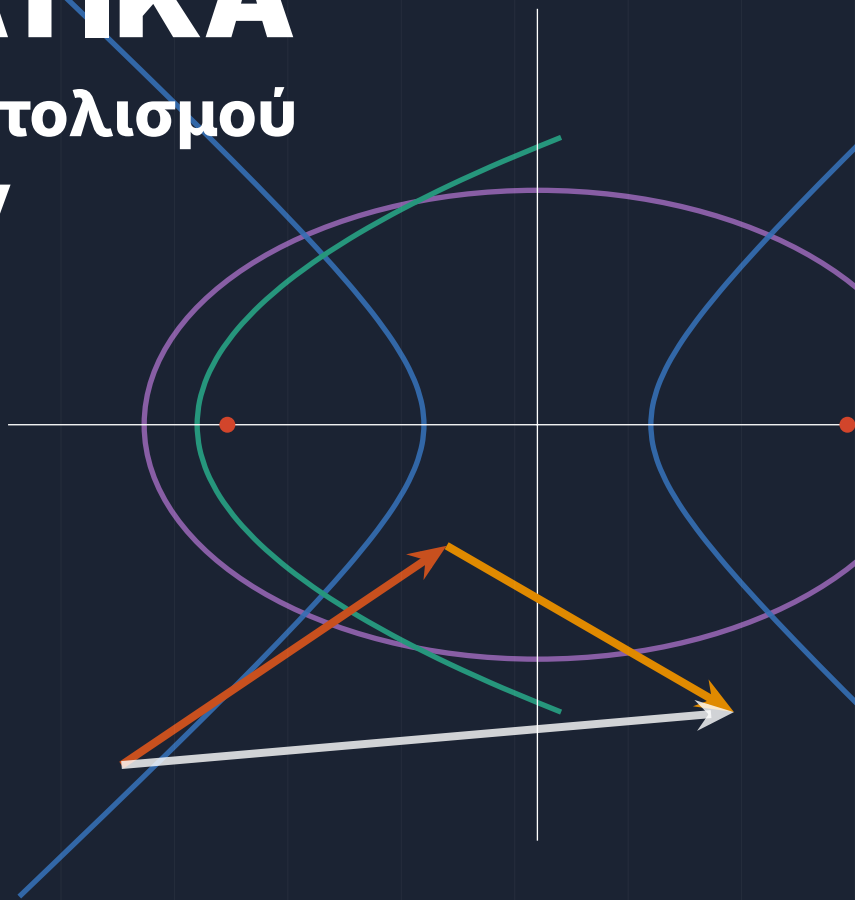


ΠΛΗΡΕΣ ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΜΕΝΟ ΒΟΗΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ομάδας Προσανατολισμού
Θετικών Σπουδών

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ



- 1 Διανύσματα
- 2 Η Ευθεία στο Επίπεδο
- 3 Κωνικές Τομές
- 4 Θεωρία Αριθμών

Πλήρης θεωρία • Λυμένα παραδείγματα • Προσοχή & συχνά λάθη • Ασκήσεις με λύσεις

Πρόλογος

Αγαπητή μαθήτριά, αγαπητέ μαθητή,

τα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Β' Λυκείου είναι, κατά τη γνώμη μου, η πιο «όμορφη» ύλη του Λυκείου. Είναι η χρονιά που η Γεωμετρία συναντά την Άλγεβρα: ένα βέλος αποκτά συντεταγμένες, μια ευθεία γίνεται εξίσωση, ένας κύκλος, μια έλλειψη ή μια υπερβολή περιγράφονται με μία μόνο ισότητα. Ό,τι μάθεις φέτος θα το χρησιμοποιείς σε όλη σου τη μαθηματική πορεία — στην Γ' Λυκείου, στη Φυσική, στις Πανελλαδικές και αργότερα στο Πανεπιστήμιο.

Το βοήθημα αυτό γράφτηκε με την εμπειρία πολλών χρόνων μέσα στην τάξη. Ξέρω πού «κολλάνε» οι μαθητές, ποια λάθη επαναλαμβάνονται κάθε χρόνο και ποιες λεπτομέρειες κάνουν τη διαφορά ανάμεσα σε ένα καλό και ένα άριστο γραπτό. Γι' αυτό σε κάθε μάθημα δεν θα βρεις μόνο τη θεωρία, αλλά και:

- **πολλά λυμένα παραδείγματα**, διαβαθμισμένης δυσκολίας, με αναλυτική και καθαρή λύση,
- **μεθοδολογίες** — «συνταγές» για κάθε τύπο άσκησης,
- **σημεία προσοχής** και **συχνά λάθη**, ώστε να μην πέσεις σε παγίδες,
- **άλυτες ασκήσεις** σε δύο επίπεδα δυσκολίας, με **πλήρεις λύσεις στο τέλος του βιβλίου**.

Η ύλη χωρίζεται σε **4 κεφάλαια** και κάθε κεφάλαιο σε **μαθήματα**. Σε κάθε σελίδα, πάνω αριστερά και δεξιά, θα βλέπεις πάντα σε ποιο κεφάλαιο και σε ποιο μάθημα βρίσκεσαι, ενώ κάθε κεφάλαιο έχει το δικό του χρώμα και μια πλευρική ετικέτα στην άκρη της σελίδας, ώστε να το εντοπίζεις αμέσως.

Μια συμβουλή που δίνω σε όλους τους μαθητές μου: *μη διαβάζεις τα λυμένα παραδείγματα σαν μυθιστόρημα*. Κάλυψε τη λύση, προσπάθησε μόνος σου και μετά σύγκρινε. Το ίδιο ισχύει και για τις ασκήσεις: δες τη λύση στο τέλος μόνο αφού έχεις παλέψει πραγματικά με την άσκηση. Εκεί γίνεται η μάθηση.

Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com



Αυτό το βοήθημα είναι μέρος του δωρεάν υλικού του **mathgreece.com**. Εκεί θα βρεις ένα **πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο**: βιντεομαθήματα για κάθε ενότητα, σημειώσεις, κουίζ αυτοαξιολόγησης, διαγωνίσματα, podcasts και παιχνίδια γνώσεων. Ό,τι διαβάζεις εδώ, μπορείς να το δεις και να το ακούσεις να εξηγείται βήμα-βήμα στο κανάλι **mathgreece** στο YouTube.

Καλή δύναμη και καλή μελέτη!

Τάσος Κοβατσίδης
mathgreece.com

Πώς να διαβάσεις αυτό το βοήθημα

Κάθε είδος πληροφορίας έχει το δικό του «κουτί». Μάθε να τα αναγνωρίζεις — θα σε βοηθήσουν να επαναλαμβάνεις γρήγορα πριν από ένα διαγώνισμα.

ΟΡΙΣΜΟΣ | όνομα έννοιας

Η ακριβής διατύπωση μιας νέας έννοιας. Τους ορισμούς τους μαθαίνουμε **με ακρίβεια**: συχνά ζητούνται αυτούσιοι στα διαγωνίσματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ | όνομα

Ένα βασικό αποτέλεσμα της θεωρίας (θεώρημα, πρόταση, ιδιότητα), συχνά μαζί με την απόδειξή του.

Τα πλαίσια με σκιά περιέχουν τους **τύπους που πρέπει να ξέρεις απέξω**.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Βήμα-βήμα οδηγίες για το πώς αντιμετωπίζουμε έναν συγκεκριμένο τύπο άσκησης.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Λεπτομέρειες της θεωρίας που εύκολα ξεφεύγουν, προϋποθέσεις που ξεχνάμε, εξαιρέσεις.

ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

Λάθη που βλέπω κάθε χρόνο σε γραπτά μαθητών — και πώς τα αποφεύγεις. **✗ Λάθος**: ό,τι γράφουν πολλοί. **✓ Σωστό**: ό,τι πρέπει να γράφεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ x.y.1

Τίτλος παραδείγματος

Η εκφώνηση ενός λυμένου παραδείγματος.

ΛΥΣΗ

Η πλήρης λύση, γραμμένη όπως θα έπρεπε να τη γράφεις σε ένα διαγώνισμα.

ΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ιστορικά στοιχεία, εφαρμογές και «μαθηματικές περιέργειες» που κάνουν την ύλη πιο ζωντανή.

Ασκήσεις: στο τέλος κάθε μαθήματος υπάρχουν άλυτες ασκήσεις σε δύο ομάδες. Η δυσκολία σημειώνεται με κουκκίδες: • βασική, •• μέτρια, ••• απαιτητική. Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου, οργανωμένες ανά κεφάλαιο και μάθημα.

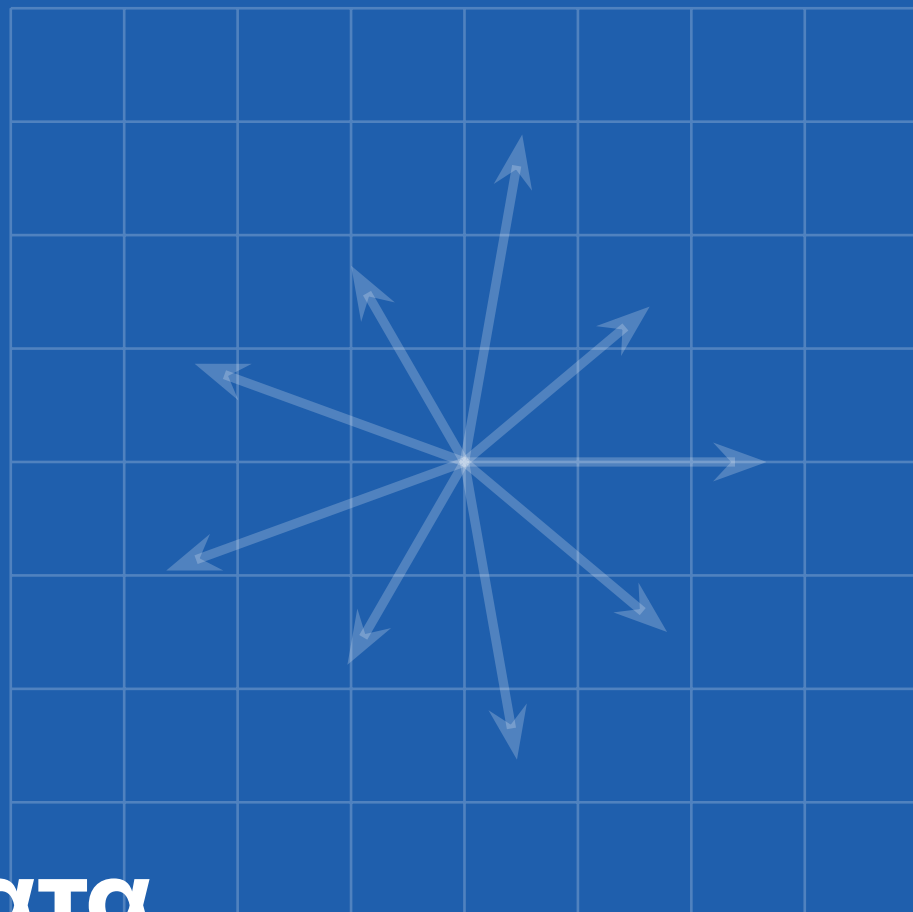
Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	Διανύσματα	7
Μάθημα 1.1	Η έννοια του διανύσματος	8
Μάθημα 1.2	Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων	18
Μάθημα 1.3	Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα	27
Μάθημα 1.4	Συντεταγμένες στο επίπεδο	36
Μάθημα 1.5	Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων	45
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	Η Ευθεία στο Επίπεδο	53
Μάθημα 2.1	Εξίσωση ευθείας	54
Μάθημα 2.2	Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας	62
Μάθημα 2.3	Εμβαδόν τριγώνου – απόσταση σημείου από ευθεία	69
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	Κωνικές Τομές	77
Μάθημα 3.1	Ο κύκλος	78
Μάθημα 3.2	Η παραβολή	87
Μάθημα 3.3	Η έλλειψη	94
Μάθημα 3.4	Η υπερβολή	102
Μάθημα 3.5	Η εξίσωση $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$	110
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	Θεωρία Αριθμών	117
Μάθημα 4.1	Η μαθηματική επαγωγή	118
Μάθημα 4.2	Ευκλείδεια διαίρεση	124
Μάθημα 4.3	Διαιρετότητα	129
Μάθημα 4.4	Μέγιστος κοινός διαιρέτης – Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο	134
Μάθημα 4.5	Πρώτοι αριθμοί	140
Μάθημα 4.6	Η γραμμική διοφαντική εξίσωση	146
Μάθημα 4.7	Ισοϋπόλοιποι αριθμοί	151
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ	Όλοι οι τύποι με μια ματιά	157
ΛΥΣΕΙΣ	Λύσεις όλων των ασκήσεων	159

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1

Διανύσματα



Από τα «βέλη» της Φυσικής στη γλώσσα της Αναλυτικής Γεωμετρίας

1.1

Η έννοια του διανύσματος

1.2

Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

1.3

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

1.4

Συντεταγμένες στο επίπεδο

1.5

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων



Περισσότερο υλικό για το κεφάλαιο: mathgreece.com

1.1

Η έννοια του διανύσματος

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

- τη διαφορά μονόμετρων και διανυσματικών μεγεθών,
- τι είναι διάνυσμα, μέτρο, φορέας, διεύθυνση και φορά,
- πότε δύο διανύσματα είναι παράλληλα, ομόρροπα, αντίρροπα, ίσα ή αντίθετα,
- πώς ορίζεται η γωνία δύο διανυσμάτων και πότε δύο διανύσματα είναι κάθετα.

A Θεωρία

Μονόμετρα και διανυσματικά μεγέθη

Ας ξεκινήσουμε από μια απλή παρατήρηση. Αν σου πω ότι η θερμοκρασία στο δωμάτιο είναι 22°C , σου έδωσα **όλη** την πληροφορία. Ένας αριθμός (μαζί με τη μονάδα μέτρησης) αρκεί. Τέτοια μεγέθη λέγονται **μονόμετρα**: μάζα, χρόνος, όγκος, εμβαδόν, θερμοκρασία, ενέργεια.

Αν όμως σου πω ότι «ένα αυτοκίνητο κινείται με 80 km/h », η πληροφορία είναι **ελλιπής**: προς τα πού κινείται; Πάνω σε ποια ευθεία και με ποια φορά; Μεγέθη που για να περιγραφούν χρειάζονται **αριθμητική τιμή, διεύθυνση και φορά** λέγονται **διανυσματικά**: ταχύτητα, δύναμη, επιτάχυνση, μετατόπιση, ένταση πεδίου.

ΜΟΝΟΜΕΤΡΟ ΜΕΓΕΘΟΣ

ένας αριθμός αρκεί
 $m = 5\text{ kg}$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΜΕΓΕΘΟΣ

μέτρο + διεύθυνση + φορά
 $\vec{F}, |\vec{F}| = 10\text{ N}$



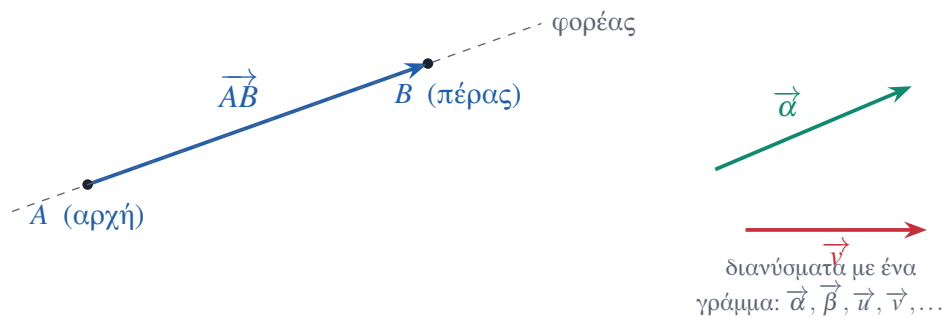
Για να «παραστήσουμε» ένα διανυσματικό μέγεθος, οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν ένα πολύ απλό εργαλείο: το **βέλος**.

Ο ορισμός του διανύσματος

ΟΡΙΣΜΟΣ | Διάνυσμα

Διάνυσμα λέγεται ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται **διατεταγμένα**, δηλαδή ξεχωρίζουμε ποιο άκρο είναι το πρώτο και ποιο το δεύτερο.

- Το πρώτο άκρο λέγεται **αρχή** (ή σημείο εφαρμογής) και το δεύτερο **πέρας** του διανύσματος.
- Το διάνυσμα με αρχή A και πέρας B συμβολίζεται $\vec{AB}$ και σχεδιάζεται ως βέλος από το A προς το B .



Πολλές φορές, όταν δεν μας ενδιαφέρουν η αρχή και το πέρας, ονομάζουμε ένα διάνυσμα με ένα μικρό γράμμα: $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\mu}$, $\vec{\nu}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ | Μηδενικό διάνυσμα

Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος **συμπίπτουν**, το διάνυσμα λέγεται **μηδενικό**. Για παράδειγμα $\vec{AA}$. Όλα τα μηδενικά διανύσματα τα συμβολίζουμε με $\vec{0}$.

Μέτρο, φορέας, διεύθυνση

ΟΡΙΣΜΟΣ | Μέτρο – Μοναδιαίο διάνυσμα

Μέτρο (ή μήκος) του διανύσματος $\vec{AB}$ λέγεται η απόσταση των άκρων του, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB . Συμβολίζεται $|\vec{AB}|$.

- Είναι πάντα $|\vec{AB}| \geq 0$, και $|\vec{AB}| = 0 \iff A \equiv B$, δηλαδή $\vec{AB} = \vec{0}$.
- Ένα διάνυσμα με μέτρο ίσο με 1 λέγεται **μοναδιαίο**.

Φορέας ενός μη μηδενικού διανύσματος $\vec{AB}$ λέγεται η ευθεία AB πάνω στην οποία βρίσκεται. Ως φορέα του μηδενικού διανύσματος $\vec{AA}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε ευθεία διέρχεται από το A .

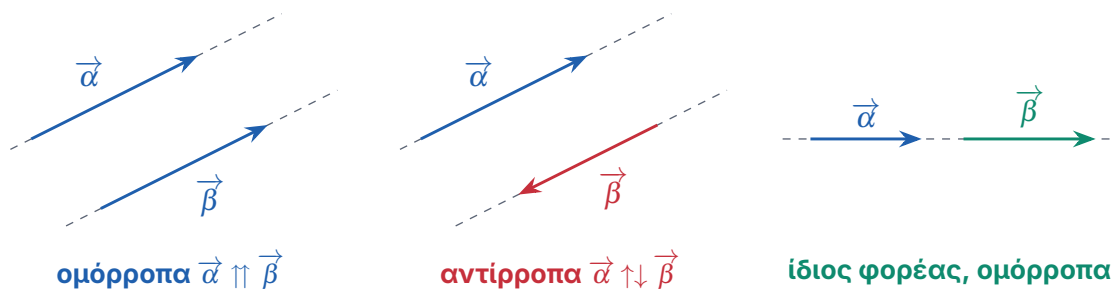
Παράλληλα (συγγραμμικά) διανύσματα – ομόρροπα και αντίρροπα

ΟΡΙΣΜΟΣ | Παράλληλα διανύσματα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **παράλληλα** ή **συγγραμμικά** όταν οι φορείς τους είναι παράλληλοι ή συμπίπτουν. Γράφουμε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$. Λέμε ακόμη ότι έχουν την ίδια **διεύθυνση**.

Δύο παράλληλα διανύσματα μπορεί να «δείχνουν» προς την ίδια μεριά ή προς αντίθετες μεριές:

- **Ομόρροπα** ($\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$): παράλληλα με την *ίδια φορά*. Αν οι φορείς είναι παράλληλοι, τα πέρατα βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία που ενώνει τις αρχές τους.
- **Αντίρροπα** ($\vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta}$): παράλληλα με *αντίθετη φορά*.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

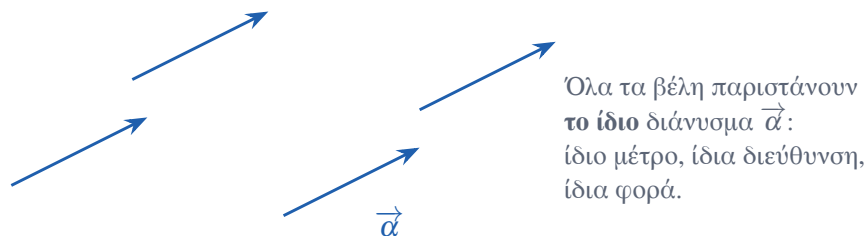
Δεχόμαστε ότι το **μηδενικό διάνυσμα** είναι **παράλληλο** (και **ομόρροπο** και **αντίρροπο**) με **κάθε διάνυσμα**. Η σύμβαση αυτή θα μας φανεί πολύ χρήσιμη στη συνθήκη παραλληλίας του Μαθήματος 1.3.

Ίσα και αντίθετα διανύσματα

ΟΡΙΣΜΟΣ | Ίσα διανύσματα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **ίσα** όταν είναι **ομόρροπα** και έχουν **ίσα μέτρα**. Γράφουμε $\vec{a} = \vec{b}$. Επίσης, όλα τα μηδενικά διανύσματα είναι ίσα μεταξύ τους.

Με άλλα λόγια, ένα διάνυσμα δεν αλλάζει αν το «σύρουμε» **παράλληλα** στο επίπεδο. Γι' αυτό λέμε ότι τα διανύσματα είναι **ελεύθερα**: αν μας δώσουν ένα διάνυσμα $\vec{a}$ και ένα σημείο O , υπάρχει **ένα μοναδικό** σημείο M τέτοιο ώστε $\vec{OM} = \vec{a}$. Το M το βρίσκουμε «μεταφέροντας» το $\vec{a}$ ώστε να ξεκινά από το O .

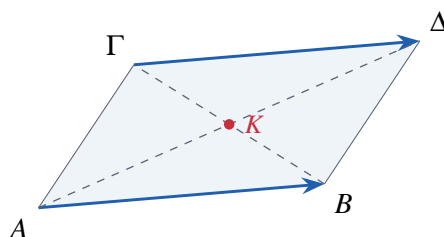


Όλα τα βέλη παριστάνουν **το ίδιο** διάνυσμα $\vec{a}$:
ίδιο μέτρο, ίδια διεύθυνση,
ίδια φορά.

ΘΕΩΡΗΜΑ | Ίσα διανύσματα και παραλληλόγραμμο

Έστω A, B, Γ, Δ σημεία, με τα A, B, Γ μη συνευθειακά. Τότε:

$$\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta} \iff \text{το } AB\Delta\Gamma \text{ είναι παραλληλόγραμμο} \iff \text{τα } A\Delta \text{ και } B\Gamma \text{ έχουν κοινό μέσο.}$$



$$\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$$

K : κοινό μέσο των $A\Delta, B\Gamma$

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ | η σειρά των γραμμάτων

Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, το παραλληλόγραμμο είναι το $AB\Delta\Gamma$ και **όχι** το $AB\Gamma\Delta$! Οι κορυφές «διαβάζονται» $A \rightarrow B \rightarrow \Delta \rightarrow \Gamma$. Κάνε πάντα ένα πρόχειρο σχήμα πριν γράψεις το όνομα του παραλληλογράμμου.

ΟΡΙΣΜΟΣ | Αντίθετα διανύσματα

Δύο διανύσματα λέγονται **αντίθετα** όταν είναι **αντίρροπα** και έχουν **ίσα μέτρα**. Το αντίθετο του $\vec{a}$ συμβολίζεται $-\vec{a}$. Ειδικότερα:

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

Γωνία δύο διανυσμάτων

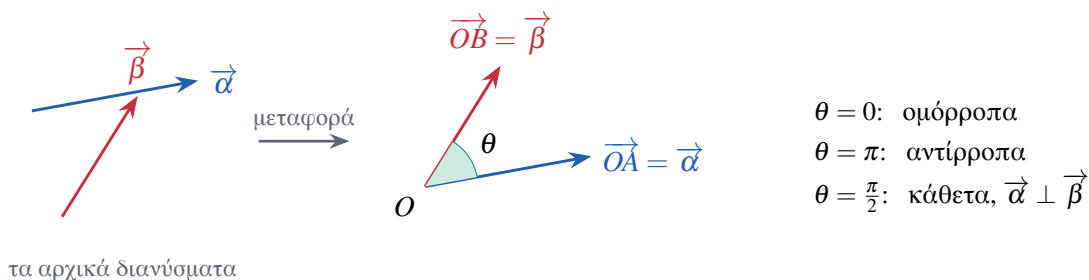
Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Παίρνουμε τυχαίο σημείο O και σχεδιάζουμε $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ — δηλαδή **φέρνουμε τα δύο διανύσματα να έχουν κοινή αρχή**.

ΟΡΙΣΜΟΣ | Γωνία διανυσμάτων

Γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ λέγεται η κυρτή γωνία $\theta = \widehat{AOB}$, όπου $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Συμβολίζεται $(\vec{a}, \vec{b})$ και ισχύει

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad (\text{δηλαδή } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ).$$

Η γωνία δεν εξαρτάται από την επιλογή του O και ισχύει $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.



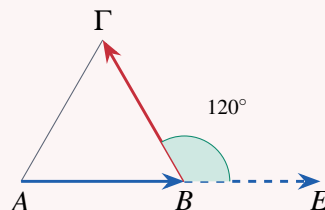
- Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, τα διανύσματα λέγονται **ορθογώνια** ή **κάθετα** και γράφουμε $\vec{a} \perp \vec{b}$.
- Αν ένα από τα δύο διανύσματα είναι το $\vec{0}$, η γωνία τους μπορεί να θεωρηθεί **οποιαδήποτε**. Έτσι, το $\vec{0}$ θεωρείται και κάθετο σε κάθε διάνυσμα.

⊗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | η γωνία δύο «διαδοχικών» διανυσμάτων

Σε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$, πολλοί γράφουν:

✗ Λάθος: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = 60^\circ$, «επειδή η γωνία του τριγώνου είναι 60° ».

✓ Σωστό: Τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ **δεν** έχουν κοινή αρχή! Μεταφέρουμε το $\overrightarrow{AB}$ στο B : γίνεται $\overrightarrow{BE}$ με το E στην προέκταση της AB . Η γωνία είναι η $\widehat{EB\Gamma} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.



? ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Η λέξη «διάνυσμα» προέρχεται από το ρήμα «διανύω» (= διασχίζω μια απόσταση). Η σύγχρονη θεωρία των διανυσμάτων διαμορφώθηκε τον 19ο αιώνα από τους W. R. Hamilton, H. Grassmann και J. W. Gibbs, όμως ο «κανόνας του παραλληλογράμμου» για τη σύνθεση κινήσεων ήταν γνωστός ήδη από την αρχαιότητα και αναφέρεται στα «Μηχανικά» που αποδίδονται στον Αριστοτέλη.

B Λυμένα παραδείγματα

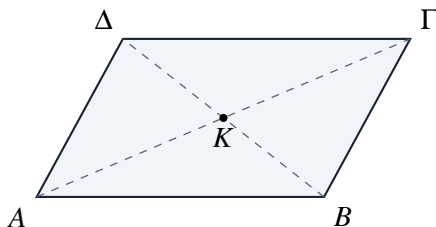
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.1 — Ίσα και αντίθετα διανύσματα σε παραλληλόγραμμο

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο K (σημείο τομής των διαγωνίων). Να βρείτε:

- α') διανύσματα ίσα με το $\vec{AB}$ και με το $\vec{AK}$,
- β') διανύσματα αντίθετα του $\vec{B\Gamma}$ και του $\vec{K\Delta}$,

χρησιμοποιώντας ως άκρα μόνο τα σημεία A, B, Γ, Δ, K .

◀ ΛΥΣΗ



α) Στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες, και τα $\vec{AB}, \vec{\Delta\Gamma}$ έχουν την ίδια φορά. Άρα $\vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma}$.

Οι διαγώνιοι διχοτομούνται, άρα το K είναι μέσο του $A\Gamma$ και $\vec{AK} = \vec{K\Gamma}$.

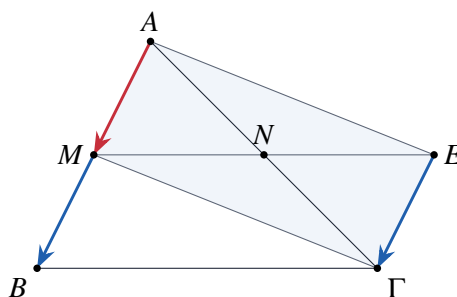
β) Είναι $\vec{B\Gamma} = \vec{A\Delta}$, οπότε αντίθετα του $\vec{B\Gamma}$ είναι τα $\vec{\Gamma B}$ και $\vec{\Delta A}$.

Αφού K μέσο του $B\Delta$, είναι $\vec{K\Delta} = \vec{BK}$. Αντίθετα του $\vec{K\Delta}$: τα $\vec{\Delta K}$ και $\vec{KB}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.2 — Απόδειξη παραλληλογράμμου με διανύσματα

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα M, N των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Στην προέκταση της MN (προς το N) παίρνουμε σημείο E ώστε $NE = MN$. Να αποδείξετε ότι $\vec{MB} = \vec{E\Gamma}$.

◀ ΛΥΣΗ



Θεωρούμε το τετράπλευρο $AMGE$ (κορυφές με αυτή τη σειρά). Οι διαγώνιοί του είναι οι AG και ME . Το N είναι μέσο της AG (υπόθεση) και μέσο της ME (αφού $NE = MN$). Αφού οι διαγώνιοι διχοτομούνται, το $AMGE$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{EG}. \quad (1)$$

Επίσης το M είναι μέσο της AB , άρα τα $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{MB}$ είναι ομόρροπα με ίσα μέτρα:

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM}. \quad (2)$$

Από (1) και (2): $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{EG}$.

Σημείωση: το $\overrightarrow{GE}$ δεν είναι ίσο με το $\overrightarrow{MB}$ · είναι το αντίθετό του. Πριν αποδείξεις μια ισότητα διανυσμάτων, έλεγξε πάντα τη φορά στο σχήμα!

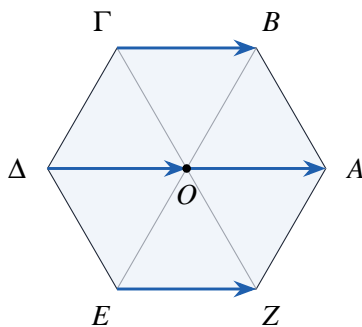
⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ | μάθημα από το προηγούμενο παράδειγμα

Για να είναι δύο διανύσματα ίσα δεν αρκεί να είναι παράλληλα και να έχουν ίσα μέτρα· πρέπει να έχουν και **την ίδια φορά**. Όταν «διαβάζεις» ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, τα ίσα διανύσματα είναι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ και $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B\Gamma}$ — πάντα από την «αρχή» προς το «τέλος» της ίδιας φοράς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.3 — Μετρώντας διανύσματα σε κανονικό εξάγωνο

Δίνεται κανονικό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ με κέντρο O . Να βρείτε όλα τα διανύσματα που είναι ίσα με το $\overrightarrow{OA}$ και έχουν άκρα κορυφές του εξαγώνου ή το O .

◀ ΛΥΣΗ



Το κανονικό εξάγωνο αποτελείται από 6 ισόπλευρα τρίγωνα με κοινή κορυφή O , οπότε όλα τα τμήματα του σχήματος έχουν μήκος ίσο με την πλευρά. Ζητάμε τμήματα **παράλληλα** στο

OA , ίσου μήκους και ίδιας φοράς. Αυτά είναι:

$$\vec{OA} = \vec{GB} = \vec{DO} = \vec{EZ}.$$

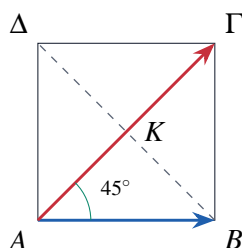
Άρα, εκτός από το ίδιο το $\vec{OA}$, υπάρχουν **τρία** ακόμη: $\vec{GB}$, $\vec{DO}$, $\vec{EZ}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.4 Γωνίες διανυσμάτων σε τετράγωνο

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο K . Να βρείτε τις γωνίες:

α) $\widehat{(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})}$ β) $\widehat{(\vec{AB}, \vec{\Gamma\Delta})}$ γ) $\widehat{(\vec{AK}, \vec{B\Delta})}$ δ) $\widehat{(\vec{AB}, \vec{\Gamma\Delta})}$

ΛΥΣΗ



- α) Τα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ έχουν κοινή αρχή A . Η διαγώνιος του τετραγώνου διχοτομεί την ορθή γωνία, άρα $\widehat{(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})} = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$.
- β) Είναι $\vec{\Gamma\Delta} = -\vec{AB}$ (αντίρροπα, ίσα μέτρα). Άρα η γωνία είναι π .
- γ) Οι διαγώνιοι του τετραγώνου είναι κάθετες, άρα $\vec{AK} \perp \vec{B\Delta}$ και η γωνία είναι $\frac{\pi}{2}$.
- δ) Μεταφέρουμε σε κοινή αρχή: $\vec{\Gamma\Delta} = -\vec{A\Gamma}$. Το $\vec{A\Gamma}$ σχηματίζει με το $\vec{AB}$ γωνία 45° , άρα το αντίθετό του σχηματίζει γωνία $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | γωνία δύο διανυσμάτων

- Φέρε τα διανύσματα να έχουν **κοινή αρχή** (μεταφέροντας το ένα παράλληλα).
- Αν το ένα είναι αντίθετο κάποιου «βολικού» διανύσματος, χρησιμοποίησε ότι $\widehat{(\vec{\alpha}, -\vec{\beta})} = \pi - \widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$.
- Η απάντηση είναι πάντα στο διάστημα $[0, \pi]$ — ποτέ αρνητική, ποτέ μεγαλύτερη από 180° .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.5 Πόσα διανύσματα ορίζουν n σημεία;

Δίνονται 5 σημεία του επιπέδου, ανά τρία μη συνευθειακά, ώστε κανένα τετράπλευρο με κορυφές από αυτά να μην είναι παραλληλόγραμμο. Πόσα μη μηδενικά διανύσματα ορίζονται με άκρα δύο από αυτά τα σημεία; Πόσα αν συμπεριλάβουμε και τα μηδενικά (ως ένα διάνυσμα $\vec{0}$);

ΛΥΣΗ

Για αρχή μπορούμε να διαλέξουμε οποιοδήποτε από τα 5 σημεία και για πέρας οποιοδήποτε

από τα υπόλοιπα 4. Άρα σχηματίζονται $5 \cdot 4 = 20$ διατεταγμένα ζεύγη, δηλαδή 20 μη μηδενικά «βέλη». Δύο τέτοια βέλη $\vec{AB}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ θα μπορούσαν να είναι ίσα μόνο αν το $AB\Delta\Gamma$ ήταν παραλληλόγραμμο (ή τα σημεία συνευθειακά), κάτι που αποκλείεται από την υπόθεση. Άρα όλα είναι διαφορετικά διανύσματα.

Μαζί με το μηδενικό διάνυσμα: $20 + 1 = 21$.

Αν όμως τα σημεία σχημάτιζαν και παραλληλόγραμμα, κάποια βέλη θα παρίσταναν το ίδιο διάνυσμα και ο αριθμός θα ήταν μικρότερος. Γενικά, n σημεία δίνουν το πολύ $n(n-1)$ μη μηδενικά διανύσματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.6 — Ισότητα διανυσμάτων και μέσα

Αν για τα σημεία A, B, Γ, Δ ισχύει $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$, να αποδείξετε ότι $\vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta}$.

ΛΥΣΗ

Περίπτωση 1: Τα A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά. Από το θεώρημα, $AB\Delta\Gamma$ παραλληλόγραμμο, οπότε οι απέναντι πλευρές $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι ίσες, παράλληλες και (με τη σειρά των κορυφών) ομόρροπες: $\vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta}$.

