμε τις **διέδρες γωνίες** του επόμενου μαθήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Απόσταση με το θεώρημα των τριών καθέτων

Τετράγωνο $ABΓΔ$ έχει πλευρά 6. Στο A υψώνουμε κάθετη $ΑΣ = 8$ στο επίπεδό του. Να βρεθεί η απόσταση του $Σ$ από την ευθεία $ΒΓ$ και η απόσταση του $Σ$ από το $Γ$.



ΛΥΣΗ

Η SA είναι κάθετη στο επίπεδο και $AB \perp BG$. Από το θεώρημα των τριών καθέτων $SB \perp BG$, άρα η ζητούμενη απόσταση είναι $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$.

Το τρίγωνο $SBΓ$ είναι ορθογώνιο στο B : $SG = \sqrt{100 + 36} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$. (Η: $SG^2 = SA^2 + AG^2 = 64 + 72 = 136$ ✓.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Διαγώνιος κύβου ορθογώνια με διαγώνιο έδρας

Να αποδειχθεί ότι σε κύβο $ABΓΔΑ'B'Γ'D'$ η διαγώνιος $ΑΓ'$ είναι ορθογώνια με τη διαγώνιο $ΒΔ$ της βάσης.

ΛΥΣΗ

Η $ΓΓ'$ είναι κάθετη στο επίπεδο της βάσης, άρα και στη $ΒΔ$. Επίσης $ΑΓ \perp ΒΔ$ (διαγώνιοι τετραγώνου). Η $ΒΔ$ είναι λοιπόν κάθετη σε δύο τεμνόμενες ευθείες ($ΑΓ$ και $ΓΓ'$) του επιπέδου $ΑΓΓ'$, άρα κάθετη στο επίπεδο αυτό και επομένως ορθογώνια με την $ΑΓ'$ που ανήκει σε αυτό.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Κάθετη σε μία ευθεία του επιπέδου

✗ «Η ε είναι κάθετη σε μια ευθεία του επιπέδου p , άρα $\varepsilon \perp p$ »

✓ Χρειάζεται καθετότητα σε **δύο τεμνόμενες** ευθείες του επιπέδου. Ένα μολύβι πλάγια πάνω σε ένα τραπέζι μπορεί να είναι κάθετο σε μια ευθεία του τραπέζιού χωρίς να «στέκεται όρθιο».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 12.5 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

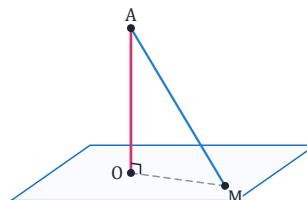
1 Σε κύβο $ABΓΔΑ'B'Γ'D'$ να βρεθεί η γωνία των ασύμβατων ευθειών AB και $B'Γ'$, καθώς και των AB' και $ΓΔ'$.

→ Λύση 12.5/1

- 2** Σημείο Σ απέχει 12 από επίπεδο p και O είναι η προβολή του στο p . Ευθεία ε του p απέχει 5 από το O . Να βρεθεί η απόσταση του Σ από την ε .
 ..○ → Λύση 12.5/2
-
- 3** Ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) έχει $AB = 6$, $A\Gamma = 8$. Στο A υψώνουμε κάθετη $A\Sigma = 4,8$ στο επίπεδό του. Να βρεθεί η απόσταση του Σ από τη $B\Gamma$.
 ..○ → Λύση 12.5/3
-

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12
 Ευθείες και
 επίπεδα στο
 χώρο
ΜΑΘΗΜΑ 12.6
**Απόσταση σημείου από επίπεδο – Απόσταση
 παράλληλων επιπέδων**
Απόσταση σημείου από επίπεδο
ΟΡΙΣΜΟΣ — Απόσταση σημείου από επίπεδο

Αν AO είναι η κάθετη από ένα σημείο A προς ένα επίπεδο p ($O \in p$), το μήκος AO λέγεται **απόσταση του A από το p** . Το O λέγεται **(ορθή) προβολή** του A στο p .



Η κάθετη AO είναι μικρότερη από κάθε πλάγια AM

Για κάθε άλλο σημείο M του p , το τρίγωνο AOM είναι ορθογώνιο στο O , οπότε $AM > AO$: η απόσταση είναι το μικρότερο από όλα τα τμήματα που ενώνουν το A με σημεία του επιπέδου. Επιπλέον, πλάγια τμήματα με ίσες προβολές είναι ίσα, και αντίστροφα.

Απόσταση παράλληλων επιπέδων και ευθείας από παράλληλο επίπεδο

Αν $p \parallel q$, όλα τα σημεία του p απέχουν **την ίδια** απόσταση από το q : αυτή λέγεται **απόσταση των παράλληλων επιπέδων**. Ομοίως, αν μια ευθεία ε είναι παράλληλη σε επίπεδο p , όλα τα σημεία της απέχουν το ίδιο από το p : αυτή είναι η **απόσταση της ευθείας από το επίπεδο**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Κοινή κάθετη ασύμβατων ευθειών

Για δύο ασύμβατες ευθείες υπάρχει μία μόνο ευθεία που τις τέμνει και είναι κάθετη και στις δύο: η **κοινή κάθετός** τους. Το τμήμα της ανάμεσα στις δύο ευθείες είναι η **απόσταση** των ασύμβατων ευθειών (η μικρότερη δυνατή απόσταση σημείων τους). Σε κύβο ακμής α , για παράδειγμα, οι ασύμβατες ακμές AB και $\Gamma\Gamma'$ έχουν κοινή κάθετο την $B\Gamma$ και απόσταση α .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ισαπέχοντα σημεία

Από σημείο A που απέχει 8 από επίπεδο p φέρνουμε πλάγια τμήματα μήκους 10 προς το p . Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των άκρων τους στο p ;

ΛΥΣΗ

Αν O η προβολή του A και M ένα άκρο, $OM = \sqrt{100 - 64} = 6$. Ο τόπος είναι ο κύκλος του p με κέντρο O και ακτίνα 6.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Απόσταση κορυφής κύβου από διαγώνιο επίπεδο

Σε κύβο ακμής α να βρεθεί η απόσταση της κορυφής B από το επίπεδο $ΑΓΓ'Α'$.

ΛΥΣΗ

Η $B\Delta$ είναι κάθετη στο επίπεδο $ΑΓΓ'Α'$ (είναι κάθετη στην $ΑΓ$ και στην $ΑΑ'$, όπως στο Παράδειγμα 2 του μαθήματος 12.5). Επομένως η απόσταση του B από το επίπεδο είναι το BO , όπου O το κέντρο της βάσης: $BO = \frac{B\Delta}{2} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 12.6 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

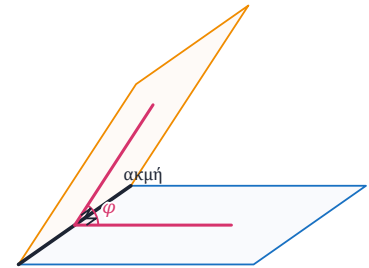
- 1 Σημείο απέχει 15 από επίπεδο. Ένα πλάγιο τμήμα από αυτό προς το επίπεδο έχει προβολή 8. Να βρεθεί το μήκος του.
●○○ → Λύση 12.6/1
- 2 Δύο σημεία A, B βρίσκονται προς το ίδιο μέρος επιπέδου p και απέχουν από αυτό 3 και 7. Αν οι προβολές τους στο p απέχουν 3, να βρεθεί το AB . Πόσο θα ήταν, αν τα σημεία ήταν εκατέρωθεν του p ;
●●○ → Λύση 12.6/2
- 3 Σε κύβο ακμής 4 να βρεθεί η απόσταση της κορυφής A από την ευθεία $B'T'$.
●●○ → Λύση 12.6/3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12
 Ευθείες και
 επίπεδα στο
 χώρο
ΜΑΘΗΜΑ 12.7**Διέδρη γωνία – Κάθετα επίπεδα**
◆ Διέδρη γωνία και η αντίστοιχη επίπεδη
📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Διέδρη γωνία

Το σχήμα που αποτελείται από δύο ημιεπίπεδα με κοινή αρχική ευθεία λέγεται **διέδρη γωνία**. Η κοινή ευθεία λέγεται **ακμή** και τα ημιεπίπεδα **έδρες** της.

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Αντίστοιχη επίπεδη γωνία

Αν από ένα σημείο O της ακμής φέρουμε, μέσα σε κάθε έδρα, την ημιευθεία που είναι **κάθετη στην ακμή**, η γωνία που σχηματίζουν οι δύο ημιευθείες λέγεται **αντίστοιχη επίπεδη γωνία** της διέδρης. Το μέτρο της δεν εξαρτάται από το σημείο O και θεωρείται **μέτρο της διέδρης**.


Διέδρη γωνία και η αντίστοιχη επίπεδη φ

Ένα ανοιχτό βιβλίο, μια μισάνοιχτη πόρτα, η στέγη ενός σπιτιού: όλα σχηματίζουν διέδρες γωνίες.

◆ Κάθετα επίπεδα
📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Κάθετα επίπεδα

Δύο επίπεδα που τέμνονται λέγονται **κάθετα** όταν μία (άρα και κάθε) διέδρη γωνία που σχηματίζουν είναι **ορθή**.

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Κριτήριο καθετότητας επιπέδων

Αν ένα επίπεδο περιέχει μια ευθεία κάθετη σε ένα άλλο επίπεδο, τότε τα δύο επίπεδα είναι κάθετα.

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Ιδιότητες

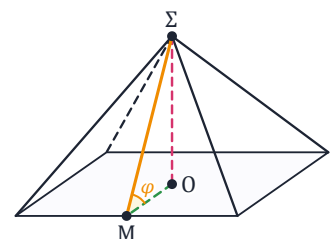
- Αν δύο επίπεδα είναι κάθετα, κάθε ευθεία του ενός που είναι κάθετη στην τομή τους είναι κάθετη στο άλλο επίπεδο.
- Αν δύο τεμνόμενα επίπεδα είναι κάθετα σε ένα τρίτο, τότε και η τομή τους είναι κάθετη στο τρίτο.

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Γι' αυτό οι τοίχοι ενός δωματίου είναι κάθετοι στο πάτωμα: περιέχουν τις κατακόρυφες ακμές, που είναι κάθετες στο πάτωμα. Και η γωνία δύο γειτονικών τοίχων, η κατακόρυφη ακμή, είναι κάθετη στο πάτωμα επειδή και οι δύο τοίχοι είναι κάθετοι σε αυτό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Διέδρη σε πυραμίδα

Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο πλευράς 6 και ύψος $\Sigma O = 4$. Να βρεθεί η διέδρη γωνία που σχηματίζει μια παράπλευρη έδρα με τη βάση (το συνημίτονό της).

**ΛΥΣΗ**

Αν M είναι το μέσο της AB , τότε $OM \perp AB$ ($OM = 3$) και, από το θεώρημα των τριών καθέτων, $SM \perp AB$. Άρα η αντίστοιχη επίπεδη γωνία της διέδρης είναι η $\varphi = \widehat{SMO}$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΣΟΜ$: $SM = \sqrt{16 + 9} = 5$ και $\sin \varphi = \frac{3}{5}$ ($\varphi \approx 53,1^\circ$). ■

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 12.7 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Να εξηγήσετε γιατί τα επίπεδα δύο γειτονικών εδρών ενός κύβου είναι κάθετα.

●○○

→ Λύση 12.7/1

- 2 Σε κύβο ακμής α να βρεθεί η διέδρη γωνία που σχηματίζει το διαγώνιο επίπεδο $A'B\Delta$ με τη βάση $AB\Gamma\Delta$ (το συνημίτονό της).

●●○

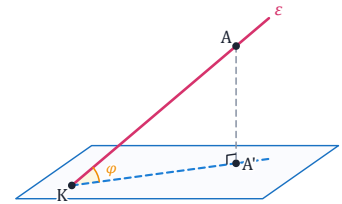
→ Λύση 12.7/2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12
 Ευθείες και
 επίπεδα στο
 χώρο
ΜΑΘΗΜΑ 12.8
**Προβολή σε επίπεδο – Γωνία ευθείας και
 επιπέδου**
◆ Προβολή ευθείας σε επίπεδο

Η **προβολή** ενός σχήματος σε ένα επίπεδο p είναι το σύνολο των προβολών των σημείων του. Η προβολή μιας ευθείας ε που **δεν** είναι κάθετη στο p είναι **ευθεία** (η τομή του p με το επίπεδο που περιέχει την ε και είναι κάθετο στο p)· αν $\varepsilon \perp p$, η προβολή της είναι **σημείο**.

◆ Γωνία ευθείας και επιπέδου
📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Γωνία ευθείας και επιπέδου

Αν μια ευθεία ε τέμνει ένα επίπεδο p και **δεν** είναι κάθετη σε αυτό, **γωνία της ε με το p** λέγεται η (οξεία) γωνία που σχηματίζει η ε με την **προβολή** της στο p . Αν $\varepsilon \perp p$, η γωνία είναι 90° · αν $\varepsilon \parallel p$ ή $\varepsilon \subset p$, η γωνία είναι 0° .

Γωνία ευθείας και επιπέδου φ
★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Ιδιότητα ελαχίστου

Η γωνία μιας ευθείας με ένα επίπεδο είναι η **μικρότερη** από όλες τις γωνίες που σχηματίζει η ευθεία με τις ευθείες του επιπέδου που διέρχονται από το ίχνος της.

Αν ένα τμήμα KA σχηματίζει γωνία φ με το επίπεδο και A' είναι η προβολή του A , τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $KA'A$:

$$KA' = KA \cdot \sin \varphi, \quad AA' = KA \cdot \eta \mu \varphi.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Διαγώνιος κύβου και βάση

Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η διαγώνιος AG' κύβου ακμής α με το επίπεδο της βάσης.

ΛΥΣΗ

Η προβολή της AG' στη βάση είναι η AG (αφού $G'G \perp$ βάση). Η γωνία είναι η $\varphi = \widehat{G'AG}$: $AG = \alpha\sqrt{2}$, $GG' = \alpha$, $AG' = \alpha\sqrt{3}$, οπότε $\varepsilon \varphi \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ($\varphi \approx 35,3^\circ$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Κλίση ράμπας

Μια ράμπα μήκους 5 m ανεβαίνει σε ύψος 0,6 m. Πόση είναι η γωνία της με το (οριζόντιο) έδαφος και πόσο είναι το μήκος της προβολής της;

ΛΥΣΗ

$$\eta \mu \varphi = \frac{0,6}{5} = 0,12, \text{ άρα } \varphi \approx 6,9^\circ. \text{ Προβολή: } \sqrt{25 - 0,36} = \sqrt{24,64} \approx 4,96 \text{ m.}$$

**ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;**

Η Στερεομετρία είναι πολύ πιο εύκολη όταν βλέπεις τα σχήματα να περιστρέφονται. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο με τρισδιάστατα σχήματα και λυμένες ασκήσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

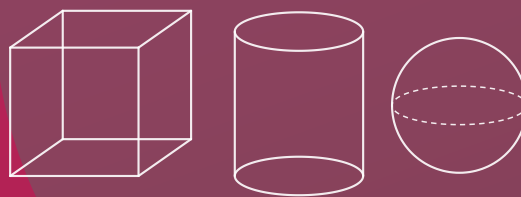
Μάθημα 12.8 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Ένα τμήμα μήκους 10 σχηματίζει γωνία 30° με ένα επίπεδο. Να βρεθούν η προβολή του και η απόσταση του ενός άκρου του από το επίπεδο, αν το άλλο άκρο ανήκει στο επίπεδο.
●○○ → Λύση 12.8/1
- 2 Σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 3, 4, 12 (το 12 είναι το ύψος), να βρεθεί η γωνία της διαγωνίου του με τη βάση.
●●○ → Λύση 12.8/2
- 3 Ένα τμήμα AB έχει το άκρο A πάνω σε επίπεδο p και σχηματίζει με το p γωνία 45° . Η προβολή του AB' σχηματίζει γωνία 45° με μια ευθεία ε του p που διέρχεται από το A . Να βρεθεί η γωνία των AB και ε .
●●● → Λύση 12.8/3

13

Στερεά σχήματα



Τα μαθήματα του κεφαλαίου

- 13.1** Περὶ πολυέδρων
- 13.2–13.4** Πρίσμα – Παραλληλεπίπεδο – Κύβος – Μέτρηση πρίσματος
- 13.5–13.7** Πυραμίδα – Κανονική πυραμίδα – Τετράεδρο – Μέτρηση
- 13.8–13.9** Κόλουρη πυραμίδα
- 13.10–13.15** Στερεά εκ περιστροφής: κύλινδρος, κώνος, κόλυρος κώνος
- 13.16–13.18** Η σφαίρα
- 13.19** Κανονικά πολύεδρα

Τι θα κατακτήσεις

- Να αναγνωρίζεις τα στοιχεία των πολυέδρων και να επαληθεύεις τον τύπο του Euler.
- Να υπολογίζεις επιφάνεια και όγκο πρίσματος, πυραμίδας και κόλουρης πυραμίδας.
- Να υπολογίζεις επιφάνεια και όγκο κυλίνδρου, κώνου, κόλουρου κώνου και σφαίρας.
- Να γνωρίζεις τα πέντε κανονικά πολύεδρα.