Περίπτωση 2: Τα σημεία είναι συνευθειακά. Τότε τα $A\Delta$ και $B\Gamma$ έχουν κοινό μέσο K (η ισοδυναμία με τα μέσα ισχύει και εδώ). Άρα $\vec{AK} = \vec{K\Delta}$ και $\vec{BK} = \vec{K\Gamma}$, από όπου προκύπτει το ζητούμενο (θα το δούμε πιο σύντομα με πρόσθεση διανυσμάτων στο Μάθημα 1.2: $\vec{A\Gamma} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{\Gamma\Delta} + \vec{B\Gamma} = \vec{B\Delta}$).

Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com



Στο mathgreece.com θα βρεις βιντεομάθημα για την «έννοια του διανύσματος» με κινούμενα σχήματα, όπου βλέπεις ζωντανά πώς ένα διάνυσμα «σύρεται» στο επίπεδο χωρίς να αλλάζει, καθώς και κουίζ για να ελέγξεις αν ξεχωρίζεις σωστά ίσα, αντίθετα και συγγραμμικά διανύσματα.

Γ

Προσοχή και συχνά λάθη

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | μέτρο και διάνυσμα

✗ **Λάθος:** « $\vec{AB} = \vec{BA}$, αφού $AB = BA$.»

✓ **Σωστό:** Ισχύει $|\vec{AB}| = |\vec{BA}|$ (ίσα μέτρα), αλλά $\vec{BA} = -\vec{AB}$. Τα διανύσματα είναι **αντίθετα**, όχι ίσα (εκτός αν $A \equiv B$).

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | ίσα μέτρα δεν σημαίνει ίσα διανύσματα

✗ **Λάθος:** « $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$.»

✓ **Σωστό:** Από $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ μαθαίνουμε μόνο ότι τα βέλη έχουν το ίδιο μήκος. Μπορεί να έχουν εντελώς διαφορετικές διευθύνσεις. Το αντίστροφο όμως ισχύει: $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Rightarrow |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | σύγκριση διανυσμάτων

✗ **Λάθος:** « $\vec{\alpha} > \vec{\beta}$ » ή « $\vec{AB} < \vec{\Gamma\Delta}$ ».

✓ **Σωστό:** Τα διανύσματα **δεν συγκρίνονται** με $<$, $>$. Συγκρίνουμε μόνο τα μέτρα τους, που είναι αριθμοί: $|\vec{\alpha}| > |\vec{\beta}|$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ | συμβολισμοί

- Γράφε **πάντα** το βελάκι: $\vec{AB}$ είναι διάνυσμα, AB είναι ευθύγραμμο τμήμα ή μήκος. Στα διαγωνίσματα η παράλειψη του βέλους κοστίζει μονάδες.
- Το $\vec{0}$ είναι διάνυσμα, ενώ το 0 είναι αριθμός. Γράφουμε $\vec{AA} = \vec{0}$ αλλά $|\vec{AA}| = 0$.

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 1.1 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Διάνυσμα

προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα $\vec{AB}$ (αρχή A , πέρας B)

Μέτρο

$|\vec{AB}| = (AB) \geq 0$, μοναδιαίο: μέτρο 1

Παράλληλα

φορείς παράλληλοι ή ίδιοι· ομόρροπα $\uparrow\uparrow$ ή αντίρροπα $\uparrow\downarrow$

Ίσα

ομόρροπα και ίσα μέτρα: $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta} \iff AB\Delta\Gamma$ παραλληλόγραμμο

Αντίθετα

αντίρροπα και ίσα μέτρα: $\vec{BA} = -\vec{AB}$

Γωνία

με κοινή αρχή, $0 \leq \theta \leq \pi$: $\theta = \frac{\pi}{2} \iff \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

Μηδενικό

παράλληλο και κάθετο σε κάθε διάνυσμα



Ασκήσεις για λύση

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

- Να χαρακτηρίσετε ως μονόμετρο ή διανυσματικό καθένα από τα μεγέθη: α) το βάρος ενός σώματος, β) η μάζα του, γ) η πυκνότητα του νερού, δ) η μετατόπιση ενός δρομέα, ε) ο χρόνος μιας διαδρομής, στ) η ταχύτητα του ανέμου.
- Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O . Να γράψετε: α) ένα διάνυσμα ίσο με το $\vec{AD}$, β) ένα διάνυσμα ίσο με το $\vec{OB}$, γ) δύο διανύσματα αντίθετα του $\vec{AB}$, δ) δύο διανύσματα κάθετα στο $\vec{AT}$.
- Να εξετάσετε αν είναι σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) οι προτάσεις:
 - Αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$, τότε $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$.
 - Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.
 - Δύο αντίθετα διανύσματα είναι πάντα συγγραμμικά.
 - Αν $\vec{AB} = \vec{BA}$, τότε $A \equiv B$.

ε') Δύο μοναδιαία διανύσματα είναι ίσα.

4. • Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Να βρείτε τις γωνίες: α) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI})$, β) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BI})$, γ) $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BI})$, δ) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{MI})$.
5. • Στο κανονικό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ με κέντρο O , να γράψετε όλα τα διανύσματα που είναι αντίθετα του $\overrightarrow{AB}$ και έχουν άκρα τις κορυφές ή το κέντρο.

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμβάθυνσης

6. •• Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Στην προέκταση της ΔA (προς το A) παίρνουμε σημείο E με $AE = A\Delta$ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) σημείο Z με $BZ = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{AB}$.
7. •• Αν για τα σημεία A, B, Γ, Δ ισχύει $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ και $|\overrightarrow{AI}| = |\overrightarrow{B\Delta}|$, με A, B, Γ μη συνευθειακά, να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.
8. •• Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι μη μηδενικά. Αν $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \vec{\gamma}$, τι συμπεραίνετε για τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$; Αν επιπλέον $(\vec{\alpha}, \vec{\delta}) = \frac{\pi}{3}$, να βρείτε τη γωνία $(\vec{\gamma}, \vec{\delta})$.
9. •• Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$, καθώς και σημείο E τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{\Gamma B}$. Να αποδείξετε ότι το A είναι το μέσο του ΔE .
10. ••• Δίνονται 6 σημεία, που είναι οι κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου. Πόσα διαφορετικά μη μηδενικά διανύσματα ορίζονται με άκρα δύο από αυτά τα σημεία;



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Ολοκλήρωσες τις ασκήσεις; Λύσε και το **κουίζ αυτοαξιολόγησης του Μαθήματος 1.1** στο **mathgreece.com** — θα δεις αμέσως το σκορ σου και πού χρειάζεσαι επανάληψη.

1.2

Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

- ▶ πώς προσθέτουμε διανύσματα (κανόνας τριγώνου και παραλληλογράμμου),
- ▶ τις ιδιότητες της πρόσθεσης και τον «κανόνα της αλυσίδας»,
- ▶ τι είναι η διαφορά δύο διανυσμάτων και πώς σχεδιάζεται,
- ▶ τι είναι το διάνυσμα θέσης και τον «χρυσό τύπο» $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$,
- ▶ την τριγωνική ανισότητα για τα μέτρα: $||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

A

Θεωρία

Το άθροισμα δύο διανυσμάτων – κανόνας του τριγώνου

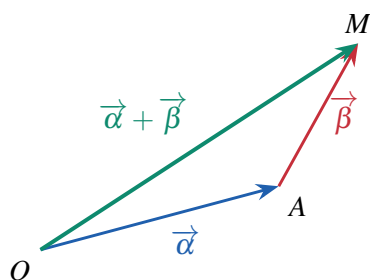
Φαντάσου έναν περιπατητή που κάνει πρώτα μια μετατόπιση $\vec{a}$ και αμέσως μετά μια μετατόπιση $\vec{b}$. Πού βρίσκεται τελικά σε σχέση με το σημείο εκκίνησης; Η απάντηση είναι το άθροισμα $\vec{a} + \vec{b}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ | Άθροισμα διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Παίρνουμε τυχαίο σημείο O και σχεδιάζουμε $\vec{OA} = \vec{a}$ και στη συνέχεια, με αρχή το πέρας A , το $\vec{AM} = \vec{b}$. Το διάνυσμα $\vec{OM}$ λέγεται **άθροισμα** των $\vec{a}$ και $\vec{b}$:

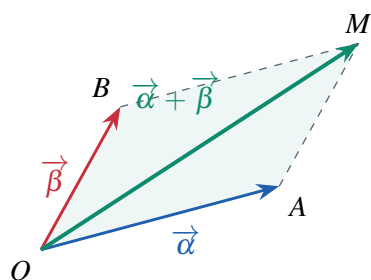
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OM}.$$

Το άθροισμα δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου O .



Κανόνας του τριγώνου

«το πέρας του πρώτου είναι αρχή του δεύτερου»



Κανόνας του παραλληλογράμμου

«κοινή αρχή — το άθροισμα είναι η διαγώνιος»

Κανόνας του παραλληλογράμμου

Αν τα $\vec{a} = \vec{OA}$ και $\vec{b} = \vec{OB}$ έχουν **κοινή αρχή** O , τότε το άθροισμά τους είναι το διάνυσμα $\vec{OM}$, όπου OM είναι η **διαγώνιος** του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$:

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OM}, \quad \text{όπου } OAMB \text{ παραλληλόγραμμο.}$$

Πράγματι, στο παραλληλόγραμμο $OAMB$ ισχύει $\vec{OB} = \vec{AM}$, οπότε $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OM}$. Αυτός είναι ο κανόνας που χρησιμοποιείτε στη Φυσική για τη σύνθεση δυνάμεων.

Ιδιότητες της πρόσθεσης

ΘΕΩΡΗΜΑ | Ιδιότητες πρόσθεσης διανυσμάτων

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν:

- | | | |
|-----|---|-------------------|
| (1) | $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$ | αντιμεταθετική |
| (2) | $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ | προσεταιριστική |
| (3) | $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$ | ουδέτερο στοιχείο |
| (4) | $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$ | αντίθετο στοιχείο |

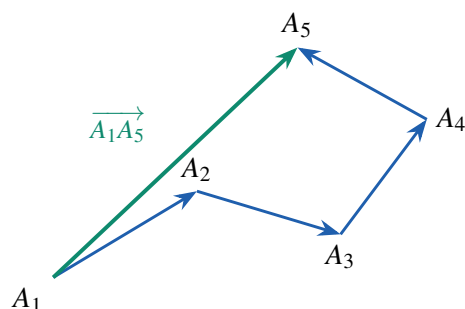
Απόδειξη της (1). Με τον κανόνα του παραλληλογράμμου $OAMB$: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OM}$ και $\vec{\beta} + \vec{\alpha} = \vec{OB} + \vec{BM} = \vec{OM}$. Άρα $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$.

Απόδειξη της (2). Αν $\vec{\alpha} = \vec{OA}$, $\vec{\beta} = \vec{AB}$, $\vec{\gamma} = \vec{BI}$, τότε $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{OB} + \vec{BI} = \vec{OI}$ και $\vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{OA} + \vec{AI} = \vec{OI}$.

Χάρη στην προσεταιριστική ιδιότητα μπορούμε να γράφουμε αθροίσματα πολλών διανυσμάτων χωρίς παρενθέσεις. Παίρνουμε έτσι τον πολύ χρήσιμο:

Κανόνας της αλυσίδας (πολυγωνικός κανόνας):

$$\vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} + \dots + \vec{A_{n-1}A_n} = \vec{A_1A_n}$$



Το «τέλος» κάθε βέλους είναι η «αρχή» του επόμενου.
Το άθροισμα πηγαίνει από την πρώτη αρχή στο τελευταίο πέρας.

Ειδικά, όταν η «αλυσίδα» κλείνει, το άθροισμα είναι μηδενικό: $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{AA} = \vec{0}$.

Αφαίρεση διανυσμάτων

ΟΡΙΣΜΟΣ | Διαφορά διανυσμάτων

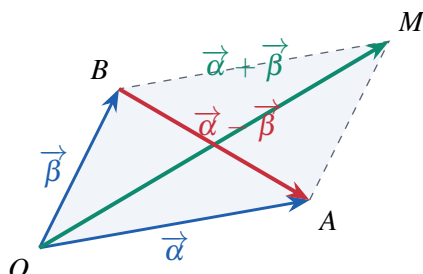
Η διαφορά $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ ορίζεται ως το άθροισμα του $\vec{\alpha}$ με το αντίθετο του $\vec{\beta}$:

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}).$$

Γεωμετρικά: αν $\vec{\alpha} = \vec{OA}$ και $\vec{\beta} = \vec{OB}$ (κοινή αρχή), τότε

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$$

δηλαδή η διαφορά είναι το διάνυσμα που πηγαιίνει **από το πέρας του αφαιρετέου προς το πέρας του μειωτέου**. Πράγματι $\vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OA}$, άρα $\vec{BA}$ είναι το διάνυσμα που προστιθέμενο στο $\vec{\beta}$ δίνει $\vec{\alpha}$.



Στο παραλληλόγραμμο που ορίζουν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$:

- η μία διαγώνιος δίνει το **άθροισμα** $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$,
- η άλλη δίνει τη **διαφορά** $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ | Επίλυση διανυσματικής εξίσωσης

Η εξίσωση $\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha}$ έχει μοναδική λύση την $\vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

Απόδειξη. Προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $-\vec{\beta}$: $-\vec{\beta} + \vec{\beta} + \vec{x} = -\vec{\beta} + \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Με απλά λόγια: ένα διάνυσμα «περνάει» στο άλλο μέλος με αλλαγμένο πρόσημο, ακριβώς όπως στους αριθμούς.

Διάνυσμα θέσης – ο «χρυσός τύπος»

Ας σταθεροποιήσουμε ένα σημείο O του επιπέδου, που θα το λέμε **σημείο αναφοράς**. Τότε σε κάθε σημείο M αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $\vec{OM}$, που λέγεται **διάνυσμα θέσης** (ή διανυσματική ακτίνα) του M .

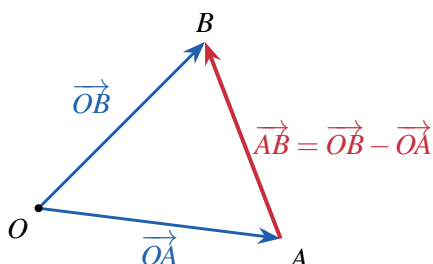
ΘΕΩΡΗΜΑ | Διάνυσμα με τη βοήθεια διανυσμάτων θέσης

Για οποιαδήποτε σημεία A, B και οποιοδήποτε σημείο αναφοράς O ισχύει:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

«Κάθε διάνυσμα ισούται με τη διανυσματική ακτίνα του **πέρατος** μείον τη διανυσματική ακτίνα της **αρχής**.»

Απόδειξη. Από τον κανόνα του τριγώνου: $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$, οπότε $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$.



Ο τύπος αυτός είναι το **πιο χρήσιμο** εργαλείο του κεφαλαίου: «μεταφράζει» κάθε διάνυσμα σε διανύσματα με κοινή αρχή.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | αποδείξεις διανυσματικών ισοτήτων

Για να αποδείξουμε μια ισότητα με διανύσματα έχουμε τρεις βασικούς δρόμους:

1. **Κανόνας της αλυσίδας:** «σπάμε» ένα διάνυσμα παρεμβάλλοντας σημεία: $\vec{AB} = \vec{AK} + \vec{KB}$ (για οποιοδήποτε K).
2. **Διανύσματα θέσης:** γράφουμε όλα τα διανύσματα με κοινή αρχή (π.χ. O ή μια κορυφή) μέσω του $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ και κάνουμε πράξεις.
3. **Μεταφορά όρων:** μεταφέρουμε όλα στο πρώτο μέλος και δείχνουμε ότι το άθροισμα είναι $\vec{0}$.

Μέτρο αθροίσματος – τριγωνική ανισότητα

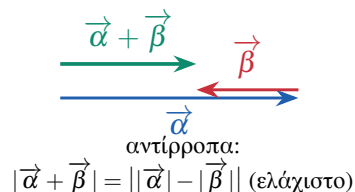
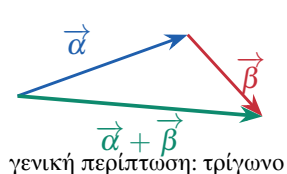
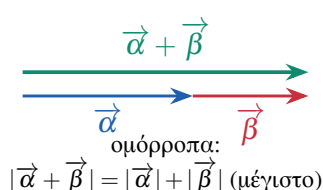
Από τον κανόνα του τριγώνου, τα μέτρα $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|, |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ είναι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου (όταν τα διανύσματα δεν είναι συγγραμμικά). Η τριγωνική ανισότητα της Γεωμετρίας δίνει:

ΘΕΩΡΗΜΑ | Τριγωνική ανισότητα

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει:

$$||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$$

- Η δεξιά ισότητα $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ ισχύει **μόνο** όταν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι **ομόρροπα**.
- Η αριστερή ισότητα $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}||$ ισχύει **μόνο** όταν είναι **αντίρροπα**.



Επειδή $|- \vec{\beta}| = |\vec{\beta}|$, οι ίδιες ανισότητες ισχύουν και για τη διαφορά: $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$.

? ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ο κανόνας του παραλληλογράμμου «κρύβεται» σε κάθε πτήση αεροπλάνου: αν ο πιλότος κατευθύνει το αεροπλάνο βόρεια, αλλά φυσάει δυτικός άνεμος, η πραγματική πορεία ως προς το έδαφος είναι το **άθροισμα** της ταχύτητας του αεροπλάνου ως προς τον αέρα και της ταχύτητας του ανέμου. Οι πλοηγοί λύνουν αυτό το «τρίγωνο ταχυτήτων» σε κάθε πτήση!

B

Λυμένα παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.1 — Απλοποίηση παραστάσεων

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Delta\epsilon} \quad \beta) \vec{AB} - \vec{A\Gamma} + \vec{B\Gamma} \quad \gamma) \vec{KA} - \vec{K\Gamma} - \vec{BA} + \vec{B\Gamma}$$

ΛΥΣΗ

α) Τοποθετούμε τους όρους ώστε να σχηματίζουν αλυσίδα: $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Delta\epsilon} = \vec{A\epsilon}$.

β) Είναι $\vec{AB} - \vec{A\Gamma} = \vec{\Gamma B}$ (από το πέρας του αφαιρετέου στο πέρας του μειωτέου). Άρα $\vec{AB} - \vec{A\Gamma} + \vec{B\Gamma} = \vec{\Gamma B} + \vec{B\Gamma} = \vec{\Gamma\Gamma} = \vec{0}$.

γ) Ομαδοποιούμε: $(\vec{KA} - \vec{K\Gamma}) + (\vec{B\Gamma} - \vec{BA}) = \vec{\Gamma A} + \vec{A\Gamma} = \vec{0}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.2 — Απόδειξη ισότητας για τυχαία σημεία

Για οποιαδήποτε σημεία A, B, Γ, Δ να αποδείξετε ότι $\vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B}$.

ΛΥΣΗ

1ος τρόπος (αλυσίδα). Στο πρώτο μέλος «σπάμε» το $\vec{AB}$ μέσω του Δ : $\vec{AB} = \vec{A\Delta} + \vec{\Delta B}$. Τότε

$$\vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{A\Delta} + \vec{\Delta B} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{A\Delta} + (\vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Delta B}) = \vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B}.$$

2ος τρόπος (διανύσματα θέσης). Με σημείο αναφοράς O :

$$\vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{OB} - \vec{OA} + \vec{OD} - \vec{OG}, \quad \vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B} = \vec{OD} - \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OG}.$$

Τα δύο μέλη έχουν ακριβώς τους ίδιους όρους, άρα είναι ίσα.

Ο 2ος τρόπος είναι «μηχανικός» αλλά δουλεύει πάντα. Αν δεν βλέπεις γρήγορα την αλυσίδα, πήγαινε σε διανύσματα θέσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.3 — Εύρεση άγνωστου διανύματος

Δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ . Να λύσετε την εξίσωση $\vec{x} + \vec{AB} = \vec{A\Gamma} - \vec{\Delta B} + \vec{\Delta\Gamma}$.

ΛΥΣΗ

Μεταφέρουμε το $\vec{AB}$ στο δεύτερο μέλος:

$$\vec{x} = \vec{A\Gamma} - \vec{\Delta B} + \vec{\Delta\Gamma} - \vec{AB}.$$

Ομαδοποιούμε: $\vec{A\Gamma} - \vec{AB} = \vec{B\Gamma}$ και $\vec{\Delta\Gamma} - \vec{\Delta B} = \vec{B\Gamma}$. Άρα

$$\vec{x} = \vec{B\Gamma} + \vec{B\Gamma} = 2\vec{B\Gamma}.$$

Το $2\vec{B\Gamma}$ σημαίνει $\vec{B\Gamma} + \vec{B\Gamma}$ — θα το μελετήσουμε συστηματικά στο Μάθημα 1.3.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.4 — Σημεία που συμπίπτουν

Δίνονται τα σημεία A, B, Γ και τα σημεία M, N για τα οποία ισχύει

$$\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{M\Gamma} \quad \text{και} \quad \vec{NA} + \vec{NB} = \vec{N\Gamma}.$$

Να αποδείξετε ότι $M \equiv N$.

ΛΥΣΗ

Αφαιρούμε κατά μέλη τις δύο ισότητες:

$$(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{NA}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{NB}) = \overrightarrow{MT} - \overrightarrow{NT}.$$

Κάθε παρένθεση είναι διαφορά διανυσμάτων με κοινό πέρας. Γράφουμε $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MN}$ και ομοίως $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MT} - \overrightarrow{NT} = \overrightarrow{MN}$. Άρα

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \vec{0} \Rightarrow M \equiv N.$$

Συμπέρασμα: υπάρχει **το πολύ ένα** σημείο M με αυτή την ιδιότητα. Μάλιστα, με τυχαίο σημείο αναφοράς O η σχέση γράφεται $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OM}$, δηλαδή $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OT}$, ή $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{GB}$. Άρα το M είναι η τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου $AMB\Gamma$. Δοκίμασε να το σχεδιάσεις!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.5 Έοια για το μέτρο αθροίσματος

Αν $|\vec{\alpha}| = 3$ και $|\vec{\beta}| = 5$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κινείται το $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$. Πότε παίρνει τη μέγιστη και πότε την ελάχιστη τιμή του;

ΛΥΣΗ

Από την τριγωνική ανισότητα: $|3 - 5| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq 3 + 5$, δηλαδή

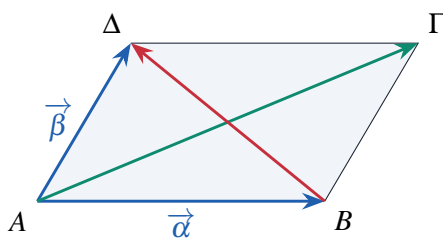
$$2 \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq 8.$$

Μέγιστη τιμή 8 όταν $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$, ελάχιστη τιμή 2 όταν $\vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.6 Διαγώνιοι παραλληλογράμμου μέσω πλευρών

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο K . Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B}$.

ΛΥΣΗ



- $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ (κανόνας παραλληλογράμμου).
- $\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$ (διαφορά με κοινή αρχή A).
- $\overrightarrow{\Gamma B} = -\overrightarrow{B\Gamma} = -\overrightarrow{AD} = -\vec{\beta}$.
- $\overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{\Delta B} = -\overrightarrow{B\Delta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.7 Τετράπλευρο και μέσα – απόδειξη με διανύσματα θέσης

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{A\Gamma} + \vec{\Delta B}$.

ΛΥΣΗ

Με σημείο αναφοράς την κορυφή A (οπότε $\vec{AA} = \vec{0}$):

$$\begin{aligned}\vec{AB} + \vec{\Delta\Gamma} &= \vec{AB} + (\vec{A\Gamma} - \vec{A\Delta}), \\ \vec{A\Gamma} + \vec{\Delta B} &= \vec{A\Gamma} + (\vec{AB} - \vec{A\Delta}).\end{aligned}$$

Τα δεύτερα μέλη είναι ίσα, άρα και τα πρώτα.

Ως σημείο αναφοράς μπορούμε να πάρουμε και μια από τις κορυφές του σχήματος· έτσι κάποιοι όροι απλοποιούνται.



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο mathgreece.com υπάρχει ειδικό βίντεο με τίτλο «Ο χρυσός τύπος $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ », όπου λύνουμε μαζί πάνω από 15 ασκήσεις αποδείξεων με διανύσματα θέσης — η τεχνική αυτή θα σε συνοδεύει σε όλο το κεφάλαιο.

Γ

Προσοχή και συχνά λάθη

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | η σειρά στη διαφορά

✗ Λάθος: $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{AB}$.

✓ Σωστό: $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$. Θυμήσου: πέρας μείον αρχή. Αφού $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$, το $\vec{OA} - \vec{OB}$ είναι το αντίθετο, δηλαδή $\vec{BA}$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | μέτρο αθροίσματος

✗ Λάθος: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ «πάντα».

✓ Σωστό: Γενικά ισχύει μόνο η **ανισότητα** $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$. Η ισότητα ισχύει μόνο για ομόρροπα διανύσματα. Για παράδειγμα, στο ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 3 και 4, είναι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 5 \neq 7$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | αλυσίδα που δεν «δένει»

✗ Λάθος: $\vec{AB} + \vec{\Gamma B} = \vec{A\Gamma}$.

✓ Σωστό: Για να εφαρμοστεί ο κανόνας του τριγώνου, το πέρας του πρώτου πρέπει να είναι η **αρχή** του δεύτερου. Εδώ $\vec{AB} + \vec{\Gamma B} = \vec{AB} - \vec{B\Gamma}$, που δεν απλοποιείται σε ένα διάνυσμα χωρίς επιπλέον πληροφορία.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ

- Το άθροισμα και η διαφορά διανυσμάτων είναι **διάνυσμα**, όχι αριθμός. Μην ξεχνάς το βελάκι στο αποτέλεσμα!
- Στα διανύσματα επιτρέπεται να «μεταφέρουμε» όρους από το ένα μέλος στο άλλο αλλάζοντας πρόσημο — όπως στις αριθμητικές εξισώσεις.
- Η τριγωνική ανισότητα ισχύει για **μέτρα** (αριθμούς)· δεν έχει νόημα ανισότητα ανάμεσα σε διανύσματα.

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 1.2 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Κανόνας τριγώνου	$\vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OM}$
Παραλληλόγραμμα	$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OM}$ ($OAMB$ παρ/μο): άθροισμα = διαγώνιος
Ιδιότητες	αντιμεταθετική, προσεταιριστική, $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
Αλυσίδα	$\vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} + \dots + \vec{A_{n-1}A_n} = \vec{A_1A_n}$
Διαφορά	$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$
Χρυσός τύπος	$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ (πέρας - αρχή)
Τριγωνική ανισ.	$ \vec{a} - \vec{b} \leq \vec{a} \pm \vec{b} \leq \vec{a} + \vec{b} $

Δ

Ασκήσεις για λύση

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

- Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $\vec{GA} + \vec{AB} + \vec{DA} + \vec{BG}$ β) $\vec{AB} - \vec{GB} - \vec{AG}$ γ) $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{NB} - \vec{NA}$.
- Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρείτε τα διανύσματα: α) $\vec{AB} + \vec{BG}$, β) $\vec{AB} - \vec{AG}$, γ) $\vec{BA} + \vec{GB} + \vec{AG}$, δ) $\vec{AB} + \vec{GA} - \vec{GB} + \vec{BG}$.
- Για οποιαδήποτε σημεία A, B, Γ, Δ να αποδείξετε ότι:
α) $\vec{AB} - \vec{GB} = \vec{AG} - \vec{GA}$ β) $\vec{AG} + \vec{BG} = \vec{AG} + \vec{BG}$.
- Αν $|\vec{a}| = 4$ και $|\vec{b}| = 7$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|\vec{a} - \vec{b}|$ και πότε επιτυγχάνονται.
- Δίνεται παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ με $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$ και κέντρο K . Να εκφράσετε ως συνάρτηση των $\vec{a}$, $\vec{b}$ τα: α) $\vec{KA}$, β) $\vec{KB}$, γ) $\vec{AB} + \vec{KD}$, δ) $\vec{BG} - \vec{AG}$.

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμβάθυνσης

- • Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ αν $\vec{x} + \vec{GB} - \vec{AG} = \vec{GD} - \vec{AB} + \vec{DB}$.

7. •• Δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ . Αν $\vec{AB} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{A\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $\vec{\Delta B} = \vec{0}$, δηλαδή $B \equiv \Delta$.
8. •• Αν για τα σημεία A, B, Γ, Δ ισχύει $\vec{AB} + \vec{A\Delta} = \vec{A\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $\vec{B\Gamma} = \vec{A\Delta}$ και να εξηγήσετε γεωμετρικά τι σχήμα είναι το $AB\Gamma\Delta$ (όταν τα A, B, Δ δεν είναι συνευθειακά).
9. •• Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2$. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα και να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.
10. ••• Αν $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 7$, να αποδείξετε ότι $4\vec{\alpha} = 3\vec{\beta}$. (Υπόδειξη: τι συμπεραίνετε για τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$; Χρησιμοποιήστε μοναδιαία διανύσματα — δείτε και το Μάθημα 1.3.)
11. ••• Δίνεται εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ (όχι απαραίτητα κανονικό). Να αποδείξετε ότι

$$\vec{A\Gamma} + \vec{B\Delta} + \vec{\Gamma E} + \vec{\Delta Z} + \vec{E\Lambda} + \vec{ZB} = \vec{0}.$$



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Δοκίμασε το διαδραστικό παιχνίδι «Πρόσθεσε τα βέλη» στο **mathgreece.com**: μετακινείς διανύσματα με το ποντίκι και βλέπεις ζωντανά το άθροισμα και τη διαφορά τους. Είναι ο πιο γρήγορος τρόπος να «χτίσεις» γεωμετρική διαίσθηση.

1.3

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

- ▶ τι σημαίνει $\lambda \vec{a}$ και πώς σχεδιάζεται,
- ▶ τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού και τι είναι γραμμικός συνδυασμός,
- ▶ τη σημαντική **συνθήκη παραλληλίας** $\vec{\beta} \parallel \vec{a} \iff \vec{\beta} = \lambda \vec{a}$,
- ▶ τη διανυσματική ακτίνα του μέσου ενός τμήματος και του κέντρου βάρους τριγώνου,
- ▶ πώς αποδεικνύουμε ότι τρία σημεία είναι συνευθειακά ή ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

A

Θεωρία

Ο ορισμός του $\lambda \vec{a}$

Είδαμε ότι $\vec{a} + \vec{a}$ είναι ένα διάνυσμα με την ίδια κατεύθυνση με το $\vec{a}$ και διπλάσιο μέτρο. Είναι φυσικό να το γράψουμε $2\vec{a}$. Γενικεύουμε για κάθε πραγματικό αριθμό λ :

ΟΡΙΣΜΟΣ | Γινόμενο αριθμού με διάνυσμα

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{a}$ διάνυσμα. Το **γινόμενο** $\lambda \vec{a}$ (ή $\lambda \cdot \vec{a}$) είναι το διάνυσμα που:

- έχει **μέτρο** $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$,
- είναι **ομόρροπο** του $\vec{a}$ αν $\lambda > 0$ και **αντίρροπο** του $\vec{a}$ αν $\lambda < 0$,
- είναι το $\vec{0}$ αν $\lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$.



Αντί για $\frac{1}{\lambda} \vec{a}$ γράφουμε συχνά $\frac{\vec{a}}{\lambda}$ ($\lambda \neq 0$). Ειδικά $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ και $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ | Ιδιότητες

Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και κάθε διάνυσμα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύουν:

- | | |
|--|---|
| (1) $\lambda(\vec{a} + \vec{\beta}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{\beta}$ | (2) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$ |
| (3) $\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a}$ | (4) $\lambda \vec{a} = \vec{0} \iff \lambda = 0 \text{ ή } \vec{a} = \vec{0}$ |

Ως συνέπειες: αν $\lambda \vec{a} = \lambda \vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$ και αν $\lambda \vec{a} = \mu \vec{a}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu$.

Οι ιδιότητες αυτές μας επιτρέπουν να κάνουμε πράξεις με διανύσματα όπως ακριβώς με πολυώνυμα: $3(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) - 2(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 3\vec{\alpha} - 6\vec{\beta} - 2\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = \vec{\alpha} - 8\vec{\beta}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ | Γραμμικός συνδυασμός

Κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Ανάλογα ορίζεται για περισσότερα διανύσματα.)

Η συνθήκη παραλληλίας

ΘΕΩΡΗΜΑ | Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε:

$$\vec{\beta} \parallel \vec{\alpha} \iff \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha} \text{ για κάποιο } \lambda \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Αν $\vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha}$, από τον ορισμό το $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπο ή αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ (ή μηδενικό), άρα παράλληλο.

($\Rightarrow$) Αν $\vec{\beta} \parallel \vec{\alpha}$, θέτουμε $\kappa = \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|}$. Αν $\vec{\beta} \uparrow \vec{\alpha}$, το $\kappa\vec{\alpha}$ έχει ίδιο μέτρο και ίδια φορά με το $\vec{\beta}$, άρα $\vec{\beta} = \kappa\vec{\alpha}$ ($\lambda = \kappa$). Αν $\vec{\beta} \downarrow \vec{\alpha}$, ομοίως $\vec{\beta} = -\kappa\vec{\alpha}$ ($\lambda = -\kappa$). Αν $\vec{\beta} = \vec{0}$, παίρνουμε $\lambda = 0$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ | η προϋπόθεση $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$

Η προϋπόθεση $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ είναι απαραίτητη: αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0}$ για κάθε λ , οπότε κανένα μη μηδενικό $\vec{\beta}$ δεν γράφεται $\lambda\vec{\alpha}$ — παρόλο που (κατά σύμβαση) το $\vec{0}$ είναι παράλληλο με όλα.

Από τη συνθήκη παραλληλίας προκύπτει αμέσως μια πολύτιμη πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ | Μη συγγραμμικά διανύσματα

Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, τότε:

$$\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0} \iff \kappa = \lambda = 0, \quad \text{και άρα} \quad \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \kappa'\vec{\alpha} + \lambda'\vec{\beta} \iff \kappa = \kappa' \text{ και } \lambda = \lambda'.$$

Απόδειξη. Αν ήταν π.χ. $\kappa \neq 0$, θα είχαμε $\vec{\alpha} = -\frac{\lambda}{\kappa}\vec{\beta}$, δηλαδή $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$, άτοπο. Άρα $\kappa = 0$, και τότε $\lambda\vec{\beta} = \vec{0}$ με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, οπότε $\lambda = 0$.

Με άλλα λόγια: όταν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, μπορούμε να «εξισώσουμε συντελεστές», όπως στα πολυώνυμα.

Μοναδιαίο διάνυσμα ομόρροπο ενός διανύσματος

Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, το διάνυσμα

$$\vec{\alpha}_0 = \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} \text{ είναι μοναδιαίο και ομόρροπο του } \vec{\alpha},$$

αφού $\left| \frac{1}{|\vec{\alpha}|} \vec{\alpha} \right| = \frac{1}{|\vec{\alpha}|} |\vec{\alpha}| = 1$ και $\frac{1}{|\vec{\alpha}|} > 0$. Έτσι κάθε διάνυσμα γράφεται $\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cdot \vec{\alpha}_0$: «μέτρο επί

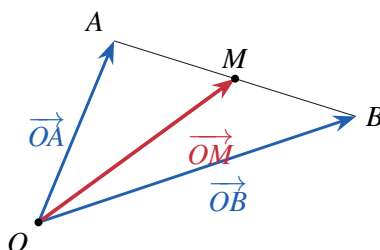
κατεύθυνση».

Διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος

ΘΕΩΡΗΜΑ | Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

Αν M είναι το μέσο του τμήματος AB και O τυχαίο σημείο, τότε

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$



Απόδειξη. Είναι $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$ και $\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{BM}$. Προσθέτοντας κατά μέλη: $2\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + (\vec{AM} + \vec{BM})$. Όμως $\vec{BM} = -\vec{AM}$ (το M είναι μέσο), άρα η παρένθεση είναι $\vec{0}$ και $2\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ | κέντρο βάρους τριγώνου

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι αν G είναι το **κέντρο βάρους** του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε για κάθε σημείο O :

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma}}{3} \quad \text{και ισοδύναμα} \quad \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{G\Gamma} = \vec{0}.$$

Θα το αποδείξουμε στο Παράδειγμα 1.3.5.