Κουτιά, πυραμίδες, κονσέρβες, χωνάκια παγωτού, μπάλες: τα στερεά σχήματα είναι παντού γύρω μας. Στο τελευταίο κεφάλαιο του βιβλίου μαθαίνουμε να υπολογίζουμε την **επιφάνεια** (πόσο υλικό χρειάζεται για να «ντύσουμε» ένα στερεό) και τον **όγκο** τους (πόσο χωράνε). Θα γνωρίσουμε τα πρίσματα, τις πυραμίδες, τον κύλινδρο, τον κώνο, τη σφαίρα και, στο τέλος, τα πέντε «τέλεια» στερεά του Πλάτωνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13
Στερεά σχήματα

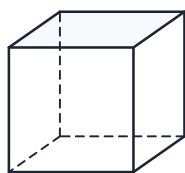
ΜΑΘΗΜΑ 13.1

Περί πολυέδρων

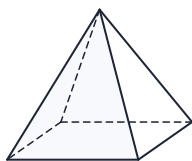
◆ Τι είναι πολυέδρο

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Πολυέδρο

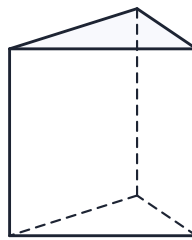
Πολυέδρο λέγεται ένα στερεό που περικλείεται από πεπερασμένο πλήθος **πολυγώνων**. Τα πολύγωνα λέγονται **έδρες**, οι πλευρές τους **ακμές** και οι κορυφές τους **κορυφές** του πολυέδρου. Ένα πολυέδρο είναι **κυρτό** αν βρίσκεται ολόκληρο προς τη μία μεριά του επιπέδου κάθε έδρας του.



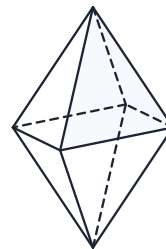
Κύβος



Πυραμίδα



Τριγωνικό πρίσμα



Οκτάεδρο

◆ Ο τύπος του Euler

Αν μετρήσουμε κορυφές (K), ακμές (A) και έδρες (E) σε διάφορα κυρτά πολυέδρα, ανακαλύπτουμε κάτι εντυπωσιακό:

Πολυέδρο	K	A	E	$K - A + E$
Τετράεδρο	4	6	4	2
Κύβος	8	12	6	2
Τριγωνικό πρίσμα	6	9	5	2
Τετραγωνική πυραμίδα	5	8	5	2
Οκτάεδρο	6	12	8	2

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Τύπος του Euler

Σε κάθε κυρτό πολυέδρο με K κορυφές, A ακμές και E έδρες ισχύει

$$K + E = A + 2.$$

🏛️ ΛΙΓΗ ΙΣΤΟΡΙΑ

Ο Leonhard Euler (1707–1783), ένας από τους πιο παραγωγικούς μαθηματικούς όλων των εποχών, δημοσίευσε τον τύπο το 1758. Ο τύπος αυτός θεωρείται η αφετηρία της **Τοπολογίας**, του κλάδου που μελετά τις ιδιότητες των σχημάτων που δεν αλλάζουν όταν τα «παραμορφώνουμε» χωρίς να τα σκίσουμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ποδοσφαιρική μπάλα

Η κλασική ποδοσφαιρική μπάλα (κόλουρο εικοσάεδρο) αποτελείται από 12 πεντάγωνα και 20 εξαγωνα. Πόσες ακμές και πόσες κορυφές έχει;

ΛΥΣΗ

Κάθε ακμή ανήκει σε δύο έδρες, οπότε $A = \frac{12 \cdot 5 + 20 \cdot 6}{2} = \frac{60 + 120}{2} = 90$. Έδρες $E = 32$. Από Euler: $K = A + 2 - E = 90 + 2 - 32 = 60$. (Έλεγχος: σε κάθε κορυφή συναντώνται 3 έδρες, άρα $K = \frac{180}{3} = 60$ ✓.) ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Ένα πολύεδρο που δεν υπάρχει

Υπάρχει κυρτό πολύεδρο με 7 ακμές;

ΛΥΣΗ

Κάθε κορυφή ανήκει σε τουλάχιστον 3 ακμές και κάθε ακμή έχει 2 κορυφές: $2A \geq 3K$. Κάθε έδρα έχει τουλάχιστον 3 ακμές και κάθε ακμή ανήκει σε 2 έδρες: $2A \geq 3E$. Με $A = 7$: $K \leq 4$ και $E \leq 4$, οπότε $K + E \leq 8$, ενώ ο Euler απαιτεί $K + E = 9$. Άτοπο — **δεν υπάρχει**. ■

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 13.1 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Ένα κυρτό πολύεδρο έχει 10 κορυφές και 15 ακμές. Πόσες έδρες έχει;

→ Λύση 13.1/1

●○○

- 2** Ένα πρίσμα έχει βάση n -γωνο. Να βρείτε τα K , A , E συναρτήσει του n και να επαληθεύσετε τον τύπο του Euler.

→ Λύση 13.1/2

●●○

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13
Στερεά σχήματα

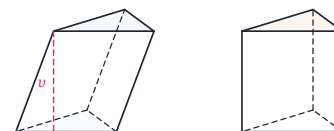
ΜΑΘΗΜΑ 13.2–13.4

Πρίσμα – Παραλληλεπίπεδο – Κύβος – Μέτρηση πρίσματος

Ορισμός και στοιχεία

ΟΡΙΣΜΟΣ — Πρίσμα

Πρίσμα λέγεται ένα πολύεδρο του οποίου δύο έδρες (οι **βάσεις**) είναι **ίσα πολύγωνα** σε **παράλληλα επίπεδα**, με τις ομόλογες πλευρές τους παράλληλες, ενώ οι υπόλοιπες έδρες (οι **παράπλευρες**) είναι **παραλληλόγραμμα**.



Πλάγιο και ορθό πρίσμα

- Οι ακμές που δεν ανήκουν στις βάσεις λέγονται **παράπλευρες ακμές**· είναι όλες ίσες και παράλληλες.
- **Ύψος** $υ$ του πρίσματος είναι η απόσταση των επιπέδων των βάσεων.
- Ένα πρίσμα λέγεται **ορθό** αν οι παράπλευρες ακμές είναι κάθετες στις βάσεις (τότε οι παράπλευρες έδρες είναι ορθογώνια και κάθε ακμή ισούται με το ύψος)· αλλιώς λέγεται **πλάγιο**.
- **Κανονικό** πρίσμα: ορθό, με βάση κανονικό πολύγωνο.
- **Ορθή τομή**: η τομή του πρίσματος με επίπεδο κάθετο στις παράπλευρες ακμές.

Παραλληλεπίπεδο και κύβος

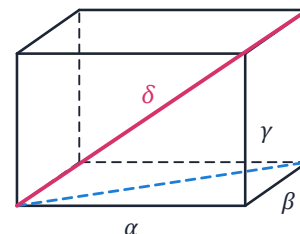
- **Παραλληλεπίπεδο**: πρίσμα με βάσεις παραλληλόγραμμα (όλες οι έδρες του είναι παραλληλόγραμμα).
- **Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο** («κουτί»): όλες οι έδρες είναι ορθογώνια. Τα μήκη α, β, γ τριών ακμών με κοινή κορυφή λέγονται **διαστάσεις** του.
- **Κύβος**: ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ίσες διαστάσεις (όλες οι έδρες τετράγωνα).

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Διαγώνιος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Οι τέσσερις διαγώνιοι ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ είναι ίσες, με μήκος

$$\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Για κύβο ακμής α : $\delta = \alpha\sqrt{3}$.



Διαγώνιος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η διαγώνιος της βάσης είναι $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Η κατακόρυφη ακμή γ είναι κάθετη στη βάση, άρα και στη διαγώνιο της βάσης. Πυθαγόρειο στο ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται: $\delta^2 = (\alpha^2 + \beta^2) + \gamma^2$. ■

Μέτρηση πρίσματος

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Επιφάνεια και όγκος πρίσματος

- **Παράπλευρη επιφάνεια**: $E_{\pi} = \Pi_{ορθ} \cdot \lambda$ (περίμετρος ορθής τομής $\times$ παράπλευρη ακμή). Για **ορθό** πρίσμα: $E_{\pi} = \Pi_{βάσης} \cdot υ$.
- **Ολική επιφάνεια**: $E_{ολ} = E_{\pi} + 2B$ (B = εμβαδόν βάσης).
- **Όγκος**: $V = B \cdot υ$.

ΣΥΝΟΨΗ — Ειδικές περιπτώσεις

Στερεό	Ολική επιφάνεια	Όγκος
Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $\alpha \times \beta \times \gamma$	$2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$	$\alpha\beta\gamma$
Κύβος ακμής α	$6\alpha^2$	α^3

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Η αρχή του Cavalieri

Δύο στερεά με το ίδιο ύψος, που κάθε επίπεδο παράλληλο στις βάσεις τα τέμνει σε χωρία **ίσων εμβαδών**, έχουν **ίσους όγκους**. Γι' αυτό ένα πλάγιο πρίσμα έχει τον ίδιο όγκο με ένα ορθό πρίσμα με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος — σκέψου μια στοίβα από κέρματα που τη «γέρνεις».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Τριγωνικό πρίσμα

Ορθό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 3 και 4 και ύψος 10. Να βρεθούν η παράπλευρη και η ολική επιφάνεια και ο όγκος.

ΛΥΣΗ

Υποτείνουσα βάσης 5, περίμετρος 12, εμβαδόν βάσης $B = 6$. $E_{\pi} = 12 \cdot 10 = 120$, $E_{ολ} = 120 + 12 = 132$, $V = 6 \cdot 10 = 60$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Κουτί

Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις 2, 3, 6. Να βρεθούν η διαγώνιος, η ολική επιφάνεια και ο όγκος.

ΛΥΣΗ

$\delta = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$, $E_{ολ} = 2(6 + 18 + 12) = 72$, $V = 36$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Κύβος από τη διαγώνιο

Ένας κύβος έχει διαγώνιο $6\sqrt{3}$. Να βρεθούν η ολική επιφάνεια και ο όγκος του.

ΛΥΣΗ

$\alpha\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 6$. $E_{ολ} = 216$, $V = 216$. (Ισότητα αριθμών, όχι μεγεθών — οι μονάδες διαφέρουν!)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Κανονικό εξαγωνικό πρίσμα

Κανονικό εξαγωνικό πρίσμα έχει ακμή βάσης 2 και ύψος 5. Να βρεθεί ο όγκος του.

ΛΥΣΗ

$B = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 6\sqrt{3}$ (κανονικό εξάγωνο με $R = \lambda_6 = 2$). $V = 6\sqrt{3} \cdot 5 = 30\sqrt{3}$.

ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Όγκος πλάγιου πρίσματος

✗ «Πλάγιο πρίσμα με βάση B και παράπλευρη ακμή λ έχει όγκο $B \cdot \lambda$.»

✓ Ο όγκος είναι $B \cdot v$, όπου v το **ύψος** (απόσταση των βάσεων). Στο πλάγιο πρίσμα $v < \lambda$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 13.2–13.4 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Κύβος έχει ολική επιφάνεια 150. Να βρεθούν ο όγκος και η διαγώνιος του.
●○○ → Λύση 13.2–13.4/1
- 2 Ένα ενυδρείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει διαστάσεις $80 \times 40 \times 50$ cm. Πόσα λίτρα νερό χωράει; ($1 \text{ λίτρο} = 1000 \text{ cm}^3$)
●○○ → Λύση 13.2–13.4/2
- 3 Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις ανάλογες των 1, 2, 2 και διαγώνιο 12. Να βρεθεί ο όγκος του.
●●○ → Λύση 13.2–13.4/3
- 4 Κανονικό τριγωνικό πρίσμα έχει όλες τις ακμές του ίσες με 6. Να βρεθούν η ολική επιφάνεια και ο όγκος του.
●●○ → Λύση 13.2–13.4/4
- 5 Αν διπλασιάσουμε όλες τις διαστάσεις ενός κουτιού, πόσες φορές μεγαλώνουν η επιφάνεια και ο όγκος του; Γενικεύστε για λόγο λ .
●●● → Λύση 13.2–13.4/5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13
Στερεά σχήματα

ΜΑΘΗΜΑ 13.5–13.7

Πυραμίδα – Κανονική πυραμίδα – Τετράεδρο – Μέτρηση

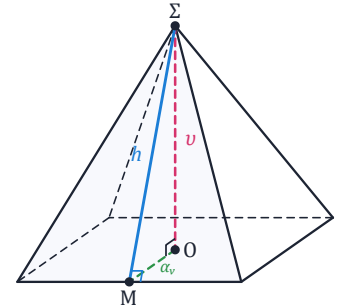
Ορισμός και στοιχεία

ΟΡΙΣΜΟΣ — Πυραμίδα

Πυραμίδα λέγεται ένα πολύεδρο του οποίου μία έδρα (η **βάση**) είναι πολύγωνο και όλες οι άλλες έδρες (οι **παράπλευρες**) είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή, την **κορυφή** της πυραμίδας. **Ύψος** $υ$ είναι η απόσταση της κορυφής από το επίπεδο της βάσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ — Κανονική πυραμίδα

Μια πυραμίδα λέγεται **κανονική** όταν η βάση της είναι **κανονικό πολύγωνο** και η προβολή της κορυφής στη βάση είναι το **κέντρο** της βάσης. Τότε οι παράπλευρες ακμές είναι ίσες και οι παράπλευρες έδρες είναι ίσα ισοσκελή τρίγωνα. Το ύψος h κάθε παράπλευρης έδρας (από την κορυφή) λέγεται **απόστημα της πυραμίδας**.



Κανονική τετραγωνική πυραμίδα

Σε κανονική πυραμίδα με βάση ακτίνας R και αποστήματος $α_υ$, από τα ορθογώνια τρίγωνα $ΣΟΜ$ και $ΣΟΑ$:

$$h^2 = υ^2 + α_υ^2, \quad (\text{παράπλευρη ακμή})^2 = υ^2 + R^2.$$

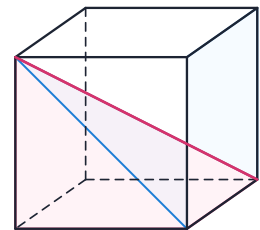
Μέτρηση πυραμίδας

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Επιφάνεια και όγκος πυραμίδας

- **Παράπλευρη επιφάνεια κανονικής πυραμίδας:** $E_π = \frac{1}{2} \Pi_{\text{βάσης}} \cdot h$.
- **Ολική επιφάνεια:** $E_{ολ} = E_π + B$.
- **Όγκος κάθε πυραμίδας:** $V = \frac{1}{3} B \cdot υ$.

① ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Γιατί «ένα τρίτο»;

Ένας κύβος μπορεί να χωριστεί σε **τρεις ίσες πυραμίδες** με κοινή κορυφή μια κορυφή του κύβου και βάσεις τις τρεις έδρες που δεν περιέχουν αυτή την κορυφή. Κάθε πυραμίδα έχει βάση $α^2$ και ύψος $α$, και όγκο $\frac{α^3}{3} = \frac{1}{3} Bυ$. Αποδεικνύεται ότι ο τύπος ισχύει για κάθε πυραμίδα.



Τρεις ίσες πυραμίδες γεμίζουν τον κύβο

Το κανονικό τετράεδρο

Τετράεδρο είναι μια τριγωνική πυραμίδα (4 τριγωνικές έδρες). **Κανονικό τετράεδρο** είναι εκείνο που έχει όλες τις ακμές ίσες (όλες οι έδρες ισόπλευρα τρίγωνα). Για ακμή $α$:

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Κανονικό τετράεδρο ακμής $α$

$$υ = \frac{α\sqrt{6}}{3}, \quad E_{ολ} = α^2\sqrt{3}, \quad V = \frac{α^3\sqrt{2}}{12}.$$

(Το ύψος: η προβολή της κορυφής είναι το κέντρο της βάσης, που απέχει από τις κορυφές της $R = \frac{α\sqrt{3}}{3}$. άρα $υ^2 = α^2 - \frac{α^2}{3} = \frac{2α^2}{3}$.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Κανονική τετραγωνική πυραμίδα

Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης 10 και ύψος 12. Να βρεθούν το απόστημα, η παράπλευρη ακμή, η ολική επιφάνεια και ο όγκος.

ΛΥΣΗ

Απόστημα βάσης $\alpha_4 = 5$, οπότε $h = \sqrt{144 + 25} = 13$. Ακτίνα βάσης $R = 5\sqrt{2}$, παράπλευρη ακμή $\sqrt{144 + 50} = \sqrt{194}$. $E_\pi = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 13 = 260$, $E_{ολ} = 260 + 100 = 360$, $V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Κανονικό τετράεδρο

Να βρεθούν το ύψος, η ολική επιφάνεια και ο όγκος κανονικού τετραέδρου ακμής 6.

ΛΥΣΗ

$v = \frac{6\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6}$, $E_{ολ} = 36\sqrt{3}$, $V = \frac{216\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2}$. (Έλεγχος: $\frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} = 6\sqrt{18} = 18\sqrt{2}$ ✓.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Η Μεγάλη Πυραμίδα

Η πυραμίδα του Χέοπα είχε αρχικά τετραγωνική βάση πλευράς περίπου 230 m και ύψος περίπου 146 m. Να εκτιμηθεί ο όγκος της.

ΛΥΣΗ

$V \approx \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 146 = \frac{1}{3} \cdot 52\,900 \cdot 146 \approx 2\,574\,000 \text{ m}^3$ — περίπου 2,6 εκατομμύρια κυβικά μέτρα πέτρας!

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Ύψος αντί για απόστημα

✗ Στην παράπλευρη επιφάνεια: $E_\pi = \frac{1}{2} \Pi \cdot v$.

✓ Στην **επιφάνεια** μπαίνει το **απόστημα** h (ύψος κάθε τριγωνικής έδρας), ενώ στον **όγκο** μπαίνει το **ύψος** v της πυραμίδας. Είναι διαφορετικά: $h^2 = v^2 + \alpha_v^2$, άρα $h > v$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 13.5–13.7 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Πυραμίδα έχει βάση ορθογώνιο 6×8 και ύψος 9. Να βρεθεί ο όγκος της.
●○○ → Λύση 13.5–13.7/1
- 2 Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει παράπλευρη ακμή 13 και ακμή βάσης $10\sqrt{2}$. Να βρεθούν το ύψος και ο όγκος της.
●●○ → Λύση 13.5–13.7/2
- 3 Κανονική εξαγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης 4 και ύψος 6. Να βρεθούν ο όγκος και το απόστημά της.
●●○ → Λύση 13.5–13.7/3
- 4 Από έναν κύβο ακμής a «κόβουμε» τις 8 γωνίες του με επίπεδα που διέρχονται από τα μέσα των τριών ακμών κάθε κορυφής. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που απομένει.
●●● → Λύση 13.5–13.7/4

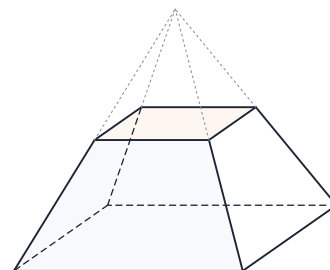
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13
Στερεά σχήματα

ΜΑΘΗΜΑ 13.8–13.9

Κόλωση πυραμίδα

Ορισμός

Αν τέμνουμε μια πυραμίδα με επίπεδο **παράλληλο** στη βάση της, το κομμάτι ανάμεσα στη βάση και στην τομή λέγεται **κόλωση πυραμίδα**. Η τομή είναι πολύγωνο **όμοιο** με τη βάση. Αν η αρχική πυραμίδα ήταν κανονική, η κόλωση λέγεται **κανονική** (ή ισοσκελής) και οι παράπλευρες έδρες της είναι ίσα ισοσκελή τραπέζια· το ύψος τους λέγεται **απόστημα** h της κόλωσης.



Κόλωση τετραγωνική πυραμίδα

Μέτρηση

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Κόλωση πυραμίδα

Με B, B' τα εμβαδά των βάσεων, Π, Π' τις περιμέτρους τους και $υ$ το ύψος:

- Παράπλευρη επιφάνεια (κανονική): $E_{\pi} = \frac{1}{2}(\Pi + \Pi') h$
- Όγκος: $V = \frac{υ}{3} (B + B' + \sqrt{BB'})$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ — Ιδέα για τον όγκο

Ο όγκος της κόλωσης είναι η διαφορά των όγκων δύο πυραμίδων: της αρχικής (βάση B) και της μικρής που «κόπηκε» (βάση B'). Οι δύο πυραμίδες είναι όμοιες, με λόγο εμβαδών βάσεων $\frac{B'}{B} = \lambda^2$, οπότε ο λόγος των υψών τους είναι $\lambda = \sqrt{\frac{B'}{B}}$. Με λίγη άλγεβρα (χρησιμοποιώντας $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$) προκύπτει ο τύπος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Κόλωση τετραγωνική πυραμίδα

Κανονική κόλωση πυραμίδα έχει τετραγωνικές βάσεις με πλευρές 6 και 4 και ύψος 3. Να βρεθούν ο όγκος και η παράπλευρη επιφάνειά της.

ΛΥΣΗ

$$B = 36, B' = 16, \sqrt{BB'} = 24. V = \frac{3}{3}(36 + 16 + 24) = 76.$$

Απόστημα: η διαφορά των αποστημάτων των βάσεων είναι $3 - 2 = 1$, άρα $h = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. $E_{\pi} = \frac{1}{2}(24 + 16)\sqrt{10} = 20\sqrt{10}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Έλεγχος με διαφορά πυραμίδων

Να επαληθευτεί ο όγκος του προηγούμενου παραδείγματος ως διαφορά δύο πυραμίδων.

ΛΥΣΗ

Λόγος πλευρών $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, άρα η μικρή πυραμίδα έχει ύψος $\frac{2}{3}$ της μεγάλης: $\Upsilon - 3 = \frac{2}{3}\Upsilon \Rightarrow \Upsilon = 9$. Μεγάλη: $\frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 9 = 108$. Μικρή: $\frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 6 = 32$. Διαφορά 76 ✓.

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — «Μέσος όρος των βάσεων»

✗ $V = \frac{B+B'}{2} \cdot υ$ (σαν να ήταν πρίσμα με «μέση» βάση).

✓ Ο σωστός τύπος έχει και τον όρο $\sqrt{BB'}$ και διαιρεί με 3: $\frac{υ}{3}(B + B' + \sqrt{BB'})$. Στο παράδειγμα ο λάθος τύπος θα έδινε 78 αντί για 76.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 13.8–13.9 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Κόλουρη πυραμίδα έχει βάσεις με εμβαδά 50 και 8 και ύψος 6. Να βρεθεί ο όγκος της.

●○○ → Λύση 13.8–13.9/1
- 2** Κανονική πυραμίδα με ύψος 12 τέμνεται με επίπεδο παράλληλο στη βάση σε απόσταση 4 από την κορυφή. Ποιο κλάσμα του όγκου της είναι η κόλουρη πυραμίδα που προκύπτει;

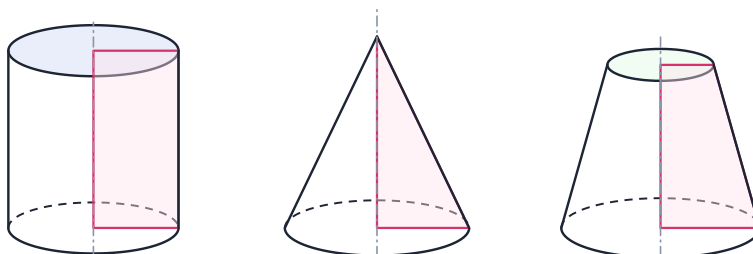
●●○ → Λύση 13.8–13.9/2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13
Στερεά σχήματα

ΜΑΘΗΜΑ 13.10–13.15

Στερεά εκ περιστροφής: κύλινδρος, κώνος, κόλυρος κώνος

Στερεά που «γεννιούνται» από περιστροφή



Ορθογώνιο → κύλινδρος, ορθογώνιο τρίγωνο → κώνος, ορθογώνιο τραπέζιο → κόλυρος κώνος

Αν περιστρέψουμε ένα επίπεδο σχήμα γύρω από μια ευθεία του επιπέδου του (τον **άξονα**), παράγεται ένα **στερεό εκ περιστροφής**:

- **Κύλινδρος**: από περιστροφή ορθογωνίου γύρω από μια πλευρά του.
- **Κώνος**: από περιστροφή ορθογωνίου τριγώνου γύρω από μια κάθετη πλευρά του.
- **Κόλυρος κώνος**: από περιστροφή ορθογωνίου τραπεζίου γύρω από την πλευρά που είναι κάθετη στις βάσεις.

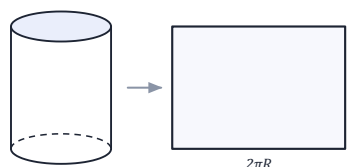
Η πλευρά που «σαρώνει» την καμπύλη επιφάνεια λέγεται **γενέτειρα** (λ).

Κύλινδρος

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Κύλινδρος ακτίνας R και ύψους u

$$E_{\pi} = 2\pi R u, \quad E_{o\lambda} = 2\pi R(u + R), \quad V = \pi R^2 u.$$

Η παράπλευρη επιφάνεια «ξετυλίγεται» σε ορθογώνιο με διαστάσεις $2\pi R$ (μήκος του κύκλου της βάσης) και u . Ο όγκος είναι, όπως στο πρίσμα, εμβαδόν βάσης επί ύψους.



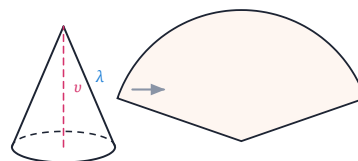
Το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου είναι ορθογώνιο $2\pi R \times u$

Κώνος

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Κώνος ακτίνας R , ύψους u , γενέτειρας λ

$$\lambda = \sqrt{u^2 + R^2}, \quad E_{\pi} = \pi R \lambda, \quad E_{o\lambda} = \pi R(\lambda + R), \quad V = \frac{1}{3} \pi R^2 u$$

Η παράπλευρη επιφάνεια ξετυλίγεται σε **κυκλικό τομέα** με ακτίνα λ και τόξο μήκους $2\pi R$. Από τον τύπο $E_{\text{τομ}} = \frac{1}{2} \ell R_{\text{τομ}}$: $E_{\pi} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot \lambda = \pi R \lambda$. Η γωνία του τομέα είναι $\mu = \frac{360^\circ R}{\lambda}$.



Το ανάπτυγμα του κώνου είναι κυκλικός τομέας ακτίνας λ

Κόλυρος κώνος

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Κόλυρος κώνος με ακτίνες R, ρ , ύψος u , γενέτειρα λ

$$\lambda = \sqrt{u^2 + (R - \rho)^2}, \quad E_{\pi} = \pi(R + \rho)\lambda, \quad V = \frac{\pi u}{3} (R^2 + \rho^2 + R\rho).$$

Παρατήρησε την αναλογία με την κόλυρη πυραμίδα: οι «βάσεις» είναι πR^2 και $\pi \rho^2$ και $\sqrt{\pi R^2 \cdot \pi \rho^2} = \pi R \rho$.

ΣΥΝΟΨΗ — Τυπολόγιο στερεών εκ περιστροφής

Στερεό	Παράπλευρη επιφάνεια	Όγκος
Κύλινδρος	$2\pi Rv$	$\pi R^2 v$
Κώνος	$\pi R\lambda$	$\frac{1}{3}\pi R^2 v$
Κόλουρος κώνος	$\pi(R + \rho)\lambda$	$\frac{\pi v}{3}(R^2 + \rho^2 + R\rho)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Κύλινδρος

Κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης 3 και ύψος 8. Να βρεθούν οι επιφάνειες και ο όγκος.

ΛΥΣΗ

$$E_{\pi} = 2\pi \cdot 3 \cdot 8 = 48\pi, E_{\sigma\lambda} = 48\pi + 2 \cdot 9\pi = 66\pi, V = 9\pi \cdot 8 = 72\pi.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Κώνος και ανάπτυγμα

Κώνος έχει ακτίνα βάσης 6 και ύψος 8. Να βρεθούν η γενέτειρα, οι επιφάνειες, ο όγκος και η γωνία του κυκλικού τομέα του αναπτύγματος.

ΛΥΣΗ

$$\lambda = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10. E_{\pi} = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi, E_{\sigma\lambda} = 60\pi + 36\pi = 96\pi, V = \frac{1}{3} \cdot 36\pi \cdot 8 = 96\pi. \text{ Γωνία τομέα: } \frac{360^\circ \cdot 6}{10} = 216^\circ.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Κόλουρος κώνος

Κόλουρος κώνος έχει ακτίνες βάσεων 5 και 2 και ύψος 4. Να βρεθούν η γενέτειρα, η παράπλευρη επιφάνεια και ο όγκος.

ΛΥΣΗ

$$\lambda = \sqrt{16 + 9} = 5. E_{\pi} = \pi(5 + 2) \cdot 4 = 28\pi. V = \frac{4\pi}{3}(25 + 4 + 10) = \frac{4\pi \cdot 39}{3} = 52\pi.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Κώνος μέσα σε κύλινδρο

Ένας κώνος και ένας κύλινδρος έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος. Πόσα «κωνάκια» νερό χρειάζονται για να γεμίσει ο κύλινδρος;

ΛΥΣΗ

$$V_{\kappa\omega\nu} = \frac{1}{3}\pi R^2 v = \frac{1}{3}V_{\kappa\upsilon\lambda}. \text{ Χρειάζονται 3 κωνάκια — όπως τρεις πυραμίδες γεμίζουν ένα πρίσμα ίδιας βάσης και ύψους.}$$

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Γενέτειρα και ύψος

✗ Για κώνο με $R = 3, \lambda = 5: V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 5 = 15\pi.$

✓ Στον όγκο μπαίνει το **ύψος** $v = \sqrt{\lambda^2 - R^2} = 4: V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 = 12\pi.$ Η γενέτειρα χρησιμοποιείται στην **επιφάνεια**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 13.10–13.15 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Ένα κουτί αναψυκτικού (κύλινδρος) έχει διάμετρο 6,6 cm και ύψος 11,5 cm. Πόσα cm^3 χωράει; ($\pi \approx 3,14$)

●○○ → Λύση 13.10–13.15/1
- 2** Κώνος έχει γενέτειρα 13 και ακτίνα βάσης 5. Να βρεθούν το ύψος, η παράπλευρη επιφάνεια και ο όγκος.

●○○ → Λύση 13.10–13.15/2
- 3** Ένας κυκλικός τομέας ακτίνας 12 και γωνίας 120° τυλίγεται και σχηματίζει την παράπλευρη επιφάνεια κώνου. Να βρεθούν η ακτίνα της βάσης, το ύψος και ο όγκος του κώνου.

●●○ → Λύση 13.10–13.15/3
- 4** Ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 3 και 4 περιστρέφεται (α) γύρω από την πλευρά 3 (β) γύρω από την πλευρά 4. Να συγκριθούν οι όγκοι των δύο κώνων.

●●○ → Λύση 13.10–13.15/4
- 5** Ένα ποτήρι έχει σχήμα κώλου με ακτίνες 4 cm (πάνω) και 3 cm (κάτω) και ύψος 12 cm. Πόσο νερό χωράει; Αν γεμίσει μέχρι τη μέση του ύψους, τι ποσοστό του όγκου του περιέχει;

●●● → Λύση 13.10–13.15/5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13
Στερεά σχήματα

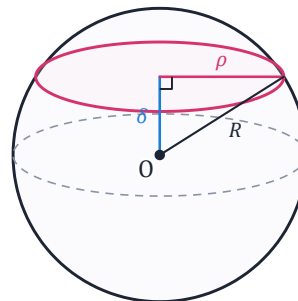
ΜΑΘΗΜΑ 13.16–13.18

Η σφαίρα

Ορισμός και θέσεις

ΟΡΙΣΜΟΣ — Σφαίρα

Σφαιρική επιφάνεια κέντρου O και ακτίνας R είναι το σύνολο των σημείων του χώρου που απέχουν απόσταση R από το O . **Σφαίρα** είναι η σφαιρική επιφάνεια μαζί με το εσωτερικό της. Προκύπτει από την περιστροφή ενός ημικυκλίου γύρω από τη διάμετρό του.



Σφαίρα και επίπεδη τομή σε απόσταση δ από το κέντρο

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Θέση επιπέδου ως προς σφαίρα

Έστω δ η απόσταση του κέντρου O μιας σφαίρας ακτίνας R από ένα επίπεδο p .

- Αν $\delta > R$, το επίπεδο **δεν** έχει κοινά σημεία με τη σφαίρα.
- Αν $\delta = R$, το επίπεδο **εφάπτεται** στη σφαίρα (ένα κοινό σημείο).
- Αν $\delta < R$, το επίπεδο **τέμνει** τη σφαίρα κατά **κύκλο** με ακτίνα $\rho = \sqrt{R^2 - \delta^2}$.

Όταν $\delta = 0$ (το επίπεδο διέρχεται από το κέντρο), η τομή είναι **μέγιστος κύκλος** ακτίνας R (όπως ο ισημερινός της Γης). Η θέση ευθείας ως προς σφαίρα περιγράφεται ανάλογα (δεν τέμνει, εφάπτεται ή τέμνει σε δύο σημεία).

Μέτρηση σφαίρας

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Επιφάνεια και όγκος σφαίρας

$$E = 4\pi R^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

🏠 ΛΙΓΗ ΙΣΤΟΡΙΑ — Ο Αρχιμήδης και ο τάφος του

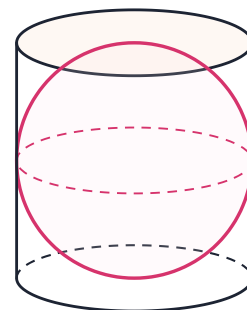
Ο Αρχιμήδης απέδειξε ότι, αν μια σφαίρα είναι εγγεγραμμένη σε κύλινδρο (ο κύλινδρος έχει ακτίνα R και ύψος $2R$), τότε ο **όγκος και η επιφάνεια της σφαίρας είναι τα $\frac{2}{3}$ των αντίστοιχων μεγεθών του κυλίνδρου**: $\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^2 \cdot 2R} = \frac{2}{3}$ και $\frac{4\pi R^2}{2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Θεωρούσε αυτή την ανακάλυψη τόσο σπουδαία, που ζήτησε να χαραχτεί στον τάφο του μια σφαίρα μέσα σε κύλινδρο. Ο Κικέρων αναφέρει ότι βρήκε τον τάφο στις Συρακούσες χάρη σε αυτό το σχέδιο!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Σφαίρα

Να βρεθούν η επιφάνεια και ο όγκος σφαίρας ακτίνας 3.

ΛΥΣΗ

$$E = 4\pi \cdot 9 = 36\pi, \quad V = \frac{4}{3}\pi \cdot 27 = 36\pi. \quad (\text{Για } R = 3 \text{ οι αριθμοί συμπίπτουν· γενικά } \frac{V}{E} = \frac{R}{3}.)$$



Σφαίρα εγγεγραμμένη σε κύλινδρο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Τομή σφαίρας

Σφαίρα έχει ακτίνα 5. Ένα επίπεδο απέχει 3 από το κέντρο. Να βρεθεί το εμβαδόν του κύκλου της τομής.

ΛΥΣΗ

$$\rho = \sqrt{25 - 9} = 4, \text{ εμβαδόν } 16\pi.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Από τον όγκο στην επιφάνεια

Μια σφαίρα έχει όγκο 288π . Να βρεθεί η επιφάνειά της.