Συνευθειακά σημεία και παράλληλες ευθείες

Η συνθήκη παραλληλίας είναι το βασικό εργαλείο για προβλήματα «θέσης»:

$$A, B, \Gamma \text{ συνευθειακά} \iff \vec{AB} \parallel \vec{A\Gamma} \iff \vec{AB} = \lambda \vec{A\Gamma} \quad (\text{για } \Gamma \neq A)$$

Και: δύο ευθείες AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες (ή ταυτίζονται) όταν $\vec{AB} = \lambda \vec{\Gamma\Delta}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | συνευθειακά σημεία

Για να αποδείξουμε ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά:

1. Διαλέγουμε δύο «βολικά» διανύσματα βάσης (συνήθως δύο πλευρές του σχήματος, π.χ. $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$).
2. Εκφράζουμε τα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
3. Δείχνουμε ότι το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου: $\vec{AB} = \lambda \vec{A\Gamma}$.

? ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ο Ήρωνας ο Αλεξανδρεύς (1ος αι. μ.Χ.) γνώριζε ότι οι τρεις διάμεσοι ενός τριγώνου συντρέχουν σε ένα σημείο που τις χωρίζει σε λόγο 2 : 1. Ο Αρχιμήδης είχε ήδη μελετήσει αυτό το σημείο ως «κέντρο βάρους» μιας ομογενούς τριγωνικής πλάκας. Με διανύσματα, όλη αυτή η θεωρία χωράει σε μία γραμμή: $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GT} = \vec{0}$.

B Λυμένα παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.1 Πράξεις και εξισώσεις

- α) Να απλοποιήσετε την παράσταση $2(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) - 3(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) + 4\vec{\beta}$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $3(\vec{x} - \vec{\alpha}) + 2\vec{\beta} = 5\vec{x} - (\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$.

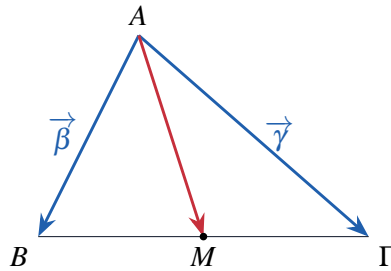
◀ ΛΥΣΗ

- α) $6\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} - 3\vec{\alpha} - 6\vec{\beta} + 4\vec{\beta} = 3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$.
β) $3\vec{x} - 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = 5\vec{x} - \vec{\alpha} + 4\vec{\beta} \iff 3\vec{x} - 5\vec{x} = -\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} + 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} \iff -2\vec{x} = 2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, άρα
$$\vec{x} = -\vec{\alpha} - \vec{\beta}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.2 Διάμεσος τριγώνου

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, M το μέσο της $B\Gamma$ και $\vec{AB} = \vec{\beta}$, $\vec{A\Gamma} = \vec{\gamma}$. Να εκφράσετε τα $\vec{AM}$, $\vec{BM}$ και $\vec{MA}$ ως συνάρτηση των $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$.

◀ ΛΥΣΗ



Με σημείο αναφοράς το A και τον τύπο του μέσου:

$$\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + \vec{A\Gamma}}{2} = \frac{\vec{\beta} + \vec{\gamma}}{2}.$$

Επίσης $\vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{B\Gamma} = \frac{1}{2}(\vec{A\Gamma} - \vec{AB}) = \frac{\vec{\gamma} - \vec{\beta}}{2}$ και $\vec{MA} = -\vec{AM} = -\frac{\vec{\beta} + \vec{\gamma}}{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.3 Τρία σημεία συνευθειακά

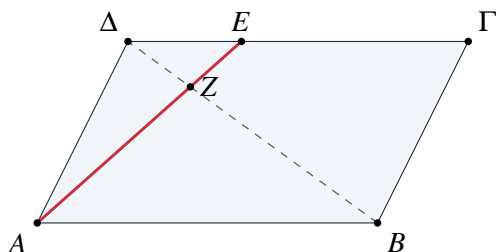
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Παίρνουμε σημείο E στη $\Delta\Gamma$ με $\vec{\Delta E} = \frac{1}{3}\vec{\Delta\Gamma}$ και σημείο Z στη διαγώνιο $B\Delta$ με $\vec{\Delta Z} = \frac{1}{4}\vec{\Delta B}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, Z, E είναι συνευθειακά.

◀ ΛΥΣΗ

Θέτουμε $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AD} = \vec{\beta}$ (μη συγγραμμικά). Τότε $\vec{AG} = \vec{\alpha}$ και $\vec{DB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

- $\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE} = \vec{\beta} + \frac{1}{3}\vec{\alpha}$.
- $\vec{AZ} = \vec{AD} + \vec{DZ} = \vec{\beta} + \frac{1}{4}(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \frac{1}{4}\vec{\alpha} + \frac{3}{4}\vec{\beta} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$.

Άρα $\vec{AZ} = \frac{3}{4}\vec{AE}$, δηλαδή $\vec{AZ} \parallel \vec{AE}$ με κοινό σημείο A . Επομένως τα A, Z, E είναι συνευθειακά (και μάλιστα $AZ = \frac{3}{4}AE$).



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.4 Παραλληλία διανυσμάτων με παράμετρο

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά. Να βρείτε τον $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{v} = (\lambda - 1)\vec{\alpha} - 6\vec{\beta}$ να είναι παράλληλα.

ΛΥΣΗ

Το $\vec{u} \neq \vec{0}$ (αλλιώς θα ήταν $2\vec{\alpha} = -3\vec{\beta}$ και τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ συγγραμμικά). Άρα $\vec{v} \parallel \vec{u} \iff \vec{v} = \mu \vec{u}$ για κάποιο μ :

$$(\lambda - 1)\vec{\alpha} - 6\vec{\beta} = 2\mu\vec{\alpha} + 3\mu\vec{\beta}.$$

Αφού τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, εξισώνουμε συντελεστές: $\lambda - 1 = 2\mu$ και $-6 = 3\mu$. Άρα $\mu = -2$ και $\lambda - 1 = -4$, δηλαδή $\boxed{\lambda = -3}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.5 Κέντρο βάρους τριγώνου

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κέντρο βάρους G . Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{G\Gamma} = \vec{0} \quad \beta) \vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma}}{3} \text{ για κάθε σημείο } O.$$

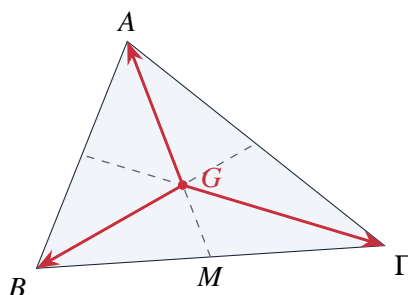
ΛΥΣΗ

α) Έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι το G βρίσκεται στη διάμεσο AM με $AG = 2GM$, οπότε $\vec{GA} = -2\vec{GM}$. Από τον τύπο του μέσου (με σημείο αναφοράς το G): $\vec{GB} + \vec{G\Gamma} = 2\vec{GM}$. Άρα

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{G\Gamma} = -2\vec{GM} + 2\vec{GM} = \vec{0}.$$

β) Γράφουμε κάθε διάνυσμα μέσω του O : $\vec{GA} = \vec{OA} - \vec{OG}$ κ.λπ. Τότε το (α) γίνεται

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} - 3\vec{OG} = \vec{0} \iff \vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma}}{3}.$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.6 Θεώρημα Varignon

Δίνεται τυχαίο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και K, Λ, M, N τα μέσα των $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο.

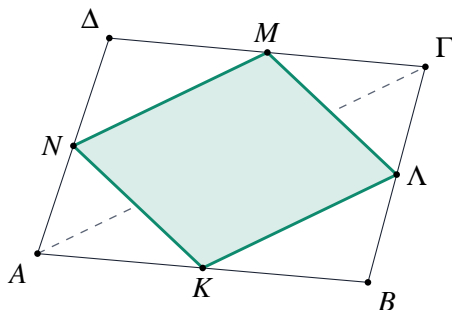
ΛΥΣΗ

Με τυχαίο σημείο αναφοράς O και τον τύπο του μέσου:

$$\vec{K\Lambda} = \vec{O\Lambda} - \vec{OK} = \frac{\vec{OB} + \vec{O\Gamma}}{2} - \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} = \frac{\vec{O\Gamma} - \vec{OA}}{2} = \frac{1}{2}\vec{A\Gamma},$$

$$\vec{NM} = \vec{OM} - \vec{ON} = \frac{\vec{O\Gamma} + \vec{O\Delta}}{2} - \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} = \frac{1}{2}\vec{A\Gamma}.$$

Άρα $\vec{K\Lambda} = \vec{NM}$, οπότε το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο. Μάλιστα οι πλευρές του είναι παράλληλες στις διαγώνιους του αρχικού τετραπλεύρου και ίσες με το μισό τους.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.7 Εύρεση σημείου από διανυσματική σχέση

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρείτε (να κατασκευάσετε) το σημείο P για το οποίο ισχύει $\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{P\Gamma} = \vec{0}$.

ΛΥΣΗ

Έστω M το μέσο της AB . Τότε $\vec{PA} + \vec{PB} = 2\vec{PM}$, οπότε η σχέση γίνεται

$$2\vec{PM} + 2\vec{P\Gamma} = \vec{0} \iff \vec{PM} + \vec{P\Gamma} = \vec{0} \iff \vec{PM} = -\vec{P\Gamma} = \vec{P\Gamma}.$$

Δηλαδή τα $\vec{P\Gamma}$ και $\vec{PM}$ είναι ίσα, επομένως το P είναι το **μέσο της διαμέσου** ΓM .

Η μέθοδος «ομαδοποίησης δύο όρων σε μέσο» είναι εξαιρετικά χρήσιμη: $\vec{PA} + \vec{PB} = 2\vec{PM}$ με M μέσο του AB .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.8 Τραπεζίο: η διάμεσος

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), M, N είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών AD και BC . Να αποδείξετε ότι $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{\Delta\Gamma})$ και να συμπεράνετε ότι $MN \parallel AB$ και $MN = \frac{AB+\Gamma\Delta}{2}$.

ΛΥΣΗ

Με σημείο αναφοράς O : $\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM} = \frac{\vec{OB} + \vec{OI}}{2} - \frac{\vec{OA} + \vec{OD}}{2} = \frac{(\vec{OB} - \vec{OA}) + (\vec{OI} - \vec{OD})}{2} = \frac{\vec{AB} + \vec{\Delta\Gamma}}{2}$.
Αφού $AB \parallel \Delta\Gamma$ και τα $\vec{AB}, \vec{\Delta\Gamma}$ είναι ομόρροπα, είναι $\vec{\Delta\Gamma} = \kappa \vec{AB}$ με $\kappa > 0$. Τότε $\vec{MN} = \frac{1+\kappa}{2} \vec{AB}$, άρα $MN \parallel AB$ και, επειδή τα $\vec{AB}, \vec{\Delta\Gamma}$ είναι ομόρροπα, $|\vec{AB} + \vec{\Delta\Gamma}| = AB + \Gamma\Delta$, οπότε $MN = \frac{AB+\Gamma\Delta}{2}$.



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Η συνθήκη παραλληλίας και ο τύπος του μέσου είναι από τα πιο «αγαπημένα» θέματα των εξεταστών. Στο **mathgreece.com** θα βρεις ολόκληρη ενότητα «Συννευθιακά σημεία με διανύσματα» με βιντεολύσεις και διαγώνισμα προσομοίωσης.

Γ

Προσοχή και συχνά λάθη

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | διαίρεση με διάνυσμα

✗ **Λάθος:** Από $\lambda \vec{a} = \mu \vec{a}$ «διαγράφω» το $\vec{a}$ και γράφω $\lambda = \mu$.

✓ **Σωστό:** Επιτρέπεται **μόνο αν** $\vec{a} \neq \vec{0}$. (Αν $\vec{a} = \vec{0}$, η ισότητα ισχύει για κάθε λ, μ .) Και ποτέ δεν γράφουμε « $\frac{\vec{b}}{\vec{a}}$ »: διαίρεση διανύσματος με διάνυσμα **δεν ορίζεται**.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | εξίσωση συντελεστών

✗ **Λάθος:** Από $\kappa \vec{a} + \lambda \vec{b} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$ συμπεραίνω πάντα $\kappa = 2, \lambda = 5$.

✓ **Σωστό:** Αυτό ισχύει **μόνο αν τα** $\vec{a}, \vec{b}$ **δεν είναι συγγραμμικά**. Π.χ. αν $\vec{b} = \vec{a}$, τότε $3\vec{a} + 4\vec{b} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$ αλλά $3 \neq 2$. Γράφε πάντα στη λύση: «αφού τα $\vec{a}, \vec{b}$ δεν είναι συγγραμμικά...».

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | μέτρο γινομένου

✗ **Λάθος:** $|-3\vec{a}| = -3|\vec{a}|$.

✓ **Σωστό:** $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$, άρα $|-3\vec{a}| = 3|\vec{a}|$. Το μέτρο δεν είναι ποτέ αρνητικό.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ

- Στο $\lambda \vec{a}$ γράφουμε τον **αριθμό αριστερά**. Το « $\vec{a}\lambda$ » δεν συνηθίζεται.
- Ο τύπος του μέσου $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$ ισχύει για **οποιοδήποτε** σημείο O — ακόμη και για $O \equiv A$, οπότε $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.
- Για συννευθιακά σημεία πρέπει τα δύο διανύσματα να έχουν **κοινό σημείο** (π.χ. $\vec{AB}, \vec{\Delta\Gamma}$). Αν δείξεις μόνο $\vec{AB} \parallel \vec{\Gamma\Delta}$, έχεις δείξει παραλληλία ευθειών, όχι ότι τα σημεία είναι συννευθιακά.

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 1.3 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

 $\lambda \vec{\alpha}$ μέτρο $|\lambda| |\vec{\alpha}|$ · ομόρροπο αν $\lambda > 0$, αντίρροπο αν $\lambda < 0$

Ιδιότητες

επιμεριστικές, $\lambda(\mu \vec{\alpha}) = (\lambda\mu) \vec{\alpha}$, $\lambda \vec{\alpha} = \vec{0} \iff \lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$

Παραλληλία

 $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$: $\vec{\beta} \parallel \vec{\alpha} \iff \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha}$

Μη συγγραμμικά

 $\kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta} = \vec{0} \iff \kappa = \lambda = 0$ (εξίσωση συντελεστών)

Μοναδιαίο

 $\vec{\alpha}_0 = \vec{\alpha} / |\vec{\alpha}|$

Μέσο

 $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$

Κέντρο βάρους

 $\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$, $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

Συνευθειακά

 A, B, Γ συνευθειακά $\iff \vec{AB} = \lambda \vec{A\Gamma}$

Δ Ασκήσεις για λύση

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

- Να απλοποιήσετε: α) $3(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) + 2(\vec{\beta} - \vec{\alpha})$ β) $\frac{1}{2}(4\vec{\alpha} + 6\vec{\beta}) - 3(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ γ) $2(\vec{AB} - \vec{A\Gamma}) + 2\vec{GB}$.
- Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $2\vec{x} + 3\vec{\alpha} = \vec{x} - \vec{\beta}$ β) $4(\vec{x} - \vec{\beta}) = 2(\vec{\alpha} + \vec{x})$.
- Αν $|\vec{\alpha}| = 5$, να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι: α) ομόρροπο του $\vec{\alpha}$, β) αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, γ) ομόρροπο του $-3\vec{\alpha}$. Πόσο είναι το μέτρο του $-\frac{2}{3}\vec{\alpha}$;
- Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, Δ είναι το μέσο της AB και E το μέσο της $A\Gamma$. Να αποδείξετε με διανύσματα ότι $\vec{DE} = \frac{1}{2}\vec{B\Gamma}$. Ποιο γνωστό θεώρημα της Γεωμετρίας αποδείξατε;
- Τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά. Να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$ αν $(x+2)\vec{\alpha} + (y-1)\vec{\beta} = 3\vec{\alpha} - 2y\vec{\beta}$.
- Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ το σημείο Δ της $B\Gamma$ είναι τέτοιο ώστε $\vec{B\Delta} = 2\vec{\Delta\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\vec{A\Delta} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{A\Gamma}$.

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμβάθυνσης

- Τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά. Αν $\vec{AB} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\vec{B\Gamma} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{B\Delta} = 11\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι τα A, Γ, Δ είναι συνευθειακά.
- Να βρείτε τον λ ώστε τα $\vec{u} = \lambda \vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$ να είναι παράλληλα, όπου $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά. Για κάθε τιμή του λ να εξετάσετε αν είναι ομόρροπα ή αντίρροπα.
- Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB . Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M με $\vec{MA} + 2\vec{MB} = \vec{0}$ και να το κατασκευάσετε.

10. •• Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, M είναι το μέσο της $B\Gamma$ και η AM τέμνει τη διαγώνιο $B\Delta$ στο K . Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B\Delta}$.
11. ••• Αν G και G' είναι τα κέντρα βάρους των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma'} = 3\overrightarrow{GG'}$. Τι συμπεραίνετε αν τα δύο τρίγωνα έχουν το ίδιο κέντρο βάρους;
12. ••• Δίνονται τα σημεία A, B και ο αριθμός $\lambda \neq -1$. Να αποδείξετε ότι αν το σημείο M ικανοποιεί $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$, τότε για κάθε σημείο O ισχύει $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}$. Να εφαρμόσετε για $\lambda = 1$ και να ελέγξετε ότι βρίσκετε τον τύπο του μέσου.



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο **mathgreece.com** υπάρχει ψηφιακό διαγώνισμα με 20 ερωτήσεις «Σωστό -- Λάθος» για τα Μαθήματα 1.1–1.3. Είναι ιδανικό για να ελέγξεις αν έχεις κατακτήσει τη θεωρία πριν περάσεις στις συντεταγμένες.

1.4 Συντεταγμένες στο επίπεδο

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

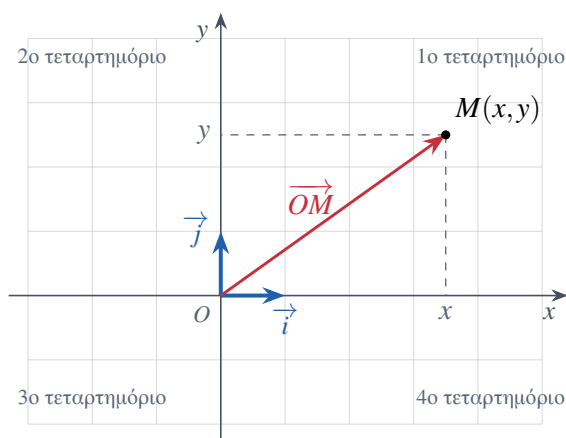
- ▶ τι είναι το ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και οι συντεταγμένες ενός σημείου,
- ▶ πώς ένα διάνυσμα γράφεται $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y)$,
- ▶ πώς κάνουμε πράξεις με συντεταγμένες και πώς βρίσκουμε τις συντεταγμένες του μέσου και του $\vec{AB}$,
- ▶ τους τύπους για το μέτρο διανύσματος και την απόσταση δύο σημείων,
- ▶ τη συνθήκη παραλληλίας με ορίζουσα και τον συντελεστή διεύθυνσης διανύσματος.

A Θεωρία

Άξονας και καρτεσιανό επίπεδο

Άξονας λέγεται μια ευθεία $x'x$ πάνω στην οποία έχουμε διαλέξει ένα σημείο O (αρχή) και ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{i}$ (θετική φορά). Για κάθε σημείο M του άξονα υπάρχει μοναδικός αριθμός x με $\vec{OM} = x\vec{i}$ · ο x λέγεται **τετμημένη** του M .

Παίρνοντας δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή O και μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$ αντίστοιχα, σχηματίζουμε ένα **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων** Oxy . Κάθε σημείο M του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό διατεταγμένο ζεύγος (x, y) : φέρνουμε από το M κάθετες στους άξονες, που τους τέμνουν στα $M_1(x)$ και $M_2(y)$. Γράφουμε $M(x, y)$: x η **τετμημένη**, y η **τεταγμένη**.



Συντεταγμένες διανύσματος

ΘΕΩΡΗΜΑ | Ανάλυση διανύσματος

Κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ του επιπέδου γράφεται με **μοναδικό** τρόπο στη μορφή

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Οι αριθμοί x, y λέγονται **συντεταγμένες** του $\vec{a}$ και γράφουμε $\vec{a} = (x, y)$. Αν $\vec{a} = \vec{OA}$, οι συντεταγμένες του $\vec{a}$ είναι οι συντεταγμένες του σημείου A .

Γιατί μοναδικός; Τα $\vec{i}, \vec{j}$ δεν είναι συγγραμμικά, οπότε αν $x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$, τότε $x = x'$ και $y = y'$ (Μάθημα 1.3). Ειδικότερα:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2$$

Πράξεις με συντεταγμένες

Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε από τις ιδιότητες του Μαθήματος 1.3:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1), \quad \kappa \vec{a} + \lambda \vec{b} = (\kappa x_1 + \lambda x_2, \kappa y_1 + \lambda y_2)$$

Δηλαδή οι πράξεις γίνονται «συντεταγμένη προς συντεταγμένη».

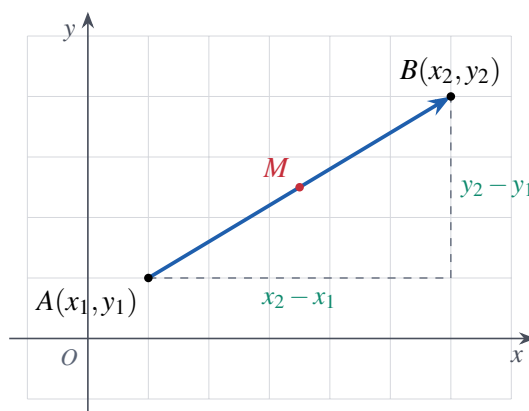
Συντεταγμένες μέσου και συντεταγμένες διανύσματος $\vec{AB}$

ΘΕΩΡΗΜΑ | Δύο βασικοί τύποι

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, τότε:

$$\text{Μέσο } M \text{ του } AB: \quad M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \quad \vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Απόδειξη. Από το Μάθημα 1.3: $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{2}((x_1, y_1) + (x_2, y_2))$. Επίσης $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.



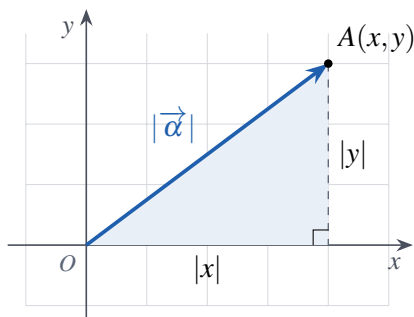
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ | κέντρο βάρους

Αν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$, το κέντρο βάρους του τριγώνου είναι $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.

Μέτρο διανύσματος – απόσταση σημείων

Αν $\vec{a} = (x, y) = \vec{OA}$, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές $|x|$ και $|y|$:

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (AB) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Συνθήκη παραλληλίας με συντεταγμένες

ΟΡΙΣΜΟΣ | Ορίζουσα δύο διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, ονομάζουμε **ορίζουσα** των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τον αριθμό

$$\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ | Συνθήκη παραλληλίας

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \iff \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \iff x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

Απόδειξη. Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$, ισχύουν και οι δύο πλευρές. Έστω $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Τότε $\vec{\beta} \parallel \vec{\alpha} \iff \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha}$, δηλαδή $x_2 = \lambda x_1, y_2 = \lambda y_1$. Τότε $x_1 y_2 - x_2 y_1 = \lambda x_1 y_1 - \lambda x_1 y_1 = 0$. Αντίστροφα, αν $x_1 y_2 = x_2 y_1$ και π.χ. $x_1 \neq 0$, θέτουμε $\lambda = \frac{x_2}{x_1}$ και βρίσκουμε $y_2 = \frac{x_2 y_1}{x_1} = \lambda y_1$, άρα $\vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha}$ (ομοίως αν $y_1 \neq 0$).

Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος

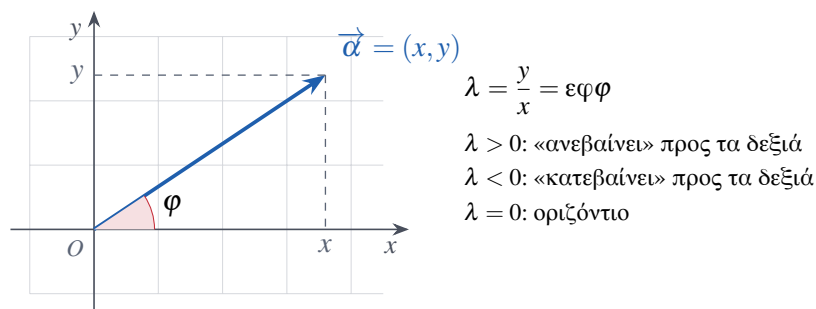
Έστω $\vec{\alpha} = (x, y) \neq \vec{0}$ και φ η γωνία που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ με τον άξονα x' (τη μετράμε από τον ημιάξονα Ox , αριστερόστροφα, $0 \leq \varphi < 2\pi$).

ΟΡΙΣΜΟΣ | Συντελεστής διεύθυνσης

Αν $x \neq 0$, ο αριθμός

$$\lambda = \frac{y}{x} = \tan \varphi$$

λέγεται **συντελεστής διεύθυνσης** του $\vec{\alpha}$. Αν $x = 0$ (δηλαδή $\vec{\alpha} \parallel y'y$), το $\vec{\alpha}$ **δεν έχει** συντελεστή διεύθυνσης.



ΘΕΩΡΗΜΑ | Παραλληλία με συντελεστές διεύθυνσης

Αν τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 , τότε

$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \iff \lambda_1 = \lambda_2.$$

Απόδειξη. $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \iff \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1}$ (αφού $x_1, x_2 \neq 0$).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | συνευθειακά σημεία με συντεταγμένες

Τα A, B, Γ είναι συνευθειακά $\iff \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = 0$. Υπολογίζουμε $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}$ (πέρας μείον αρχή) και μετά την ορίζουσα.

? ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Οι συντεταγμένες πήραν το όνομα «καρτεσιανές» από τον Γάλλο φιλόσοφο και μαθηματικό René Descartes (Καρτέσιο), που το 1637 στο έργο του *La Géométrie* έδειξε πώς τα γεωμετρικά προβλήματα μεταφράζονται σε αλγεβρικά. Ανεξάρτητα, την ίδια ιδέα είχε και ο Pierre de Fermat. Σήμερα κάθε GPS, κάθε οθόνη και κάθε βιντεοπαιχνίδι «σκέφτεται» σε συντεταγμένες!

B Λυμένα παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.1 — Βασικοί υπολογισμοί

Δίνονται τα σημεία $A(1, -2)$, $B(4, 2)$ και $\Gamma(-3, 1)$. Να βρείτε: α) τις συντεταγμένες των $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}$ και του $2\vec{AB} - 3\vec{A\Gamma}$, β) τις συντεταγμένες του μέσου M της $B\Gamma$, γ) το μήκος της διαμέσου AM .

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \vec{AB} = (4 - 1, 2 - (-2)) = (3, 4), \quad \vec{A\Gamma} = (-3 - 1, 1 - (-2)) = (-4, 3).$$

$$2\vec{AB} - 3\vec{A\Gamma} = (6, 8) - (-12, 9) = (18, -1).$$

$$\beta) M\left(\frac{4+(-3)}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

$$\gamma) \vec{AM} = \left(\frac{1}{2} - 1, \frac{3}{2} + 2\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right), \text{ οπότε } (AM) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.2 Τέταρτη κορυφή παραλληλογράμμου

Τα σημεία $A(-1, 1)$, $B(3, 0)$, $\Gamma(4, 3)$ είναι διαδοχικές κορυφές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Να βρείτε την κορυφή Δ και το κέντρο K .

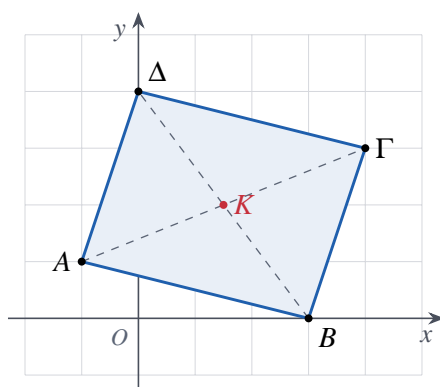
ΛΥΣΗ

Έστω $\Delta(x, y)$. Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $\vec{A\Delta} = \vec{B\Gamma}$:

$$(x + 1, y - 1) = (4 - 3, 3 - 0) = (1, 3) \iff x = 0, y = 4.$$

Άρα $\Delta(0, 4)$. Το κέντρο είναι το μέσο της AG : $K\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = K\left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

Έλεγχος: το μέσο της BD είναι $\left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ — συμπίπτει, όπως πρέπει.

**ΠΡΟΣΟΧΗ** | η σειρά των κορυφών

Η φράση «διαδοχικές κορυφές» είναι σημαντική. Αν δεν δοθεί η σειρά, για τρία σημεία A, B, Γ υπάρχουν **τρία** δυνατά παραλληλόγραμμα (όπου η τέταρτη κορυφή είναι απέναντι από το A , το B ή το Γ) και πρέπει να εξετάσουμε όλες τις περιπτώσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.3 Συνευθειακά σημεία – παράμετρος

Να βρείτε τον $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε τα σημεία $A(1, 2)$, $B(3, \kappa)$ και $\Gamma(\kappa, -4)$ να είναι συνευθειακά.

ΛΥΣΗ

$$\vec{AB} = (2, \kappa - 2), \vec{A\Gamma} = (\kappa - 1, -6).$$

$$\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 2 & \kappa - 2 \\ \kappa - 1 & -6 \end{vmatrix} = -12 - (\kappa - 2)(\kappa - 1) = -12 - \kappa^2 + 3\kappa - 2 = -\kappa^2 + 3\kappa - 14.$$

Θέλουμε $-\kappa^2 + 3\kappa - 14 = 0 \iff \kappa^2 - 3\kappa + 14 = 0$, με διακρίνουσα $\Delta = 9 - 56 < 0$. Άρα **δεν υπάρχει** τέτοιος κ : τα σημεία δεν είναι ποτέ συνευθειακά.

Ένα αρνητικό αποτέλεσμα είναι κι αυτό απάντηση! Μην «διορθώνεις» αυθαίρετα τις πράξεις όταν δεν βγαίνει λύση· έλεγξέ τες και, αν είναι σωστές, γράψε το συμπέρασμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.4 Παράλληλα διανύσματα – ομόρροπα ή αντίρροπα;

Δίνονται $\vec{\alpha} = (\mu, 2)$ και $\vec{\beta} = (8, \mu)$. Να βρείτε τον μ ώστε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ και για κάθε τιμή να εξετάσετε αν είναι ομόρροπα ή αντίρροπα.

ΛΥΣΗ

$$\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \mu \cdot \mu - 8 \cdot 2 = \mu^2 - 16 = 0 \iff \mu = 4 \text{ ή } \mu = -4.$$

- $\mu = 4$: $\vec{\alpha} = (4, 2)$, $\vec{\beta} = (8, 4) = 2\vec{\alpha}$. Αφού $2 > 0$, **ομόρροπα**.
- $\mu = -4$: $\vec{\alpha} = (-4, 2)$, $\vec{\beta} = (8, -4) = -2\vec{\alpha}$. Αφού $-2 < 0$, **αντίρροπα**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.5 Μοναδιαίο διάνυσμα και διάνυσμα δοσμένου μέτρου

Δίνεται $\vec{\alpha} = (-6, 8)$. Να βρείτε: α) το μοναδιαίο διάνυσμα ομόρροπο του $\vec{\alpha}$, β) τα διανύσματα που είναι παράλληλα στο $\vec{\alpha}$ και έχουν μέτρο 15.

◀ ΛΥΣΗ

α) $|\vec{\alpha}| = \sqrt{36 + 64} = 10$, άρα $\vec{\alpha}_0 = \frac{1}{10}(-6, 8) = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

β) Ζητάμε $\vec{v} = \pm 15\vec{\alpha}_0$: $\vec{v} = (-9, 12)$ (ομόρροπο) ή $\vec{v} = (9, -12)$ (αντίρροπο).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.6 Είδος τριγώνου

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές $A(2, 1)$, $B(5, 5)$, $\Gamma(-2, 4)$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

◀ ΛΥΣΗ

$$(AB) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad (A\Gamma) = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5, \quad (B\Gamma) = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Είναι $(AB) = (A\Gamma)$, άρα ισοσκελές, και $(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = 25 + 25 = 50 = (B\Gamma)^2$, άρα από το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.7 Σημείο σε άξονα που ισαπέχει

Να βρείτε σημείο P του άξονα $x'x$ που ισαπέχει από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(5, 1)$.

◀ ΛΥΣΗ

Το P είναι στον $x'x$, άρα $P(x, 0)$. Θέλουμε $(PA) = (PB)$, ισοδύναμα $(PA)^2 = (PB)^2$:

$$(x-1)^2 + 9 = (x-5)^2 + 1 \iff x^2 - 2x + 10 = x^2 - 10x + 26 \iff 8x = 16 \iff x = 2.$$

Άρα $P(2, 0)$.

Τεχνική: όταν συγκρίνουμε αποστάσεις, **υψώνουμε στο τετράγωνο** για να φύγουν οι ρίζες (είναι θετικές ποσότητες, άρα η ισοδυναμία διατηρείται).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.8 Γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων

Να γράψετε το $\vec{v} = (7, -4)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (3, -1)$.

◀ ΛΥΣΗ

Ζητάμε κ, λ με $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{v}$: $(\kappa + 3\lambda, 2\kappa - \lambda) = (7, -4)$, δηλαδή

$$\begin{cases} \kappa + 3\lambda = 7 \\ 2\kappa - \lambda = -4 \end{cases}.$$

Από τη 2η: $\lambda = 2\kappa + 4$. Αντικαθιστούμε: $\kappa + 6\kappa + 12 = 7 \iff \kappa = -\frac{5}{7}$, οπότε $\lambda = -\frac{10}{7} + 4 = \frac{18}{7}$.
Άρα

$$\vec{v} = -\frac{5}{7}\vec{\alpha} + \frac{18}{7}\vec{\beta}.$$

Ελεγχος: $-\frac{5}{7}(1, 2) + \frac{18}{7}(3, -1) = (\frac{-5+54}{7}, \frac{-10-18}{7}) = (7, -4)$. ✓

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.9 — Συντελεστής διεύθυνσης και γωνία

Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης και τη γωνία με τον άξονα x' των διανυσμάτων: α) $\vec{\alpha} = (\sqrt{3}, 3)$, β) $\vec{\beta} = (-2, 2)$, γ) $\vec{\gamma} = (0, -5)$.

ΛΥΣΗ

α) $\lambda = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Το $\vec{\alpha}$ είναι στο 1ο τεταρτημόριο, άρα $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

β) $\lambda = \frac{2}{-2} = -1$. Το $\vec{\beta}$ είναι στο 2ο τεταρτημόριο ($x < 0, y > 0$), άρα $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

γ) Εδώ $x = 0$, άρα το $\vec{\gamma}$ **δεν έχει** συντελεστή διεύθυνσης. Είναι παράλληλο στον $y'y$ με φορά προς τα κάτω: $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ | η γωνία από τον συντελεστή

Η εξίσωση $\tan \varphi = \lambda$ έχει **δύο** λύσεις στο $[0, 2\pi)$ που διαφέρουν κατά π . Για να βρεις ποια είναι η σωστή, κοίτα σε ποιο **τεταρτημόριο** «δείχνει» το διάνυσμα (πρόσημα των x, y). Για παράδειγμα, τα $(1, 1)$ και $(-1, -1)$ έχουν και τα δύο $\lambda = 1$, αλλά γωνίες $\frac{\pi}{4}$ και $\frac{5\pi}{4}$.



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Θέλεις να εξασκηθείς γρήγορα στους τύπους μέσου, απόστασης και ορίζουσας; Στο mathgreece.com υπάρχει «γεννήτρια ασκήσεων» που σου δίνει κάθε φορά νέα σημεία και ελέγχει αμέσως την απάντησή σου.

Γ

Προσοχή και συχνά λάθη

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | συντεταγμένες του $\vec{AB}$

✗ **Λάθος:** $A(1, 5), B(4, 2) \Rightarrow \vec{AB} = (1 - 4, 5 - 2) = (-3, 3)$.

✓ **Σωστό:** Πέρας μείον αρχή: $\vec{AB} = (4 - 1, 2 - 5) = (3, -3)$. Το λάθος δίνει το $\vec{BA}$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | μέτρο και ρίζες

✗ **Λάθος:** $|(3, -4)| = \sqrt{3^2 - 4^2}$ ή $\sqrt{9 + 16} = 3 + 4 = 7$.

✓ **Σωστό:** $|(3, -4)| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$. Τα τετράγωνα είναι πάντα θετικά, και $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$.

✖ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | η ορίζουσα

✖ **Λάθος:** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5.$

✓ **Σωστό:** Πολλαπλασιάζουμε **γιατί:** κύρια διαγώνιος μείον δευτερεύουσα: $2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7$.
Και θυμήσου: στις γραμμές της ορίζουσας γράφουμε τις συντεταγμένες **κάθε διανύσματος**.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ

- Ένα κατακόρυφο διάνυσμα $(0, y)$ **δεν έχει** συντελεστή διεύθυνσης — μη γράψεις « $\lambda = \infty$ » ή « $\lambda = 0$ ».
- Το οριζόντιο διάνυσμα $(x, 0)$, $x \neq 0$, έχει $\lambda = 0$.
- Η συνθήκη $\lambda_1 = \lambda_2$ ισχύει μόνο όταν **και τα δύο** διανύσματα έχουν συντελεστή διεύθυνσης. Η ορίζουσα δουλεύει **πάντα** — προτίμησέ την.

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 1.4 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Συντεταγμένες

$$\vec{\alpha} = x \vec{i} + y \vec{j} = (x, y) \text{ με μοναδικό τρόπο}$$

Πράξεις

$$(x_1, y_1) \pm (x_2, y_2) = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2), \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Μέσο

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$\vec{AB}$

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Μέτρο / απόσταση

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Παραλληλία

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \iff x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

Συντελ. διεύθυνσης

$$\lambda = \frac{y}{x} = \text{εφ}\varphi \ (x \neq 0), \quad \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \iff \lambda_1 = \lambda_2$$

Δ

Ασκήσεις για λύση

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

- Δίνονται $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-3, 4)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες και το μέτρο των: α) $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, β) $3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$, γ) $\frac{1}{2}\vec{\beta} - \vec{\alpha}$.
- Δίνονται τα σημεία $A(-2, 3)$ και $B(4, -5)$. Να βρείτε: α) το μέσο M του AB , β) την απόσταση (AB) , γ) το σημείο Γ ώστε το B να είναι μέσο του $A\Gamma$.
- Να βρείτε τον x ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, 3)$ και $\vec{\beta} = (2, x+1)$ να είναι παράλληλα.
- Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(-1, -5)$, $B(1, 1)$ και $\Gamma(3, 7)$ είναι συνευθειακά.

5. • Να βρείτε τα σημεία του άξονα $y'y$ που απέχουν από το σημείο $A(4, 1)$ απόσταση 5.
6. • Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}$ που είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha} = (5, -12)$ και έχει μέτρο 26.

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμβάθυνσης

7. •• Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$, $B(5, 3)$, $\Gamma(3, 7)$. Να βρείτε: α) το κέντρο βάρους G του τριγώνου, β) την κορυφή Δ ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο, γ) το μήκος της διαμέσου από το Γ .
8. •• Να βρείτε σημείο M της ευθείας $y = x$ (δηλαδή $M(t, t)$) που ισαπέχει από τα $A(2, 0)$ και $B(0, 4)$.
9. •• Δίνονται $\vec{\alpha} = (1, -2)$, $\vec{\beta} = (2, 1)$. Να γράψετε το $\vec{v} = (4, 7)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.
10. •• Να βρείτε τους $\lambda \in \mathbb{R}$ για τους οποίους το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 4, \lambda^2 - 3\lambda + 2)$ είναι: α) το μηδενικό διάνυσμα, β) παράλληλο στον άξονα $x'x$ (και μη μηδενικό), γ) παράλληλο στον άξονα $y'y$ (και μη μηδενικό).
11. ••• Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(4, 3)$. Να βρείτε το σημείο M του τμήματος AB για το οποίο $\vec{AM} = 2\vec{MB}$, καθώς και το σημείο N της ευθείας AB , εκτός του τμήματος, για το οποίο $(NA) = 2(NB)$.
12. ••• Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου του διανύσματος $\vec{u} = (3 + 2\sin\theta, 4 + 2\eta\mu\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. (Υπόδειξη: γράψτε $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} = (3, 4)$ και χρησιμοποιήστε την τριγωνική ανισότητα.)



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο mathgreece.com μπορείς να ανοίξεις το διαδραστικό «καρτεσιανό επίπεδο»: μετακινείς σημεία, και βλέπεις ζωντανά συντεταγμένες, μέτρα, μέσα και ορίζουσες να αλλάζουν. Ιδανικό για να καταλάβεις γιατί δουλεύουν οι τύποι.

1.5

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

- ▶ τον ορισμό $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ και τι εκφράζει,
- ▶ την αναλυτική έκφραση $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$,
- ▶ τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και τις «ταυτότητες» με διανύσματα,
- ▶ πώς υπολογίζουμε τη γωνία δύο διανυσμάτων και πώς ελέγχουμε καθετότητα,
- ▶ τι είναι η προβολή ενός διανύσματος πάνω σε ένα άλλο.

A Θεωρία

Ο ορισμός

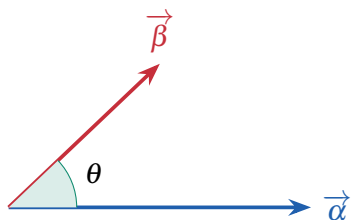
Μέχρι τώρα προσθέταμε διανύσματα και τα πολλαπλασιάζαμε με αριθμούς· το αποτέλεσμα ήταν πάντα διάνυσμα. Τώρα θα ορίσουμε ένα «γινόμενο» δύο διανυσμάτων που δίνει **αριθμό**. Η ιδέα προέρχεται από τη Φυσική: το έργο μιας σταθερής δύναμης $\vec{F}$ που μετατοπίζει ένα σώμα κατά $\vec{s}$ είναι $W = |\vec{F}| |\vec{s}| \cos \theta$.

ΟΡΙΣΜΟΣ | Εσωτερικό γινόμενο

Εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ λέγεται ο **πραγματικός αριθμός**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta, \quad \theta = (\vec{a}, \vec{b}).$$

Αν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$, ορίζουμε $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.



$$\begin{aligned} 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \text{ (οξεία)} \\ \theta = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ (κάθετα)} \\ \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \text{ (αμβλεία)} \end{aligned}$$

Άμεσες συνέπειες του ορισμού

ΘΕΩΡΗΜΑ | Βασικές ιδιότητες

- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (αντιμεταθετική)
- (2) $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (κριτήριο καθετότητας)

(3) Αν $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$. αν $\vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$.

(4) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$

(«εσωτερικό τετράγωνο»)

(5) $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

Η ιδιότητα (4) είναι ίσως η πιο χρήσιμη σε ασκήσεις: **το τετράγωνο του μέτρου ενός διανύσματος ισούται με το εσωτερικό τετράγωνο**. Έτσι «μετατρέπουμε» μέτρα σε εσωτερικά γινόμενα:

$$|\vec{v}|^2 = \vec{v}^2 \quad \text{π.χ.} \quad |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$$

Αναλυτική έκφραση

ΘΕΩΡΗΜΑ | Εσωτερικό γινόμενο με συντεταγμένες

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Απόδειξη. Έστω $\vec{\alpha} = \vec{OA}$, $\vec{\beta} = \vec{OB}$ μη συγγραμμικά. Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο OAB : $(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB)\cos\theta$, δηλαδή

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2 \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}.$$

Αναπτύσσοντας το πρώτο μέλος και απλοποιώντας: $-2x_1x_2 - 2y_1y_2 = -2 \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, άρα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$. (Οι περιπτώσεις συγγραμμικών ή μηδενικών διανυσμάτων ελέγχονται εύκολα χωριστά.)

ΘΕΩΡΗΜΑ | Ιδιότητες πράξεων

Για κάθε $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(1) (\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \lambda (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$$

$$(2) \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$$

(επιμεριστική)

$$(3) \text{ Αν } \vec{\alpha}, \vec{\beta} \text{ έχουν συντελεστές διεύθυνσης } \lambda_1, \lambda_2: \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \iff \lambda_1 \lambda_2 = -1.$$

Οι (1), (2) αποδεικνύονται άμεσα με την αναλυτική έκφραση. Για την (3): $x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \iff \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1$ (αφού $x_1, x_2 \neq 0$).

Χάρη στις ιδιότητες αυτές ισχύουν οι γνωστές «ταυτότητες»:

$$(\vec{\alpha} \pm \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \pm 2 \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 \quad (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2$$

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ | δεν ισχύει η «προσεταιριστική»

Η παράσταση $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \vec{\gamma}$ είναι διάνυσμα παράλληλο στο $\vec{\gamma}$, ενώ η $\vec{\alpha} (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$ είναι διάνυσμα παράλληλο στο $\vec{\alpha}$. Γενικά λοιπόν $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \vec{\gamma} \neq \vec{\alpha} (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$. Επίσης, η έκφραση $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$ δεν έχει νόημα, και δεν ορίζεται $\vec{\alpha}^3$.

Γωνία δύο διανυσμάτων

Από τον ορισμό, για μη μηδενικά $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$:

$$\cos \theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

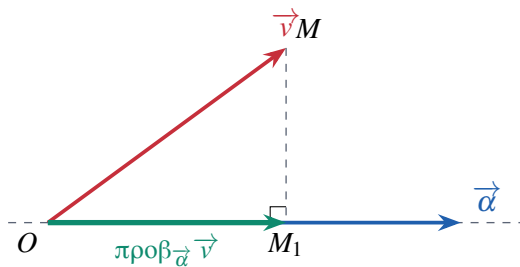
Επειδή $|\cos \theta| \leq 1$, προκύπτει και η σημαντική ανισότητα (Cauchy--Schwarz):

$$|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|,$$

με ισότητα αν και μόνο αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.

Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα

Έστω $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{v}$ διάνυσμα. Με κοινή αρχή O , $\vec{\alpha} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$. Από το M φέρνουμε κάθετη στην ευθεία OA , με ίχνος M_1 . Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM_1}$ λέγεται **προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$** και συμβολίζεται $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$.



$$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$$

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{v}}{|\vec{\alpha}|^2} \vec{\alpha}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ | Εσωτερικό γινόμενο και προβολή

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$$

Απόδειξη. $\vec{v} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}$ και $\overrightarrow{M_1M} \perp \vec{\alpha}$, άρα $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_1} + \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{M_1M} = \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_1} + 0$.

Επειδή $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v} \parallel \vec{\alpha}$, γράφεται $\lambda \vec{\alpha}$, και από το θεώρημα $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \lambda |\vec{\alpha}|^2$, οπότε $\lambda = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{v}}{|\vec{\alpha}|^2}$. Έτσι προκύπτει ο τύπος στο σχήμα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | ασκήσεις με μέτρα και γωνίες χωρίς συντεταγμένες

Όταν δίνονται μέτρα και γωνίες (όχι συντεταγμένες):

1. Για να βρεις ένα **μέτρο**, π.χ. $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$, υπολόγισε το **τετράγωνό** του ως εσωτερικό τετράγωνο: $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2$.
2. Αν ξέρεις ένα μέτρο αθροίσματος, π.χ. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$, ύψωσε στο τετράγωνο για να βρεις το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
3. Για **καθετότητα** δείξε ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι 0.

? ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ο συμβολισμός με την τελεία ($\vec{a} \cdot \vec{b}$, «dot product») καθιερώθηκε από τον Αμερικανό φυσικό J. W. Gibbs γύρω στο 1880. Σήμερα το εσωτερικό γινόμενο χρησιμοποιείται παντού: στη μηχανική μάθηση (ομοιότητα κειμένων και εικόνων ως «συννημίτονο γωνίας» διανυσμάτων), στα γραφικά υπολογιστών (φωτισμός επιφανειών) και στην επεξεργασία σήματος.

B Λυμένα παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5.1 Υπολογισμός από τον ορισμό

Αν $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$, να υπολογίσετε: α) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, β) $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b})$, γ) $|\vec{a} + 2\vec{b}|$.

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -6.$$

$$\beta) (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b}) = 2\vec{a}^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - 3\vec{b}^2 = 2 \cdot 16 + 5 \cdot (-6) - 3 \cdot 9 = 32 - 30 - 27 = -25.$$

$$\gamma) |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 16 - 24 + 36 = 28, \text{ άρα } |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5.2 Από το μέτρο αθροίσματος στη γωνία

Αν $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2}$, να βρείτε τη γωνία των $\vec{a}, \vec{b}$.

ΛΥΣΗ

Υψώνουμε στο τετράγωνο: $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$, δηλαδή $2 = 4 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2$, οπότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$. Τότε

$$\sin \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5.3 Γωνία με συντεταγμένες

Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ και $\vec{b} = (-\sqrt{3}, 1)$, καθώς και των $\vec{u} = (2, 1)$ και $\vec{v} = (-1, 3)$.

ΛΥΣΗ

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0, \text{ άρα } \vec{a} \perp \vec{b}: \theta = \frac{\pi}{2}.$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 + 3 = 1, |\vec{u}| = \sqrt{5}, |\vec{v}| = \sqrt{10}. \text{ Άρα } \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{10}. \text{ Η γωνία είναι οξεία, με } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{10} \approx 0,141 \text{ (δηλαδή } \theta \approx 81,9^\circ).$$

Δεν βγαίνει πάντα «γνωστή» γωνία! Τότε αρκεί να δώσεις το συννημίτονο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5.4 Καθετότητα με παράμετρο

Δίνονται $\vec{a} = (2, -1)$ και $\vec{b} = (1, 3)$. Να βρείτε τον λ ώστε $(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$.

ΛΥΣΗ

$\vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta} = (2 + \lambda, -1 + 3\lambda)$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (1, -4)$. Θέλουμε εσωτερικό γινόμενο μηδέν:

$$(2 + \lambda) \cdot 1 + (-1 + 3\lambda)(-4) = 0 \iff 2 + \lambda + 4 - 12\lambda = 0 \iff \lambda = \frac{6}{11}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5.5 Διάνυσμα κάθετο με δοσμένο μέτρο

Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{v}$ που είναι κάθετα στο $\vec{\alpha} = (3, 4)$ και έχουν μέτρο 10.

ΛΥΣΗ

Έστω $\vec{v} = (x, y)$. Από $\vec{v} \perp \vec{\alpha}$: $3x + 4y = 0$, άρα $x = -\frac{4}{3}y$. Από $|\vec{v}| = 10$: $x^2 + y^2 = 100 \iff \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 100 \iff y^2 = 36 \iff y = \pm 6$.

Για $y = 6$: $x = -8$. Για $y = -6$: $x = 8$. Άρα $\vec{v} = (-8, 6)$ ή $\vec{v} = (8, -6)$.

Χρήσιμο τέχνασμα: το $(-y, x)$ είναι πάντα κάθετο στο (x, y) και έχει το ίδιο μέτρο. Εδώ $(-4, 3) \perp (3, 4)$, και $\vec{v} = \pm 2(-4, 3)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5.6 Προβολή

Δίνονται $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{v} = (4, -1)$. Να βρείτε την προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$ και να γράψετε το $\vec{v}$ ως άθροισμα ενός διανύσματος παράλληλου και ενός κάθετου στο $\vec{\alpha}$.

ΛΥΣΗ

$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = 4 - 2 = 2$, $|\vec{\alpha}|^2 = 5$. Άρα

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v} = \frac{2}{5}(1, 2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Το κάθετο κομμάτι: $\vec{v} - \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v} = (4 - \frac{2}{5}, -1 - \frac{4}{5}) = (\frac{18}{5}, -\frac{9}{5})$. Έλεγχος: $(\frac{18}{5}, -\frac{9}{5}) \cdot (1, 2) = \frac{18}{5} - \frac{18}{5} = 0$ ✓. Άρα

$$\vec{v} = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{18}{5}, -\frac{9}{5}\right).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5.7 Κλασική απόδειξη: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \iff \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \iff \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία;

ΛΥΣΗ

Τα μέτρα είναι μη αρνητικά, άρα

$$\begin{aligned} |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| &\iff |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 \\ &\iff \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 \\ &\iff 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \iff \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}. \end{aligned}$$

Ερμηνεία: τα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου με πλευρές $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. Άρα: ένα παραλληλόγραμμο έχει ίσες διαγώνιες αν και μόνο αν είναι ορθογώνιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5.8 Ρόμβος: κάθετες διαγώνιοι

Να αποδείξετε με εσωτερικό γινόμενο ότι οι διαγώνιοι ενός ρόμβου τέμνονται κάθετα.

◀ ΛΥΣΗ

Έστω ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με $\vec{AB} = \vec{\alpha}$, $\vec{AD} = \vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$. Οι διαγώνιοι είναι $\vec{AG} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{DB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Τότε

$$\vec{AG} \cdot \vec{DB} = (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2 = 0.$$

Άρα $AG \perp BD$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5.9 Ορθογώνιο τρίγωνο με συντεταγμένες

Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(4,2)$, $\Gamma(0,4)$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του.

◀ ΛΥΣΗ

$\vec{AB} = (3,1)$, $\vec{AG} = (-1,3)$. Είναι $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = -3 + 3 = 0$, άρα $\hat{A} = 90^\circ$.

$(AB) = \sqrt{10}$, $(AG) = \sqrt{10}$, οπότε $E = \frac{1}{2}(AB)(AG) = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ τ.μ. (Το τρίγωνο είναι και ισοσκελές.)

Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Το εσωτερικό γινόμενο είναι από τα πιο «πυκνά» θέματα του κεφαλαίου. Στο mathgreece.com θα βρεις το βιντεομάθημα «Εσωτερικό γινόμενο: 10 τύποι ασκήσεων» και διαγώνισμα για όλο το 1ο κεφάλαιο, με αναλυτικές λύσεις.

Γ

Προσοχή και συχνά λάθη

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | το αποτέλεσμα είναι αριθμός

✗ **Λάθος:** $(1,2) \cdot (3,4) = (3,8)$.

✓ **Σωστό:** Το εσωτερικό γινόμενο είναι **αριθμός**: $(1,2) \cdot (3,4) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$. Χωρίς βελάκι στο αποτέλεσμα!

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | «διαγραφή» διανύσματος

✗ **Λάθος:** $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

✓ **Σωστό:** Η ισότητα σημαίνει μόνο $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) = 0$, δηλαδή $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$. Π.χ. $(1,0) \cdot (0,1) = (1,0) \cdot (0,5) = 0$, ενώ $(0,1) \neq (0,5)$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | μέτρο και τετράγωνο

✗ **Λάθος:** $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2$.

✓ **Σωστό:** $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$. Ο «διπλός όρος» λείπει μόνο όταν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ (Πυθαγόρειο!).

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | γράψιμο του $\vec{a}^2$

✗ **Λάθος:** $(\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{\beta}^2$.

✓ **Σωστό:** $(\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{\beta}|^2 \cos^2 \theta \leq \vec{a}^2 \vec{\beta}^2$. Η ισότητα ισχύει μόνο για παράλληλα διανύσματα.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ

- Η συνθήκη $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ προϋποθέτει ότι και τα δύο διανύσματα έχουν συντελεστή διεύθυνσης. Για ένα οριζόντιο και ένα κατακόρυφο διάνυσμα είναι κάθετα, αλλά δεν υπάρχει λ_2 . Το κριτήριο $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$ δουλεύει **πάντα**.
- Η προβολή $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$ είναι **διάνυσμα** (παράλληλο στο $\vec{a}$), όχι αριθμός.
- Όταν από συνθ βρίσκεις τη γωνία, θυμήσου ότι $\theta \in [0, \pi]$: το $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ δίνει $\theta = \frac{2\pi}{3}$ και μόνο αυτό.

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 1.5 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Ορισμός

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| |\vec{\beta}| \cos \theta \text{ (αριθμός)}$$

Αναλυτικά

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Καθετότητα

$$\vec{a} \perp \vec{\beta} \iff \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \text{ (} \iff \lambda_1 \lambda_2 = -1 \text{)}$$

Τετράγωνο

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, (\vec{a} \pm \vec{\beta})^2 = \vec{a}^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2$$

Γωνία

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Ανισότητα

$$|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| |\vec{\beta}|$$

Προβολή

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}, \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$



Ασκήσεις για λύση

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

- Αν $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 5$ και $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$, να υπολογίσετε: α) $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$, β) $(\vec{a} - \vec{\beta})^2$, γ) $(3\vec{a} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{\beta})$, δ) $|2\vec{a} + \vec{\beta}|$.
- Δίνονται $\vec{a} = (3, -2)$, $\vec{\beta} = (4, 6)$, $\vec{\gamma} = (-1, 5)$. Να υπολογίσετε τα $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$, $\vec{a} \cdot \vec{\gamma}$, $(\vec{a} + \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ και να εξετάσετε ποια ζεύγη είναι κάθετα.
- Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων: α) $(1, 1)$ και $(0, 3)$, β) $(1, -\sqrt{3})$ και $(-2, 2\sqrt{3})$, γ) $(2, 1)$ και $(1, 3)$.

4. • Να βρείτε τον κ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\kappa, 2)$ και $\vec{\beta} = (\kappa - 1, -3)$ να είναι κάθετα.
5. • Να βρείτε τα μοναδιαία διανύσματα που είναι κάθετα στο $\vec{\alpha} = (5, -12)$.
6. • Αν $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, να βρείτε τα $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ και $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμπάθυνσης

7. •• Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{7}$, να βρείτε: α) το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, β) τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$, γ) τον λ ώστε $(\lambda \vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp \vec{\beta}$.
8. •• Να βρείτε την προβολή του $\vec{v} = (3, 4)$ στο $\vec{\alpha} = (2, -1)$, καθώς και την προβολή του $\vec{\alpha}$ στο $\vec{v}$.
9. •• Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $B(6, 3)$, $\Gamma(1, 4)$. Να βρείτε: α) το είδος της γωνίας $\hat{A}$ (οξεία, ορθή ή αμβλεία), β) το συνημίτονο της γωνίας $\hat{B}$, γ) το σημείο Δ του άξονα $x'x$ για το οποίο $\widehat{ADB} = 90^\circ$.
10. •• Τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία με $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$. Να αποδείξετε ότι $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp \vec{\alpha}$ και να βρείτε τη γωνία των $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.
11. ••• Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 5$, $|\vec{\gamma}| = 7$. Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$ και τη γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
12. ••• Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $(3x + 4y)^2 \leq 25(x^2 + y^2)$. Πότε ισχύει η ισότητα; (Υπόδειξη: θεωρήστε τα διανύσματα $(3, 4)$ και (x, y) .)



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Τελείωσε το 1ο κεφάλαιο! Πριν προχωρήσεις στην ευθεία, γράψε το **επαναληπτικό διαγώνισμα του Κεφαλαίου 1** στο mathgreece.com — με χρονόμετρο, βαθμολόγηση και βιντεολύσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

2

Η Ευθεία στο Επίπεδο

Η απλούστερη γραμμή, περιγραφόμενη με μία εξίσωση πρώτου βαθμού

2.1

Εξίσωση ευθείας

2.2

Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

2.3

Εμβαδόν τριγώνου – απόσταση σημείου από ευθεία



2.1 Εξίσωση ευθείας

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

- τι σημαίνει «εξίσωση μιας γραμμής»,
- τη γωνία μιας ευθείας με τον άξονα x' και τον συντελεστή διεύθυνσης,
- τις συνθήκες παραλληλίας ($\lambda_1 = \lambda_2$) και καθετότητας ($\lambda_1 \lambda_2 = -1$),
- να γράφεις την εξίσωση ευθείας που περνά από σημείο με γνωστό λ ή από δύο σημεία,
- τις ειδικές μορφές: $y = \lambda x + \beta$, οριζόντιες, κατακόρυφες, ευθείες από την αρχή.

A Θεωρία

Τι είναι «εξίσωση γραμμής»

Μια εξίσωση με δύο αγνώστους, π.χ. $y = 2x + 1$, έχει άπειρες λύσεις (x, y) : $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(-2, -3)$, ... Αν παραστήσουμε κάθε λύση με ένα σημείο του επιπέδου, παίρνουμε μια γραμμή C .

ΟΡΙΣΜΟΣ | Εξίσωση γραμμής

Μια εξίσωση με αγνώστους x, y λέγεται **εξίσωση της γραμμής C** όταν:

- οι συντεταγμένες *κάθε* σημείου της C επαληθεύουν την εξίσωση, και
- *κάθε* λύση (x, y) της εξίσωσης είναι συντεταγμένες σημείου της C .

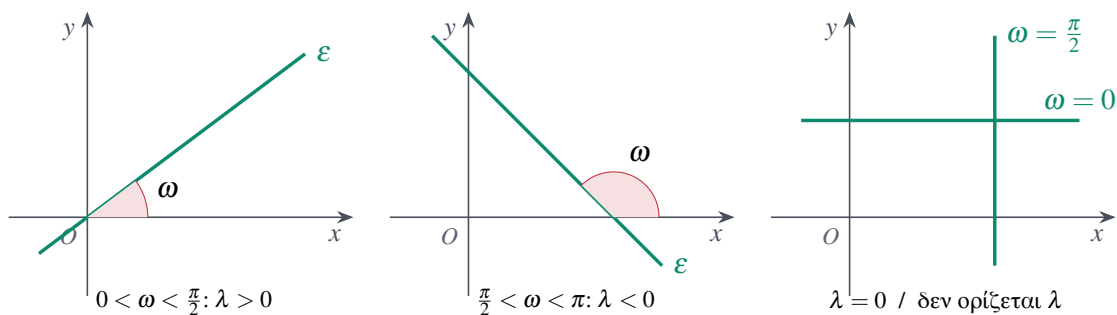
Πρακτικά: **το σημείο $M(x_0, y_0)$ ανήκει στη γραμμή αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της.** Αυτή η απλή πρόταση θα χρησιμοποιείται συνεχώς.

Γωνία ευθείας με τον άξονα x' – συντελεστής διεύθυνσης

ΟΡΙΣΜΟΣ | Γωνία ευθείας

Αν μια ευθεία ε τέμνει τον άξονα x' στο σημείο A , **γωνία της ε με τον x'** λέγεται η γωνία ω που διαγράφει ο ημιάξονας Ax όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη θετική φορά (αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού) μέχρι να συμπίψει με την ε . Αν $\varepsilon \parallel x'$, ορίζουμε $\omega = 0$. Πάντα ισχύει

$$0 \leq \omega < \pi.$$

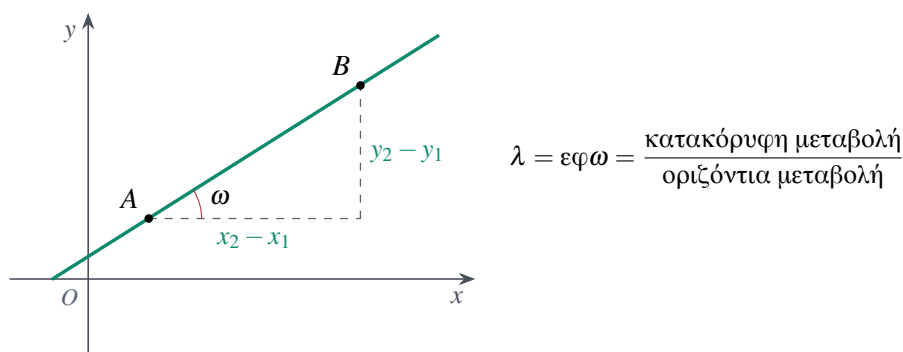


ΟΡΙΣΜΟΣ | Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Αν $\omega \neq \frac{\pi}{2}$, ο αριθμός $\lambda = \varepsilon\varphi\omega$ λέγεται **συντελεστής διεύθυνσης** (ή κλίση) της ευθείας. Αν $\omega = \frac{\pi}{2}$ (κατακόρυφη ευθεία), η ευθεία **δεν έχει** συντελεστή διεύθυνσης.

Αν ένα διάνυσμα $\vec{\delta} = (\delta_1, \delta_2)$ είναι παράλληλο στην ευθεία, τότε η ευθεία και το διάνυσμα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{\delta_2}{\delta_1}$. Ειδικότερα, αν η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, το $\vec{AB}$ είναι παράλληλο σε αυτήν, οπότε:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \neq x_2)$$



Παράλληλες και κάθετες ευθείες

Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ευθείες με συντελεστές λ_1, λ_2 και $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2$ παράλληλα σε αυτές διανύσματα. Οι ευθείες είναι παράλληλες ακριβώς όταν τα $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2$ είναι παράλληλα, και κάθετες όταν τα $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2$ είναι κάθετα. Από το Κεφάλαιο 1:

ΘΕΩΡΗΜΑ | Παραλληλία – καθετότητα ευθειών

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \iff \lambda_1 = \lambda_2$$

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \iff \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

(Στην πρώτη, «παράλληλες» περιλαμβάνει και την περίπτωση να ταυτίζονται.)

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ

Οι συνθήκες αυτές προϋποθέτουν ότι **υπάρχουν** οι λ_1, λ_2 . Μια κατακόρυφη ευθεία είναι παράλληλη μόνο με κατακόρυφες και κάθετη σε κάθε οριζόντια ευθεία, χωρίς να ορίζεται κανένα

γινόμενο $\lambda_1 \lambda_2$.

Εξίσωση ευθείας που διέρχεται από σημείο και έχει γνωστό λ

Έστω η ευθεία ε που διέρχεται από το $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ . Ένα σημείο $M(x, y) \neq A$ ανήκει στην ε αν και μόνο αν το $\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0)$ έχει τον ίδιο συντελεστή λ , δηλαδή $\frac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda$. Άρα:

ΘΕΩΡΗΜΑ | Σημείο και συντελεστής

Η ευθεία που διέρχεται από το $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ έχει εξίσωση

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ | Κατακόρυφη ευθεία

Η ευθεία που διέρχεται από το $A(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στον $x'x$ έχει εξίσωση $x = x_0$.

Εξίσωση ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία

Αν $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$, τότε $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ και η ευθεία AB έχει εξίσωση

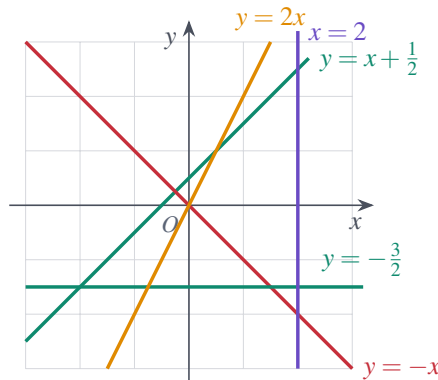
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Αν $x_1 = x_2$, η ευθεία AB είναι κατακόρυφη με εξίσωση $x = x_1$.

Η μορφή $y = \lambda x + \beta$ και ειδικές περιπτώσεις

Η εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ γράφεται $y = \lambda x + (y_0 - \lambda x_0)$, δηλαδή στη μορφή

$y = \lambda x + \beta$, λ : συντελεστής διεύθυνσης, β : η τεταγμένη του σημείου τομής με τον $y'y$



- $y = \beta$: οριζόντια ευθεία ($\lambda = 0$). Ο άξονας $x'x$ είναι η $y = 0$.
- $x = x_0$: κατακόρυφη ευθεία. Ο άξονας $y'y$ είναι η $x = 0$.
- $y = \lambda x$: ευθεία που διέρχεται από την αρχή O .

► $y = x$ και $y = -x$: οι **διχοτόμοι** των γωνιών των αξόνων ($\omega = 45^\circ$ και $\omega = 135^\circ$).

🔍 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | εύρεση εξίσωσης ευθείας

Για να γράψεις την εξίσωση μιας ευθείας χρειάζεσαι **ένα σημείο της** και **τον συντελεστή διεύθυνσης**:

1. Βρες ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ της ευθείας (δίνεται, ή είναι μέσο, ή σημείο τομής).
2. Βρες το λ : από δύο σημεία, από γωνία ($\lambda = \varphi\omega$), από παράλληλη ($\lambda = \lambda'$) ή από κάθετη ($\lambda = -\frac{1}{\lambda'}$).
3. Γράψε $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$. **Μην ξεχάσεις** να εξετάσεις αν η ευθεία μπορεί να είναι κατακόρυφη ($x = x_0$)!

? ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Στην καθημερινή ζωή ο συντελεστής διεύθυνσης λέγεται «κλίση». Μια πινακίδα «Κλίση 10%» σε ορεινό δρόμο σημαίνει $\lambda = 0,1$: για κάθε 100 μέτρα οριζόντιας απόστασης ανεβαίνεις 10 μέτρα — δηλαδή $\omega \approx 5,7^\circ$. Ο πιο απότομος δρόμος του κόσμου (Baldwin Street, Νέα Ζηλανδία) έχει κλίση περίπου 35%!

B Λυμένα παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.1 Συντελεστής και γωνία

Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης και τη γωνία με τον x' των ευθειών που διέρχονται από τα σημεία: α) $A(1, 2), B(4, 5)$ β) $\Gamma(0, 1), \Delta(\sqrt{3}, 0)$ γ) $K(2, 1), \Lambda(2, 7)$.

◀ ΛΥΣΗ

α) $\lambda = \frac{5-2}{4-1} = 1 = \varphi\omega$, άρα $\omega = \frac{\pi}{4}$.

β) $\lambda = \frac{0-1}{\sqrt{3}-0} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Αφού $\lambda < 0$, η γωνία είναι αμβλεία: $\varphi\omega = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \omega = \frac{5\pi}{6}$ (150°).

γ) Τα K, Λ έχουν την ίδια τετμημένη, άρα η ευθεία είναι κατακόρυφη ($x = 2$): $\omega = \frac{\pi}{2}$ και **δεν ορίζεται** λ .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.2 Σημείο και γωνία

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $A(2, -1)$ και: α) έχει συντελεστή διεύθυνσης 3, β) σχηματίζει με τον x' γωνία 135° , γ) είναι παράλληλη στον $y'y$.

◀ ΛΥΣΗ

α) $y - (-1) = 3(x - 2) \iff y = 3x - 7$.

β) $\lambda = \varphi 135^\circ = -1$: $y + 1 = -(x - 2) \iff y = -x + 1$.

γ) Κατακόρυφη από το A : $x = 2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.3 Ευθεία από δύο σημεία

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB με $A(-1, 4)$ και $B(3, -4)$, και να εξετάσετε αν το σημείο $\Gamma(5, -8)$ ανήκει σε αυτήν.

◀ ΛΥΣΗ

$$\lambda = \frac{-4-4}{3-(-1)} = \frac{-8}{4} = -2. \text{ Άρα } y-4 = -2(x+1) \iff y = -2x+2.$$

Για $x=5$: $-2 \cdot 5 + 2 = -8$, που είναι η τεταγμένη του Γ . Άρα $\Gamma \in AB$ (τα A, B, Γ είναι συνευθειακά).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.4 Παράλληλη και κάθετη από σημείο

Δίνεται η ευθεία ε : $y = -2x + 5$ και το σημείο $P(3, 2)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το P και είναι: α) παράλληλη στην ε , β) κάθετη στην ε . Να βρείτε επίσης την προβολή του P πάνω στην ε .

ΛΥΣΗ

Η ε έχει $\lambda = -2$.

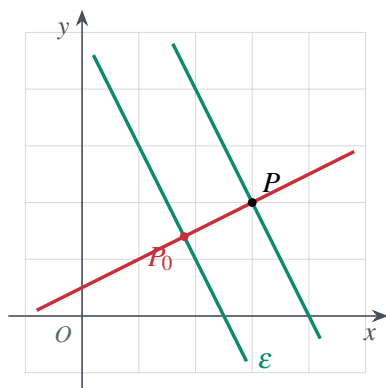
α) $\lambda_1 = -2$: $y - 2 = -2(x - 3) \iff y = -2x + 8$.