ΛΥΣΗ

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 288\pi \Rightarrow R^3 = 216 \Rightarrow R = 6. \text{ Ε} = 4\pi \cdot 36 = 144\pi.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Μπάλες σε κουτί

Τρεις ίσες μπάλες του τένις ακτίνας R χωράνε ακριβώς σε ένα κυλινδρικό κουτί (ύψος $6R$, ακτίνα R). Τι ποσοστό του κουτιού καταλαμβάνουν οι μπάλες;

ΛΥΣΗ

Μπάλες: $3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$. Κουτί: $\pi R^2 \cdot 6R = 6\pi R^3$. Ποσοστό $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 66,7\%$ — ο λόγος του Αρχιμήδη ξανά!

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Επιφάνεια με τον τύπο του κύκλου

✗ «Η επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R είναι πR^2 .»

✓ Το πR^2 είναι το εμβαδόν ενός **μέγιστου κύκλου**. Η επιφάνεια της σφαίρας είναι **τετραπλάσια**: $4\pi R^2$. (Ένα πορτοκάλι έχει φλούδα που καλύπτει τέσσερις «κυκλικούς» δίσκους ίσους με την τομή του!)

ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Θέλεις να δεις «οπτικές» αποδείξεις για τους τύπους της σφαίρας; Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με κινούμενα σχήματα και πολλές λυμένες ασκήσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 13.16–13.18 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Σφαίρα έχει επιφάνεια 100π . Να βρεθεί ο όγκος της.
●○○ → Λύση 13.16–13.18/1
- 2 Η Γη έχει ακτίνα περίπου 6370 km. Να εκτιμηθεί η επιφάνειά της.
●○○ → Λύση 13.16–13.18/2
- 3 Αν η ακτίνα μιας σφαίρας τριπλασιαστεί, πόσες φορές μεγαλώνουν η επιφάνεια και ο όγκος της;
●●○ → Λύση 13.16–13.18/3
- 4 Ένα μεταλλικό κύβο ακμής 4 cm τον λιώνουμε και φτιάχνουμε σφαίρα. Να βρεθεί η ακτίνα της.
●●○ → Λύση 13.16–13.18/4
- 5 Σε κύβο ακμής α είναι εγγεγραμμένη σφαίρα (εφάπτεται σε όλες τις έδρες) και περιγεγραμμένη σφαίρα (διέρχεται από όλες τις κορυφές). Να βρεθεί ο λόγος των όγκων των δύο σφαιρών.
●●● → Λύση 13.16–13.18/5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13
Στερεά σχήματα

ΜΑΘΗΜΑ 13.19

Κανονικά πολύεδρα

Τα πέντε Πλατωνικά στερεά

ΟΡΙΣΜΟΣ — Κανονικό πολύεδρο

Ένα κυρτό πολύεδρο λέγεται **κανονικό** όταν όλες οι έδρες του είναι **ίσα κανονικά πολύγωνα** και σε κάθε κορυφή του συντρέχει ο **ίδιος αριθμός** εδρών.

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Υπάρχουν ακριβώς πέντε κανονικά πολύεδρα

Τα μόνα κανονικά πολύεδρα είναι: το **τετράεδρο**, το **εξάεδρο** (κύβος), το **οκτάεδρο**, το **δωδεκάεδρο** και το **εικοσάεδρο**.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σε κάθε κορυφή συντρέχουν τουλάχιστον 3 έδρες, και το άθροισμα των γωνιών τους πρέπει να είναι **μικρότερο από 360°** (αλλιώς οι έδρες θα ήταν επίπεδες γύρω από την κορυφή, χωρίς να «κλείνει» στερεό).

- **Ισόπλευρα τρίγωνα (60°):** 3, 4 ή 5 σε κάθε κορυφή (180° , 240° , 300°) → τετράεδρο, οκτάεδρο, εικοσάεδρο. (Με 6: 360° , αδύνατο.)
- **Τετράγωνα (90°):** μόνο 3 (270°) → κύβος.
- **Κανονικά πεντάγωνα (108°):** μόνο 3 (324°) → δωδεκάεδρο.
- **Εξάγωνα (120°)** και άνω: 3 έδρες δίνουν ήδη τουλάχιστον 360° — αδύνατο.

Άρα υπάρχουν το πολύ πέντε περιπτώσεις, και αποδεικνύεται ότι και οι πέντε υλοποιούνται.

Πολύεδρο	Έδρες	K	A	E	Έδρες ανά κορυφή
Τετράεδρο	τρίγωνα	4	6	4	3
Κύβος	τετράγωνα	8	12	6	3
Οκτάεδρο	τρίγωνα	6	12	8	4
Δωδεκάεδρο	πεντάγωνα	20	30	12	3
Εικοσάεδρο	τρίγωνα	12	30	20	5

ΛΙΓΗ ΙΣΤΟΡΙΑ

Ο Πλάτων, στον διάλογο «Τίμαιος», συνέδεσε τα τέσσερα πρώτα στερεά με τα τέσσερα στοιχεία της φύσης (φωτιά–τετράεδρο, γη–κύβος, αέρας–οκτάεδρο, νερό–εικοσάεδρο) και το δωδεκάεδρο με το σύμπαν. Γι' αυτό λέγονται **Πλατωνικά στερεά**. Το XIII βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, το τελευταίο, είναι αφιερωμένο στην κατασκευή τους και στην απόδειξη ότι είναι μόνο πέντε — ένα επιβλητικό φινάλε για το πιο επιδραστικό μαθηματικό βιβλίο όλων των εποχών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Euler στα Πλατωνικά στερεά

Να επαληθευτεί ο τύπος του Euler για το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο, υπολογίζοντας τις ακμές από τις έδρες.

ΛΥΣΗ

Δωδεκάεδρο: 12 πεντάγωνα, $A = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$, κάθε κορυφή σε 3 έδρες: $K = \frac{60}{3} = 20$. $K + E = 32 = A + 2$ ✓.
Εικοσάεδρο: 20 τρίγωνα, $A = \frac{60}{2} = 30$, κάθε κορυφή σε 5 έδρες: $K = \frac{60}{5} = 12$. $K + E = 32 = A + 2$ ✓.

① ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Δυϊκά πολύεδρα

Αν ενώσουμε τα κέντρα των εδρών ενός κύβου, παίρνουμε ένα οκτάεδρο· αν ενώσουμε τα κέντρα των εδρών ενός οκταέδρου, παίρνουμε κύβο. Λέμε ότι ο κύβος και το οκτάεδρο είναι **δυϊκά**. Όμοια το δωδεκάεδρο με το εικοσάεδρο, ενώ το τετράεδρο είναι δυϊκό του εαυτού του. Παρατήρησε στον πίνακα ότι στα δυϊκά ζεύγη οι αριθμοί K και E «ανταλλάσσονται»!

ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Τα Πλατωνικά στερεά είναι από τα ομορφότερα αντικείμενα των Μαθηματικών. Στο mathgreece.com θα βρεις αναπτύγματα για να τα κατασκευάσεις με χαρτόνι, καθώς και πλήρες δωρεάν φροντιστήριο για όλη την ύλη. Καλή συνέχεια στη Γεωμετρία!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 13.19 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Να υπολογίσετε την ολική επιφάνεια κανονικού οκταέδρου ακμής a .
●○○ → Λύση 13.19/1
- 2 Το κανονικό οκτάεδρο ακμής a αποτελείται από δύο κανονικές τετραγωνικές πυραμίδες με κοινή βάση. Να βρεθεί ο όγκος του.
●●○ → Λύση 13.19/2
- 3 Να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει κανονικό πολύεδρο με εξαγωνικές έδρες, ενώ η κηρήθρα αποτελείται από κανονικά εξάγωνα.
●●● → Λύση 13.19/3

Τυπολόγιο – Όλη η ύλη με μια ματιά

Στις σελίδες αυτές συγκεντρώνονται όλοι οι βασικοί τύποι και τα θεωρήματα του βιβλίου, οργανωμένα ανά κεφάλαιο. Είναι ιδανικό για γρήγορη επανάληψη πριν από ένα διαγώνισμα — αλλά θυμήσου: ένας τύπος χωρίς κατανόηση ξεχνιέται εύκολα. Αν κάτι δεν σου είναι ξεκάθαρο, γύρνα στο αντίστοιχο μάθημα.

Κεφάλαιο 7 • Αναλογίες

Θέμα	Τύπος / πρόταση
Λόγος τμημάτων	$\frac{\Gamma\Delta}{\Lambda\beta} = \lambda \iff \Gamma\Delta = \lambda \cdot \Lambda\beta$
Ιδιότητες αναλογιών	$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \alpha\delta = \beta\gamma \iff \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$
Ίσοι λόγοι	$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \dots = \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lambda \Rightarrow \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\beta_1 + \dots + \beta_n} = \lambda$
Μέση ανάλογος	$x = \sqrt{\alpha\beta}$
Εσωτερική διαίρεση	$\frac{MA}{MB} = \lambda \Rightarrow MA = \frac{\lambda}{\lambda+1}AB$
Εξωτερική διαίρεση ($\lambda > 1$)	$NB = \frac{AB}{\lambda-1}$
Αρμονική τετράδα	$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}, \frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$
Θαλής	$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$
Παράλληλη σε πλευρά	$\Delta E \parallel B\Gamma \iff \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}, \text{ και } \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{B\Gamma}$
Εσωτερική διχοτόμος	$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}, B\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}, \Delta\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$
Εξωτερική διχοτόμος	$\frac{EB}{E\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}, EB = \frac{\alpha\gamma}{ \beta-\gamma }$
Έγκεντρο	$\frac{AI}{I\Delta} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha}$
Απολλώνιος κύκλος	$\frac{MA}{MB} = \lambda \neq 1$: κύκλος διαμέτρου $\Gamma\Delta$

Κεφάλαιο 8 • Ομοιότητα

Θέμα	Τύπος / πρόταση
Όμοια πολύγωνα	πλευρές ανάλογες και γωνίες ίσες
Λόγος περιμέτρων	$= \lambda$
1ο κριτήριο	δύο γωνίες ίσες
2ο κριτήριο	δύο πλευρές ανάλογες και περιεχόμενη γωνία ίση
3ο κριτήριο	τρεις πλευρές ανάλογες
Ομόλογα ύψη, διάμεσοι, διχοτόμοι, R, ρ	λόγος $= \lambda$
Εγγεγραμμένο τετράγωνο σε τρίγωνο	$x = \frac{\alpha v}{\alpha + v}$

Κεφάλαιο 9 • Μετρικές σχέσεις

Θέμα	Τύπος / πρόταση
Πυθαγόρειο	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ (και αντίστροφα)
Ορθογώνιο τρίγωνο	$\gamma^2 = \alpha \cdot \text{ΒΔ}, v^2 = \text{ΒΔ} \cdot \Delta\Gamma, \beta\gamma = \alpha v, \frac{1}{v^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$
Τετράγωνο / ισόπλευρο	$\delta = \alpha\sqrt{2}, v = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$
Οξεία $\hat{A}$	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \text{ΑΔ}$
Αμβλεία $\hat{A}$	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot \text{ΑΔ}$
Νόμος συνημιτόνων	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A$
Είδος τριγώνου (α μέγιστη)	$\alpha^2 \leq \beta^2 + \gamma^2 \iff$ οξυγώνιο / αμβλυγώνιο
Ύψος	$v_\alpha = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$
1ο θεώρημα διαμέσων	$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}, \mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$
2ο θεώρημα διαμέσων	$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \text{ΜΔ}$
Παραλληλόγραμμο	$\delta_1^2 + \delta_2^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$
Τόπος $\text{MA}^2 + \text{MB}^2 = k^2$	κύκλος $(\text{O}, \sqrt{\frac{k^2}{2} - \frac{\text{AB}^2}{4}})$
Τόπος $\text{MA}^2 - \text{MB}^2 = k^2$	ευθεία $\perp \text{AB}$ με $\text{OH} = \frac{k^2}{2\text{AB}}$
Τέμνουσες	$\text{PA} \cdot \text{PB} = \text{PT} \cdot \text{PD}$
Εφαπτόμενο τμήμα	$\text{PE}^2 = \text{PA} \cdot \text{PB}$
Δύναμη σημείου	$\Delta_P = \text{OP}^2 - R^2$
Χρυσή τομή	$x^2 = \alpha(\alpha - x), \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Κεφάλαιο 10 • Εμβαδά

Σχήμα / Θέμα	Τύπος
Τετράγωνο, ορθογώνιο	$\alpha^2, \alpha\beta$
Παραλληλόγραμμο	$\beta \cdot v = \alpha\beta \eta\mu\varphi$
Τρίγωνο	$\frac{1}{2}\alpha v_\alpha$
Τραπεζίο	$\frac{B + \beta}{2}v$
Ρόμβος / κάθετες διαγώνιοι	$\frac{\delta_1\delta_2}{2}$
Ισόπλευρο τρίγωνο	$\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$
Ήρωνας	$\sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$
Με γωνία	$\frac{1}{2}\beta\gamma \eta\mu A$
Με ρ , με R , με ρ_α	$\tau\rho, \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}, (\tau - \alpha)\rho_\alpha$
Κοινό ύψος	λόγος εμβαδών = λόγος βάσεων
Όμοια σχήματα	$\frac{E'}{E} = \lambda^2$
Ίση/παραπληρωματική γωνία	$\frac{E}{E'} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}$

Κεφάλαιο 11 • Μέτρηση κύκλου

Θέμα	Τύπος
Κανονικό ν -γωνο	$\omega_\nu = \frac{360^\circ}{\nu}, \varphi_\nu = 180^\circ - \omega_\nu, \frac{\lambda_\nu^2}{4} + \alpha_\nu^2 = R^2, E_\nu = \frac{1}{2}P_\nu\alpha_\nu$
Ισόπλευρο τρίγωνο	$\lambda_3 = R\sqrt{3}, \alpha_3 = \frac{R}{2}, E_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$
Τετράγωνο	$\lambda_4 = R\sqrt{2}, \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}, E_4 = 2R^2$
Κανονικό εξάγωνο	$\lambda_6 = R, \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}, E_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$
Μήκος κύκλου / τόξου	$L = 2\pi R, \ell = \frac{\pi R\mu}{180} = \alpha R$
Μοίρες – ακτίνια	$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$
Εμβαδόν κύκλου / τομέα	$\pi R^2, \frac{\pi R^2\mu}{360} = \frac{1}{2}\ell R$
Κυκλικό τμήμα	τομέας – τρίγωνο ΟΑΒ

Κεφάλαια 12–13 · Στερεομετρία

Στερεό	Επιφάνεια	Όγκος
Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο	$2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha), \delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$	$\alpha\beta\gamma$
Κύβος	$6\alpha^2, \delta = \alpha\sqrt{3}$	α^3
Πρίσμα	$E_{\pi} = \Pi \cdot \upsilon$ (ορθό)	$B \cdot \upsilon$
Κανονική πυραμίδα	$E_{\pi} = \frac{1}{2}\Pi h$	$\frac{1}{3}B\upsilon$
Κανονικό τετράεδρο	$\alpha^2\sqrt{3}$	$\frac{\alpha^3\sqrt{2}}{12}$
Κόλουρη πυραμίδα	$\frac{1}{2}(\Pi + \Pi')h$	$\frac{\upsilon}{3}(B + B' + \sqrt{BB'})$
Κύλινδρος	$E_{\pi} = 2\pi R\upsilon$	$\pi R^2\upsilon$
Κώνος	$E_{\pi} = \pi R\lambda$	$\frac{1}{3}\pi R^2\upsilon$
Κόλουρος κώνος	$E_{\pi} = \pi(R + \rho)\lambda$	$\frac{\pi\upsilon}{3}(R^2 + \rho^2 + R\rho)$
Σφαίρα	$4\pi R^2$	$\frac{4}{3}\pi R^3$

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Τύπος του Euler

Σε κάθε κυρτό πολύεδρο: $K + E = A + 2$. Κανονικά πολύεδρα υπάρχουν μόνο πέντε.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Θέλεις αυτό το τυπολόγιο σε μορφή κάρτας για να το έχεις πάντα μαζί σου, μαζί με επαναληπτικά διαγωνίσματα για όλη την ύλη; Θα τα βρεις στο mathgreece.com — πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Λύσεις των ασκήσεων

Εδώ θα βρεις αναλυτικές λύσεις για όλες τις άλυτες ασκήσεις του βοηθήματος, οργανωμένες ανά κεφάλαιο και μάθημα. Συμβουλή: προσπάθησε πρώτα μόνος σου τουλάχιστον 15 λεπτά — η λύση διαβάζεται πολύ πιο ουσιαστικά όταν έχεις ήδη παλέψει με την άσκηση.

Για ακόμη περισσότερες λυμένες ασκήσεις και θέματα εξετάσεων:

mathgreece.com

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 · Αναλογίες

Λύσεις · Μάθημα 7.1–7.3 — Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων

1 (α) $\Gamma\Delta = \frac{3}{4} \cdot 20 = 15$. (β) $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{5}{2} \Rightarrow \Gamma\Delta = \frac{2}{5} AB = 8$.

2 $1,5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$. Ο λόγος του πρώτου προς το δεύτερο είναι $\frac{150}{75} = 2$ και του δεύτερου προς το πρώτο $\frac{1}{2}$.

3 $AG = 16$, άρα $\frac{AB}{BG} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $\frac{AB}{AG} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$, $\frac{BG}{AG} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

4 Θέτουμε $AB = 2\kappa$, $AG = 9\kappa$. Τότε $BG = AG - AB = 7\kappa$ και $\frac{AB}{BG} = \frac{2}{7}$. Αν $BG = 21$, τότε $7\kappa = 21$, $\kappa = 3$ και $AG = 27$.