β) $\lambda_2 \cdot (-2) = -1 \iff \lambda_2 = \frac{1}{2}$: $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 3) \iff y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Η προβολή του P είναι το σημείο τομής της ε με την κάθετη (β):

$$-2x + 5 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \iff -4x + 10 = x + 1 \iff x = \frac{9}{5}, \quad y = -2 \cdot \frac{9}{5} + 5 = \frac{7}{5}.$$

Άρα η προβολή είναι $P_0(\frac{9}{5}, \frac{7}{5})$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.5 Ευθείες στο τρίγωνο: ύψος, διάμεσος, μεσοκάθετος

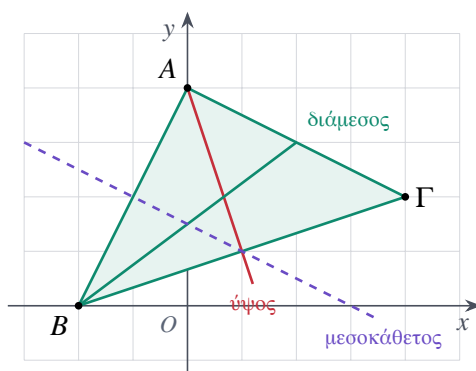
Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(0, 4)$, $B(-2, 0)$, $\Gamma(4, 2)$. Να βρείτε τις εξισώσεις: α) του ύψους από το A , β) της διαμέσου από το B , γ) της μεσοκαθέτου της AB .

ΛΥΣΗ

α) $\lambda_{B\Gamma} = \frac{2-0}{4+2} = \frac{1}{3}$. Το ύψος $AD \perp B\Gamma$, άρα $\lambda = -3$: $y - 4 = -3x \iff y = -3x + 4$.

β) Μέσο της AG : $M(2, 3)$. $\lambda_{BM} = \frac{3-0}{2+2} = \frac{3}{4}$: $y = \frac{3}{4}(x + 2) \iff y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$.

γ) Μέσο της AB : $K(-1, 2)$. $\lambda_{AB} = \frac{4-0}{0+2} = 2$, άρα η μεσοκάθετος έχει $\lambda = -\frac{1}{2}$: $y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 1) \iff y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.6 Σημείο τομής ευθειών

Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1 : y = 2x - 1$ και $\varepsilon_2 : y = -x + 5$ και την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από αυτό και από την αρχή των αξόνων.

◀ΛΥΣΗ

Λύνουμε το σύστημα: $2x - 1 = -x + 5 \iff x = 2$, οπότε $y = 3$. Σημείο τομής $K(2, 3)$. Η ευθεία OK έχει $\lambda = \frac{3}{2}$ και διέρχεται από το O : $y = \frac{3}{2}x$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.7 Συμμετρικό σημείου ως προς ευθεία

Να βρείτε το συμμετρικό A' του σημείου $A(3, 1)$ ως προς την ευθεία $\varepsilon : y = -x + 2$.

◀ΛΥΣΗ

Το A' βρίσκεται στην κάθετη από το A προς την ε , και το μέσο M του AA' ανήκει στην ε .

Βήμα 1. Κάθετη από A : $\lambda = 1$ (αφού $1 \cdot (-1) = -1$), οπότε $y - 1 = x - 3 \iff y = x - 2$.

Βήμα 2. Τομή με την ε : $x - 2 = -x + 2 \iff x = 2, y = 0$. Άρα $M(2, 0)$.

Βήμα 3. M μέσο του AA' : $A'(2 \cdot 2 - 3, 2 \cdot 0 - 1) = A'(1, -1)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.8 Ευθεία που σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες

Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το $A(1, 3)$ και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

◀ΛΥΣΗ

Το τρίγωνο με τους άξονες είναι ορθογώνιο στο O : είναι ισοσκελές όταν η ευθεία σχηματίζει γωνία 45° ή 135° με τον x' , δηλαδή $\lambda = 1$ ή $\lambda = -1$ (και η ευθεία δεν διέρχεται από το O).

- $\lambda = 1$: $y - 3 = x - 1 \iff y = x + 2$ (τέμνει τους άξονες στα $(-2, 0), (0, 2)$).
- $\lambda = -1$: $y - 3 = -(x - 1) \iff y = -x + 4$ (τέμνει τους άξονες στα $(4, 0), (0, 4)$).



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις το εργαλείο «Σχεδίασε την ευθεία»: γράφεις μια εξίσωση και τη βλέπεις αμέσως στο επίπεδο, μαζί με τη γωνία και τον συντελεστή διεύθυνσης. Υπάρχουν επίσης βιντεολύσεις για όλους τους τύπους ασκήσεων του μαθήματος.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | η «ξεχασμένη» κατακόρυφη

✗ **Λάθος:** «Οι ευθείες που διέρχονται από το $A(2, 1)$ είναι όλες της μορφής $y - 1 = \lambda(x - 2)$.»

✓ **Σωστό:** Λείπει η κατακόρυφη $x = 2$, που δεν έχει λ . Σε προβλήματα του τύπου «βρείτε τις ευθείες από το A που...» **πάντα** εξετάζουμε χωριστά και την $x = x_0$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | αντιστροφή στον τύπο του λ

✗ **Λάθος:** $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ ή $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$.

✓ **Σωστό:** $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$: «διαφορά των y προς διαφορά των x », **με την ίδια σειρά** πάνω και κάτω.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | κάθετος συντελεστής

✗ **Λάθος:** Αν $\lambda = \frac{2}{3}$, ο κάθετος συντελεστής είναι $-\frac{2}{3}$ ή $\frac{3}{2}$.

✓ **Σωστό:** Είναι ο **αντίστροφος και αντίθετος**: $-\frac{3}{2}$. Έλεγχος: $\frac{2}{3} \cdot (-\frac{3}{2}) = -1$. ✓

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ

- Το β στην $y = \lambda x + \beta$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής με τον $y'y$, **όχι** με τον $x'x$. Το σημείο τομής με τον $x'x$ βρίσκεται θέτοντας $y = 0$.
- Η γωνία ω παίρνει τιμές στο $[0, \pi)$. Αν $\epsilon\phi\omega = -1$, τότε $\omega = \frac{3\pi}{4}$, **όχι** $-\frac{\pi}{4}$.
- Για να ελέγξεις αν ένα σημείο ανήκει σε ευθεία, **αντικατέστησε** τις συντεταγμένες του στην εξίσωση.

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 2.1 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Συντ. διεύθυνσης

$$\lambda = \epsilon\phi\omega, \quad 0 \leq \omega < \pi, \quad \omega \neq \frac{\pi}{2}$$

Από δύο σημεία

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Παράλληλες / κάθετες

$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad / \quad \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

Σημείο + λ

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

Κατακόρυφη

$$x = x_0 \quad (\text{χωρίς } \lambda)$$

Ειδικές

$$y = \lambda x + \beta, \quad y = \beta, \quad y = \lambda x, \quad y = \pm x$$

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

1. • Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης και τη γωνία με τον x' της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία: α) $(1, 1)$ και $(3, 1 + 2\sqrt{3})$, β) $(-2, 5)$ και $(1, 2)$, γ) $(-1, 3)$ και $(4, 3)$.
2. • Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που: α) διέρχεται από το $(-1, 2)$ και έχει $\lambda = -\frac{1}{2}$, β) διέρχεται από το $(0, -3)$ και σχηματίζει γωνία 60° με τον x' , γ) διέρχεται από τα $(2, 3)$ και $(5, -3)$, δ) διέρχεται από τα $(4, -1)$ και $(4, 6)$.
3. • Να βρείτε την ευθεία που διέρχεται από το $A(-2, 1)$ και είναι: α) παράλληλη, β) κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα $B(1, 4)$ και $\Gamma(3, -2)$.
4. • Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών $y = 3x - 4$ και $y = -2x + 6$ και να εξετάσετε αν διέρχεται από αυτό η ευθεία $y = \frac{1}{2}x + 1$.
5. • Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $y = -\frac{3}{4}x + 3$ με τους άξονες και το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει με αυτούς.
6. • Για ποια τιμή του μ οι ευθείες $y = (\mu - 1)x + 2$ και $y = (3 - \mu)x - 1$ είναι α) παράλληλες, β) κάθετες;

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμβάθυνσης

7. •• Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(1, 5)$, $B(-3, -1)$, $\Gamma(5, 1)$. Να βρείτε: α) την εξίσωση της διαμέσου AM , β) την εξίσωση του ύψους BD , γ) το σημείο τομής των υψών από A και B (ορθόκεντρο).
8. •• Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(4, -2)$ ως προς την ευθεία $y = 2x$.
9. •• Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος με άκρα $A(-1, 3)$ και $B(5, 1)$, και το σημείο της που βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$.
10. •• Τα σημεία $A(1, 1)$, $B(5, 3)$ είναι διαδοχικές κορυφές τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $B\Gamma$ και $A\Delta$, και τις κορυφές Γ , Δ (δύο λύσεις).
11. ••• Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το $P(2, 3)$ και τέμνουν τους θετικούς ημιάξονες Ox , Oy σε σημεία A , B ώστε το εμβαδόν του τριγώνου OAB να είναι 12.
12. ••• Μια ακτίνα φωτός ξεκινά από το σημείο $A(1, 4)$, ανακλάται πάνω στον άξονα x' και διέρχεται από το σημείο $B(5, 2)$. Να βρείτε το σημείο ανάκλασης. (Υπόδειξη: θεωρήστε το συμμετρικό του A ως προς τον x' .)



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Χρειάζεσαι κι άλλη εξάσκηση; Στο mathgreece.com υπάρχει σειρά «30 ασκήσεις στην εξίσωση ευθείας» με διαβαθμισμένη δυσκολία και βιντεολύσεις.

2.2

Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

- ότι κάθε ευθεία έχει εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ και αντίστροφα,
- πώς βρίσκουμε από τη γενική εξίσωση διάνυσμα παράλληλο και κάθετο στην ευθεία,
- πώς γράφουμε γρήγορα παράλληλες και κάθετες ευθείες,
- τη σχετική θέση δύο ευθειών και τη γωνία τους,
- πώς δουλεύουμε με εξισώσεις ευθειών που περιέχουν παράμετρο.

A Θεωρία

Το βασικό θεώρημα

Στο προηγούμενο μάθημα είδαμε δύο «τύπους» εξισώσεων ευθείας: $y = \lambda x + \beta$ (μη κατακόρυφη) και $x = x_0$ (κατακόρυφη). Και οι δύο είναι εξισώσεις **πρώτου βαθμού** ως προς x, y . Αυτό δεν είναι σύμπτωση:

ΘΕΩΡΗΜΑ | Γενική εξίσωση ευθείας

Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής

$$Ax + By + \Gamma = 0, \quad \text{με } A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0$$

και αντίστροφα, κάθε τέτοια εξίσωση παριστάνει ευθεία.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Αν η ευθεία δεν είναι κατακόρυφη, έχει εξίσωση $y = \lambda x + \beta$, δηλαδή $\lambda x + (-1)y + \beta = 0$, που είναι της μορφής αυτής με $B = -1 \neq 0$. Αν είναι κατακόρυφη, $x = x_0$, δηλαδή $1 \cdot x + 0 \cdot y - x_0 = 0$, με $A = 1 \neq 0$.

($\Leftarrow$) Αν $B \neq 0$, η εξίσωση γράφεται $y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$, που είναι ευθεία με $\lambda = -\frac{A}{B}$. Αν $B = 0$, τότε $A \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται $x = -\frac{\Gamma}{A}$, κατακόρυφη ευθεία.

Παράλληλο και κάθετο διάνυσμα

ΘΕΩΡΗΜΑ | Διανύσματα που «συνοδοεύουν» την ευθεία

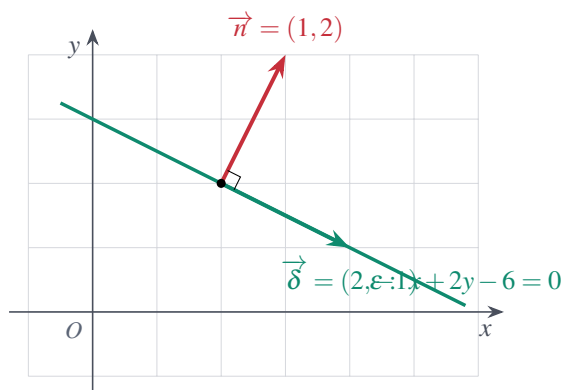
Η ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ είναι:

- **παράλληλη** στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$,
- **κάθετη** στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$.

Αν $B \neq 0$, ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι $\lambda = -\frac{A}{B}$.

Απόδειξη. Αν $B \neq 0$, η ευθεία έχει $\lambda = -\frac{A}{B}$, όσο και το $\vec{\delta} = (B, -A)$, οπότε είναι παράλληλα. Αν $B = 0$,

η ευθεία είναι κατακόρυφη και το $\vec{\delta} = (0, -A)$ επίσης. Τέλος, $\vec{\delta} \cdot \vec{n} = BA - AB = 0$, άρα $\vec{n} \perp \vec{\delta}$, οπότε το $\vec{n}$ είναι κάθετο στην ευθεία.



Πρακτικός κανόνας: οι συντελεστές (A, B) των x, y δίνουν διάνυσμα **κάθετο** στην ευθεία.

Ειδικές περιπτώσεις

Συνθήκη	Η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$
$A = 0$ ($B \neq 0$)	οριζόντια: $y = -\frac{\Gamma}{B}$
$B = 0$ ($A \neq 0$)	κατακόρυφη: $x = -\frac{\Gamma}{A}$
$\Gamma = 0$	διέρχεται από την αρχή $O(0, 0)$
$A = 0, \Gamma = 0$	ο άξονας $x'x$ ($y = 0$)
$B = 0, \Gamma = 0$	ο άξονας $y'y$ ($x = 0$)

Παράλληλες και κάθετες ευθείες «με ένα βλέμμα»

Από το θεώρημα προκύπτει ένας πολύ γρήγορος τρόπος:

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | παράλληλη ή κάθετη σε δοσμένη ευθεία

Έστω $\varepsilon : Ax + By + \Gamma = 0$ και σημείο $P(x_0, y_0)$.

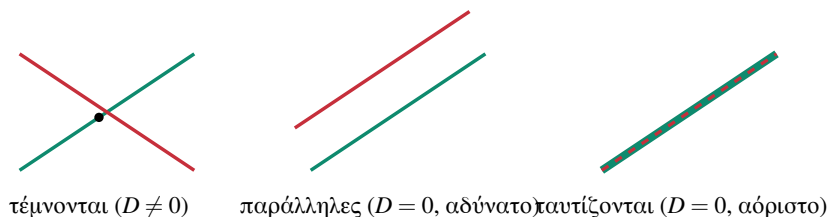
- Κάθε **παράλληλη** στην ε έχει εξίσωση $Ax + By + \Gamma' = 0$ (ίδια A, B , άλλο σταθερό όρο).
- Κάθε **κάθετη** στην ε έχει εξίσωση $Bx - Ay + \Gamma' = 0$ (εναλλάσσουμε τους συντελεστές και αλλάζουμε ένα πρόσημο).
- Τον Γ' τον βρίσκουμε απαιτώντας να επαληθεύει το P .

Σχετική θέση δύο ευθειών

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $\varepsilon_2 : A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$. Τα κοινά τους σημεία είναι οι λύσεις του συστήματος των δύο εξισώσεων. Με

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1 :$$

- $D \neq 0$: το σύστημα έχει μοναδική λύση $\Rightarrow$ οι ευθείες **τέμνονται** σε ένα σημείο.
- $D = 0$: τα κάθετα διανύσματα (A_1, B_1) , (A_2, B_2) είναι παράλληλα, άρα οι ευθείες είναι **παράλληλες**: είτε **ταυτίζονται** (άπειρες λύσεις) είτε δεν έχουν κοινό σημείο (αδύνατο σύστημα).



Γωνία δύο ευθειών

Η (οξεία ή ορθή) γωνία φ δύο τεμνόμενων ευθειών είναι η γωνία των παράλληλων διανυσμάτων τους $\vec{\delta}_1$, $\vec{\delta}_2$, ή η παραπληρωματική της — διαλέγουμε εκείνη που δεν ξεπερνά τις 90° :

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2|}{|\vec{\delta}_1| |\vec{\delta}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

(Χρησιμοποιήσαμε ότι $|\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2| = |\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|$, αφού $\vec{\delta}_i = (B_i, -A_i)$.) Ειδικά: $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \iff A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Ευθείες με παράμετρο – «δέσμη» ευθειών

Συχνά δίνεται μια εξίσωση που περιέχει παράμετρο, π.χ. $(\mu - 1)x + (\mu + 1)y - 2\mu = 0$. Για κάθε τιμή του μ παίρνουμε (αν δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα οι συντελεστές των x, y) μια ευθεία. Ένα κλασικό ερώτημα είναι να δείξουμε ότι **όλες διέρχονται από σταθερό σημείο**.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | σταθερό σημείο οικογένειας ευθειών

1. Γράψε την εξίσωση στη μορφή $\mu \cdot (\dots) + (\dots) = 0$, δηλαδή «συγκέντρωσε» τους όρους με μ .
2. Το σημείο (x, y) ανήκει σε όλες τις ευθείες αν η εξίσωση ισχύει για κάθε μ , δηλαδή αν μηδενίζονται και οι δύο παρενθέσεις.
3. Λύσε το σύστημα των δύο παρενθέσεων.

? ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Η γενική εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ χρησιμοποιείται στον γραμμικό προγραμματισμό: οι περιορισμοί ενός προβλήματος (π.χ. «διαθέσιμες ώρες εργασίας», «πρώτες ύλες») είναι ημιεπίπεδα της μορφής $Ax + By \leq \Gamma$, και η βέλτιστη λύση βρίσκεται πάντα σε μια «γωνία» της περιοχής που σχηματίζουν οι ευθείες. Έτσι οργανώνονται δρομολόγια, παραγωγές και επενδύσεις σε όλο τον κόσμο.

B

Λυμένα παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.1 — Ανάγνωση της γενικής εξίσωσης

Για την ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y + 12 = 0$ να βρείτε: α) τον συντελεστή διεύθυνσης, β) ένα διάνυσμα παράλληλο και ένα κάθετο σε αυτή, γ) τα σημεία τομής με τους άξονες.

ΛΥΣΗ

α) $\lambda = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$. β) $\vec{\delta} = (B, -A) = (-4, -3)$ (ή το $(4, 3)$), $\vec{\eta} = (3, -4)$. γ) Για $x = 0$: $-4y + 12 = 0$, $y = 3$: σημείο $(0, 3)$. Για $y = 0$: $3x + 12 = 0$, $x = -4$: σημείο $(-4, 0)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.2 — Γρήγορη παράλληλη και κάθετη

Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το $P(2, -1)$ και είναι α) παράλληλη, β) κάθετη στην $\varepsilon: 2x + 3y - 5 = 0$.

ΛΥΣΗ

α) Παράλληλη: $2x + 3y + \Gamma' = 0$. Από P : $4 - 3 + \Gamma' = 0 \Rightarrow \Gamma' = -1$. Άρα $2x + 3y - 1 = 0$.

β) Κάθετη: $3x - 2y + \Gamma' = 0$. Από P : $6 + 2 + \Gamma' = 0 \Rightarrow \Gamma' = -8$. Άρα $3x - 2y - 8 = 0$.

Έλεγχος καθετότητας: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (2, 3) \cdot (3, -2) = 6 - 6 = 0$. ✓

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.3 — Σχετική θέση ευθειών

Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών $\varepsilon_1: 2x - y - 3 = 0$ με καθεμιά από τις

$$\varepsilon_2: 4x - 2y - 6 = 0, \quad \varepsilon_3: 4x - 2y + 1 = 0, \quad \varepsilon_4: x + y - 3 = 0.$$

ΛΥΣΗ

- $\varepsilon_1, \varepsilon_2$: η ε_2 είναι η ε_1 πολλαπλασιασμένη επί 2. **Ταυτίζονται.**
- $\varepsilon_1, \varepsilon_3$: $D = 2 \cdot (-2) - 4 \cdot (-1) = 0$, αλλά οι σταθεροί όροι δεν είναι ανάλογοι ($-3 \cdot 2 = -6 \neq 1$). **Παράλληλες**, χωρίς κοινό σημείο.
- $\varepsilon_1, \varepsilon_4$: $D = 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 3 \neq 0$. **Τέμνονται.** Προσθέτοντας κατά μέλη: $3x - 6 = 0$, $x = 2$, $y = 1$. Σημείο τομής $(2, 1)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.4 — Γωνία δύο ευθειών

Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών $\varepsilon_1: 3x - y + 2 = 0$ και $\varepsilon_2: x - 2y + 1 = 0$.

ΛΥΣΗ

$$\vec{n}_1 = (3, -1), \quad \vec{n}_2 = (1, -2). \quad \sin \varphi = \frac{|3 \cdot 1 + (-1)(-2)|}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{άρα } \varphi = 45^\circ.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.5 — Οικογένεια ευθειών – σταθερό σημείο

Δίνεται η εξίσωση $(\mu - 1)x + (\mu + 1)y - 2\mu = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

- α') Να αποδείξετε ότι για κάθε μ παριστάνει ευθεία.
- β') Να αποδείξετε ότι όλες αυτές οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο.
- γ') Ποια από αυτές είναι κάθετη στην $x + 2y = 0$;

ΛΥΣΗ

α) Οι συντελεστές $\mu - 1$ και $\mu + 1$ δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα (θα έπρεπε $\mu = 1$ και $\mu = -1$). Άρα πάντα είναι ευθεία.

β) Γράφουμε: $\mu(x + y - 2) + (-x + y) = 0$. Αν $x + y - 2 = 0$ και $-x + y = 0$, η εξίσωση ισχύει για κάθε μ . Το σύστημα δίνει $x = y = 1$. Άρα όλες διέρχονται από το $K(1, 1)$.

γ) $\vec{n}_1 = (\mu - 1, \mu + 1)$, $\vec{n}_2 = (1, 2)$. Κάθετες $\iff \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \iff \mu - 1 + 2\mu + 2 = 0 \iff \mu = -\frac{1}{3}$. Τότε η ευθεία είναι $-\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3} = 0$, δηλαδή $2x - y - 1 = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.6 — Πότε η εξίσωση παριστάνει ευθεία;

Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + (\lambda - 1)y + 3 = 0$ παριστάνει ευθεία; Για ποιες τιμές η ευθεία είναι κατακόρυφη και για ποιες οριζόντια;

◀ ΛΥΣΗ

Είναι ευθεία αν δεν ισχύουν ταυτόχρονα $\lambda^2 - 1 = 0$ και $\lambda - 1 = 0$, δηλαδή για $\lambda \neq 1$. (Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται $3 = 0$, αδύνατη: δεν παριστάνει τίποτα!)

- Κατακόρυφη: $B = \lambda - 1 = 0$ και $A \neq 0$ — αδύνατο, αφού $\lambda = 1$ αποκλείστηκε. Άρα **ποτέ** κατακόρυφη.
- Οριζόντια: $A = \lambda^2 - 1 = 0$ με $\lambda \neq 1$, δηλαδή $\lambda = -1$: η ευθεία $-2y + 3 = 0$, δηλαδή $y = \frac{3}{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.7 — Κορυφές τριγώνου από τις πλευρές του

Οι πλευρές ενός τριγώνου βρίσκονται στις ευθείες $\varepsilon_1 : x - y + 1 = 0$, $\varepsilon_2 : x + y - 5 = 0$ και $\varepsilon_3 : x - 3y - 3 = 0$. Να βρείτε τις κορυφές του.

◀ ΛΥΣΗ

Κάθε κορυφή είναι η τομή δύο πλευρών:

- $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$: προσθέτοντας, $2x - 4 = 0$, $x = 2$, $y = 3$: $A(2, 3)$.
- $\varepsilon_2 \cap \varepsilon_3$: αφαιρώντας, $4y - 8 = 0$, $y = 2$, $x = 3$: $B(3, 2)$.
- $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_3$: αφαιρώντας, $2y + 4 = 0$, $y = -2$, $x = -3$: $\Gamma(-3, -2)$.



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Οι ευθείες με παράμετρο εμφανίζονται πολύ συχνά σε διαγωνίσματα. Στο mathgreece.com θα βρεις ειδικό φυλλάδιο «Οικογένειες ευθειών» με 25 λυμένες ασκήσεις και το αντίστοιχο βιντεομάθημα.



Προσοχή και συχνά λάθη

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | πρόσημο στο λ

✗ **Λάθος:** Για $2x + 5y - 1 = 0$: $\lambda = \frac{2}{5}$ ή $\lambda = \frac{5}{2}$.

✓ **Σωστό:** $\lambda = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{5}$. Αν δεν θυμάσαι τον τύπο, λύσε ως προς y : $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | παράλληλο και κάθετο διάνυσμα

✗ **Λάθος:** «Το (A, B) είναι παράλληλο στην ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$.»

✓ **Σωστό:** Το (A, B) είναι **κάθετο**. Παράλληλο είναι το $(B, -A)$ (ή το $(-B, A)$).

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | «ευθεία» με $A = B = 0$

✗ **Λάθος:** «Η $(\kappa - 2)x + (\kappa^2 - 4)y + 1 = 0$ είναι ευθεία για κάθε κ .»

✓ **Σωστό:** Για $\kappa = 2$ μηδενίζονται και οι δύο συντελεστές και η εξίσωση γίνεται $1 = 0$. Πρέπει **πάντα** να εξαιρούμε τις τιμές για τις οποίες $A = B = 0$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ

Η ίδια ευθεία έχει **άπειρες** γενικές εξισώσεις: οι $2x - y + 3 = 0$ και $-4x + 2y - 6 = 0$ παριστάνουν την ίδια ευθεία. Γι' αυτό, όταν συγκρίνεις εξισώσεις, έλεγξε αν οι συντελεστές είναι **ανάλογοι**, όχι **ίσοι**.

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 2.2 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Γενική μορφή

$$Ax + By + \Gamma = 0, (A, B) \neq (0, 0)$$

Διανύσματα

$$\text{παράλληλο } \vec{\delta} = (B, -A), \text{ κάθετο } \vec{n} = (A, B)$$

Συντελεστής

$$\lambda = -\frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

Παράλληλη / κάθετη

$$Ax + By + \Gamma = 0 \quad / \quad Bx - Ay + \Gamma' = 0$$

Σχετική θέση

$$D = A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0: \text{ τέμνονται} \quad D = 0: \text{ παράλληλες ή ταυτίζονται}$$

Γωνία

$$\text{συν}\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Σταθερό σημείο

$$\text{γράψε } \mu(\dots) + (\dots) = 0, \text{ μηδένισε τις παρενθέσεις}$$

Δ

Ασκήσεις για λύση

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

- Για καθεμιά από τις ευθείες α) $5x + 2y - 10 = 0$, β) $x - \sqrt{3}y = 0$, γ) $3y + 6 = 0$, δ) $4x - 8 = 0$, να βρείτε (όπου ορίζεται) τον συντελεστή διεύθυνσης, ένα παράλληλο και ένα κάθετο διάνυσμα.
- Να βρείτε την ευθεία που διέρχεται από το $A(-3, 2)$ και είναι: α) παράλληλη στην $4x - y + 7 = 0$, β) κάθετη στην $4x - y + 7 = 0$, γ) κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (2, 5)$, δ) παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (1, -3)$.
- Να εξετάσετε τη σχετική θέση των ευθειών: α) $x + 3y - 2 = 0$ και $2x + 6y - 4 = 0$, β) $x - 2y +$

$$1 = 0 \text{ και } -3x + 6y + 2 = 0, \gamma) 2x + y - 4 = 0 \text{ και } x - y + 1 = 0.$$

4. • Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών $x + y - 1 = 0$ και $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$.
5. • Να βρείτε τον α ώστε οι ευθείες $\alpha x + 2y - 1 = 0$ και $3x + (\alpha + 1)y + 5 = 0$ να είναι α) κάθετες, β) παράλληλες.
6. • Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο τομής των ευθειών $x + 2y - 7 = 0$ και $2x - y - 4 = 0$.

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμβάθυνσης

7. •• Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y - 3\lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}$. α) Να δείξετε ότι παριστάνει ευθεία για κάθε λ . β) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο να βρείτε. γ) Ποια από αυτές είναι παράλληλη στον άξονα x' ;
8. •• Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(3, 6)$. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του AB σε γενική μορφή, και να αποδείξετε ότι το σημείο $P(6, 2)$ ισαπέχει από τα A, B .
9. •• Οι πλευρές AB και AD ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ βρίσκονται στις ευθείες $x - y + 2 = 0$ και $x + 2y - 4 = 0$, και το κέντρο του είναι το $K(3, 2)$. Να βρείτε τις κορυφές του και τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών.
10. •• Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το $A(1, 1)$ και σχηματίζουν γωνία 45° με την ευθεία $\varepsilon : 2x - y + 3 = 0$.
11. ••• Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $\varepsilon_1 : x + y - 3 = 0, \varepsilon_2 : 2x - y = 0$ και $\varepsilon_3 : \alpha x + (\alpha - 1)y + 2 - 3\alpha = 0$ συντρέχουν, δηλαδή διέρχονται από το ίδιο σημείο.
12. ••• Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2, 4)$ και οι ευθείες $\varepsilon_1 : x - 2y + 1 = 0, \varepsilon_2 : x + y - 1 = 0$ στις οποίες βρίσκονται τα ύψη από τις κορυφές B και Γ αντίστοιχα. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$.



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο **mathgreece.com** μπορείς να δεις τις λύσεις όλων αυτών των ασκήσεων σε βίντεο, βήμα προς βήμα, και να λύσεις το διαδραστικό κουίζ «Αναγνώρισε την ευθεία».

2.3

Εμβαδόν τριγώνου – απόσταση σημείου από ευθεία

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

- τον τύπο της απόστασης σημείου από ευθεία και την απόδειξή του,
- πώς βρίσκουμε την απόσταση δύο παράλληλων ευθειών,
- τον τύπο του εμβαδού τριγώνου με ορίζουσα: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})|$,
- εφαρμογές: ύψη, εμβαδά πολυγώνων, διχοτόμοι γωνιών, γεωμετρικοί τόποι.

A

Θεωρία

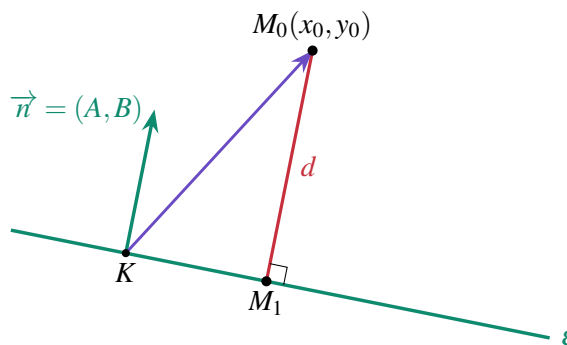
Απόσταση σημείου από ευθεία

Απόσταση ενός σημείου M_0 από μια ευθεία ε λέγεται το μήκος του κάθετου τμήματος M_0M_1 από το M_0 προς την ε . Συμβολίζεται $d(M_0, \varepsilon)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ | Απόσταση σημείου από ευθεία

Η απόσταση του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\varepsilon : Ax + By + \Gamma = 0$ είναι

$$d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Απόδειξη. Έστω $K(x_1, y_1)$ ένα σημείο της ε , οπότε $Ax_1 + By_1 + \Gamma = 0$, δηλαδή $Ax_1 + By_1 = -\Gamma$. Το $\vec{M_1M_0}$ είναι παράλληλο στο $\vec{n} = (A, B)$ (κάθετο στην ευθεία), άρα το $\vec{M_1M_0}$ είναι η προβολή του $\vec{KM_0}$ στο $\vec{n}$. Από το Μάθημα 1.5:

$$|\vec{n} \cdot \vec{KM_0}| = |\vec{n} \cdot \vec{M_1M_0}| = |\vec{n}| |\vec{M_1M_0}| = |\vec{n}| d,$$

αφού τα $\vec{n}, \vec{M_1M_0}$ είναι παράλληλα. Όμως

$$\vec{n} \cdot \vec{KM_0} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1) = Ax_0 + By_0 + \Gamma.$$

$$\text{Άρα } d = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ | η ευθεία σε γενική μορφή

Για να εφαρμόσεις τον τύπο, η ευθεία πρέπει πρώτα να γραφτεί στη μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$ (όλα στο πρώτο μέλος). Π.χ. η $y = 2x - 3$ γίνεται $2x - y - 3 = 0$.

■ Απόσταση παράλληλων ευθειών

Δύο παράλληλες ευθείες γράφονται με τα ίδια A, B : $\varepsilon_1 : Ax + By + \Gamma_1 = 0$, $\varepsilon_2 : Ax + By + \Gamma_2 = 0$. Η απόστασή τους είναι η απόσταση οποιουδήποτε σημείου της μιας από την άλλη, και ισούται με

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\Gamma_1 - \Gamma_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(Αν $M_0 \in \varepsilon_1$, τότε $Ax_0 + By_0 = -\Gamma_1$, οπότε $d(M_0, \varepsilon_2) = \frac{|-\Gamma_1 + \Gamma_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.)

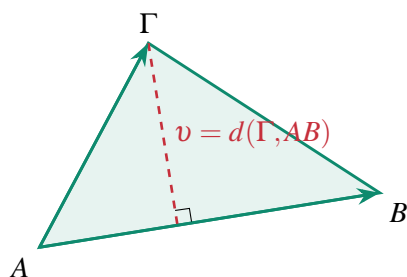
■ Εμβαδόν τριγώνου

ΘΕΩΡΗΜΑ | Εμβαδόν τριγώνου με ορίζουσα

Το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$ είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})|$$

Αν $\vec{AB} = (x_1, y_1)$ και $\vec{A\Gamma} = (x_2, y_2)$, τότε $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$.



$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} (AB) \cdot v$$

Απόδειξη. Έστω $A(x_0, y_0)$, $\vec{AB} = (x_1, y_1)$, $\vec{A\Gamma} = (x_2, y_2)$. Η ευθεία AB είναι παράλληλη στο (x_1, y_1) , άρα έχει κάθετο διάνυσμα το $(y_1, -x_1)$ και εξίσωση $y_1(x - x_0) - x_1(y - y_0) = 0$. Το Γ έχει συντεταγμένες $(x_0 + x_2, y_0 + y_2)$, οπότε

$$v = d(\Gamma, AB) = \frac{|y_1 x_2 - x_1 y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{|\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})|}{(AB)}.$$

Επομένως $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} (AB) \cdot v = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})|$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διανύσματα από **οποιαδήποτε** κορυφή: $\frac{1}{2}|\det(\vec{BA}, \vec{BG})|$ δίνει το ίδιο αποτέλεσμα.
- Τα A, B, Γ είναι συνευθειακά $\iff (AB\Gamma) = 0 \iff \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = 0$ — η συνθήκη του Μαθήματος 1.4.
- Το εμβαδόν **πολυγώνου** βρίσκεται χωρίζοντάς το σε τρίγωνα (π.χ. με διαγώνιες από μία κορυφή).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | ύψος τριγώνου

Το ύψος από την κορυφή Γ βρίσκεται με δύο τρόπους: (α) ως απόσταση του Γ από την ευθεία AB , (β) από $u_{\Gamma} = \frac{2(AB\Gamma)}{(AB)}$. Ο δεύτερος είναι συχνά πιο γρήγορος όταν το εμβαδόν είναι ήδη γνωστό.

ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ο τύπος του εμβαδού με ορίζουσες γενικεύεται στον λεγόμενο «τύπο του κορδονιού» (shoelace formula) για οποιοδήποτε πολύγωνο, και χρησιμοποιείται από τους τοπογράφους για τον υπολογισμό του εμβαδού οικοπέδων από τις συντεταγμένες των κορυφών τους, όπως αυτές καταγράφονται στο Κτηματολόγιο!