5 Θέτουμε $AB = 6\kappa$ (πολλαπλάσιο του 2 και του 3). Τότε $AG = \Gamma\Delta = \Delta B = 2\kappa$ και $AM = 3\kappa$. Το M είναι μέσο και του $\Gamma\Delta$, άρα $GM = AM - AG = \kappa$. Επίσης $A\Delta = 4\kappa$. Επομένως $\frac{GM}{AB} = \frac{1}{6}$ και $\frac{GM}{A\Delta} = \frac{1}{4}$.

6 Χωρίζουμε το $\alpha = AB$ σε 4 ίσα μέρη (ημιευθεία Ax , τέσσερα ίσα τμήματα, παράλληλες προς την K_4B). Αν $\mu = \frac{\alpha}{4}$ είναι ένα από αυτά, προεκτείνουμε το AB προς το B κατά τμήμα $BE = \mu$ (με τον διαβήτη). Τότε $AE = 4\mu + \mu = 5\mu = \frac{5}{4}\alpha$.

7 Θέτουμε $\alpha = 3\kappa$, $\beta = 2\kappa$. Η περίμετρος είναι $2(\alpha + \beta) = 10\kappa = 50$, άρα $\kappa = 5$, οπότε $\alpha = 15$ και $\beta = 10$.

8 Ο $B\Gamma$ συμμετέχει και στους δύο λόγους, οπότε τον παίρνουμε ως πολλαπλάσιο του 2 και του 4: $B\Gamma = 4\kappa$. Τότε $AB = 2\kappa$ και $\Gamma\Delta = 3\kappa$. Επομένως $AG = AB + B\Gamma = 6\kappa$ και $B\Delta = B\Gamma + \Gamma\Delta = 7\kappa$, άρα $\frac{AG}{B\Delta} = \frac{6}{7}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 · Αναλογίες

Λύσεις · Μάθημα 7.4–7.5 — Ανάλογα τμήματα – Αναλογίες

1 (α) $12x = 72$, $x = 6$. (β) $x^2 = 100$, $x = 10$ (θετικό). (γ) $5x + 10 = 7x$, άρα $x = 5$.

2 Τέταρτη ανάλογος: $\frac{6}{9} = \frac{14}{x} \Rightarrow x = \frac{9 \cdot 14}{6} = 21$. Μέση ανάλογος: $x = \sqrt{2 \cdot 18} = 6$.

3 $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4} = \frac{36}{9} = 4$, άρα $\alpha = 8$, $\beta = 12$, $\gamma = 16$.

4 Θέτουμε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$, οπότε $\alpha = \lambda\beta$, $\gamma = \lambda\delta$. Τότε $\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} = \frac{\lambda(\beta + \delta)}{\beta + \delta} = \lambda$ και $\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} = \frac{\lambda(\beta - \delta)}{\beta - \delta} = \lambda$. Άρα οι δύο λόγοι είναι ίσοι.

5 Με $\alpha = \lambda\beta$, $\gamma = \lambda\delta$: $\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\beta^2 + \delta^2} = \frac{\lambda^2(\beta^2 + \delta^2)}{\beta^2 + \delta^2} = \lambda^2$ και $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \lambda^2$.

6 Αν $x > y$ με $\frac{x}{y} = \frac{7}{4}$: $x = 7\kappa$, $y = 4\kappa$, $x - y = 3\kappa = 12$, άρα $\kappa = 4$, $x = 28$, $y = 16$.

7 Από τη γενίκευση της ιδιότητας ίσων λόγων: $\frac{x}{2} = \frac{3x}{6} = \frac{y}{5} = \frac{-z}{-6} = \frac{3x + y - z}{6 + 5 - 6} = \frac{10}{5} = 2$. Άρα $x = 4$, $y = 10$, $z = 12$. (Η με «κ»: $x = 2\kappa$, $y = 5\kappa$, $z = 6\kappa$, $6\kappa + 5\kappa - 6\kappa = 5\kappa = 10$.)

8 Είναι $x = \sqrt{\alpha\beta}$. Η ανισότητα $\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha + \beta}{2}$ ισοδυναμεί με $2\sqrt{\alpha\beta} \leq \alpha + \beta$, δηλαδή με $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 \geq 0$, που ισχύει. Ισότητα έχουμε μόνο όταν $\sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta}$, δηλαδή $\alpha = \beta$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 · Αναλογίες

Λύσεις · Μάθημα 7.6 — Διαίρεση τμήματος εσωτερικά και εξωτερικά σε δοσμένο λόγο

1 Εσωτερικά: $MA = \frac{2}{5} \cdot 15 = 6$, $MB = 9$. Εξωτερικά, $\lambda = \frac{2}{3} < 1$, οπότε το N είναι πέρα από το A και $NB = NA + 15$: $\frac{NA}{NA + 15} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3NA = 2NA + 30 \Rightarrow NA = 30$, $NB = 45$.

2 $\frac{MA}{MB} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Επειδή ο λόγος είναι διάφορος του 1, υπάρχει (μοναδικό) εξωτερικό σημείο N , πέρα από το A , με $\frac{NA}{NA + 20} = \frac{2}{3}$, δηλαδή $NA = 40$.

3 $\frac{MA}{MB} = 2$, οπότε πρέπει $\frac{NA}{NB} = 2$ με $NA = 9 + BN$: $9 + BN = 2BN$, άρα $BN = 9$.

4 $\frac{MA}{MB} = \lambda \Rightarrow \frac{MA}{MA + MB} = \frac{\lambda}{\lambda + 1}$ και $MA + MB = AB$. Επίσης $\frac{MB}{AB} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + 1} = \frac{1}{\lambda + 1}$. Για $\lambda = \frac{3}{4}$: $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{7}$, $\frac{MB}{AB} = \frac{4}{7}$.

5 $AM = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$, $MB = 2$. Εξωτερικά ($\lambda = 3 > 1$): $NB = \frac{8}{3 - 1} = 4$, $NA = 12$. Τότε $MN = MB + BN = 6$. Έλεγχος: $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$. ✓

- 6 Θέτουμε $AB = 2\alpha$, άρα $OA = OB = \alpha$. Είναι $AM = \frac{2\alpha\lambda}{\lambda+1}$, οπότε $OM = AM - \alpha = \frac{\alpha(\lambda-1)}{\lambda+1}$ (το M είναι μεταξύ O και B , αφού $\lambda > 1$). Επίσης $AN = \frac{2\alpha\lambda}{\lambda-1}$, άρα $ON = AN - \alpha = \frac{\alpha(\lambda+1)}{\lambda-1}$. Πολλαπλασιάζοντας: $OM \cdot ON = \alpha^2 = OB^2$.

- 7 Έστω $\lambda > 1$ (η άλλη περίπτωση είναι συμμετρική). Τότε $MA > MB$, το M είναι μεταξύ O και B και $OM = AM - AO = \frac{\lambda}{\lambda+1}AB - \frac{1}{2}AB = \frac{2\lambda - \lambda - 1}{2(\lambda+1)}AB = \frac{\lambda-1}{2(\lambda+1)}AB$. Για $\lambda < 1$ βρίσκουμε όμοια $OM = \frac{1-\lambda}{2(\lambda+1)}AB$. Συνολικά $\frac{OM}{AB} = \frac{|\lambda-1|}{2(\lambda+1)}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 · Αναλογίες

Λύσεις · Μάθημα 7.7 — Θεώρημα του Θαλή

- 1 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BF}{B'F'} \Rightarrow \frac{5}{7} = \frac{BF}{14} \Rightarrow BF = 10$.
- 2 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{EF} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{9}{EF} \Rightarrow EF = 6$. Επίσης $\frac{DE}{BF} = \frac{AD}{AB} = \frac{6}{10}$, άρα $DE = 12$.
- 3 $\frac{AD}{AB} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{AG} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$. Ισοδύναμα $\frac{AD}{AB} = \frac{8}{4} = 2 = \frac{AE}{EF}$, άρα $DE \parallel BF$.
- 4 Κατασκευή όπως στη θεωρία: γωνία κορυφής O , $OA = 3$, $AB = 4$ στη μία πλευρά, $OG = 5$ στην άλλη, παράλληλη από το B προς την AG που τέμνει τη δεύτερη πλευρά στο X . τότε $x = GX$. Υπολογισμός: $x = \frac{\beta\gamma}{\alpha} = \frac{20}{3}$.
- 5 Οι ευθείες AB , EZ , $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλες και τέμνουν τις AD , BF . Από τον Θαλή $\frac{AE}{AD} = \frac{BZ}{BF}$, δηλαδή $\frac{3}{8} = \frac{BZ}{12}$, άρα $BZ = 4,5$ και $Z\Gamma = 7,5$.

- 6 Είναι $\frac{BD}{BF} = \frac{1}{3}$. Στο $\triangle ABF$, $DE \parallel AG$: $\frac{DE}{BF} = \frac{BD}{BF} = \frac{1}{3}$, άρα $DE = 4$. Επίσης $\Delta Z \parallel AB$: $\frac{\Delta Z}{AB} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma B} = \frac{2}{3}$, άρα $\Delta Z = 6$. Το $AE\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε η περίμετρος είναι $2(4+6) = 20$.
- 7 Φέρνουμε $MZ \parallel BE$ (Z στην AG). Στο τρίγωνο ΓBE , το M είναι μέσο της BF και $MZ \parallel BE$, άρα το Z είναι μέσο του EG : $EZ = Z\Gamma$. Στο τρίγωνο AMZ η $DE \parallel MZ$, άρα $\frac{AE}{EZ} = \frac{AD}{DM} = 2$, δηλαδή $AE = 2EZ = EZ + Z\Gamma = EG$. Άρα το E είναι μέσο της AG . (Το Δ είναι, φυσικά, το βαρύκεντρο!)
- 8 Από $DE \parallel BF$: $\frac{AE}{EF} = \frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$. Από $EZ \parallel AB$ στο τρίγωνο ΓAB : $\frac{BZ}{Z\Gamma} = \frac{AE}{EF} = \frac{2}{3}$. Το $\triangle EZB$ έχει $DE \parallel BZ$ και $EZ \parallel \Delta B$, άρα είναι παραλληλόγραμμο και $DE = BZ$.
- 9 Από το Παράδειγμα 5 του μαθήματος, $\frac{1}{OE} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, άρα $OE = 4$, και επειδή $OE = OZ$, $EZ = 8$. (Το EZ είναι ο λεγόμενος αρμονικός μέσος των βάσεων: $EZ = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 · Αναλογίες

Λύσεις · Μάθημα 7.8 — Θεωρήματα των διχοτόμων τριγώνου

- 1 $B\Delta = \frac{14 \cdot 9}{21} = 6$, $\Delta\Gamma = \frac{14 \cdot 12}{21} = 8$.
- 2 $\beta - \gamma = 3$. $EB = \frac{14 \cdot 9}{3} = 42$, $EF = \frac{14 \cdot 12}{3} = 56$. Το E είναι πέρα από το B , οπότε $\Delta E = EB + B\Delta = 42 + 6 = 48$. (Τύπος: $\frac{2 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 9}{144 - 81} = \frac{3024}{63} = 48$ ✓.)
- 3 $\frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{3}{5}$ και $\frac{AB}{AG} = \frac{4,5}{7,5} = \frac{3}{5}$. Από το αντίστροφο του θεωρήματος, η $\Delta\Delta$ είναι διχοτόμος.
- 4 $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{5}{7}$, άρα $\gamma = 5\kappa$, $\beta = 7\kappa$ και $\beta - \gamma = 2\kappa = 4$, $\kappa = 2$. Έτσι $\gamma = 10$, $\beta = 14$, $\alpha = 12$ και η περίμετρος είναι 36.
- 5 $B\Delta = \frac{10 \cdot 6}{15} = 4$. $\frac{AI}{\Delta\Delta} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$.

- 6 $B\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma} = \frac{\alpha}{3} \Rightarrow 3\gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \beta = 2\gamma$.
- 7 Από το Πυθαγόρειο $B\Gamma = 10$. Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της $\hat{B}$, οπότε $\frac{\Delta A}{\Delta\Gamma} = \frac{BA}{B\Gamma} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Άρα $\Delta\Delta = \frac{3}{8} \cdot 8 = 3$ και $\Delta\Gamma = 5$.
- 8 Από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου: $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$, $\frac{E\Gamma}{EA} = \frac{\alpha}{\gamma}$ (διχοτόμος από το B : $\frac{E\Gamma}{EA} = \frac{B\Gamma}{BA}$), $\frac{ZA}{ZB} = \frac{\beta}{\alpha}$ (διχοτόμος από το Γ : $\frac{ZA}{ZB} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B}$). Το γινόμενο είναι $\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 1$.
- 9 Στο τρίγωνο ABM , η BK είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ABM}$ (που ταυτίζεται με την $\hat{B}$). Από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου: $\frac{KA}{KM} = \frac{BA}{BM} = \frac{\gamma}{\alpha/2} = \frac{2\gamma}{\alpha}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 · Αναλογίες

Λύσεις · Μάθημα 7.9 — Απολλώνιος κύκλος

- 1 $\Gamma\Lambda = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$, $\Gamma\text{B} = 2$, $\Delta\text{B} = \frac{8}{3-1} = 4$, $\Gamma\Delta = 2 + 4 = 6$, ακτίνα 3.
- 2 Είναι η μεσοκάθετος του AB. Αντιστοιχεί στον λόγο $\lambda = 1$, για τον οποίο δεν υπάρχει σημείο εξωτερικής διαίρεσης Δ, άρα δεν σχηματίζεται κύκλος διαμέτρου ΓΔ.
- 3 $\Gamma\text{B} = \frac{\text{AB}}{\lambda+1}$ και $\text{B}\Delta = \frac{\text{AB}}{\lambda-1}$. Το B είναι μεταξύ Γ και Δ, άρα $\Gamma\Delta = \text{AB} \left(\frac{1}{\lambda+1} + \frac{1}{\lambda-1} \right) = \frac{2\lambda \cdot \text{AB}}{\lambda^2 - 1}$, και $\rho = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{\lambda \cdot \text{AB}}{\lambda^2 - 1}$. (Έλεγχος με $\lambda = 2$, $\text{AB} = 6$: $\rho = \frac{12}{3} = 4$ ✓.)
- 4 Η Α κινείται στον Απολλώνιο κύκλο των B, Γ με λόγο $\lambda = 4$. Από την προηγούμενη άσκηση $\rho = \frac{4 \cdot 10}{16-1} = \frac{8}{3}$. Το κέντρο είναι στην ευθεία ΒΓ, οπότε το μέγιστο ύψος είναι $\frac{8}{3}$ και $E_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{8}{3} = \frac{40}{3}$.
- 5 $\Gamma\text{B} = \frac{4}{4} = 1$, $\text{B}\Delta = \frac{4}{2} = 2$, άρα $\Gamma\Delta = 3$, $\rho = 1,5$. Το κέντρο Κ (μέσο του ΓΔ) απέχει από το Β: $\text{KB} = \rho - \Gamma\text{B} = 0,5$ και από το Α: $\text{KA} = \text{KB} + \text{BA} = 4,5$. Πράγματι $\text{KB} \cdot \text{KA} = 0,5 \cdot 4,5 = 2,25 = \rho^2$. (Πρόκειται για τη σχέση του Νεύτωνα του μαθήματος 7.6, εφαρμοσμένη στην αρμονική τετράδα Γ, Δ, Β, Α.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 · Ομοιότητα

Λύσεις · Μάθημα 8.1 — Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

- 1 $2,5 \cdot 200 = 500 \text{ cm} = 5 \text{ m}$ και $2 \cdot 200 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$. Το δωμάτιο είναι $5 \times 4 \text{ m}$.
- 2 $\frac{\Pi_{\mu\kappa\rho}}{40} = \frac{2}{5}$, άρα $\Pi_{\mu\kappa\rho} = 16$.
- 3 $\frac{6}{4} = 1,5 = \frac{9}{6}$: ναι, όμοια με λόγο $\frac{3}{2}$. $\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{4} = 1,5 \neq \frac{8}{6} \approx 1,33$: όχι.
- 4 Περίμετρος πρώτου 40, λόγος $\lambda = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$. Διαστάσεις: 18×12 .
- 5 Το ορθογώνιο που μένει έχει διαστάσεις β και $\alpha - \beta$. Η ομοιότητα (μεγάλη πλευρά προς μικρή) δίνει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha - \beta}$. Θέτοντας $x = \frac{\alpha}{\beta}$: $x = \frac{1}{x-1}$, δηλαδή $x^2 - x - 1 = 0$, με θετική ρίζα $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$. Είναι ο περίφημος χρυσός λόγος φ!
- 6 Ο λόγος του Σ_3 ως προς το Σ_1 είναι $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$, οπότε η περίμετρός του είναι 18.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 · Ομοιότητα

Λύσεις · Μάθημα 8.2 — Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων

- 1 Όμοια ορθογώνια τρίγωνα (ίδια γωνία των ακτίνων με το έδαφος): $\frac{h}{2} = \frac{18}{1,5} = 12$, άρα $h = 24 \text{ m}$.
- 2 (α) Τρίτες γωνίες 65° και 40° : τα τρίγωνα έχουν γωνίες $40^\circ, 65^\circ, 75^\circ$ και τα δύο, άρα **όμοια**. (β) $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{10}{5} = 2$, $\frac{15}{7} \neq 2$: **όχι**. (γ) $\frac{15}{5} = \frac{21}{7} = 3$ και ίση περιεχόμενη γωνία: **όμοια** (2ο κριτήριο).
- 3 Υψος μεγάλου $= \frac{4}{3} \cdot 9 = 12$. Περίμετρος μικρού $= \frac{3}{4} \cdot 48 = 36$.
- 4 Είναι $\frac{\text{A}\Delta}{\text{AB}} = \frac{16/3}{8} = \frac{2}{3}$ και $\frac{\text{AB}}{\text{A}\Gamma} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Άρα $\frac{\text{A}\Delta}{\text{AB}} = \frac{\text{AB}}{\text{A}\Gamma}$ και, με κοινή τη γωνία Α, τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΒΓ είναι όμοια (2ο κριτήριο) με αντιστοιχία $\text{A} \rightarrow \text{A}$, $\Delta \rightarrow \text{B}$, $\text{B} \rightarrow \Gamma$. Επομένως $\widehat{\text{AB}\Delta} = \widehat{\text{A}\Gamma\text{B}} = \hat{\Gamma}$.
- 5 Τα τρίγωνα ΡΑΓ και ΡΔΒ έχουν $\widehat{\text{AP}\Gamma} = \widehat{\text{DPB}}$ (κατακορυφήν) και $\widehat{\text{PA}\Gamma} = \widehat{\text{BA}\Gamma} = \widehat{\text{BD}\Gamma} = \widehat{\text{PDB}}$ (εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο ΒΓ). Άρα είναι όμοια: $\frac{\text{PA}}{\text{PD}} = \frac{\text{PG}}{\text{PB}}$, δηλαδή $\text{PA} \cdot \text{PB} = \text{PG} \cdot \text{PD}$. Εφαρμογή: $4 \cdot 9 = 3 \cdot \text{PD}$, $\text{PD} = 12$.
- 6 Έστω x η πλευρά κάθετη στη βάση και $2x$ η παράλληλη. Το μικρό τρίγωνο πάνω από το ορθογώνιο είναι όμοιο με το αρχικό: $\frac{2x}{15} = \frac{10-x}{30}$. Άρα $20x = 150 - 15x$, $x = \frac{30}{7}$, και διαστάσεις $\frac{30}{7} \times \frac{60}{7}$.
- 7 Από το Παράδειγμα 3: $\text{A}\Delta^2 = \text{B}\Delta \cdot \Delta\Gamma = 36$, $\text{A}\Delta = 6$. $\text{AB}^2 = \text{B}\Gamma \cdot \text{B}\Delta = 13 \cdot 4 = 52$, $\text{AB} = 2\sqrt{13}$. Όμοια $\text{A}\Gamma^2 = \text{B}\Gamma \cdot \Gamma\Delta = 13 \cdot 9 = 117$, $\text{A}\Gamma = 3\sqrt{13}$.
- 8 Από $\text{AB} \parallel \Delta\text{Z}$: τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΕΖΔ είναι όμοια (εντός εναλλάξ γωνίες, κατακορυφήν), οπότε $\frac{\text{EA}}{\text{EZ}} = \frac{\text{EB}}{\text{ED}}$. Από $\text{A}\Delta \parallel \text{BH}$: τα τρίγωνα ΕΑΔ και ΕΗΒ είναι όμοια, οπότε $\frac{\text{EH}}{\text{EA}} = \frac{\text{EB}}{\text{ED}}$. Επομένως $\frac{\text{EA}}{\text{EZ}} = \frac{\text{EH}}{\text{EA}}$, δηλαδή $\text{AE}^2 = \text{EZ} \cdot \text{EH}$.

- 9 Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΓ (ορθές στα Ε, Ζ) έχουν κοινή την $\hat{A}$, άρα είναι όμοια: $\frac{AE}{AZ} = \frac{AB}{AG}$, δηλαδή $\frac{AE}{AB} = \frac{AZ}{AG}$. Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΓ έχουν λοιπόν $\frac{AE}{AB} = \frac{AZ}{AG}$ και κοινή την περιεχόμενη γωνία $\hat{A}$, οπότε (2ο κριτήριο) $\triangle AEZ \approx \triangle ABG$ με αντιστοιχία $E \rightarrow B, Z \rightarrow G$. Συνεπώς $\frac{EZ}{BG} = \frac{AE}{AB}$.

- 10 Λόγος ομοιότητας $\lambda = \frac{24}{10} = 2,4$. Η περίμετρος γίνεται $2,4$ φορές μεγαλύτερη. Η μεγάλη πλευρά γίνεται $2,4 \cdot 15 = 36 \text{ cm} > 35 \text{ cm}$, άρα **δεν** χωράει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 · Μετρικές σχέσεις

Λύσεις · Μάθημα 9.1 — Ορθές προβολές

- 1 Σχηματίζεται ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο με υποτείνουσα 8 και ίσες κάθετες πλευρές x : $2x^2 = 64$, $x = 4\sqrt{2}$. Η προβολή είναι $4\sqrt{2}$.
- 2 Η ΑΒ είναι κάθετη στην ΑΓ, άρα η προβολή της είναι το σημείο Α. Η προβολή της ΒΓ στην ΑΓ είναι η ΑΓ (το Β προβάλλεται στο Α, το Γ στον εαυτό του).
- 3 Οι γωνίες της βάσης είναι 30° . Το ύψος από την κορυφή είναι κάθετη πλευρά απέναντι από 30° στο ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα 10, άρα ισούται με 5. Η προβολή του σκέλους στη βάση είναι $\sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3}$ και η βάση $10\sqrt{3}$.
- 4 Αν ΑΒ και ΓΔ είναι ίσα και παράλληλα (ομόρροπα), οι κάθετες προς την ε από τα Α, Γ και από τα Β, Δ είναι παράλληλες. Τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται (με υποτείνουσες ΑΒ και ΓΔ και κάθετη πλευρά παράλληλη στην ε) έχουν ίσες υποτείνουσες και ίσες οξείες γωνίες (παράλληλες πλευρές), άρα είναι ίσα και οι κάθετες πλευρές τους — που είναι ίσες με τις προβολές — είναι ίσες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 · Μετρικές σχέσεις

Λύσεις · Μάθημα 9.2 — Το Πυθαγόρειο θεώρημα

- 1 $\alpha = \sqrt{64 + 225} = 17$, $v = \frac{8 \cdot 15}{17} = \frac{120}{17}$.
- 2 Άλλη κάθετη: $\sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24$. Προβολές: $\frac{49}{25} = 1,96$ και $\frac{576}{25} = 23,04$.
- 3 $\sqrt{144 + 25} = 13$ και $7\sqrt{2}$.
- 4 $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = 6 \Rightarrow \alpha = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$.
- 5 $ΑΔ = \sqrt{3 \cdot 12} = 6$, $ΑΒ = \sqrt{15 \cdot 3} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, $ΑΓ = \sqrt{15 \cdot 12} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$. Έλεγχος: $45 + 180 = 225 = 15^2$ ✓.
- 6 Η μεγαλύτερη πλευρά είναι η $x + 8$: $x^2 + (x + 7)^2 = (x + 8)^2 \Rightarrow 2x^2 + 14x + 49 = x^2 + 16x + 64 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$, άρα $x = 5$ (η $x = -3$ απορρίπτεται). Πλευρές 5, 12, 13.
- 7 Η κάθετη από το κέντρο διχοτομεί τη χορδή. Μισή χορδή = $\sqrt{169 - 25} = 12$, άρα χορδή = 24.
- 8 $\beta = 3\kappa$, $\gamma = 4\kappa$, $\alpha = 5\kappa$. Από $\beta\gamma = \alpha v$: $12\kappa^2 = 5\kappa \cdot 12$, άρα $\kappa = 5$. Πλευρές: 15, 20, 25.
- 9 Από το θεώρημα I: $AB^2 = BG \cdot BD$ και $AG^2 = BG \cdot GD$. Διαιρώντας κατά μέλη: $\frac{AB^2}{AG^2} = \frac{BD}{GD}$.
- 10 Η διάκεντρος είναι $9 + 4 = 13$. Οι ακτίνες προς τα σημεία επαφής είναι κάθετες στην εφαπτομένη, άρα παράλληλες. Φέρνοντας από το κέντρο του μικρού παράλληλη προς την εφαπτομένη σχηματίζεται ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα 13 και κάθετη πλευρά $9 - 4 = 5$. Η άλλη κάθετη, ίση με το ζητούμενο τμήμα, είναι $\sqrt{169 - 25} = 12$. (Γενικά: $2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{36} = 12$.)
- 11 Η διάμεσος προς την υποτείνουσα είναι το μισό της, άρα $\alpha = 25$. Τότε $\Delta M = \sqrt{AM^2 - A\Delta^2} = \sqrt{156,25 - 144} = 3,5$, οπότε οι προβολές είναι $12,5 - 3,5 = 9$ και $12,5 + 3,5 = 16$. Επομένως $\gamma = \sqrt{25 \cdot 9} = 15$ και $\beta = \sqrt{25 \cdot 16} = 20$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 · Μετρικές σχέσεις

Λύσεις · Μάθημα 9.3 — Γεωμετρικές κατασκευές

- 1 $\alpha\sqrt{2}$: υποτείνουσα ορθογωνίου ισοσκελούς με κάθετες α . $\alpha\sqrt{2}$: επειδή $5\alpha^2 = \alpha^2 + (2\alpha)^2$, υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες α και 2α .
- 2 Ημικύκλιο διαμέτρου 13 με σημείο Δ που τη χωρίζει σε 4 και 9 · η κάθετη στο Δ μέχρι το ημικύκλιο είναι η μέση ανάλογος, μήκους $\sqrt{36} = 6$.
- 3 (α) Μέση ανάλογος των 1 και 7: ημικύκλιο διαμέτρου 8, κάθετη στο σημείο που χωρίζει τη διάμετρο σε 1 και 7. (β) $7 = 4^2 - 3^2$: ημικύκλιο διαμέτρου 4, χορδή 3 από το ένα άκρο · η χορδή από το άλλο άκρο είναι $\sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$. (Και άλλοι τρόποι, π.χ. $7 = (\sqrt{3})^2 + 2^2$.)

- 4 Ημικύκλιο διαμέτρου 10, παράλληλη στη διάμετρο σε απόσταση $\kappa = 4$ ($\kappa^2 = 16$, και $4 \leq 5$ οπότε υπάρχει τομή). Η προβολή του σημείου τομής χωρίζει τη διάμετρο στα x, y . Αλγεβρικά: $t^2 - 10t + 16 = 0$, $t = 2$ ή $t = 8$.

- 5 $\frac{11\alpha^2}{4} = 3\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} = (\alpha\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$. Κατασκευάζουμε το $\alpha\sqrt{3}$ (π.χ. ως διπλάσιο του ύψους ισοπλευρού πλευράς α , αφού $2 \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \alpha\sqrt{3}$) και το $\frac{\alpha}{2}$ (μέσο του α). Μετά, σε ημικύκλιο διαμέτρου $\alpha\sqrt{3}$ φέρνουμε χορδή $\frac{\alpha}{2}$ από το ένα άκρο· η χορδή από το άλλο άκρο προς το ίδιο σημείο είναι το x .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 · Μετρικές σχέσεις

Λύσεις · Μάθημα 9.4 — Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος

- 1 (α) $36 < 16 + 25 = 41$: οξυγώνιο. (β) $49 > 9 + 25 = 34$: αμβλυγώνιο. (γ) $1681 = 81 + 1600$: ορθογώνιο.
- 2 $\alpha^2 = 36 + 16 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 28$, άρα $\alpha = 2\sqrt{7}$.
- 3 $\tau = 21$, $\tau - \alpha = 8$, $\tau - \beta = 7$, $\tau - \gamma = 6$. $v_\beta = \frac{2}{14} \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{84}{7} = 12$.
- 4 Η μεγαλύτερη πλευρά είναι η $\alpha = 6$: $36 < 25 + 16$, άρα το τρίγωνο είναι οξυγώνιο. Για την $\hat{B}$ (οξεία), απέναντι πλευρά β : $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot \text{BD}$ με BD την προβολή της γ στην α : $25 = 36 + 16 - 12\text{BD}$, $\text{BD} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$. Η προβολή της AG στη BG είναι $\text{GD} = 6 - \frac{9}{4} = \frac{15}{4}$. (Έλεγχος από $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \cdot \text{GD}$: $16 = 61 - 12\text{GD}$, $\text{GD} = \frac{45}{12} = \frac{15}{4}$ ✓.)
- 5 Χρειάζεται $x < 10$ (το 10 είναι η μεγαλύτερη), τριγωνική ανισότητα $x > 2$, και αμβλεία απέναντι από το 10: $100 > x^2 + 64$, δηλαδή $x < 6$. Άρα $2 < x < 6$.

- 6 Από τον νόμο των συνημιτόνων $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \Gamma$, άρα $2 \sin \Gamma = 1$, $\sin \Gamma = \frac{1}{2}$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.
- 7 Η διαγώνιος απέναντι από τη γωνία 60° : $d_1^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 49$, $d_1 = 7$. Η άλλη, απέναντι από την 120° : $d_2^2 = 25 + 64 + 40 = 129$, $d_2 = \sqrt{129}$.
- 8 Η εξωτερική γωνία στο A είναι 45° . Η προβολή της $\gamma = \text{AB}$ στην ευθεία AG είναι κάθετη πλευρά ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου με υποτείνουσα 2, άρα $\text{AD} = \sqrt{2}$. Από το Θεώρημα II: $\alpha^2 = 18 + 4 + 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 22 + 12 = 34$, $\alpha = \sqrt{34}$.
- 9 Γράφουμε τον νόμο των συνημιτόνων για τις τρεις πλευρές: $2\beta\gamma \cos A = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$, $2\gamma\alpha \cos B = \gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2$, $2\alpha\beta \cos \Gamma = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2$. Προσθέτοντας κατά μέλη, το δεξί μέλος γίνεται $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, που είναι το ζητούμενο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 · Μετρικές σχέσεις

Λύσεις · Μάθημα 9.5 — Θεωρήματα διαμέσων

- 1 $\mu_\alpha^2 = \frac{72 + 32 - 64}{4} = 10$, $\mu_\alpha = \sqrt{10}$.
- 2 $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \text{MD} \Rightarrow 81 - 25 = 16\text{MD} \Rightarrow \text{MD} = 3,5$.
- 3 $\delta_2^2 = 2(36 + 64) - 100 = 100$, $\delta_2 = 10$. Οι διαγώνιοι είναι ίσες, άρα είναι **ορθογώνιο** (άλλωστε $6^2 + 8^2 = 10^2$).
- 4 $\mu_\alpha^2 = \frac{128 + 72 - 100}{4} = 25$, $\mu_\alpha = 5$. $\mu_\beta^2 = \frac{200 + 72 - 64}{4} = 52$, $\mu_\beta = 2\sqrt{13}$. $\mu_\gamma^2 = \frac{200 + 128 - 36}{4} = 73$, $\mu_\gamma = \sqrt{73}$.
Αθροισμα: $25 + 52 + 73 = 150 = \frac{3}{4}(100 + 64 + 36)$ ✓.
- 5 $\mu_\alpha = \gamma \Rightarrow 4\gamma^2 = 2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow 2\beta^2 = 2\gamma^2 + \alpha^2$.

- 6 $\Theta A = \frac{2}{3}\mu_\alpha$ κ.λπ. Άρα $\Theta A^2 + \Theta B^2 + \Theta \Gamma^2 = \frac{4}{9}(\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{3}$.
- 7 Στο τρίγωνο ABG η BK είναι διάμεσος: $\text{AB}^2 + \text{BG}^2 = 2\text{BK}^2 + \frac{\text{AG}^2}{2}$. Στο τρίγωνο ADG : $\text{GD}^2 + \text{AD}^2 = 2\text{AK}^2 + \frac{\text{AG}^2}{2}$. Προσθέτοντας: άθροισμα πλευρών² $= 2(\text{BK}^2 + \text{DK}^2) + \text{AG}^2$. Στο τρίγωνο KBD η KL είναι διάμεσος: $\text{BK}^2 + \text{DK}^2 = 2\text{KL}^2 + \frac{\text{BD}^2}{2}$. Αντικαθιστώντας: άθροισμα $= 4\text{KL}^2 + \text{BD}^2 + \text{AG}^2$. (Για παραλληλόγραμμο $\text{K} \equiv \text{L}$ και ξαναβρίσκουμε τον νόμο του παραλληλογράμμου.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 · Μετρικές σχέσεις

Λύσεις · Μάθημα 9.6 — Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

- 1 $\rho^2 = \frac{82}{2} - \frac{64}{4} = 41 - 16 = 25$. Κύκλος κέντρου O (μέσο του AB) και ακτίνας 5.
- 2 Πρέπει $2k^2 \geq \text{AB}^2$, δηλαδή $12 \geq 16$, που δεν ισχύει. Ο τόπος είναι το κενό σύνολο (το ελάχιστο του αθροίσματος είναι $\frac{\text{AB}^2}{2} = 8$, στο μέσο O).

- 3 $OH = \frac{40}{20} = 2$: ο τόπος είναι η κάθετη στην AB στο H με $AH = 7, HB = 3$. Τα σημεία του τόπου σε απόσταση 5 από την AB είναι δύο, συμμετρικά ως προς την AB , πάνω στην κάθετη σε απόσταση 5 από το H . (Έλεγχος: $MA^2 - MB^2 = (49 + 25) - (9 + 25) = 40$ ✓.)
- 4 Από το 1ο θεώρημα διαμέσων $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} \geq \frac{AB^2}{2}$, με ισότητα μόνο όταν $MO = 0$, δηλαδή $M \equiv O$ (το μέσο του AB).