B

Λυμένα παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.1 Απόσταση σημείου από ευθεία

Να βρείτε την απόσταση του $M(2, -1)$ από τις ευθείες: α) $3x + 4y - 12 = 0$, β) $y = 2x + 5$, γ) $x = -3$.

ΛΥΣΗ

$$\text{α) } d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) - 12|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-10|}{5} = 2.$$

$$\text{β) Σε γενική μορφή: } 2x - y + 5 = 0. \quad d = \frac{|4 + 1 + 5|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{γ) } x + 3 = 0: d = \frac{|2 + 3|}{1} = 5. \text{ (Και «με το μάτι»: η οριζόντια απόσταση από } x = 2 \text{ έως } x = -3 \text{ είναι 5.)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.2 Απόσταση παράλληλων ευθειών

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $e_1: 6x - 8y + 5 = 0$ και $e_2: 3x - 4y - 5 = 0$ είναι παράλληλες και να βρείτε την απόστασή τους.

ΛΥΣΗ

Γράφουμε την e_2 με τους ίδιους A, B με την e_1 : πολλαπλασιάζοντας επί 2, $6x - 8y - 10 = 0$.

Ίδια A, B , διαφορετικοί σταθεροί όροι: παράλληλες. Απόσταση:

$$d = \frac{|5 - (-10)|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$$

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | απόσταση παράλληλων

✗ **Λάθος:** Για τις $6x - 8y + 5 = 0$ και $3x - 4y - 5 = 0$: $d = \frac{|5 - (-5)|}{\sqrt{36 + 64}} = 1$.

✓ **Σωστό:** Ο τύπος $\frac{|\Gamma_1 - \Gamma_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ισχύει **μόνο αν οι δύο εξισώσεις έχουν ίδια A και B** . Πρώτα «ευθυγραμμίζουμε» τους συντελεστές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.3 — Εμβαδόν τριγώνου και ύψος

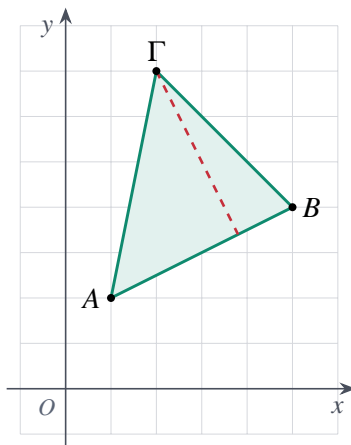
Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(5, 4)$, $\Gamma(2, 7)$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ και το ύψος από την κορυφή Γ .

◀ ΛΥΣΗ

$$\vec{AB} = (4, 2), \vec{A\Gamma} = (1, 5). \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 2 = 18.$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |18| = 9 \text{ τ.μ.}$$

$$(AB) = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}, \text{ άρα } \upsilon_{\Gamma} = \frac{2 \cdot 9}{2\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}.$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.4 — Εμβαδόν τετραπλεύρου

Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου με κορυφές $A(0, 0)$, $B(6, 1)$, $\Gamma(5, 5)$, $\Delta(1, 4)$.

◀ ΛΥΣΗ

Χωρίζουμε με τη διαγώνιο $A\Gamma$ στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |30 - 5| = \frac{25}{2}, \quad (A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |20 - 5| = \frac{15}{2}.$$

$$\text{Άρα } (AB\Gamma\Delta) = \frac{25}{2} + \frac{15}{2} = 20 \text{ τ.μ.}$$

Προσοχή: ο χωρισμός με διαγώνιο δουλεύει σωστά για **κυρτό** τετράπλευρο (η διαγώνιος ΑΓ πρέπει να είναι μέσα στο σχήμα). Εδώ το τετράπλευρο είναι κυρτό — κάνε πάντα ένα πρόχειρο σχήμα!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.5 — Σημείο ευθείας με δοσμένο εμβαδόν

Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(4, 5)$. Να βρείτε σημείο M της ευθείας $\varepsilon: y = x$ ώστε $(MAB) = 5$.

ΛΥΣΗ

$$M(t, t). \quad \overrightarrow{AB} = (3, 4), \overrightarrow{AM} = (t-1, t-1).$$

$$(MAB) = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ t-1 & t-1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} |3(t-1) - 4(t-1)| = \frac{1}{2} |t-1|.$$

$$\frac{1}{2} |t-1| = 5 \iff |t-1| = 10 \iff t = 11 \text{ ή } t = -9. \text{ Άρα } M(11, 11) \text{ ή } M(-9, -9).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.6 — Ευθείες από σημείο με δοσμένη απόσταση από άλλο σημείο

Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το $A(3, 1)$ και απέχουν από την αρχή O απόσταση 3.

ΛΥΣΗ

Κατακόρυφη: $x = 3$, δηλαδή $x - 3 = 0$: $d(O) = \frac{|-3|}{1} = 3$. Είναι λύση!

Μη κατακόρυφες: $y - 1 = \lambda(x - 3)$, δηλαδή $\lambda x - y + 1 - 3\lambda = 0$. Θέλουμε

$$\frac{|1 - 3\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 3 \iff (1 - 3\lambda)^2 = 9(\lambda^2 + 1) \iff 1 - 6\lambda + 9\lambda^2 = 9\lambda^2 + 9 \iff \lambda = -\frac{4}{3}.$$

Ευθεία: $y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 3)$, δηλαδή $4x + 3y - 15 = 0$.

Άρα υπάρχουν **δύο** ευθείες: $x = 3$ και $4x + 3y - 15 = 0$.

Αν δεν είχαμε εξετάσει την κατακόρυφη, θα «χάναμε» μια λύση. Η εξίσωση για το λ βγήκε πρώτου βαθμού (οι λ^2 απλοποιήθηκαν) — αυτό είναι ένδειξη ότι η δεύτερη λύση είναι κατακόρυφη!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.7 — Διχοτόμοι των γωνιών δύο ευθειών

Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x - 4y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: 4x + 3y - 2 = 0$.

ΛΥΣΗ

Ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει σε διχοτόμο αν και μόνο αν ισαπέχει από τις δύο ευθείες:

$$\frac{|3x - 4y + 1|}{5} = \frac{|4x + 3y - 2|}{5} \iff 3x - 4y + 1 = \pm(4x + 3y - 2).$$

$$\bullet \text{ Με «+»: } 3x - 4y + 1 = 4x + 3y - 2 \iff x + 7y - 3 = 0.$$

$$\bullet \text{ Με «-»: } 3x - 4y + 1 = -4x - 3y + 2 \iff 7x - y - 1 = 0.$$

Οι δύο διχοτόμοι είναι πάντα κάθετες: $(1, 7) \cdot (7, -1) = 0$. ✓

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.8 Γεωμετρικός τόπος σημείων με σταθερό εμβαδόν

Δίνονται τα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(3, 2)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία $(MAB) = 10$.

ΛΥΣΗ

Έστω $M(x, y)$. $\vec{AB} = (4, 2)$, $\vec{AM} = (x+1, y)$.

$$(MAB) = \frac{1}{2}|4y - 2(x+1)| = |2y - x - 1|.$$

$$|2y - x - 1| = 10 \iff x - 2y + 11 = 0 \text{ ή } x - 2y - 9 = 0.$$

Ο τόπος είναι **δύο ευθείες παράλληλες στην AB** , μία από κάθε μεριά της. (Λογικό: σταθερή βάση AB και σταθερό εμβαδόν σημαίνει σταθερό ύψος.)

Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Οι τύποι απόστασης και εμβαδού «κλείνουν» την ύλη της ευθείας. Στο mathgreece.com θα βρεις επαναληπτικό διαγώνισμα για όλο το 2ο κεφάλαιο, καθώς και θέματα εξετάσεων προηγούμενων ετών λυμένα σε βίντεο.

Γ

Προσοχή και συχνά λάθη

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | η απόλυτη τιμή

✗ **Λάθος:** $d = \frac{Ax_0 + By_0 + \Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (χωρίς απόλυτο) και αποτέλεσμα αρνητικό.

✓ **Σωστό:** Η απόσταση είναι πάντα ≥ 0 . Η απόλυτη τιμή στον αριθμητή είναι απαραίτητη. Και όταν λύνεις εξίσωση με απόλυτο, θυμήσου τις **δύο** περιπτώσεις.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | ξεχνώ το $\frac{1}{2}$

✗ **Λάθος:** $(AB\Gamma) = |\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})|$.

✓ **Σωστό:** $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}|\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})|$. Το $|\det|$ χωρίς το $\frac{1}{2}$ είναι το εμβαδόν του *παράλληλογράμμου* που ορίζουν τα δύο διανύσματα.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | διανύσματα από τυχαίο σημείο

✗ **Λάθος:** $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}|\det(\vec{OA}, \vec{OB})|$, με O την αρχή των αξόνων.

✓ **Σωστό:** Αυτό είναι το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όχι του $AB\Gamma$! Χρησιμοποιούμε δύο **πλευρές του ίδιου του τριγώνου**, με κοινή αρχή μια κορυφή του: $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ (ή $\vec{BA}$ και $\vec{B\Gamma}$, κ.λπ.).

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ

Όταν το πρόβλημα ζητά «ευθείες από σημείο P που...», εξέτασε **πρώτα την κατακόρυφη** $x = x_P$ και μετά τις $y - y_P = \lambda(x - x_P)$. Είναι το πιο συχνό σημείο απώλειας μονάδων στο κεφάλαιο.

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 2.3 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Απόσταση σημείου	$d(M_0, \varepsilon) = \frac{ Ax_0 + By_0 + \Gamma }{\sqrt{A^2 + B^2}}$
Παράλληλες ευ- θείες	$d = \frac{ \Gamma_1 - \Gamma_2 }{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (ίδια A, B)
Εμβαδόν τριγώνου	$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) $
Ύψος	$h_\Gamma = d(\Gamma, AB) = \frac{2(AB\Gamma)}{(AB)}$
Διχοτόμοι	$\frac{ A_1x + B_1y + \Gamma_1 }{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{ A_2x + B_2y + \Gamma_2 }{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$
Σταθερό εμβαδόν	τόπος: δύο ευθείες παράλληλες στη βάση



Ασκήσεις για λύση

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

- Να βρείτε την απόσταση του σημείου $P(-2, 3)$ από τις ευθείες: α) $5x - 12y + 7 = 0$, β) $y = -x + 4$, γ) $y = -1$.
- Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών $2x + y - 3 = 0$ και $4x + 2y + 9 = 0$.
- Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $A(-1, -2)$, $B(3, 1)$, $\Gamma(0, 4)$ και το ύψος του από την κορυφή A .
- Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(2, -1)$, $B(5, 1)$, $\Gamma(-4, -5)$ είναι κορυφές τριγώνου.
- Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία $2x - 5y + 20 = 0$ με τους άξονες, και την απόσταση της αρχής O από την ευθεία.
- Να βρείτε τον $\kappa > 0$ ώστε η απόσταση του $A(\kappa, 2)$ από την ευθεία $3x + 4y - 1 = 0$ να είναι 4.

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμβάθυνσης

- Να βρείτε τις ευθείες που είναι παράλληλες στην $3x - 4y + 2 = 0$ και απέχουν από αυτή απόσταση 2.
- Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το $P(2, 5)$ και απέχουν από το σημείο $Q(5, 1)$ απόσταση 3.
- Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $B(6, 4)$. Να βρείτε σημείο Γ του άξονα $y'y$ ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να έχει εμβαδόν 8.
- Να βρείτε το εμβαδόν του πενταγώνου με κορυφές $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $\Gamma(6, 3)$, $\Delta(3, 6)$, $E(0, 4)$.
- Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x + y - 4 = 0$ και το σημείο $A(1, 1)$. Να βρείτε τα σημεία B, Γ της ε ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισόπλευρο.

12. ... Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M που ισαπέχουν από τις ευθείες $x - 2y + 3 = 0$ και $2x - y - 1 = 0$, και να επαληθεύσετε ότι πρόκειται για δύο κάθετες ευθείες.

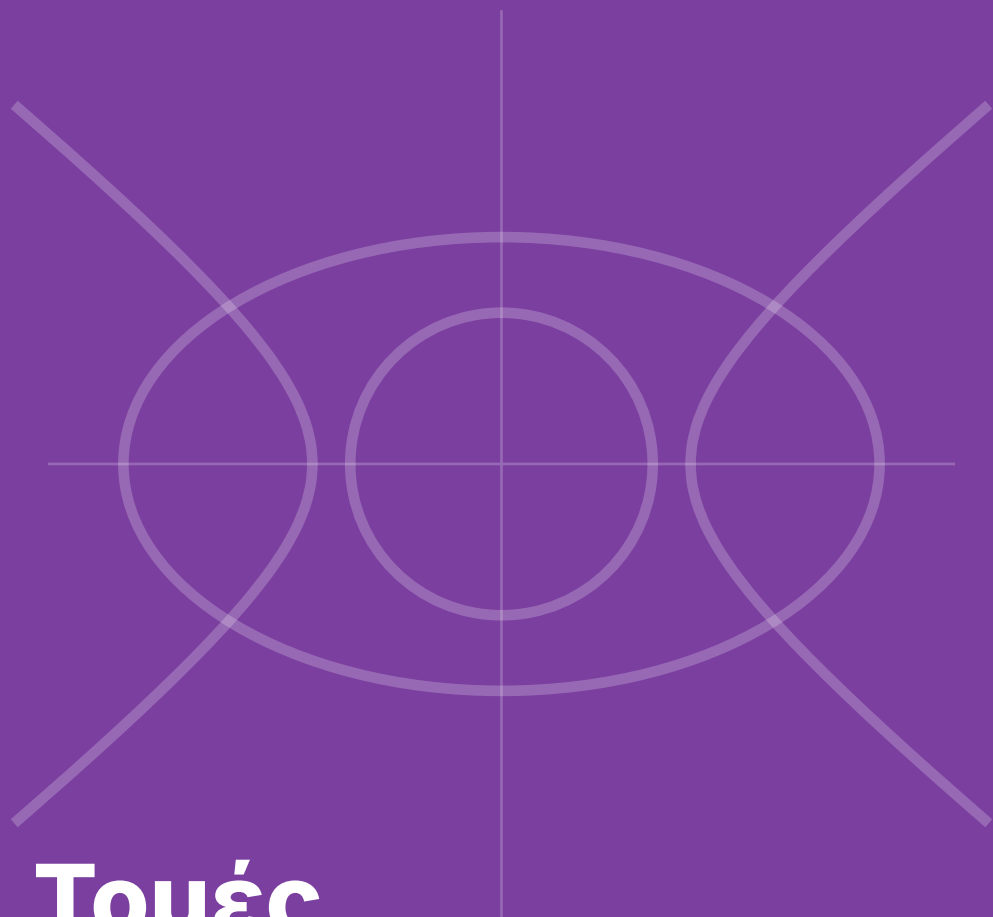


Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Ολοκλήρωσες το 2ο κεφάλαιο! Στο mathgreece.com σε περιμένει το επαναληπτικό διαγώνισμα «Η ευθεία στο επίπεδο», με θέματα τύπου εξετάσεων και πλήρεις λύσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

3



Κωνικές Τομές

Κύκλος, παραβολή, έλλειψη, υπερβολή: οι καμπύλες που γεννιούνται όταν ένα επίπεδο «κόβει» έναν κώνο

3.1

Ο κύκλος

3.2

Η παραβολή

3.3

Η έλλειψη

3.4

Η υπερβολή

3.5

Η εξίσωση $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$



3.1 Ο κύκλος

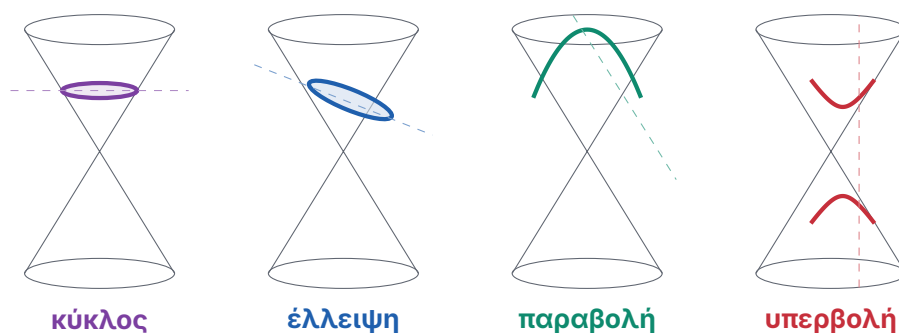
ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

- ▶ τι είναι οι κωνικές τομές και πώς προκύπτουν από έναν κώνο,
- ▶ την εξίσωση κύκλου με κέντρο O ή τυχαίο κέντρο $K(x_0, y_0)$,
- ▶ την εξίσωση της εφαπτομένης κύκλου σε σημείο του,
- ▶ πότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο,
- ▶ τη σχετική θέση ευθείας και κύκλου, και τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου.

A Θεωρία

Εισαγωγή: οι κωνικές τομές

Πάρε έναν διπλό κώνο (δύο κώνους ενωμένους στην κορυφή) και «κόψε» τον με ένα επίπεδο. Ανάλογα με την κλίση του επιπέδου, η τομή είναι:



Αυτές οι τέσσερις καμπύλες λέγονται **κωνικές τομές**. Τις μελέτησε συστηματικά ο **Απολλώνιος ο Περγαιός** (3ος αι. π.Χ.), που τους έδωσε και τα ονόματα που χρησιμοποιούμε ακόμα: «έλλειψις», «παραβολή», «υπερβολή». Σε αυτό το κεφάλαιο θα τις μελετήσουμε με τα εργαλεία της Αναλυτικής Γεωμετρίας, ξεκινώντας από την πιο γνωστή: τον κύκλο.

Κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων

ΟΡΙΣΜΟΣ | Κύκλος

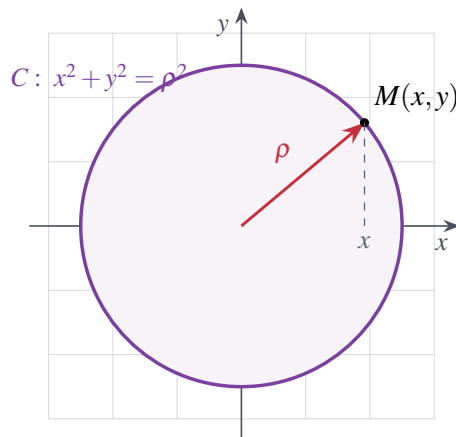
Κύκλος με κέντρο K και ακτίνα $\rho > 0$ λέγεται το σύνολο των σημείων M του επιπέδου που απέχουν από το K απόσταση ίση με ρ : $(KM) = \rho$.

Αν το κέντρο είναι το $O(0, 0)$, ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στον κύκλο αν και μόνο αν $(OM) = \rho \iff \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \iff x^2 + y^2 = \rho^2$.

ΘΕΩΡΗΜΑ | Εξίσωση κύκλου με κέντρο O

Ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$



Εφαπτομένη κύκλου

ΘΕΩΡΗΜΑ | Εφαπτομένη του $x^2 + y^2 = \rho^2$

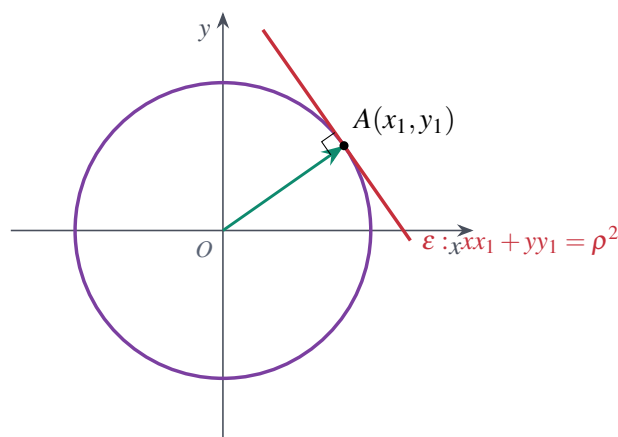
Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2$$

Απόδειξη. Η εφαπτομένη στο A είναι η ευθεία που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην ακτίνα OA . Ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει σε αυτή αν και μόνο αν $\vec{OA} \perp \vec{AM}$, δηλαδή

$$\vec{OA} \cdot \vec{AM} = 0 \iff x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) = 0 \iff xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

Αφού το A ανήκει στον κύκλο, $x_1^2 + y_1^2 = \rho^2$, και προκύπτει η εξίσωση.



⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ | μόνο για σημείο ΤΟΥ κύκλου

Ο τύπος $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ δίνει εφαπτομένη **μόνο** όταν το (x_1, y_1) είναι σημείο του κύκλου. Αν το σημείο είναι εκτός κύκλου, ο τύπος δεν δίνει εφαπτομένη — βλέπε τη μεθοδολογία παρακάτω.

Κύκλος με τυχαίο κέντρο

Αν το κέντρο είναι το $K(x_0, y_0)$, τότε $(KM) = \rho \iff \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \rho$:

ΘΕΩΡΗΜΑ | Εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$$

Η εφαπτομένη του στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι $(x-x_0)(x_1-x_0) + (y-y_0)(y_1-y_0) = \rho^2$.

Η γενική μορφή $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$

Αναπτύσσοντας την $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$ παίρνουμε μια εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$. Ισχύει όμως και το αντίστροφο; Με «συμπλήρωση τετραγώνου»:

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} = \frac{A^2+B^2}{4} - \Gamma \iff \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ | Γενική εξίσωση κύκλου

Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$:

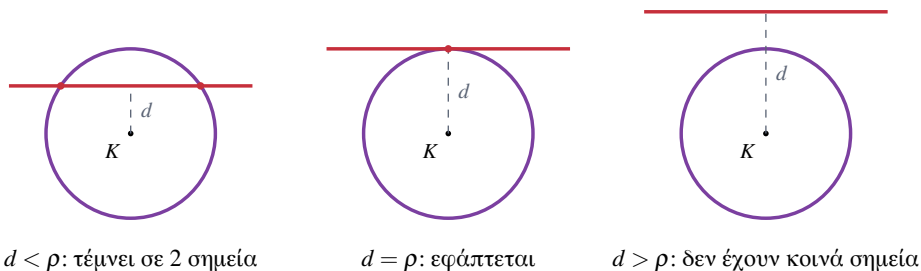
- αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$, παριστάνει **κύκλο** με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$,
- αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$, παριστάνει **ένα μόνο σημείο**, το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$,
- αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$, είναι **αδύνατη** (κανένα σημείο).

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ | συντελεστές x^2, y^2

Για να είναι κύκλος, οι συντελεστές των x^2 και y^2 πρέπει να είναι **ίσοι** και να **μην υπάρχει όρος** xy . Αν οι συντελεστές είναι ίσοι αλλά όχι 1, π.χ. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 1 = 0$, **διαιρούμε πρώτα** με αυτόν: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - \frac{1}{2} = 0$.

Σχετική θέση ευθείας και κύκλου

Έστω κύκλος C με κέντρο K και ακτίνα ρ , και ευθεία ε με $d = d(K, \varepsilon)$.



$$\text{Η ευθεία } \varepsilon \text{ εφάπτεται του κύκλου} \iff d(K, \varepsilon) = r$$

Εναλλακτικά, λύνουμε το σύστημα ευθείας--κύκλου: καταλήγουμε σε δευτεροβάθμια εξίσωση, και η διακρίνουσα $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ αντιστοιχεί στις τρεις περιπτώσεις.

Παραμετρικές εξισώσεις κύκλου

Αν $M(x, y)$ είναι σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = r^2$ και φ η γωνία του $\overrightarrow{OM}$ με τον Ox , τότε

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Αυτή η «παραμέτρηση» είναι πολύ χρήσιμη για προβλήματα μεγίστου--ελαχίστου πάνω στον κύκλο.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | εφαπτομένες από σημείο εκτός κύκλου

Για τον κύκλο $x^2 + y^2 = r^2$ και σημείο $P(x_0, y_0)$ εκτός του κύκλου:

1. Θεώρησε άγνωστο σημείο επαφής $A(x_1, y_1)$. Η εφαπτομένη στο A είναι $xx_1 + yy_1 = r^2$.
2. Αφού διέρχεται από το P : $x_0x_1 + y_0y_1 = r^2$.
3. Αφού το A ανήκει στον κύκλο: $x_1^2 + y_1^2 = r^2$.
4. Λύσε το σύστημα (2)--(3): παίρνεις **δύο** σημεία επαφής, άρα δύο εφαπτομένες.

2ος τρόπος: γράψε τις ευθείες από το P (μην ξεχάσεις την κατακόρυφη!) και απαίτησε $d(O, \varepsilon) = r$.

? ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ο αριθμός π ορίζεται μέσω του κύκλου: είναι ο λόγος του μήκους του προς τη διάμετρό του. Ο Αρχιμήδης υπολόγισε ότι $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, εγγράφοντας και περιγράφοντας στον κύκλο κανονικά 96-γωνα! Σήμερα υπολογιστές έχουν βρει πάνω από 100 τρισεκατομμύρια ψηφία του π .

B Λυμένα παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.1 Εξίσωση κύκλου από κέντρο και σημείο

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(2, -3)$ που διέρχεται από το $A(5, 1)$.

◀ ΛΥΣΗ

Η ακτίνα είναι $\rho = (KA) = \sqrt{(5-2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{9+16} = 5$. Άρα

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.2 Κύκλος με διάμετρο AB

Να βρείτε τον κύκλο με διάμετρο το τμήμα με άκρα $A(-1, 2)$ και $B(5, -6)$.

◀ ΛΥΣΗ

Κέντρο το μέσο του AB : $K(2, -2)$. Ακτίνα: $\rho = \frac{(AB)}{2} = \frac{\sqrt{36+64}}{2} = 5$. Άρα $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 25$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.3 Ανάλυση γενικής εξίσωσης

Να εξετάσετε τι παριστάνει καθεμιά από τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0 \quad \beta) x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0 \quad \gamma) x^2 + y^2 - 2x + 6 = 0$$

◀ ΛΥΣΗ

$\alpha) A = -6, B = 4, \Gamma = -12: A^2 + B^2 - 4\Gamma = 36 + 16 + 48 = 100 > 0$. **Κύκλος** με κέντρο $K(3, -2)$ και $\rho = \frac{\sqrt{100}}{2} = 5$.

(Με συμπλήρωση τετραγώνου: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 12 + 9 + 4 = 25$.)

$\beta) 4 + 16 - 20 = 0$: παριστάνει **μόνο το σημείο** $(-1, 2)$. Πράγματι: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 0$.

$\gamma) 4 + 0 - 24 < 0$: **κανένα σημείο**. Πράγματι: $(x-1)^2 + y^2 = -5$, αδύνατη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.4 Εφαπτομένη σε σημείο του κύκλου

$\alpha)$ Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο του $A(3, -4)$.

$\beta)$ Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 13$ στο σημείο του $B(3, 1)$.

◀ ΛΥΣΗ

$\alpha)$ Ελέγχουμε: $9 + 16 = 25$ ✓. Εφαπτομένη: $3x - 4y = 25$.

$\beta)$ Έλεγχος: $4 + 9 = 13$ ✓. Εφαπτομένη: $(x-1)(3-1) + (y+2)(1+2) = 13 \iff 2x - 2 + 3y + 6 = 13 \iff 2x + 3y - 9 = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.5 Εφαπτομένες από εξωτερικό σημείο

Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ που διέρχονται από το σημείο $P(7, 1)$.

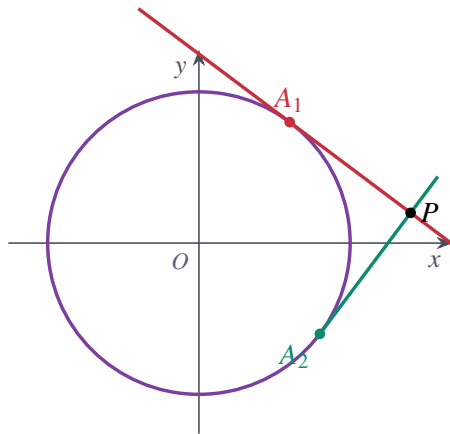
◀ ΛΥΣΗ

Το P είναι εξωτερικό, αφού $49 + 1 = 50 > 25$. Έστω $A(x_1, y_1)$ σημείο επαφής. Η εφαπτομένη $xx_1 + yy_1 = 25$ διέρχεται από το P : $7x_1 + y_1 = 25$, άρα $y_1 = 25 - 7x_1$. Επίσης $x_1^2 + y_1^2 = 25$:

$$x_1^2 + (25 - 7x_1)^2 = 25 \iff 50x_1^2 - 350x_1 + 600 = 0 \iff x_1^2 - 7x_1 + 12 = 0 \iff x_1 = 3 \text{ ή } x_1 = 4.$$

Για $x_1 = 3$: $y_1 = 4$ · για $x_1 = 4$: $y_1 = -3$. Εφαπτομένες:

$$3x + 4y = 25 \quad \text{και} \quad 4x - 3y = 25.$$



Παρατήρησε ότι οι δύο εφαπτομένες είναι κάθετες: $(3, 4) \cdot (4, -3) = 0$. Αυτό συμβαίνει επειδή $(OP) = \sqrt{50} = \rho\sqrt{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.6 — Εφαπτομένες παράλληλες σε δοσμένη ευθεία

Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου $x^2 + y^2 = 10$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 3x$.

◀ ΛΥΣΗ

Οι παράλληλες στην $y = 3x$ είναι $3x - y + c = 0$. Εφάπτονται όταν $d(O, \varepsilon) = \rho$:

$$\frac{|c|}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{10} \iff |c| = 10 \iff c = \pm 10.$$

Εφαπτομένες: $y = 3x + 10$ και $y = 3x - 10$.

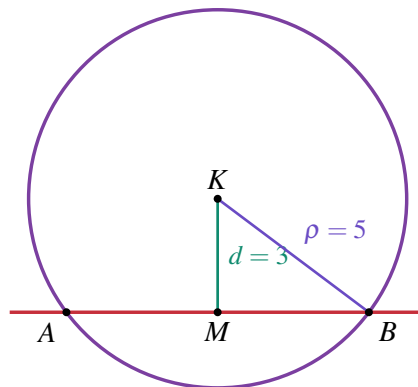
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.7 — Μήκος χορδής

Να βρείτε το μήκος της χορδής που ορίζει η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y + 5 = 0$ στον κύκλο $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

◀ ΛΥΣΗ

Ο κύκλος: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$, κέντρο $K(2, 1)$, $\rho = 5$. Απόσταση: $d = \frac{|6+4+5|}{5} = 3 < 5$, άρα τέμνει. Αν M το μέσο της χορδής AB , το τρίγωνο KMA είναι ορθογώνιο ($KM \perp AB$), άρα

$$(MA) = \sqrt{\rho^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = 4, \quad (AB) = 2 \cdot 4 = 8.$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.8 Κύκλος από τρία σημεία

Να βρείτε τον κύκλο που διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$, $A(6,0)$ και $B(0,8)$.

ΛΥΣΗ

Έστω $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$.

- Από O : $\Gamma = 0$.
- Από A : $36 + 6A = 0 \Rightarrow A = -6$.
- Από B : $64 + 8B = 0 \Rightarrow B = -8$.

Άρα $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, με κέντρο $K(3,4)$ και $\rho = \frac{\sqrt{36+64}}{2} = 5$.

Γεωμετρικά: το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο στο O , οπότε το περίκεντρο είναι το μέσο της υποτεινούς AB — πράγματι $K(3,4)$!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.9 Σχετική θέση με παράμετρο

Για ποιες τιμές του k η ευθεία $y = x + k$: α) τέμνει, β) εφάπτεται, γ) δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο $x^2 + y^2 = 8$;

ΛΥΣΗ

Η ευθεία $x - y + k = 0$ απέχει από το O : $d = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$, ενώ $\rho = 2\sqrt{2}$.

- Τέμνει: $\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \iff |k| < 4 \iff -4 < k < 4$.
- Εφάπτεται: $|k| = 4 \iff k = \pm 4$.
- Καμία τομή: $|k| > 4 \iff k < -4 \text{ ή } k > 4$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.10 Μέγιστη και ελάχιστη απόσταση από σημείο

Να βρείτε το σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που απέχει τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση από το $P(6,8)$.

ΛΥΣΗ

Είναι $(OP) = 10$. Τα σημεία του κύκλου πάνω στην ευθεία OP δίνουν τις ακραίες αποστάσεις: η ελάχιστη είναι $(OP) - \rho = 8$ και η μέγιστη $(OP) + \rho = 12$. Το μοναδιαίο κατά $\overrightarrow{OP}$ είναι $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, άρα τα σημεία είναι

$$M_{\min} = 2\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right), \quad M_{\max} = -2\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right).$$

**Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com**

Ο κύκλος είναι το πιο «συχνό» θέμα του 3ου κεφαλαίου. Στο **mathgreece.com** θα βρεις το βιντεομάθημα «Κύκλος: όλες οι μεθοδολογίες σε 40 λεπτά» και φυλλάδιο με 50 ασκήσεις διαβαθμισμένης δυσκολίας.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | πρόσημα στο κέντρο

✗ **Λάθος:** $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$ έχει κέντρο $(3, -1)$.

✓ **Σωστό:** Το κέντρο είναι $(-3, 1)$: η εξίσωση γράφεται $(x-(-3))^2 + (y-1)^2 = 2^2$. Το πρόσημο μέσα στην παρένθεση είναι **αντίθετο** από τη συντεταγμένη του κέντρου.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | ακτίνα και ρ^2

✗ **Λάθος:** $x^2 + y^2 = 9$ έχει ακτίνα 9.

✓ **Σωστό:** $\rho^2 = 9$, άρα $\rho = 3$. Και αντίστροφα, ο κύκλος ακτίνας 5 γράφεται $x^2 + y^2 = 25$, όχι $x^2 + y^2 = 5$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | εφαπτομένη από εξωτερικό σημείο

✗ **Λάθος:** Για $P(7, 1)$ και $x^2 + y^2 = 25$: «εφαπτομένη $7x + y = 25$ ».

✓ **Σωστό:** Η $7x + y = 25$ **δεν** είναι εφαπτομένη, αφού το P δεν ανήκει στον κύκλο. (Είναι η λεγόμενη «πολική» του P , που διέρχεται από τα δύο σημεία επαφής.)

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ

- Πριν γράψεις εφαπτομένη σε σημείο, **έλεγξε** ότι το σημείο ανήκει στον κύκλο.
- Ένα σημείο P είναι εσωτερικό, πάνω ή εξωτερικό του κύκλου ανάλογα με το αν $(KP) < \rho$, $= \rho$ ή $> \rho$.
- Σε προβλήματα «εφαπτομένες από σημείο», υπάρχουν **δύο** λύσεις αν το σημείο είναι εξωτερικό, **μία** αν είναι πάνω στον κύκλο και **καμία** αν είναι εσωτερικό.

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 3.1 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Κέντρο O

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \text{ εφαπτομένη: } xx_1 + yy_1 = \rho^2$$

Κέντρο $K(x_0, y_0)$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Γενική μορφή

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0: \text{ κύκλος αν } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$$

Κέντρο / ακτίνα

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right), \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

Ευθεία – κύκλος

$$d < \rho \text{ τέμνει, } d = \rho \text{ εφάπτεται, } d > \rho \text{ δεν τέμνει}$$

Χορδή

$$\text{μήκος } 2\sqrt{\rho^2 - d^2}$$

Παραμετρικές

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$$

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

1. • Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου: α) με κέντρο O και ακτίνα $\sqrt{7}$, β) με κέντρο $K(-1, 4)$ που διέρχεται από το $A(2, 0)$, γ) με διάμετρο AB , όπου $A(3, -2)$, $B(-1, 4)$, δ) με κέντρο $K(2, 3)$ που εφάπτεται στον άξονα x' .
2. • Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των κύκλων: α) $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$, β) $x^2 + y^2 - 10y + 16 = 0$, γ) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y - 12 = 0$.
3. • Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 20$ στο σημείο του $A(-2, 4)$ και τα σημεία τομής της με τους άξονες.
4. • Να εξετάσετε αν το σημείο $P(1, -1)$ είναι εσωτερικό, εξωτερικό ή σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.
5. • Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας $x + 2y - 5 = 0$ με τον κύκλο $x^2 + y^2 = 5$ και τα κοινά τους σημεία (αν υπάρχουν).
6. • Για ποιες τιμές του μ η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\mu x + 4y + \mu + 8 = 0$ παριστάνει κύκλο;

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμβάθυνσης

7. •• Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ που διέρχονται από το σημείο $P(3, 1)$.
8. •• Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ που είναι κάθετες στην ευθεία $x + 2y = 0$.
9. •• Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 1)$, $B(3, 3)$ και έχει το κέντρο του στον άξονα x' .
10. •• Η ευθεία $y = 2x$ τέμνει τον κύκλο $x^2 + y^2 - 10x = 0$ στα σημεία O και A . Να βρείτε το A και το μήκος της χορδής OA , με δύο τρόπους.
11. ••• Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία $(MA) = 2(MB)$, όπου $A(-3, 0)$ και $B(3, 0)$. (Ο τόπος λέγεται «κύκλος του Απολλωνίου».)
12. ••• Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $x + y$, όταν το σημείο (x, y) διατρέχει τον κύκλο $x^2 + y^2 = 8$. (Υπόδειξη: παραμετρικές εξισώσεις ή εφαπτομένες $x + y = c$.)