- 5 Έστω O το κέντρο. Το O είναι μέσο των AG και BD (μήκους $\alpha\sqrt{2}$). Από το 1ο θεώρημα διαμέσων: $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \alpha^2$ και $MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + \alpha^2$. Άρα το άθροισμα ισούται με $4MO^2 + 2\alpha^2 = 4\alpha^2$, δηλαδή $MO = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$. Ο τόπος είναι ο κύκλος κέντρου O με ακτίνα $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$: ο **περιγεγραμμένος κύκλος** του τετραγώνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 · Μετρικές σχέσεις

Λύσεις · Μάθημα 9.7 — Τέμνουσες κύκλου – Δύναμη σημείου

- 1 $5 \cdot 8 = 4 \cdot P\Delta$, άρα $P\Delta = 10$.
- 2 $\Delta = 100 - 36 = 64$ και εφαπτόμενο τμήμα 8.
- 3 $144 = 8 \cdot PB$, $PB = 18$, άρα $AB = 10$.
- 4 Η δύναμη του P είναι $36 - 100 = -64$, οπότε για κάθε χορδή $PA \cdot PB = 64$. Με $PA = \kappa$, $PB = 4\kappa$: $4\kappa^2 = 64$, $\kappa = 4$. Χορδή $= 5\kappa = 20$ — είναι διάμετρος! (Πράγματι, πάνω στη διάμετρο τα κομμάτια είναι $10 - 6 = 4$ και $10 + 6 = 16$.)
- 5 $PE^2 = PA \cdot PB \Rightarrow 64 = 4 \cdot PB \Rightarrow PB = 16$. Η AB είναι διάμετρος: $AB = 12$, άρα $R = 6$.
- 6 $PA \cdot PB = 4 \cdot 9 = 36 = PE^2$. Από το αντίστροφο του Θεωρήματος II, η PE είναι εφαπτομένη του κύκλου (A, B, E).
- 7 Για τον πρώτο κύκλο: $MG \cdot MD = MA \cdot MB$. Για τον δεύτερο: $ME \cdot MZ = MA \cdot MB$. Άρα $MG \cdot MD = ME \cdot MZ$ και, από το αντίστροφο του Θεωρήματος I, τα Γ, Δ, E, Z είναι ομοκυκλικά.
- 8 Προεκτείνουμε τη $\Gamma\Delta$ μέχρι να τμήσει ξανά τον (ολόκληρο) κύκλο στο Γ' . Η διάμετρος AB είναι κάθετη στη χορδή $\Gamma\Gamma'$, άρα τη διχοτομεί: $\Delta\Gamma = \Delta\Gamma'$. Από το Θεώρημα I για τις χορδές AB και $\Gamma\Gamma'$ που τέμνονται στο Δ : $\Delta\Gamma \cdot \Delta\Gamma' = \Delta A \cdot \Delta B$, δηλαδή $\Gamma\Delta^2 = \Delta A \cdot \Delta B$. Επειδή $AA + \Delta B = 2R$, το γινόμενο γίνεται μέγιστο όταν $\Delta A = \Delta B = R$ (το Δ στο κέντρο), οπότε $\Gamma\Delta_{\max} = R$.
- 9 Το κέντρο O είναι το μέσο του AB και $R = \frac{AB}{2}$. Από το 1ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο PAB : $OP^2 = \frac{2PA^2 + 2PB^2 - AB^2}{4}$. Επομένως η δύναμη είναι $OP^2 - R^2 = \frac{2PA^2 + 2PB^2 - AB^2}{4} - \frac{PA^2 + PB^2 - AB^2}{4} = \frac{PA^2 + PB^2 - AB^2}{4}$. Είναι θετική (εξωτερικό σημείο) αν και μόνο αν $PA^2 + PB^2 > AB^2$ — που, για P εκτός της ευθείας AB , σημαίνει ότι η $\widehat{APB}$ είναι οξεία. Ωραία σύνδεση με το μάθημα 9.4!

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 · Εμβαδά

Λύσεις · Μάθημα 10.1–10.2 — Πολυγωνικά χωρία – Εμβαδόν – Ισοδύναμα σχήματα

- 1 (α) $25\,000\text{ cm}^2$ (β) $0,48\text{ m}^2$ (γ) 3000 m^2 .
- 2 $8 - 2 = 6$ τρίγωνα (με $8 - 3 = 5$ διαγωνίους).
- 3 Αν AM είναι διάμεσος, τα τρίγωνα ABM και $AM\Gamma$ έχουν ίσες βάσεις $BM = M\Gamma$ και το ίδιο ύψος (την απόσταση του A από τη $B\Gamma$). Άρα έχουν ίσα εμβαδά, δηλαδή είναι ισοδύναμα — χωρίς να είναι, γενικά, ίσα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 · Εμβαδά

Λύσεις · Μάθημα 10.3 — Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων

- 1 (α) $\frac{100}{2} = 50$ (β) η άλλη πλευρά είναι 12, άρα 60 (γ) $\frac{7 \cdot 24}{2} = 84$.
- 2 $E = 9 \cdot 4 = 36 = 6 \cdot v' \Rightarrow v' = 6$.
- 3 $\frac{15+9}{2}v = 96 \Rightarrow 12v = 96 \Rightarrow v = 8$.
- 4 Ύψος προς τη βάση $\sqrt{289 - 64} = 15$, $E = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$. Ύψος προς σκέλος: $\frac{2 \cdot 120}{17} = \frac{240}{17}$.
- 5 Η προβολή κάθε σκέλους στη μεγάλη βάση είναι $\frac{20-10}{2} = 5$. Με γωνία 45° το ύψος ισούται με την προβολή: $v = 5$. $E = \frac{30}{2} \cdot 5 = 75$.
- 6 Η απόσταση του N από τη $B\Gamma$ είναι το μισό της απόστασης του A (το N είναι μέσο της AM και το M ανήκει στη $B\Gamma$ — θαλής ή ομοιότητα). Με την ίδια βάση $B\Gamma$: $(NB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$.
- 7 $E = \frac{9 \cdot 14}{2} = 63$. Αν ήταν ρόμβος: πλευρά $\sqrt{4,5^2 + 7^2} = \sqrt{20,25 + 49} = \sqrt{69,25} = \frac{\sqrt{277}}{2}$.

- 8 Τα τρίγωνα $\triangle AZ$, $\triangle BE\Delta$, $\triangle \Gamma ZE$ είναι ίσα (δύο πλευρές $\frac{\alpha}{3}$, $\frac{2\alpha}{3}$ με περιεχόμενη γωνία 60°). Το τρίγωνο $\triangle AZ$ έχει $AZ = \frac{\alpha}{3}$ και ύψος από το Z προς την AB ίσο με $AZ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\alpha}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα $(\triangle AZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{3} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{3} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{18} = \frac{2}{9}(\triangle B\Gamma)$. Επομένως $(\triangle EZ) = (\triangle B\Gamma) - 3 \cdot \frac{2}{9}(\triangle B\Gamma) = \frac{1}{3}(\triangle B\Gamma)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 · Εμβαδά

Λύσεις · Μάθημα 10.4 — Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

- 1 $\tau = 12$, $E = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{720} = 12\sqrt{5}$.
- 2 $E = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$.
- 3 $\tau = 15$, $E = 15 \cdot 2 = 30$.
- 4 Είναι ορθογώνιο ($25 + 144 = 169$). $E = 30$, $\tau = 15$, $\rho = 2$, $R = \frac{13}{2}$.
- 5 Από $E = \tau\rho$ και $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$: $\tau\rho = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$, άρα $\alpha\beta\gamma = 4R\tau\rho$.
- 6 $E = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \eta\mu 120^\circ = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$. Βάση (νόμος συννημιτόνων): $\sqrt{100 + 100 + 100} = 10\sqrt{3}$.
- 7 Η διαγώνιος το χωρίζει σε δύο ίσα τρίγωνα με πλευρές α, β και περιεχόμενη γωνία φ , καθένα με εμβαδόν $\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\varphi$. Άρα $E = \alpha\beta\eta\mu\varphi$. Εφαρμογή: $28 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 14\sqrt{2}$.
- 8 $\frac{1}{v_\alpha} = \frac{\alpha}{2E}$ κ.λπ. Άρα το άθροισμα είναι $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2E} = \frac{2\tau}{2E} = \frac{\tau}{E} = \frac{1}{\rho}$, αφού $E = \tau\rho$.
- 9 $\tau = 16$, $E = \sqrt{16 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 1} = \sqrt{576} = 24$. $v_\alpha = \frac{48}{4} = 12$. Η μεγαλύτερη πλευρά είναι η $\gamma = 15$: $225 > 16 + 169 = 185$, άρα η $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία· έτσι το ύψος από το A πέφτει στην προέκταση της $B\Gamma$ πέρα από το Γ . (Πράγματι, $\sqrt{13^2 - 12^2} = 5 > 4$: η προβολή της AG είναι μεγαλύτερη από την ίδια τη $B\Gamma$.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 · Εμβαδά

Λύσεις · Μάθημα 10.5 — Λόγος εμβαδών

- 1 $\frac{E}{150} = \frac{4}{25}$, $E = 24$.
- 2 Κοινό ύψος από το A : $(\triangle B\Delta) = \frac{4}{10} \cdot 40 = 16$, $(\triangle A\Gamma) = 24$.
- 3 $\lambda^2 = \frac{18}{50} = \frac{9}{25}$, $\lambda = \frac{3}{5}$. Ο λόγος των περιμέτρων είναι επίσης $\frac{3}{5}$.
- 4 $\frac{(\triangle A\Gamma E)}{(\triangle B\Gamma)} = \frac{A\Gamma \cdot AE}{AB \cdot \Gamma\Gamma} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$, $(\triangle A\Gamma E) = 18$.
- 5 Τα τρίγωνα με κορυφή A πρέπει να έχουν εμβαδά $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$ του αρχικού, οπότε λόγους ομοιότητας $\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Άρα $A\Delta_1 = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \approx 5,20$ και $A\Delta_2 = 9\sqrt{\frac{2}{3}} = 3\sqrt{6} \approx 7,35$.
- 6 Τα τρίγωνα $\triangle ABA$ και $\triangle A\Gamma\Delta$ έχουν κοινό ύψος από το A , άρα $\frac{(\triangle ABA)}{(\triangle A\Gamma\Delta)} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$. Έχουν επίσης ίσες γωνίες στο A ($\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Delta A\Gamma}$) με κοινή πλευρά AA , άρα $\frac{(\triangle ABA)}{(\triangle A\Gamma\Delta)} = \frac{AB \cdot AA}{\Gamma\Delta \cdot AA} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$. Συνδυάζοντας: $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$. Μια πολύ κομψή απόδειξη!
- 7 $OAB \approx O\Gamma\Delta$ με $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$, άρα $\frac{OA}{O\Gamma} = \frac{\alpha}{\beta}$. Τα OAB , $O\Gamma\Delta$ έχουν κοινό ύψος από το B : $(O\Gamma\Delta) = \alpha^2 \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \alpha\beta$. Όμοια $(O\Delta\Gamma) = \alpha\beta$. Σύνολο: $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 · Εμβαδά

Λύσεις · Μάθημα 10.6 — Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμό του

- 1 $x^2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 36$, $x = 6$ (μέση ανάλογος των 6 και 6 — εδώ απλά 6).
- 2 Έστω K το μέσο της $B\Gamma$ και, χωρίς βλάβη, M μεταξύ B και K . Η AK χωρίζει το τρίγωνο στη μέση. Φέρνουμε από το K παράλληλη προς την AM , που τέμνει την AG στο N . Τότε $(\triangle AMN) = (\triangle AMK)$ (κοινή βάση AM , κορυφές σε παράλληλη), οπότε $(\triangle BMN) = (\triangle BM) + (\triangle AMN) = (\triangle BM) + (\triangle AMK) = (\triangle ABK) = \frac{1}{2}(\triangle AB\Gamma)$. Η ζητούμενη ευθεία είναι η MN .
- 3 Ζητάμε $x^2 = \alpha^2 + \beta^2$: το x είναι η υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές α και β (Πυθαγόρειο).
- 4 Φέρνουμε από το A παράλληλη ε προς τη $B\Gamma$ και τη μεσοκάθετο της $B\Gamma$ · έστω A' η τομή τους. Το τρίγωνο $\triangle A'B\Gamma$ είναι ισοσκελές (A' στη μεσοκάθετο) και ισοδύναμο με το $\triangle AB\Gamma$ (κοινή βάση, κορυφές στην παράλληλη ε).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11 · Μέτρηση κύκλου

Λύσεις · Μάθημα 11.1–11.2 — Κανονικά πολύγωνα – Ιδιότητες και στοιχεία

- 1 $\omega_{15} = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$, $\varphi_{15} = 156^\circ$.
- 2 $\nu = \frac{360}{18} = 20$, $\varphi = 162^\circ$.
- 3 $\frac{\lambda^2}{4} = 169 - 144 = 25$, $\frac{\lambda}{2} = 5$, $\lambda = 10$.
- 4 $\nu\varphi_\nu = 180^\circ\nu - 360^\circ = (\nu - 2) \cdot 180^\circ$.
- 5 Είναι όμοια με λόγο $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Λόγος περιμέτρων $\frac{2}{3}$, λόγος εμβαδών $\frac{4}{9}$.
- 6 $\varphi_\nu = 180 - \frac{360}{\nu}$ είναι ακέραιος αν και μόνο αν ο ν διαιρεί το $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Ο 360 έχει $(3+1)(2+1)(1+1) = 24$ διαιρέτες, από τους οποίους εξαιρούμε τους 1 και 2 (δεν υπάρχει πολύγωνο). Άρα υπάρχουν 22 τέτοια κανονικά πολύγωνα ($\nu = 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 12$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11 · Μέτρηση κύκλου

Λύσεις · Μάθημα 11.3 — Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο

- 1 Εξάγωνο: $\lambda_6 = 4$, $E_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 16 = 24\sqrt{3}$. Τετράγωνο: $\lambda_4 = 4\sqrt{2}$, $E_4 = 32$.
- 2 $R\sqrt{3} = 9 \Rightarrow R = 3\sqrt{3}$. Απόστημα (ακτίνα εγγεγραμμένου): $\frac{R}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
- 3 $\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2 = 24\sqrt{3} \Rightarrow R^2 = 16 \Rightarrow R = 4 = \lambda_6$. Περίμετρος 24, απόστημα $2\sqrt{3}$.
- 4 Εγγεγραμμένο: $2R^2$. Περιγεγραμμένο: πλευρά $2R$, εμβαδόν $4R^2$. Λόγος $\frac{1}{2}$.
- 5 Με τον τύπο $\lambda_{2\nu}^2 = 2R(R - \alpha_\nu)$ για $\nu = 4$: $\lambda_8^2 = 2R \left(R - \frac{R\sqrt{2}}{2} \right) = R^2(2 - \sqrt{2})$, άρα $\lambda_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. (Εναλλακτικά: νόμος συνημιτόνων με κεντρική γωνία 45° : $\lambda_8^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 45^\circ = R^2(2 - \sqrt{2})$.)
- 6 Το ΑΓΕ είναι ισόπλευρο εγγεγραμμένο, άρα $(\text{ΑΓΕ}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. Το ΑΒΓΔ είναι το μισό εξάγωνο (η ΑΔ είναι διάμετρος και άξονας συμμετρίας), άρα $(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. Ενδιαφέρον: τα δύο σχήματα είναι ισοδύναμα!

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11 · Μέτρηση κύκλου

Λύσεις · Μάθημα 11.4–11.5 — Μήκος κύκλου – Μήκος τόξου

- 1 $L = 10\pi \cdot 2\pi R = 18\pi \Rightarrow R = 9$.
- 2 $15^\circ = \frac{\pi}{12}$, $135^\circ = \frac{3\pi}{4}$, $210^\circ = \frac{7\pi}{6}$, $\frac{\pi}{5} = 36^\circ$, $\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$.
- 3 $\ell = \frac{\pi \cdot 12 \cdot 75}{180} = 5\pi$.
- 4 $4\pi = \frac{\pi}{3}R \Rightarrow R = 12$, $L = 24\pi$.
- 5 Ο λεπτοδείκτης σε 20 λεπτά διαγράφει $\frac{20}{60} \cdot 360^\circ = 120^\circ$: $\ell = \frac{\pi \cdot 10 \cdot 120}{180} = \frac{20\pi}{3} \approx 20,9$ cm. Ο ωροδείκτης διαγράφει 30° ανά ώρα, άρα 10° σε 20 λεπτά: $\ell = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 10}{180} = \frac{\pi}{3} \approx 1,05$ cm.
- 6 Η χορδή είναι πλευρά εγγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου, άρα το τόξο είναι 60° και $\ell = \frac{\pi R}{3}$.
- 7 Τα κέντρα σχηματίζουν τετράγωνο πλευράς 20 cm. Το λουρί αποτελείται από 4 ευθύγραμμα τμήματα ίσα με την πλευρά ($4 \cdot 20 = 80$ cm) και από 4 τόξα, που μαζί σχηματίζουν έναν ολόκληρο κύκλο ακτίνας 10 cm (κάθε τόξο είναι 90°): $2\pi \cdot 10 = 20\pi$. Σύνολο $80 + 20\pi \approx 142,8$ cm.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11 · Μέτρηση κύκλου

Λύσεις · Μάθημα 11.6–11.7 — Εμβαδόν κύκλου – Κυκλικός τομέας – Κυκλικό τμήμα

- 1 $2\pi R = 14\pi \Rightarrow R = 7$, $E = 49\pi$.
- 2 $\frac{\pi \cdot 100 \cdot 72}{360} = 20\pi$.
- 3 $R^2 = 36$, $R = 6$, $L = 12\pi$.
- 4 Τομέας $\frac{16\pi}{4} = 4\pi$, τρίγωνο ΟΑΒ ορθογώνιο ισοσκελές: $\frac{16}{2} = 8$. Τμήμα: $4\pi - 8 \approx 4,57$.
- 5 Εμβαδά: $225\pi \approx 706,9$ και $400\pi \approx 1256,6$ cm². Τιμή ανά cm²: $\frac{9}{706,9} \approx 0,0127$ και $\frac{15}{1256,6} \approx 0,0119$. Συμφέρει η μεγάλη. (Ο λόγος των εμβαδών είναι $(\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9} \approx 1,78$, ενώ ο λόγος των τιμών μόνο $\frac{15}{9} \approx 1,67$.)
- 6 Τρίγωνο: $9\sqrt{3}$. Η ακτίνα του εγγεγραμμένου είναι $\frac{1}{3}$ του ύψους $3\sqrt{3}$, δηλαδή $\sqrt{3}$. Κύκλος: 3π . Ζητούμενο: $9\sqrt{3} - 3\pi \approx 6,17$.
- 7 Περίμετρος $= 2R + \ell = 10 + \ell = 20$, άρα $\ell = 10$. $E = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25$.

- 8 Το «φύλλο» είναι η τομή των δύο τεταρτοκυκλίων. Καθένα έχει εμβαδόν $\frac{\pi\alpha^2}{4}$ και η ένωσή τους είναι όλο το τετράγωνο, άρα (εμβαδόν τομής = άθροισμα – ένωση): $2 \cdot \frac{\pi\alpha^2}{4} - \alpha^2 = \alpha^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \approx 0,57\alpha^2$.
- 9 $\frac{1}{3}(\pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2) = R^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \approx 0,614R^2$. (Η: τομέας 120° μείον τρίγωνο OAB: $\frac{\pi R^2}{3} - \frac{1}{2}R^2 \eta \mu 120^\circ$ — το ίδιο.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11 · Μέτρηση κύκλου

Λύσεις · Μάθημα 11.8 — Τετραγωνισμός κύκλου

- 1 $x^2 = 9\pi \Rightarrow x = 3\sqrt{\pi} \approx 5,317$. Δεν είναι τετραγωνισμός, γιατί ο τετραγωνισμός απαιτεί **κατασκευή** με κανόνα και διαβήτη, όχι αριθμητικό υπολογισμό. Το τμήμα $3\sqrt{\pi}$ δεν μπορεί να κατασκευαστεί με αυτά τα εργαλεία.
- 2 Εμβαδόν $\frac{R^2}{2} = 8$, πλευρά τετραγώνου $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (κατασκευάσιμη: διαγώνιος τετραγώνου πλευράς 2).
- 3 $B\Gamma = 10$, $R = 5$. Μηνίσκος στην AB: ημικύκλιο $\frac{\pi \cdot 16}{2} = 8\pi$ μείον το κυκλικό τμήμα AB του περιγεγραμμένου κύκλου. Το κυκλικό τμήμα = τομέας OAB μείον τρίγωνο OAB. Το τρίγωνο OAB (O μέσο της BΓ) έχει εμβαδόν $\frac{1}{2}(AB\Gamma) = 12$. Η γωνία $\widehat{AOB} = 2\hat{\Gamma}$, με $\eta \mu \hat{\Gamma} = \frac{8}{10}$, δηλαδή $\hat{\Gamma} \approx 53,13^\circ$ και $\widehat{AOB} \approx 106,26^\circ$. Τομέας $\approx \frac{106,26}{360} \cdot 25\pi \approx 23,18$. Τμήμα $\approx 11,18$. Μηνίσκος $\approx 25,13 - 11,18 \approx 13,95$. Όμοια ο άλλος μηνίσκος: ημικύκλιο $\frac{9\pi}{2} \approx 14,14$, τομέας με γωνία $\approx 73,74^\circ$: $\approx 16,09$, τρίγωνο 12, τμήμα $\approx 4,09$, μηνίσκος $\approx 10,05$. Άθροισμα $\approx 24 = (AB\Gamma) \checkmark$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12 · Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

Λύσεις · Μάθημα 12.1–12.3 — Το επίπεδο και οι σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων

- 1 Ασύμβατες με την AA' είναι οι ακμές που δεν την τέμνουν και δεν της είναι παράλληλες: BΓ, ΓΔ, B'Γ', Γ'Δ' (τέσσερις ακμές).
- 2 Όλα τα επίπεδα της πόρτας περιέχουν την ευθεία των μεντεσέδων. Μια ευθεία μόνη της δεν ορίζει επίπεδο· χρειάζεται και ένα σημείο εκτός της. Καθώς αλλάζει η θέση της άκρης της πόρτας, αλλάζει το σημείο αυτό και άρα το επίπεδο.
- 3 Οι ευθείες τέμνονται ανά δύο σε τρία σημεία A, B, Γ, που είναι διαφορετικά (αφού οι ευθείες δεν περνούν από κοινό σημείο) και μη συνευθειακά (αλλιώς δύο από τις ευθείες θα ταυτίζονταν). Το επίπεδο ABΓ περιέχει δύο σημεία κάθε ευθείας, άρα (αξίωμα) περιέχει και τις τρεις ευθείες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12 · Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

Λύσεις · Μάθημα 12.4 — Ευθείες και επίπεδα παράλληλα – Θεώρημα του Θαλή στον χώρο

- 1 Είναι παράλληλες ευθείες: είναι συνεπίπεδες (ανήκουν στο τρίτο επίπεδο) και δεν έχουν κοινό σημείο (ανήκουν σε παράλληλα επίπεδα).
- 2 $\frac{3}{x+1} = \frac{x}{8} \Rightarrow x^2 + x - 24 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{97}}{2} \approx 4,42$ (η αρνητική ρίζα απορρίπτεται).
- 3 $K\Lambda = NM = \frac{A\Gamma}{2} = 5$ και $\Lambda M = K\Lambda = \frac{B\Delta}{2} = 3$. Περίμετρος $16 = A\Gamma + B\Delta$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12 · Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

Λύσεις · Μάθημα 12.5 — Γωνία δύο ευθειών – Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

- 1 $B'\Gamma' \parallel B\Gamma$ και $AB \perp B\Gamma$, άρα γωνία 90° . Για τις AB' και ΓΔ': το A'ΒΓΔ' είναι ορθογώνιο (A'Δ' ίση και παράλληλη με τη BΓ), άρα ΓΔ' $\parallel$ BA' και ζητάμε τη γωνία των AB' και A'B, που είναι διαγώνιοι του τετραγώνου ABB'A': γωνία 90° .
- 2 Αν $OB \perp \varepsilon$ με $OB = 5$, από το θεώρημα των τριών καθέτων $\Sigma B \perp \varepsilon$, άρα η απόσταση είναι $\Sigma B = \sqrt{144 + 25} = 13$.
- 3 Αν AΔ είναι το ύψος του ABΓ, $A\Delta = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$ και $A\Delta \perp B\Gamma$. Από το θεώρημα των τριών καθέτων $\Sigma \Delta \perp B\Gamma$, οπότε η απόσταση είναι $\Sigma \Delta = \sqrt{4,8^2 + 4,8^2} = 4,8\sqrt{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12 · Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

Λύσεις · Μάθημα 12.6 — Απόσταση σημείου από επίπεδο – Απόσταση παράλληλων επιπέδων

- 1 $\sqrt{225 + 64} = 17$.

2 Ίδια μεριά: το $ABB'A'$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο, $AB = \sqrt{3^2 + (7-3)^2} = 5$. Εκατέρωθεν: $AB = \sqrt{3^2 + (7+3)^2} = \sqrt{109}$.

3 Η AB' είναι κάθετη στη $B'\Gamma'$ (η $B'\Gamma'$ είναι κάθετη στο επίπεδο $ABB'A'$). Άρα η απόσταση είναι $AB' = 4\sqrt{2}$ (διαγώνιος έδρας).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12 · Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

Λύσεις · Μάθημα 12.7 — Διέδρη γωνία – Κάθετα επίπεδα

1 Το επίπεδο της έδρας $ABB'A'$ περιέχει την ακμή AA' , που είναι κάθετη στο επίπεδο της βάσης $AB\Gamma\Delta$ (κάθετη στις AB και $A\Delta$). Από το κριτήριο, τα επίπεδα είναι κάθετα.

2 Η ακμή της διέδρης είναι η $B\Delta$. Με O το κέντρο της βάσης, $AO \perp B\Delta$ και (τρεις κάθετοι) $A'O \perp B\Delta$. Η αντίστοιχη επίπεδη είναι η $\widehat{A'OA}$: $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $AA' = a$, $A'O = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$. $\sin \varphi = \frac{AO}{A'O} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ($\varphi \approx 54,7^\circ$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12 · Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

Λύσεις · Μάθημα 12.8 — Προβολή σε επίπεδο – Γωνία ευθείας και επιπέδου

1 Προβολή $10 \sin 30^\circ = 5\sqrt{3}$, απόσταση $10 \eta\mu 30^\circ = 5$.

2 Διαγώνιος βάσης 5, διαγώνιος στερεού 13. $\eta\mu \varphi = \frac{12}{13}$, $\sin \varphi = \frac{5}{13}$ ($\varphi \approx 67,4^\circ$).

3 Έστω $AB = 2$. Τότε $AB' = BB' = \sqrt{2}$. Φέρνουμε $B'\Gamma \perp \varepsilon$ ($\Gamma \in \varepsilon$): $A\Gamma = AB' \sin 45^\circ = 1$. Από το θεώρημα των τριών καθέτων $B\Gamma \perp \varepsilon$, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Gamma B$: $\sin \widehat{BAG} = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{1}{2}$, δηλαδή η γωνία είναι 60° — μεγαλύτερη από τη γωνία 45° της AB με το επίπεδο, όπως προβλέπει η ιδιότητα ελαχίστου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13 · Στερεά σχήματα

Λύσεις · Μάθημα 13.1 — Περί πολυέδρων

1 $E = A + 2 - K = 15 + 2 - 10 = 7$ (π.χ. πενταγωνικό πρίσμα).

2 $K = 2\nu$, $A = 3\nu$ (ν σε κάθε βάση και ν παράπλευρες), $E = \nu + 2$. $K + E = 3\nu + 2 = A + 2 \checkmark$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13 · Στερεά σχήματα

Λύσεις · Μάθημα 13.2–13.4 — Πρίσμα – Παραλληλεπίπεδο – Κύβος – Μέτρηση πρίσματος

1 $6a^2 = 150 \Rightarrow a = 5$. $V = 125$, $\delta = 5\sqrt{3}$.

2 $V = 160\,000 \text{ cm}^3 = 160$ λίτρα.

3 Διαστάσεις κ , 2κ , 2κ : $\delta = \sqrt{\kappa^2 + 4\kappa^2 + 4\kappa^2} = 3\kappa = 12 \Rightarrow \kappa = 4$. Διαστάσεις 4, 8, 8, $V = 256$.

4 $B = 9\sqrt{3}$, $E_\pi = 18 \cdot 6 = 108$, $E_{ολ} = 108 + 18\sqrt{3}$, $V = 54\sqrt{3}$.

5 Η επιφάνεια τετραπλασιάζεται (2^2) και ο όγκος οκταπλασιάζεται (2^3). Γενικά, για όμοια στερεά με λόγο λ : επιφάνειες σε λόγο λ^2 , όγκοι σε λόγο λ^3 .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13 · Στερεά σχήματα

Λύσεις · Μάθημα 13.5–13.7 — Πυραμίδα – Κανονική πυραμίδα – Τετράεδρο – Μέτρηση

1 $V = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 9 = 144$.

2 Η διαγώνιος της βάσης είναι $10\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 20$, άρα $R = 10$. $v = \sqrt{169 - 100} = \sqrt{69}$. $B = 200$, $V = \frac{200\sqrt{69}}{3}$.

3 $B = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 16 = 24\sqrt{3}$, $V = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 6 = 48\sqrt{3}$. Απόστημα βάσης $\alpha_6 = 2\sqrt{3}$, $h = \sqrt{36 + 12} = 4\sqrt{3}$.

4 Κάθε κομμάτι που αφαιρείται είναι τριγωνική πυραμίδα με τρεις κάθετες ακμές $\frac{a}{2}$: όγκος $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{48}$. Οκτώ τέτοια: $\frac{a^3}{6}$. Απομένει $a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5a^3}{6}$ (το στερεό λέγεται κυβοκτάεδρο).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13 · Στερεά σχήματα

Λύσεις · Μάθημα 13.8–13.9 — Κόλουρη πυραμίδα

$$1 \quad \sqrt{400} = 20, V = \frac{\pi}{3}(50 + 8 + 20) = 156.$$

$$2 \quad \text{Η μικρή πυραμίδα είναι όμοια με λόγο } \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \text{ άρα όγκος } \frac{1}{27} \text{ του αρχικού. Η κόλουρη είναι τα } \frac{26}{27}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13 · Στερεά σχήματα

Λύσεις · Μάθημα 13.10–13.15 — Στερεά εκ περιστροφής: κύλινδρος, κώνος, κόλουρος κώνος

$$1 \quad R = 3,3, V = \pi \cdot 10,89 \cdot 11,5 \approx 393,2 \text{ cm}^3 \text{ (περίπου 0,39 λίτρα — λίγο πάνω από τα 330 ml του περιεχομένου, για να υπάρχει «αέρας»)}.$$

$$2 \quad v = 12, E_{\pi} = 65\pi, V = \frac{1}{3} \cdot 25\pi \cdot 12 = 100\pi.$$

$$3 \quad \text{Το τόξο του τομέα } \frac{\pi \cdot 12 \cdot 120}{180} = 8\pi \text{ γίνεται ο κύκλος της βάσης: } 2\pi R = 8\pi, R = 4. \text{ Γενέτειρα } \lambda = 12, \text{ ύψος } \sqrt{144 - 16} = 8\sqrt{2}, V = \frac{1}{3} \cdot 16\pi \cdot 8\sqrt{2} = \frac{128\sqrt{2}\pi}{3}.$$

$$4 \quad (\alpha) R = 4, v = 3: V = \frac{1}{3} \cdot 16\pi \cdot 3 = 16\pi. (\beta) R = 3, v = 4: V = \frac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot 4 = 12\pi. \text{ Μεγαλύτερος όγκος προκύπτει όταν περιστρέφουμε γύρω από τη μικρότερη πλευρά.}$$

$$5 \quad V = \frac{12\pi}{3}(16 + 9 + 12) = 148\pi \approx 464,7 \text{ cm}^3. \text{ Στη μέση του ύψους η ακτίνα είναι 3,5 cm. Ο όγκος του νερού (κόλουρος με } \rho = 3, R' = 3,5, v = 6): \frac{6\pi}{3}(12,25 + 9 + 10,5) = 2\pi \cdot 31,75 = 63,5\pi. \text{ Ποσοστό } \frac{63,5}{148} \approx 42,9\% \text{ — λιγότερο από το μισό, γιατί το ποτήρι φαρδαίνει προς τα πάνω.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13 · Στερεά σχήματα

Λύσεις · Μάθημα 13.16–13.18 — Η σφαίρα

$$1 \quad 4\pi R^2 = 100\pi \Rightarrow R = 5, V = \frac{500\pi}{3}.$$

$$2 \quad 4\pi \cdot 6370^2 \approx 4 \cdot 3,14 \cdot 40\,576\,900 \approx 5,1 \cdot 10^8 \text{ km}^2 \text{ (510 εκατομμύρια τετραγωνικά χιλιόμετρα)}.$$

$$3 \quad \text{Επιφάνεια } \times 9, \text{ όγκος } \times 27.$$

$$4 \quad \frac{4}{3}\pi R^3 = 64 \Rightarrow R^3 = \frac{48}{\pi} \approx 15,28 \Rightarrow R \approx 2,48 \text{ cm.}$$

$$5 \quad \text{Εγγεγραμμένη: } R_1 = \frac{a}{2}. \text{ Περιγεγραμμένη: η διάμετρος της είναι η διαγώνιος του κύβου, } R_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Λόγος όγκων } \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 = (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3} \approx 5,2.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13 · Στερεά σχήματα

Λύσεις · Μάθημα 13.19 — Κανονικά πολύεδρα

$$1 \quad 8 \text{ ισόπλευρα τρίγωνα: } 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}.$$

$$2 \quad \text{Η κοινή βάση είναι τετράγωνο πλευράς } a \text{ με } R = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Το ύψος κάθε πυραμίδας (παράπλευρη ακμή } a): v = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Όγκος: } 2 \cdot \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

$$3 \quad \text{Η γωνία του κανονικού εξαγώνου είναι } 120^\circ, \text{ άρα τρία εξαγωνα σε μια κορυφή δίνουν ακριβώς } 360^\circ: \text{ γεμίζουν το επίπεδο (όπως στην κηρήθρα) χωρίς να «κλείνουν» ποτέ σε στερεό. Για στερεό γωνία χρειάζεται άθροισμα γωνιών μικρότερο από } 360^\circ.$$

Η Γεωμετρία δεν τελειώνει εδώ...

Αυτό το βοήθημα σε συνόδευσε σε όλη την ύλη της Γεωμετρίας της Β' Λυκείου: από τον λόγο δύο τμημάτων μέχρι τον όγκο της σφαίρας. Αν θέλεις να συνεχίσεις, να λύσεις περισσότερες ασκήσεις, να δεις βίντεο-εξηγήσεις ή να προετοιμαστείς για διαγωνίσματα, σε περιμένει ένα πλήρες και ολοκληρωμένο **δωρεάν** φροντιστήριο:

mathgreece.com

- Θεωρία βήμα-βήμα για κάθε μάθημα
- Εκατοντάδες λυμένες και άλυτες ασκήσεις
- Διαγωνίσματα και θέματα εξετάσεων
- Υλικό για όλες τις τάξεις του Γυμνασίου και του Λυκείου

«Δεν υπάρχει βασιλική οδός προς τη Γεωμετρία» — η απάντηση που, κατά την παράδοση, έδωσε ο Ευκλείδης στον βασιλιά Πτολεμαίο.