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις διαδραστικό «εργαστήριο κύκλου»: αλλάζεις κέντρο και ακτίνα και βλέπεις πώς αλλάζει η εξίσωση, οι εφαπτομένες και οι τομές με ευθείες.

3.2 Η παραβολή

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

- τον ορισμό της παραβολής με εστία και διευθετούσα,
- τις εξισώσεις $y^2 = 2px$ και $x^2 = 2py$ και τα στοιχεία τους,
- τις ιδιότητες της παραβολής (άξονας συμμετρίας, κορυφή, «άνοιγμα»),
- την εξίσωση της εφαπτομένης σε σημείο της παραβολής,
- την ανακλαστική ιδιότητα — γιατί τα δορυφορικά πιάτα είναι παραβολικά!

A

Θεωρία

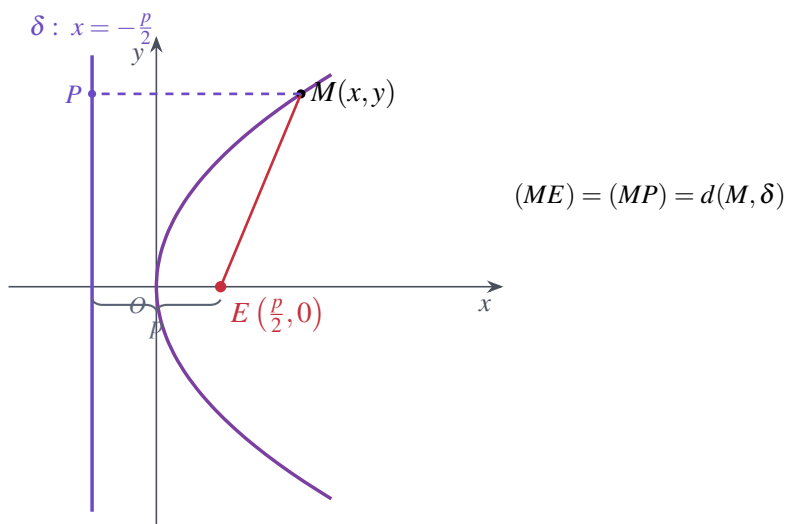
Ορισμός

ΟΡΙΣΜΟΣ | Παραβολή

Έστω μια ευθεία δ και ένα σημείο E εκτός αυτής. **Παραβολή** με **εστία** E και **διευθετούσα** δ λέγεται το σύνολο των σημείων M του επιπέδου που **ισαπέχουν** από το E και από την δ :

$$(ME) = d(M, \delta).$$

Η απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα συμβολίζεται $|p|$ και ο p λέγεται **παράμετρος** της παραβολής.



Η εξίσωση $y^2 = 2px$

Παίρνουμε σύστημα αξόνων έτσι ώστε ο άξονας $x'x$ να διέρχεται από την εστία και να είναι κάθετος στη διευθετούσα, και η αρχή O να είναι το μέσο της απόστασης εστίας--διευθετούσας. Τότε $E(\frac{p}{2}, 0)$

και $\delta : x = -\frac{p}{2}$. Για $M(x,y)$:

$$(ME) = d(M, \delta) \iff \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \iff x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \iff y^2 = 2px.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ | Παραβολή με άξονα τον $x'x$

Η παραβολή με εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα $\delta : x = -\frac{p}{2}$ έχει εξίσωση

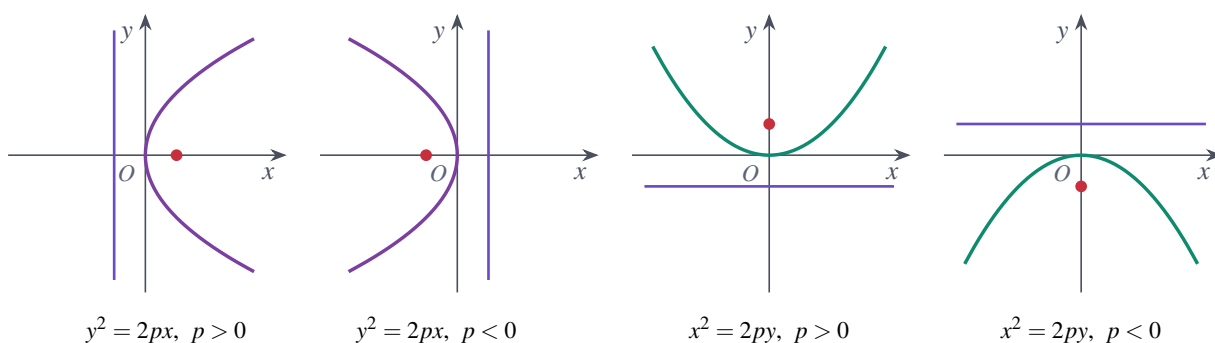
$$y^2 = 2px$$

Ανάλογα, αν η εστία είναι στον $y'y$:

ΘΕΩΡΗΜΑ | Παραβολή με άξονα τον $y'y$

Η παραβολή με εστία $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ και διευθετούσα $\delta : y = -\frac{p}{2}$ έχει εξίσωση

$$x^2 = 2py$$



	$y^2 = 2px$	$x^2 = 2py$
Εστία	$E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$E\left(0, \frac{p}{2}\right)$
Διευθετούσα	$x = -\frac{p}{2}$	$y = -\frac{p}{2}$
Άξονας συμμετρίας	$x'x$	$y'y$
Κορυφή	$O(0, 0)$	$O(0, 0)$

Ιδιότητες της παραβολής $y^2 = 2px$

- **Συμμετρία:** αν (x, y) είναι σημείο της, τότε και το $(x, -y)$ είναι. Ο $x'x$ είναι **άξονας συμμετρίας**.
- **Κορυφή:** το $O(0, 0)$, το σημείο τομής της παραβολής με τον άξονά της.
- **Θέση:** αφού $y^2 \geq 0$, είναι $px \geq 0$. Αν $p > 0$ η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο $x \geq 0$ («ανοίγει» προς τα δεξιά)· αν $p < 0$, στο $x \leq 0$.
- Όσο μεγαλύτερο το $|p|$, τόσο πιο «ανοιχτή» η παραβολή.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ | γνωστή από την Α' Λυκείου

Η γραφική παράσταση της $y = ax^2$ ($a \neq 0$) είναι η παραβολή $x^2 = \frac{1}{a}y$, δηλαδή $x^2 = 2py$ με $p = \frac{1}{2a}$. Για παράδειγμα η $y = x^2$ έχει εστία $(0, \frac{1}{4})$ και διευθετούσα $y = -\frac{1}{4}$.

Εφαπτομένη παραβολής

ΘΕΩΡΗΜΑ | Εφαπτομένη

Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

Αντίστοιχα, η εφαπτομένη της $x^2 = 2py$ στο $M_1(x_1, y_1)$ είναι $xx_1 = p(y + y_1)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ | μνημονικός κανόνας

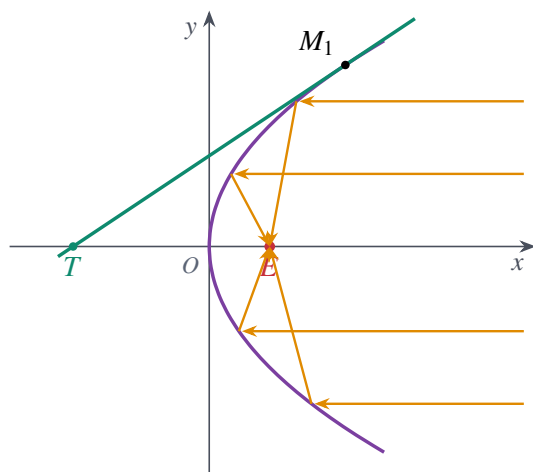
Σε όλες τις κωνικές, η εφαπτομένη στο (x_1, y_1) προκύπτει από την εξίσωση της καμπύλης αν αντικαταστήσουμε: $y^2 \rightarrow yy_1$, $x^2 \rightarrow xx_1$, $2x \rightarrow x + x_1$, $2y \rightarrow y + y_1$. Για την $y^2 = 2px$: $yy_1 = p(x + x_1)$.

Ανακλαστική ιδιότητα

ΘΕΩΡΗΜΑ | Ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής σε ένα σημείο της M_1 διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία M_1E και η ημιευθεία M_1t που είναι παράλληλη και ομόρροπη με τον άξονα (προς το «εσωτερικό» της παραβολής).

Γιατί; Η εφαπτομένη $yy_1 = p(x + x_1)$ τέμνει τον $x'x$ στο $T(-x_1, 0)$. Τότε $(ET) = \frac{p}{2} + x_1$, ενώ $(EM_1) = d(M_1, \delta) = x_1 + \frac{p}{2}$. Το τρίγωνο ETM_1 είναι ισοσκελές, άρα $\widehat{ETM_1} = \widehat{EM_1T}$, και αφού $M_1t \parallel x'x$, η εφαπτομένη σχηματίζει ίσες γωνίες με τις M_1E και M_1t .



Ακτίνες παράλληλες στον άξονα ανακλώνται στην παραβολή και συγκεντρώνονται όλες στην εστία.

? ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Η λέξη «εστία» (focus = «τζάκι» στα λατινικά) δεν είναι τυχαία: ένα παραβολικό κάτοπτρο στραμμένο στον Ήλιο συγκεντρώνει όλες τις ακτίνες στην εστία, όπου η θερμοκρασία ανεβαίνει τόσο ώστε να ανάψει φωτιά. Έτσι ανάβει κάθε τέσσερα χρόνια η **Ολυμπιακή Φλόγα** στην Αρχαία Ολυμπία! Με την ίδια αρχή λειτουργούν τα δορυφορικά πιάτα, τα ραδιοτηλεσκόπια και — αντίστροφα — οι προβολείς των αυτοκινήτων.

B Λυμένα παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.1 Στοιχεία παραβολής

Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα των παραβολών: α) $y^2 = 8x$, β) $y^2 = -6x$, γ) $x^2 = 4y$, δ) $y = -2x^2$.

◀ ΛΥΣΗ

α) $2p = 8 \Rightarrow p = 4$: $E(2, 0)$, $\delta : x = -2$.

β) $2p = -6 \Rightarrow p = -3$: $E(-\frac{3}{2}, 0)$, $\delta : x = \frac{3}{2}$.

γ) $2p = 4 \Rightarrow p = 2$: $E(0, 1)$, $\delta : y = -1$.

δ) $x^2 = -\frac{1}{2}y$, άρα $2p = -\frac{1}{2}$, $p = -\frac{1}{4}$: $E(0, -\frac{1}{8})$, $\delta : y = \frac{1}{8}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.2 Εξίσωση από εστία ή διευθετούσα

Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με κορυφή το O που: α) έχει εστία $E(0, -3)$, β) έχει διευθετούσα $x = 5$, γ) έχει άξονα τον x' και διέρχεται από το $A(2, -4)$.

◀ ΛΥΣΗ

α) Εστία στον y' : $x^2 = 2py$ με $\frac{p}{2} = -3$, $p = -6$: $x^2 = -12y$.

β) Διευθετούσα κατακόρυφη, άρα $y^2 = 2px$ με $-\frac{p}{2} = 5$, $p = -10$: $y^2 = -20x$.

γ) $y^2 = 2px$ και $16 = 2p \cdot 2 \Rightarrow p = 4$: $y^2 = 8x$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.3 Εφαπτομένη σε σημείο

Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 4x$ στο σημείο της $A(4, 4)$ και το σημείο τομής της με τον άξονα x' .

◀ ΛΥΣΗ

$2p = 4$, $p = 2$. Έλεγχος: $16 = 4 \cdot 4$ ✓. Εφαπτομένη: $y \cdot 4 = 2(x + 4) \iff 2y = x + 4 \iff x - 2y + 4 = 0$.

Για $y = 0$: $x = -4$, σημείο $T(-4, 0)$. (Επιβεβαιώνεται ότι $T(-x_1, 0)$.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.4 Συνθήκη επαφής ευθείας – παραβολής

Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ ($\lambda \neq 0$) εφάπτεται στην παραβολή $y^2 = 2px$ αν και μόνο αν $p = 2\lambda\beta$. Στη συνέχεια να βρείτε την εφαπτομένη της $y^2 = 8x$ που είναι παράλληλη στην $y = 2x - 1$.

◀ ΛΥΣΗ

Αντικαθιστούμε $x = \frac{y-\beta}{\lambda}$ στην εξίσωση της παραβολής: $y^2 = \frac{2p}{\lambda}(y - \beta) \iff \lambda y^2 - 2py + 2p\beta =$

0. Η ευθεία εφάπτεται όταν η εξίσωση έχει διπλή ρίζα:

$$\Delta = 4p^2 - 8\lambda p\beta = 0 \iff 4p(p - 2\lambda\beta) = 0 \iff p = 2\lambda\beta \quad (p \neq 0).$$

Για την $y^2 = 8x$ είναι $p = 4$, και θέλουμε $\lambda = 2$: $4 = 2 \cdot 2 \cdot \beta \Rightarrow \beta = 1$. Εφαπτομένη: $y = 2x + 1$.

Έλεγχος: $(2x + 1)^2 = 8x \iff 4x^2 - 4x + 1 = 0 \iff (2x - 1)^2 = 0$: διπλή ρίζα $x = \frac{1}{2}$, σημείο επαφής $(\frac{1}{2}, 2)$. ✓

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.5 Εφαπτομένες από εξωτερικό σημείο

Να βρείτε τις εφαπτομένες της παραβολής $y^2 = 4x$ που διέρχονται από το σημείο $P(-2, 1)$.

◀ΛΥΣΗ

Έστω σημείο επαφής $M_1(x_1, y_1)$: εφαπτομένη $yy_1 = 2(x + x_1)$. Διέρχεται από P : $y_1 = 2(-2 + x_1)$, δηλαδή $y_1 = 2x_1 - 4$. Επίσης $y_1^2 = 4x_1$, άρα $x_1 = \frac{y_1^2}{4}$ και

$$y_1 = \frac{y_1^2}{2} - 4 \iff y_1^2 - 2y_1 - 8 = 0 \iff y_1 = 4 \text{ ή } y_1 = -2.$$

- $y_1 = 4, x_1 = 4$: εφαπτομένη $4y = 2(x + 4)$, δηλαδή $x - 2y + 4 = 0$.
- $y_1 = -2, x_1 = 1$: εφαπτομένη $-2y = 2(x + 1)$, δηλαδή $x + y + 1 = 0$.

Οι δύο εφαπτομένες εδώ δεν είναι κάθετες, αφού $\lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$. Αποδεικνύεται ότι οι δύο εφαπτομένες από ένα σημείο P είναι κάθετες ακριβώς όταν το P βρίσκεται πάνω στη διευθετούσα — δες την άσκηση 7.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.6 Σημείο παραβολής με δοσμένη εστιακή απόσταση

Να βρείτε τα σημεία της παραβολής $y^2 = 12x$ που απέχουν από την εστία απόσταση 7.

◀ΛΥΣΗ

$p = 6, E(3, 0), \delta: x = -3$. Από τον ορισμό: $(ME) = d(M, \delta) = x + 3$ (αφού $x \geq 0$). Άρα $x + 3 = 7 \Rightarrow x = 4$ και $y^2 = 48 \Rightarrow y = \pm 4\sqrt{3}$. Σημεία: $(4, 4\sqrt{3})$ και $(4, -4\sqrt{3})$.

Ο ορισμός κάνει τον υπολογισμό πολύ γρήγορο: η «εστιακή ακτίνα» σημείου της $y^2 = 2px$ ($p > 0$) είναι $(ME) = x + \frac{p}{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.7 Χορδή που διέρχεται από την εστία

Η ευθεία που διέρχεται από την εστία της παραβολής $y^2 = 4x$ και είναι κάθετη στον άξονα τέμνει την παραβολή στα A, B . Να βρείτε το μήκος (AB) («ορθή χορδή» ή latus rectum).

◀ΛΥΣΗ

$E(1, 0)$. Η ευθεία είναι $x = 1$, οπότε $y^2 = 4, y = \pm 2$. Άρα $A(1, 2), B(1, -2)$ και $(AB) = 4 = 2|p|$.



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Δες στο mathgreece.com το βίντεο «Γιατί το δορυφορικό πιάτο είναι παραβολή;», όπου η ανακλαστική ιδιότητα αποδεικνύεται με κινούμενη εικόνα, και λύσε το κουίζ για την παραβολή.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | η εστία δεν είναι $(p, 0)$

✗ **Λάθος:** Για $y^2 = 8x$: « $p = 8$, εστία $(8, 0)$ » ή « $p = 4$, εστία $(4, 0)$ ».

✓ **Σωστό:** $2p = 8 \Rightarrow p = 4$ και εστία $(\frac{p}{2}, 0) = (2, 0)$. Πρώτα βρίσκουμε το p από το $2p$, και μετά παίρνουμε το **μισό** του για την εστία.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | λάθος άξονας

✗ **Λάθος:** Η $x^2 = 6y$ «ανοίγει προς τα δεξιά».

✓ **Σωστό:** Στη $x^2 = 2py$ το τετράγωνο είναι στο x , η παραβολή είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ και «ανοίγει» προς τα πάνω ($p > 0$) ή κάτω ($p < 0$). Κανόνας: **η μεταβλητή που ΔΕΝ είναι στο τετράγωνο δείχνει τον άξονα.**

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | εφαπτομένη

✗ **Λάθος:** Εφαπτομένη της $y^2 = 2px$: $yy_1 = 2p(x + x_1)$ ή $yy_1 = px$.

✓ **Σωστό:** $yy_1 = p(x + x_1)$. Χρησιμοποίησε τον μνημονικό κανόνα: $y^2 \rightarrow yy_1$ και $2x \rightarrow x + x_1$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ

- Οι τύποι αυτού του μαθήματος αφορούν παραβολές με **κορυφή το O** . Παραβολές με άλλη κορυφή θα δούμε στο Μάθημα 3.5.
- Μια παραβολή **δεν έχει ασύμπτωτες** και δεν είναι «κομμάτι» υπερβολής.
- Η κατακόρυφη ευθεία $x = 0$ εφάπτεται στην $y^2 = 2px$ στο O (είναι η $yy_1 = p(x + x_1)$ για $(x_1, y_1) = (0, 0)$).

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 3.2 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Ορισμός

$$y^2 = 2px$$

$$x^2 = 2py$$

Εφαπτομένη

Επαφή ευθείας

Εστιακή ακτίνα

Ανάκλαση

$$(ME) = d(M, \delta)$$

εστία $(\frac{p}{2}, 0)$, διευθετούσα $x = -\frac{p}{2}$, άξονας $x'x$

εστία $(0, \frac{p}{2})$, διευθετούσα $y = -\frac{p}{2}$, άξονας $y'y$

$$yy_1 = p(x + x_1) \quad / \quad xx_1 = p(y + y_1)$$

$$y = \lambda x + \beta \text{ εφάπτεται στην } y^2 = 2px \iff p = 2\lambda\beta$$

$$(ME) = \left|x + \frac{p}{2}\right| \text{ για την } y^2 = 2px$$

ακτίνες $\parallel$ άξονα $\rightarrow$ περνούν από την εστία

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

1. • Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα και να σχεδιάσετε τις παραβολές: α) $y^2 = 2x$, β) $x^2 = -8y$, γ) $y = \frac{1}{4}x^2$, δ) $3y^2 + 9x = 0$.
2. • Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με κορυφή το O που: α) έχει εστία $E(-4, 0)$, β) έχει διευθετούσα $y = 2$, γ) έχει άξονα τον $y'y$ και διέρχεται από το $(4, -2)$.
3. • Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής $x^2 = 6y$ στο σημείο της με τετμημένη 6.
4. • Να βρείτε τα σημεία της παραβολής $y^2 = 8x$ που απέχουν απόσταση 10 από την εστία της.
5. • Να εξετάσετε αν η ευθεία $x - y + 2 = 0$ εφάπτεται στην παραβολή $y^2 = 8x$ και, αν ναι, να βρείτε το σημείο επαφής.

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμπάθυνσης

6. •• Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 4x$ που είναι κάθετη στην ευθεία $x + 2y - 3 = 0$.
7. •• Να βρείτε τις εφαπτομένες της παραβολής $y^2 = 8x$ που διέρχονται από το σημείο $P(-2, 3)$ και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες. (Πού βρίσκεται το P ;))
8. •• Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ ($p > 0$) σε σημείο της $M_1(x_1, y_1)$, $y_1 \neq 0$, τέμνει τον $x'x$ στο T και τον $y'y$ στο Σ . Να αποδείξετε ότι το Σ είναι το μέσο του TM_1 .
9. •• Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται στην ευθεία $x = -1$ και διέρχονται από το σημείο $A(1, 0)$.
10. ••• Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει τη μία κορυφή του στην κορυφή O της παραβολής $y^2 = 4x$ και τις άλλες δύο πάνω στην παραβολή. Να βρείτε το μήκος της πλευράς του.
11. ••• Η κεραία ενός δορυφορικού πιάτου έχει σχήμα παραβολής (σε τομή) με άνοιγμα (διάμετρο) 80 cm και βάθος 10 cm. Σε ποια απόσταση από τον πυθμένα πρέπει να τοποθετηθεί ο δέκτης ώστε να βρίσκεται στην εστία;



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο **mathgreece.com** θα βρεις φυλλάδιο «Παραβολή: 40 ασκήσεις με λύσεις» και βίντεο με τις πιο συχνές ερωτήσεις θεωρίας για διαγωνίσματα.

3.3 Η έλλειψη

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

- τον ορισμό της έλλειψης μέσω των δύο εστιών,
- την εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και τη σχέση $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$,
- τα στοιχεία της: κορυφές, άξονες, εστίες, κέντρο συμμετρίας,
- την εκκεντρότητα και τι μας λέει για το «σχήμα» της έλλειψης,
- την εφαπτομένη, τις παραμετρικές εξισώσεις και την ανακλαστική ιδιότητα.

A Θεωρία

Ορισμός

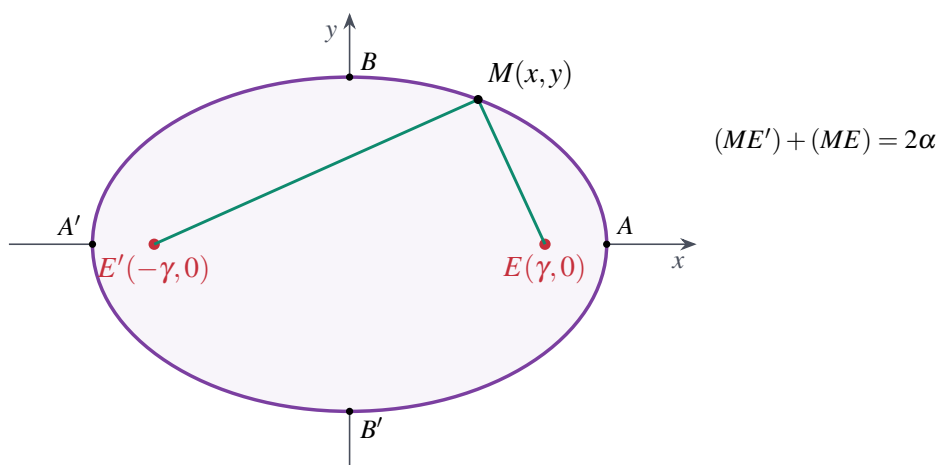
Στερώσε δύο πινέζες σε ένα χαρτί και δέσε πάνω τους ένα νήμα μεγαλύτερο από την απόστασή τους. Τέντωσε το νήμα με ένα μολύβι και κινήσου γύρω-γύρω. Η καμπύλη που σχεδιάζεις είναι μια **έλλειψη** — η «μέθοδος του κηπουρού».

ΟΡΙΣΜΟΣ | Έλλειψη

Έστω E', E δύο σημεία με $(E'E) = 2\gamma$. **Έλλειψη με εστίες E', E** λέγεται το σύνολο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία το **άθροισμα** των αποστάσεων από τις εστίες είναι σταθερό και ίσο με 2α , όπου $2\alpha > 2\gamma$:

$$(ME') + (ME) = 2\alpha.$$

Η απόσταση 2γ λέγεται **εστιακή απόσταση**.



Η εξίσωση της έλλειψης

Παίρνουμε τον $x'x$ να διέρχεται από τις εστίες και την αρχή O στο μέσο τους: $E(\gamma, 0)$, $E'(-\gamma, 0)$. Για

$M(x, y)$:

$$\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} = 2\alpha.$$

Απομονώνουμε τη μία ρίζα, υψώνουμε στο τετράγωνο, απλοποιούμε, και επαναλαμβάνουμε· καταλήγουμε στην

$$(\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2(\alpha^2 - \gamma^2).$$

Αφού $\alpha > \gamma$, θέτουμε $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ ($\beta > 0$) και διαιρούμε με $\alpha^2 \beta^2$:

ΘΕΩΡΗΜΑ | Εξίσωση έλλειψης με εστίες στον $x'x$

Η έλλειψη με εστίες $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα 2α έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$$

ΘΕΩΡΗΜΑ | Εστίες στον $y'y$

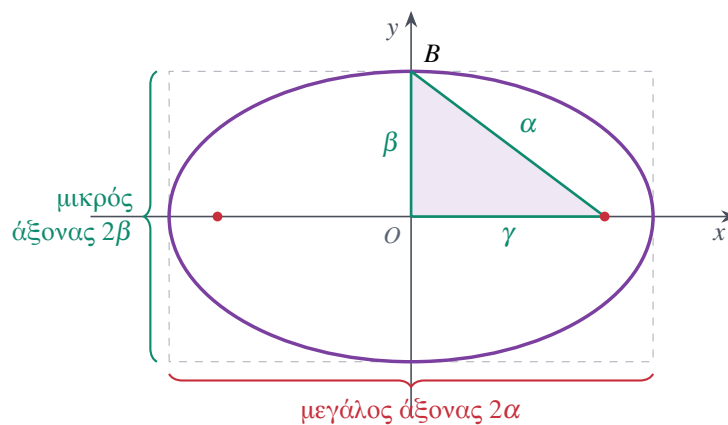
Αν οι εστίες είναι $E'(0, -\gamma)$, $E(0, \gamma)$, η εξίσωση είναι $\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1$, πάλι με $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ | πού είναι οι εστίες;

Στην έλλειψη ο **μεγαλύτερος παρονομαστής** είναι πάντα ο α^2 και δείχνει τον άξονα των εστιών. Π.χ. στην $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ είναι $\alpha^2 = 25$ (κάτω από το y^2), άρα οι εστίες είναι στον $y'y$: $\gamma^2 = 25 - 9 = 16$, $E(0, \pm 4)$.

Ιδιότητες της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

- **Συμμετρία:** αν το (x, y) ανήκει στην έλλειψη, ανήκουν και τα $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$. Οι άξονες $x'x$, $y'y$ είναι **άξονες συμμετρίας** και το O είναι **κέντρο συμμετρίας** (κέντρο της έλλειψης).
- **Κορυφές:** τέμνει τους άξονες στα $A(\alpha, 0)$, $A'(-\alpha, 0)$, $B(0, \beta)$, $B'(0, -\beta)$.
- **Άξονες:** το τμήμα $A'A = 2\alpha$ λέγεται **μεγάλος άξονας** και το $B'B = 2\beta$ **μικρός άξονας** ($\beta < \alpha$).
- **Φραγμένη:** $|x| \leq \alpha$, $|y| \leq \beta$ · η έλλειψη βρίσκεται μέσα στο ορθογώνιο με πλευρές 2α , 2β .
- Από τις κορυφές του μικρού άξονα: $(BE) = (BE') = \alpha$, και το ορθογώνιο τρίγωνο OBE δίνει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.



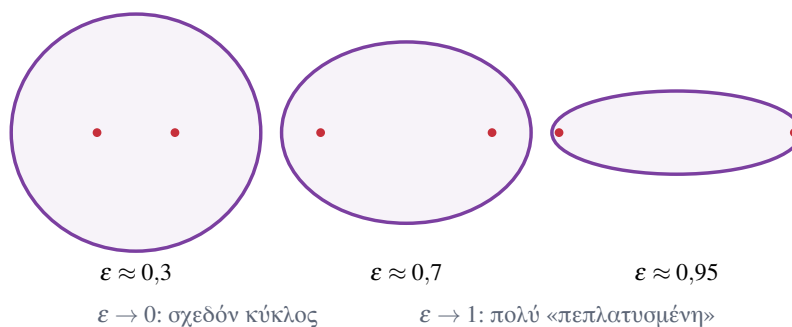
Εκκεντρότητα

ΟΡΙΣΜΟΣ | Εκκεντρότητα έλλειψης

Εκκεντρότητα της έλλειψης λέγεται ο λόγος

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{και ισχύει} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Επειδή $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}}{\alpha} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, η εκκεντρότητα «μετρά» πόσο *πεπλατυσμένη* είναι η έλλειψη:



Αν $\gamma = 0$ οι εστίες συμπίπτουν, $\alpha = \beta$, και η «έλλειψη» είναι κύκλος ($\varepsilon = 0$).

Εφαπτομένη και παραμετρικές εξισώσεις

ΘΕΩΡΗΜΑ | Εφαπτομένη έλλειψης

Η εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ είναι

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$

(Ίδιος μνημονικός κανόνας: $x^2 \rightarrow xx_1$, $y^2 \rightarrow yy_1$.)

Παραμετρικές εξισώσεις: $x = \alpha \sin \varphi$, $y = \beta \eta \mu \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$

Πράγματι $\frac{\alpha^2 \sin^2 \varphi}{\alpha^2} + \frac{\beta^2 \eta \mu^2 \varphi}{\beta^2} = \sin^2 \varphi + \eta \mu^2 \varphi = 1$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ | συνθήκη επαφής ευθείας – έλλειψης

Η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ εφάπτεται στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ αν και μόνο αν

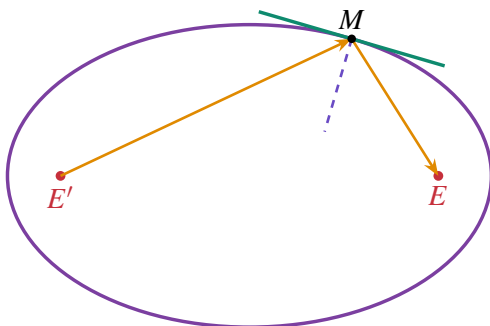
$$\kappa^2 = \alpha^2 \lambda^2 + \beta^2.$$

(Αποδεικνύεται αντικαθιστώντας και θέτοντας τη διακρίνουσα ίση με μηδέν.)

Ανακλαστική ιδιότητα

ΘΕΩΡΗΜΑ | Ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης

Η κάθετη στην εφαπτομένη της έλλειψης σε ένα σημείο της M διχοτομεί τη γωνία $\widehat{E'ME}$.



Ένα σήμα που ξεκινά από τη μία εστία, μετά την ανάκλαση στην έλλειψη, περνά **πάντα** από την άλλη εστία.

? ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ο Kepler ανακάλυψε (1609) ότι οι πλανήτες κινούνται σε **ελλείψεις** με τον Ήλιο στη μία εστία. Η τροχιά της Γης έχει εκκεντρότητα μόλις $\varepsilon \approx 0,017$ — σχεδόν κύκλος — ενώ ο κομήτης του Halley έχει $\varepsilon \approx 0,967$! Στην ιατρική, η ανακλαστική ιδιότητα χρησιμοποιείται στη **λιθοτριψία**: κρουστικά κύματα που παράγονται στη μία εστία ενός ελλειψοειδούς κατόπτρου συγκεντρώνονται στην άλλη εστία, όπου βρίσκεται η πέτρα του νεφρού, και τη θρυμματίζουν χωρίς χειρουργείο.

B

Λυμένα παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.1 — Στοιχεία έλλειψης

Να βρείτε τις κορυφές, τις εστίες, τα μήκη των αξόνων και την εκκεντρότητα της έλλειψης:
α) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, β) $4x^2 + y^2 = 16$.

◀ ΛΥΣΗ

α) $\alpha^2 = 25$, $\beta^2 = 9$, άρα $\alpha = 5$, $\beta = 3$, $\gamma = \sqrt{25 - 9} = 4$. Εστίες στον x' : $E(4, 0)$, $E'(-4, 0)$. Κορυφές: $(\pm 5, 0)$, $(0, \pm 3)$. Μεγάλος άξονας 10, μικρός 6. $\varepsilon = \frac{4}{5}$.

β) Διαιρούμε με 16: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$. Μεγαλύτερος παρονομαστής κάτω από το y^2 : $\alpha^2 = 16$, $\beta^2 = 4$, εστίες στον y' : $\gamma = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$: $E(0, \pm 2\sqrt{3})$. Κορυφές: $(0, \pm 4)$, $(\pm 2, 0)$. Άξονες 8 και 4. $\varepsilon = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.2 — Εξίσωση από δεδομένα

Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με κέντρο O σε κάθε περίπτωση: α) εστίες $(\pm 3, 0)$ και μεγάλος άξονας 10, β) εστίες $(0, \pm 2)$ και εκκεντρότητα $\frac{1}{2}$, γ) εστίες στον x' και διέρχεται από τα $(2, 0)$ και $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

◀ ΛΥΣΗ

α) $\gamma = 3, \alpha = 5, \beta^2 = 25 - 9 = 16: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

β) $\gamma = 2, \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 4, \beta^2 = 16 - 4 = 12: \frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{12} = 1.$

γ) Το $(2, 0)$ είναι κορυφή στον άξονα των εστιών, άρα $\alpha = 2$. Από το δεύτερο σημείο: $\frac{1}{4} + \frac{3/4}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{3}{4\beta^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \beta^2 = 1$. Έλλειψη: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.3 — Εφαπτομένη σε σημείο

Να βρείτε την εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ στο σημείο της $M(2, 1)$ και το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει με τους άξονες.

◀ ΛΥΣΗ

Έλεγχος: $\frac{4}{8} + \frac{1}{2} = 1$ ✓. Εφαπτομένη: $\frac{2x}{8} + \frac{y}{2} = 1 \iff x + 2y = 4.$

Τομές με τους άξονες: $(4, 0), (0, 2)$. Εμβαδόν $= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$ τ.μ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.4 — Εφαπτομένες παράλληλες σε ευθεία

Να βρείτε τις εφαπτομένες της έλλειψης $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = x$.

◀ ΛΥΣΗ

Ζητάμε $y = x + \kappa$ με $\kappa^2 = \alpha^2 \lambda^2 + \beta^2 = 4 \cdot 1 + 1 = 5$, άρα $\kappa = \pm \sqrt{5}$: $y = x + \sqrt{5}$ και $y = x - \sqrt{5}$.

Χωρίς τον τύπο: αντικαθιστούμε $y = x + \kappa$: $\frac{x^2}{4} + (x + \kappa)^2 = 1 \iff 5x^2 + 8\kappa x + 4\kappa^2 - 4 = 0$ και $\Delta = 64\kappa^2 - 80(\kappa^2 - 1) = 0 \iff \kappa^2 = 5$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.5 — Σημεία με ειδικές ιδιότητες

Να βρείτε τα σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ από τα οποία οι εστίες «φαίνονται» υπό ορθή γωνία, δηλαδή $\widehat{E'ME} = 90^\circ$.

◀ ΛΥΣΗ

$\gamma = 3$. Η συνθήκη $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{ME'} = 0$ σημαίνει ότι το M ανήκει στον κύκλο με διάμετρο $E'E$: $x^2 + y^2 = 9$. Λύνουμε με την έλλειψη: από τον κύκλο $y^2 = 9 - x^2$, οπότε

$$\frac{x^2}{25} + \frac{9 - x^2}{16} = 1 \iff 16x^2 + 225 - 25x^2 = 400 \iff -9x^2 = 175,$$

αδύνατη. Άρα **δεν υπάρχουν** τέτοια σημεία.

Εξήγηση: ο κύκλος $x^2 + y^2 = 9$ έχει ακτίνα $\gamma = 3 < \beta = 4$, οπότε βρίσκεται ολόκληρος μέσα στην έλλειψη. Τέτοια σημεία υπάρχουν μόνο αν $\gamma \geq \beta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.6 — Μέγιστο με παραμετρικές εξισώσεις

Να βρείτε το μέγιστο εμβαδόν ορθογωνίου εγγεγραμμένου στην έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, με πλευρές παράλληλες στους άξονες.

◀ ΛΥΣΗ

Λόγω συμμετρίας, οι κορυφές είναι $(\pm x, \pm y)$ με $x = 3\sigma\eta\mu\varphi$, $y = 2\eta\mu\varphi$, $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Το εμβαδόν είναι

$$E = 2x \cdot 2y = 4 \cdot 3\sigma\eta\mu\varphi \cdot 2\eta\mu\varphi = 24\eta\mu\varphi\sigma\eta\mu\varphi = 12\eta\mu 2\varphi \leq 12,$$

με ισότητα για $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Μέγιστο εμβαδόν 12 (γενικά $2\alpha\beta$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.7 Εστιακές ακτίνες

Αν M σημείο της έλλειψης $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ με $(ME) = 2$, πόσο είναι το (ME') ; Να βρείτε το M .

◀ ΛΥΣΗ

Από τον ορισμό: $(ME) + (ME') = 2\alpha = 10$, άρα $(ME') = 8$. Με $E(4, 0)$, $E'(-4, 0)$: $(ME')^2 - (ME)^2 = (x+4)^2 - (x-4)^2 = 16x$, δηλαδή $64 - 4 = 16x$, $x = \frac{15}{4}$. Τότε $\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{225/16}{25} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$, $y = \pm \frac{3\sqrt{7}}{4}$.

Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο mathgreece.com μπορείς να «σχεδιάσεις» έλλειψη με τη μέθοδο του κηπουρού σε διαδραστική εφαρμογή, να αλλάξεις την εκκεντρότητα και να δεις τις τροχιές των πλανητών. Υπάρχει επίσης βιντεομάθημα με όλες τις μεθοδολογίες.

Γ

Προσοχή και συχνά λάθη

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | η σχέση των α, β, γ

✗ **Λάθος:** $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ (σύγχυση με την υπερβολή).

✓ **Σωστό:** Στην έλλειψη: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, δηλαδή $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$. Το α είναι το **μεγαλύτερο** από τα τρία (η υποτείνουσα στο τρίγωνο OBE).

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | λάθος άξονας εστιών

✗ **Λάθος:** Για $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$: « $\alpha^2 = 16$, εστίες στον x' ».

✓ **Σωστό:** Ο μεγαλύτερος παρονομαστής (25) είναι κάτω από το y^2 , άρα $\alpha^2 = 25$ και οι εστίες στον $y'y$: $(0, \pm 3)$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | η εξίσωση πρέπει να έχει «= 1»

✗ **Λάθος:** Για $9x^2 + 4y^2 = 36$: « $\alpha^2 = 9$, $\beta^2 = 4$ ».

✓ **Σωστό:** Πρώτα διαιρούμε ώστε το δεύτερο μέλος να γίνει 1: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Τώρα $\alpha^2 = 9$ (στον $y'y$), $\beta^2 = 4$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ

- Στην παραμετρική μορφή, η φ **δεν** είναι η γωνία του $\overrightarrow{OM}$ με τον x' (εκτός αν $\alpha = \beta$).
- Οι εστίες είναι **μέσα** στην έλλειψη, πάνω στον μεγάλο άξονα.

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 3.3 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Ορισμός

$$(ME') + (ME) = 2\alpha > 2\gamma$$

Εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ (εστίες } (\pm\gamma, 0)) \text{ ή } \frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \text{ (εστίες } (0, \pm\gamma))$$

Σχέση

$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2, \alpha > \beta, \alpha > \gamma$$

Κορυφές / άξονες

$$(\pm\alpha, 0), (0, \pm\beta): \text{μεγάλος } 2\alpha, \text{μικρός } 2\beta$$

Εκκεντρότητα

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \in (0, 1), \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

Εφαπτομένη

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$

Επαφή ευθείας

$$y = \lambda x + \kappa: \kappa^2 = \alpha^2 \lambda^2 + \beta^2$$

Παραμετρικές

$$x = \alpha \sin \varphi, y = \beta \eta \mu \varphi$$



Ασκήσεις για λύση

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

- Να βρείτε τα στοιχεία (κορυφές, εστίες, άξονες, εκκεντρότητα) των ελλείψεων: α) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, β) $x^2 + 4y^2 = 4$, γ) $25x^2 + 9y^2 = 225$.
- Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με κέντρο O που: α) έχει εστίες $(\pm 5, 0)$ και μικρό άξονα 24, β) έχει κορυφές $(\pm 6, 0)$ και εκκεντρότητα $\frac{2}{3}$, γ) έχει εστίες στον $y'y$, εστιακή απόσταση 8 και μεγάλο άξονα 10.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ στο σημείο της $(3, -1)$.
- Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $x - 2y = 0$ με την έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 8$.
- Να εξετάσετε αν η ευθεία $x + y = 5$ εφάπτεται στην έλλειψη $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμβάθυνσης

- • Να βρείτε τις εφαπτομένες της έλλειψης $x^2 + 2y^2 = 6$ που είναι κάθετες στην ευθεία $2x - y = 0$.
- • Να βρείτε τις εφαπτομένες της έλλειψης $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ που διέρχονται από το σημείο $P(0, 2)$.

8. •• Η εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$, με $x_1 y_1 \neq 0$, τέμνει τους άξονες στα A, B . Να αποδείξετε ότι $\frac{a^2}{(OA)^2} + \frac{b^2}{(OB)^2} = 1$.
9. •• Ένα ευθύγραμμο τμήμα AB σταθερού μήκους 6 κινείται έτσι ώστε το A να βρίσκεται πάντα στον $x'x$ και το B στον $y'y$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου M του AB για το οποίο $(AM) = 2$. («Έλλειψογράφος».)
10. ••• Να βρείτε την εκκεντρότητα μιας έλλειψης αν οι εστίες της και τα άκρα του μικρού άξονα είναι κορυφές τετραγώνου.
11. ••• Η τροχιά ενός δορυφόρου γύρω από τη Γη είναι έλλειψη με το κέντρο της Γης στη μία εστία. Το πλησιέστερο σημείο της τροχιάς απέχει 7000 km από το κέντρο της Γης και το πιο απομακρυσμένο 13000 km. Να βρείτε την εκκεντρότητα της τροχιάς και την εξίσωσή της (σε χιλιάδες km, με κέντρο την αρχή των αξόνων).



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις φυλλάδιο «Έλλειψη: 40 ασκήσεις» και κουίζ που σε βοηθά να μην μπερδεύεις ποτέ ξανά έλλειψη και υπερβολή.

3.4 Η υπερβολή

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

- τον ορισμό της υπερβολής μέσω της διαφοράς αποστάσεων από δύο εστίες,
- την εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και τη σχέση $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$,
- τα στοιχεία της: κορυφές, κλάδοι, ασύμπτωτες, εκκεντρότητα,
- την ισοσκελή υπερβολή,
- την εφαπτομένη και την ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής.

A Θεωρία

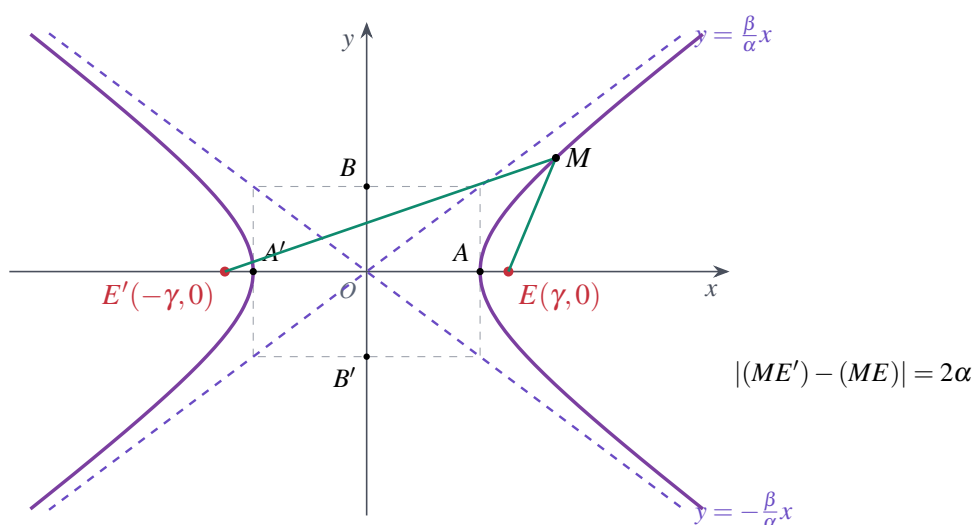
Ορισμός

ΟΡΙΣΜΟΣ | Υπερβολή

Έστω E', E δύο σημεία με $(E'E) = 2\gamma$. **Υπερβολή** με **εστίες** E', E λέγεται το σύνολο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία η **απόλυτη τιμή της διαφοράς** των αποστάσεων από τις εστίες είναι σταθερή και ίση με 2α , όπου $0 < 2\alpha < 2\gamma$:

$$|(ME') - (ME)| = 2\alpha.$$

Η σύγκριση με την έλλειψη είναι διδακτική: εκεί είχαμε **άθροισμα** και $\alpha > \gamma$, εδώ έχουμε **διαφορά** και $\alpha < \gamma$.



Η εξίσωση της υπερβολής

Με τις εστίες $E(\gamma, 0)$, $E'(-\gamma, 0)$, η συνθήκη $|\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2} - \sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}| = 2\alpha$, μετά από δύο

υψώσεις στο τετράγωνο (όπως στην έλλειψη), γίνεται

$$(\gamma^2 - \alpha^2)x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2(\gamma^2 - \alpha^2).$$

Αφού $\gamma > \alpha$, θέτουμε $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$ ($\beta > 0$):

ΘΕΩΡΗΜΑ | Εξίσωση υπερβολής με εστίες στον $x'x$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$$

Αν οι εστίες είναι στον $y'y$, $E(0, \pm\gamma)$, η εξίσωση είναι $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ | πού είναι οι εστίες;

Στην υπερβολή **δεν** αποφασίζει ο μεγαλύτερος παρονομαστής αλλά το **πρόσημο**: οι εστίες βρίσκονται στον άξονα της μεταβλητής με το **θετικό** πρόσημο, και το α^2 είναι ο παρονομαστής της. Στην υπερβολή μπορεί να είναι $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ ή $\alpha > \beta$.

Ιδιότητες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

- **Συμμετρία**: οι άξονες είναι άξονες συμμετρίας και το O κέντρο συμμετρίας (κέντρο της υπερβολής).
- **Κορυφές**: τέμνει τον $x'x$ στα $A(\alpha, 0)$, $A'(-\alpha, 0)$ · **δεν τέμνει** τον $y'y$ (για $x=0$: $y^2 = -\beta^2$, αδύνατο).
- **Δύο κλάδοι**: αφού $\frac{x^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{y^2}{\beta^2} \geq 1$, είναι $|x| \geq \alpha$. Η υπερβολή αποτελείται από δύο κομμάτια (κλάδους): έναν για $x \geq \alpha$ και έναν για $x \leq -\alpha$.
- Το τμήμα $A'A = 2\alpha$ λέγεται **πραγματικός άξονας**. Τα σημεία $B(0, \beta)$, $B'(0, -\beta)$ δεν ανήκουν στην υπερβολή, αλλά το $B'B = 2\beta$ λέγεται **φανταστικός άξονας**.
- Το ορθογώνιο με κορυφές $(\pm\alpha, \pm\beta)$ λέγεται **ορθογώνιο βάσης** της υπερβολής· οι διαγώνιοί του έχουν μήκος 2γ .

Ασύμπτωτες

ΘΕΩΡΗΜΑ | Ασύμπτωτες της υπερβολής

Οι ευθείες

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad y = -\frac{\beta}{\alpha}x$$

λέγονται **ασύμπτωτες** της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Είναι οι διαγώνιες του ορθογωνίου βάσης και η υπερβολή τις «πλησιάζει» όλο και περισσότερο όσο απομακρυνόμαστε από το κέντρο, χωρίς ποτέ να τις συναντά.

Γιατί; Για $x > 0$, $y > 0$ ο κλάδος γράφεται $y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2 - \alpha^2}$. Η κατακόρυφη απόσταση από την ασύμπτωτη είναι

$$\frac{\beta}{\alpha} \left(x - \sqrt{x^2 - \alpha^2} \right) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{x + \sqrt{x^2 - \alpha^2}},$$

που γίνεται όσο μικρή θέλουμε όταν το x μεγαλώνει, χωρίς να μηδενίζεται.

Τέχνασμα: οι ασύμπτωτες προκύπτουν αν στην εξίσωση αντικαταστήσουμε το 1 με 0:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0 \iff y = \pm \frac{\beta}{\alpha}x \quad (\text{για εστίες στον } y'y: y = \pm \frac{\alpha}{\beta}x)$$

Εκκεντρότητα

ΟΡΙΣΜΟΣ | Εκκεντρότητα υπερβολής

$$e = \frac{\gamma}{\alpha}, \text{ και ισχύει } e > 1.$$

Αφού $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}}{\alpha} = \sqrt{e^2 - 1}$, η εκκεντρότητα καθορίζει την κλίση των ασυμπτώτων: όσο μεγαλύτερη η e , τόσο πιο «ανοιχτοί» οι κλάδοι.

Ισοσκελής υπερβολή

ΟΡΙΣΜΟΣ | Ισοσκελής υπερβολή

Αν $\alpha = \beta$, η υπερβολή $x^2 - y^2 = \alpha^2$ λέγεται **ισοσκελής**. Οι ασύμπτωτές της είναι οι διχοτόμοι $y = \pm x$, που είναι **κάθετες**, και $e = \sqrt{2}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η γνωστή γραφική παράσταση της $y = \frac{\kappa}{x}$ (Α' Λυκείου) είναι ισοσκελής υπερβολή «στραμμένη» κατά 45° , με ασύμπτωτες τους άξονες.

Εφαπτομένη και ανακλαστική ιδιότητα

ΘΕΩΡΗΜΑ | Εφαπτομένη υπερβολής

Η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ είναι

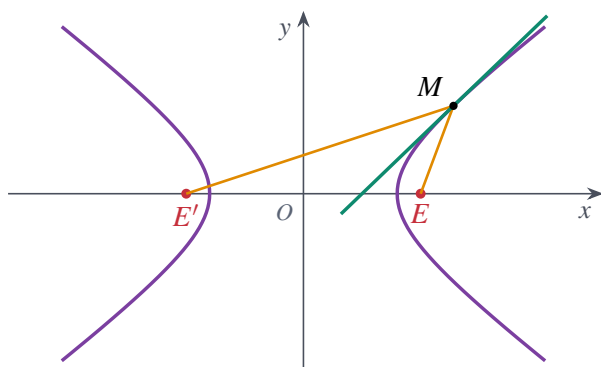
$$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ | συνθήκη επαφής

Η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ εφάπτεται στην $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ αν και μόνο αν $\kappa^2 = \alpha^2 \lambda^2 - \beta^2$ (με $\lambda \neq \pm \frac{\beta}{\alpha}$).

ΘΕΩΡΗΜΑ | Ανακλαστική ιδιότητα

Η εφαπτομένη της υπερβολής σε ένα σημείο της M **διχοτομεί** τη γωνία $\widehat{E'ME}$.



Η εφαπτομένη στο M διχοτομεί τη γωνία των εστιακών ακτίνων ME' , ME .

? ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Η ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής χρησιμοποιείται στα **τηλεσκόπια Cassegrain**: ένα παραβολικό και ένα υπερβολικό κάτοπτρο «συνεργάζονται» ώστε το φως να εστιάζει σε σημείο πίσω από το κύριο κάτοπτρο. Επίσης, το σύστημα ναυσιπλοΐας LORAN (πρόδρομος του GPS) προσδιόριζε τη θέση ενός πλοίου ως τομή υπερβολών, μετρώντας τη διαφορά χρόνου λήψης σημάτων από δύο σταθμούς!

B

Λυμένα παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.1 Στοιχεία υπερβολής

Να βρείτε τις κορυφές, τις εστίες, τις ασύμπτωτες και την εκκεντρότητα των υπερβολών: α) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, β) $4y^2 - x^2 = 4$.

ΛΥΣΗ

α) $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $\gamma = \sqrt{16+9} = 5$. Κορυφές $(\pm 4, 0)$, εστίες $(\pm 5, 0)$, ασύμπτωτες $y = \pm \frac{3}{4}x$, $\varepsilon = \frac{5}{4}$.
β) $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1$: θετικό πρόσημο στο y^2 , εστίες στον y' . $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = \sqrt{5}$. Κορυφές $(0, \pm 1)$, εστίες $(0, \pm \sqrt{5})$. Ασύμπτωτες: $y^2 - \frac{x^2}{4} = 0 \iff y = \pm \frac{1}{2}x$. $\varepsilon = \sqrt{5}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.2 Εξίσωση από δεδομένα

Να βρείτε την υπερβολή με κέντρο O που: α) έχει εστίες $(\pm 10, 0)$ και κορυφές $(\pm 6, 0)$, β) έχει ασύμπτωτες $y = \pm 2x$, εστίες στον x' και διέρχεται από το $(3, 4)$, γ) έχει εστίες $(0, \pm 3)$ και εκκεντρότητα $\frac{3}{2}$.

ΛΥΣΗ

α) $\gamma = 10$, $\alpha = 6$, $\beta^2 = 100 - 36 = 64$: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

β) $\frac{\beta}{\alpha} = 2 \Rightarrow \beta = 2\alpha$: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{4\alpha^2} = 1$. Από $(3, 4)$: $\frac{9}{\alpha^2} - \frac{16}{4\alpha^2} = 1 \iff \frac{5}{\alpha^2} = 1 \iff \alpha^2 = 5$. Άρα $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$.

γ) $\gamma = 3$, $\alpha = \frac{\gamma}{\varepsilon} = 2$, $\beta^2 = 9 - 4 = 5$: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.3 Εφαπτομένη σε σημείο

Να βρείτε την εφαπτομένη της υπερβολής $x^2 - 4y^2 = 12$ στο σημείο της $M(4, 1)$.

ΛΥΣΗ

Έλεγχος: $16 - 4 = 12$ ✓. Η εξίσωση γράφεται $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$. Εφαπτομένη: $\frac{4x}{12} - \frac{y}{3} = 1 \iff x - y =$

3.

Πιο γρήγορα, με τον μνημονικό κανόνα απευθείας στην $x^2 - 4y^2 = 12$: $xx_1 - 4yy_1 = 12 \iff 4x - 4y = 12 \iff x - y = 3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.4 — Τομή ευθείας – υπερβολής

Να βρείτε τα κοινά σημεία της υπερβολής $x^2 - y^2 = 8$ με τις ευθείες α) $x + 3y = 0$ και β) $y = x + 2$.

◀ ΛΥΣΗ

α) Με $x = -3y$: $9y^2 - y^2 = 8 \iff y^2 = 1 \iff y = \pm 1$. Σημεία $(-3, 1)$ και $(3, -1)$.

β) Με $y = x + 2$: $x^2 - (x + 2)^2 = 8 \iff -4x - 4 = 8 \iff x = -3, y = -1$. Ένα μόνο κοινό σημείο, $(-3, -1)$, **χωρίς** η ευθεία να είναι εφαπτομένη!

Η $y = x + 2$ είναι παράλληλη στην ασύμπτωτη $y = x$. Κάθε τέτοια ευθεία τέμνει την υπερβολή σε ένα σημείο. Στην υπερβολή, «ένα κοινό σημείο» δεν σημαίνει απαραίτητα «εφάπτεται».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.5 — Εφαπτομένες με δοσμένη κλίση

Να βρείτε τις εφαπτομένες της υπερβολής $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = x$.

◀ ΛΥΣΗ

$y = x + \kappa$ με $\kappa^2 = \alpha^2 \lambda^2 - \beta^2 = 9 - 4 = 5$: $y = x + \sqrt{5}$ και $y = x - \sqrt{5}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.6 — Ισοσκελής υπερβολή

Να βρείτε την ισοσκελή υπερβολή με εστίες στον $x'x$ που διέρχεται από το σημείο $(5, 4)$, καθώς και τις εστίες της.

◀ ΛΥΣΗ

$x^2 - y^2 = \alpha^2$. Από $(5, 4)$: $\alpha^2 = 25 - 16 = 9$. Υπερβολή $x^2 - y^2 = 9$, $\gamma^2 = 9 + 9 = 18$, εστίες $(\pm 3\sqrt{2}, 0)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.7 — Εστιακές ακτίνες

Ένα σημείο M του δεξιού κλάδου της υπερβολής $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ απέχει 4 μονάδες από την εστία $E(5, 0)$. Πόσο απέχει από την E' ;

◀ ΛΥΣΗ

Στον δεξιό κλάδο το M είναι πιο κοντά στην E , άρα $(ME') - (ME) = 2\alpha = 6$, οπότε $(ME') = 10$.

Αν δεν ξέραμε σε ποιον κλάδο είναι, θα είχαμε και την περίπτωση $(ME) - (ME') = 6$, δηλαδή $(ME') = -2$, αδύνατη. Άρα το M θα ήταν αναγκαστικά στον δεξιό κλάδο.



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Η υπερβολή είναι συχνά η «δυσκολότερη» κωνική για τους μαθητές. Στο mathgreece.com θα βρεις συγκριτικό πίνακα έλλειψης-υπερβολής σε PDF για εκτύπωση και βιντεομάθημα με όλες τις «παγίδες».

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | η σχέση των α, β, γ

✗ **Λάθος:** $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ (σύγχυση με την έλλειψη).

✓ **Σωστό:** Στην υπερβολή: $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Το γ είναι το **μεγαλύτερο** (η διαγώνιος του ορθογώνιου βάσης).

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | ασύμπτωτες με εστίες στον $y'y$

✗ **Λάθος:** Για $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$: «ασύμπτωτες $y = \pm \frac{\beta}{\alpha}x = \pm \frac{4}{3}x$ ».

✓ **Σωστό:** Ο τύπος $y = \pm \frac{\beta}{\alpha}x$ ισχύει μόνο για εστίες στον $x'x$. Με το τέχνασμα: $\frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{16} \iff y = \pm \frac{3}{4}x$. Εδώ $\alpha = 3$ (στον $y'y$), $\beta = 4$ και οι ασύμπτωτες είναι $y = \pm \frac{\alpha}{\beta}x$. Το τέχνασμα « $1 \rightarrow 0$ » δεν κάνει ποτέ λάθος!

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | «ένα κοινό σημείο $\Rightarrow$ εφαπτομένη»

✗ **Λάθος:** «Η ευθεία τέμνει την υπερβολή σε ένα σημείο, άρα εφάπτεται.»

✓ **Σωστό:** Οι ευθείες που είναι παράλληλες στις ασύμπτωτες τέμνουν την υπερβολή σε ένα σημείο χωρίς να εφάπτονται (Παράδειγμα 3.4.4).

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ

- Οι ασύμπτωτες **δεν** είναι μέρος της υπερβολής και η υπερβολή δεν τις τέμνει ποτέ.
- Τα B, B' **δεν** είναι σημεία της υπερβολής.
- Οι εστίες βρίσκονται «μέσα» στα κοίλα των κλάδων, **πιο μακριά** από το κέντρο από ό,τι οι κορυφές ($\gamma > \alpha$).

ΕΛΛΕΙΨΗ ή ΥΠΕΡΒΟΛΗ; — Συγκριτικός πίνακας

	Έλλειψη	Υπερβολή
Ορισμός	$(ME') + (ME) = 2\alpha$	$ (ME') - (ME) = 2\alpha$
Εξίσωση	$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$
Σχέση	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$	$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$
Εκκεντρότητα	$0 < \varepsilon < 1$	$\varepsilon > 1$
Εφαπτομένη	$\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$	$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$
Επαφή $y = \lambda x + \kappa$	$\kappa^2 = \alpha^2 \lambda^2 + \beta^2$	$\kappa^2 = \alpha^2 \lambda^2 - \beta^2$
Ασύμπτωτες	δεν έχει	$y = \pm \frac{\beta}{\alpha}x$
Άξονας εστιών	μεγαλύτερος παρονομαστής	θετικός όρος

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 3.4 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Ορισμός

$$|(ME') - (ME)| = 2\alpha < 2\gamma$$

Εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ (εστίες } (\pm\gamma, 0)) \cdot \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \text{ (εστίες } (0, \pm\gamma))$$

Σχέση

$$\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$$

Ασύμπτωτες

$$\text{αντικαθιστούμε το 1 με 0: } y = \pm \frac{\beta}{\alpha}x$$

Εκκεντρότητα

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} > 1, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

Ισοσκελής

$$x^2 - y^2 = \alpha^2, \text{ ασύμπτωτες } y = \pm x, \varepsilon = \sqrt{2}$$

Εφαπτομένη

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$



Ασκήσεις για λύση

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

- Να βρείτε κορυφές, εστίες, ασύμπτωτες και εκκεντρότητα των υπερβολών: α) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$, β) $9x^2 - 16y^2 = 144$, γ) $y^2 - 3x^2 = 3$.
- Να βρείτε την υπερβολή με κέντρο O που: α) έχει κορυφές $(\pm 3, 0)$ και εστίες $(\pm 5, 0)$, β) έχει εστίες $(0, \pm 13)$ και πραγματικό άξονα 10, γ) έχει εστίες $(\pm 4, 0)$ και εκκεντρότητα 2.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ στο σημείο της $(4, 2)$.
- Να βρείτε την υπερβολή με ασύμπτωτες $y = \pm \frac{4}{3}x$ και κορυφές $(\pm 3, 0)$.
- Να βρείτε τα κοινά σημεία της υπερβολής $x^2 - 2y^2 = 2$ με την ευθεία $y = x - 1$.

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμβάθυνσης

- Να βρείτε τις εφαπτομένες της υπερβολής $x^2 - 4y^2 = 4$ που διέρχονται από το σημείο $P(1, 1)$.
- Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων ενός τυχαίου σημείου της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ από τις δύο ασύμπτωτες είναι σταθερό, ίσο με $\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$.
- Η εφαπτομένη της ισοσκελούς υπερβολής $x^2 - y^2 = \alpha^2$ σε ένα σημείο της M τέμνει τις ασύμπτωτες στα K, Λ . Να αποδείξετε ότι το M είναι το μέσο του $K\Lambda$.
- Να βρείτε την εκκεντρότητα της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, αν κάθε ασύμπτωτή της σχηματίζει γωνία 30° με τον άξονα x' .
- Δύο σταθμοί E' και E απέχουν 10 km. Ένας κεραυνός ακούγεται στον σταθμό E' με καθυστέρηση 15 δευτερολέπτων σε σχέση με τον E . Αν ο ήχος διανύει $\frac{1}{3}$ km ανά δευτερόλεπτο, να βρείτε την καμπύλη πάνω στην οποία βρίσκεται το σημείο του κεραυνού (σε κατάλληλο σύστημα αξόνων).

11. ... Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά στους κύκλους $(x+4)^2 + y^2 = 1$ και $(x-4)^2 + y^2 = 9$.



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις φυλλάδιο «Υπερβολή: 40 ασκήσεις» και το «Μεγάλο διαγώνισμα κωνικών τομών» με θέματα από όλο το κεφάλαιο.

3.5

Η εξίσωση $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

- τι είναι η παράλληλη μεταφορά αξόνων και πώς «μετακινεί» μια κωνική,
- τις εξισώσεις κωνικών με κέντρο ή κορυφή ένα τυχαίο σημείο $K(x_0, y_0)$,
- πώς αναγνωρίζουμε τι παριστάνει η εξίσωση $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$,
- τις «εκφυλισμένες» περιπτώσεις (σημείο, ευθείες, κενό σύνολο),
- τον ενιαίο ορισμό των κωνικών μέσω εκκεντρότητας και διευθετούσας.

A

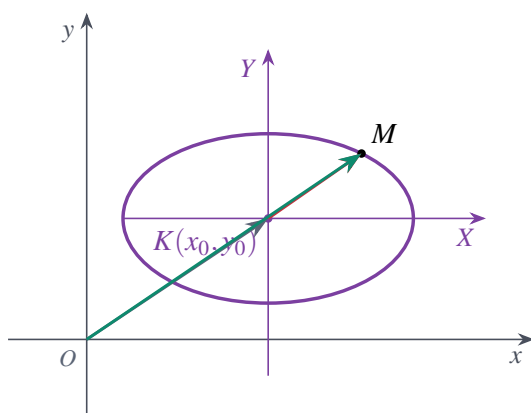
Θεωρία

Παράλληλη μεταφορά αξόνων

Έως τώρα όλες οι κωνικές είχαν **κέντρο** (ή κορυφή) την αρχή O και άξονες συμμετρίας τους άξονες συντεταγμένων. Τι γίνεται αν «σύρουμε» μια κωνική, χωρίς να τη στρέψουμε, ώστε το κέντρο της να πάει στο σημείο $K(x_0, y_0)$;

Θεωρούμε ένα νέο σύστημα αξόνων KXY με αρχή το K και άξονες παράλληλους και ομόρροπους με τους Ox, Oy . Αν ένα σημείο M έχει συντεταγμένες (x, y) στο παλιό σύστημα και (X, Y) στο νέο, τότε $\vec{OM} = \vec{OK} + \vec{KM}$, δηλαδή:

$$x = X + x_0, \quad y = Y + y_0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad X = x - x_0, \quad Y = y - y_0$$



$M(x, y)$ στο σύστημα Oxy
 $M(X, Y)$ στο σύστημα KXY
 $\vec{OM} = \vec{OK} + \vec{KM}$

Επομένως, μια καμπύλη που στο σύστημα KXY έχει εξίσωση $f(X, Y) = 0$, στο σύστημα Oxy έχει εξίσωση $f(x - x_0, y - y_0) = 0$. Έτσι παίρνουμε:

ΘΕΩΡΗΜΑ | Κωνικές με κέντρο / κορυφή $K(x_0, y_0)$

Κύκλος	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$
Έλλειψη	$\frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(y - y_0)^2}{\beta^2} = 1$
Υπερβολή	$\frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} - \frac{(y - y_0)^2}{\beta^2} = 1$, ασύμπτωτες $y - y_0 = \pm \frac{\beta}{\alpha}(x - x_0)$
Παραβολή	$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ ή $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$

Οι εστίες, κορυφές, διευθετούσες κ.λπ. βρίσκονται αν στα «κανονικά» στοιχεία (ως προς KXY) προσθέσουμε x_0 στην τετμημένη και y_0 στην τεταγμένη.

■ Η γενική εξίσωση $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$

Αν αναπτύξουμε οποιαδήποτε από τις παραπάνω εξισώσεις, παίρνουμε μια εξίσωση της μορφής

$$Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0 \quad (A, B \text{ όχι και οι δύο } 0).$$

Αντίστροφα, με **συμπλήρωση τετραγώνων** μπορούμε να φέρουμε κάθε τέτοια εξίσωση σε μία από τις «κανονικές» μορφές. Το είδος της καμπύλης εξαρτάται από τα πρόσημα των A, B :

ΘΕΩΡΗΜΑ | Αναγνώριση κωνικής

Η εξίσωση $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$ παριστάνει:

Συνθήκη	Γενικά	Εκφυλισμένες περιπτώσεις
$A = B \neq 0$	κύκλος	ένα σημείο ή κενό σύνολο
$AB > 0, A \neq B$	έλλειψη	ένα σημείο ή κενό σύνολο
$AB < 0$	υπερβολή	δύο τεμνόμενες ευθείες
$AB = 0$	παραβολή	ευθεία, δύο παράλληλες ευθείες ή κενό

🔍 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | μελέτη της $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$

- Ομαδοποίησε τους όρους με x και με y : $A(x^2 + \frac{\Gamma}{A}x) + B(y^2 + \frac{\Delta}{B}y) = -E$.
- Συμπλήρωσε τετράγωνα: $x^2 + kx = (x + \frac{k}{2})^2 - \frac{k^2}{4}$.
- Φέρε την εξίσωση σε κανονική μορφή (π.χ. διαιρώντας ώστε δεξιά να είναι 1).
- Διάβασε το κέντρο/κορυφή $K(x_0, y_0)$ και τα α, β, γ ή p .
- Βρες τα ζητούμενα στοιχεία στο σύστημα KXY και **μετάφερε τα** στο Oxy .

■ **Ενιαίος ορισμός των κωνικών: εκκεντρότητα και διευθετούσα**

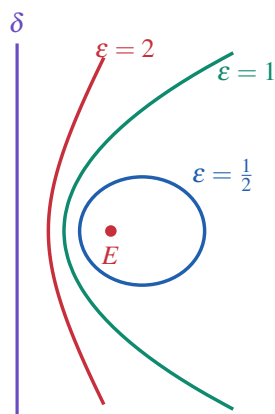
Η παραβολή ορίστηκε ως $(ME) = d(M, \delta)$, δηλαδή $\frac{(ME)}{d(M, \delta)} = 1$. Αποδεικνύεται ότι και η έλλειψη και η υπερβολή ορίζονται με ανάλογο τρόπο:

ΘΕΩΡΗΜΑ | Κωνική ως λόγος αποστάσεων

Έστω σημείο E , ευθεία δ που δεν διέρχεται από το E , και αριθμός $\varepsilon > 0$. Το σύνολο των σημείων M με

$$\frac{(ME)}{d(M, \delta)} = \varepsilon$$

είναι **έλλειψη** αν $0 < \varepsilon < 1$, **παραβολή** αν $\varepsilon = 1$, **υπερβολή** αν $\varepsilon > 1$. Για την έλλειψη και την υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} \pm \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, οι διευθετούσες που αντιστοιχούν στις εστίες $(\pm\gamma, 0)$ είναι οι ευθείες $x = \pm \frac{\alpha}{\varepsilon} = \pm \frac{\alpha^2}{\gamma}$.



Ίδια εστία E και ίδια διευθετούσα δ : καθώς η εκκεντρότητα αυξάνεται, η καμπύλη «ανοίγει» από έλλειψη σε παραβολή και σε (κλάδο) υπερβολής.

? ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Η εξίσωση $Ax^2 + By^2 + Gx + Dy + E = 0$ είναι ειδική περίπτωση της γενικής εξίσωσης δευτέρου βαθμού $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + Z = 0$, που περιέχει και τον όρο xy . Ο όρος αυτός εμφανίζεται όταν η κωνική είναι **στραμμένη**. Η αναγνώριση γίνεται τότε με τη «διακρίνουσα» $B^2 - 4AG$: αρνητική για έλλειψη, μηδέν για παραβολή, θετική για υπερβολή — θα το συναντήσεις στη Γραμμική Άλγεβρα του Πανεπιστημίου!

B Λυμένα παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.1 Έλλειψη με κέντρο εκτός αρχής

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$ παριστάνει έλλειψη και να βρείτε το κέντρο, τις κορυφές, τις εστίες και την εκκεντρότητά της.

◀ ΛΥΣΗ

Συμπληρώνουμε τετράγωνα:

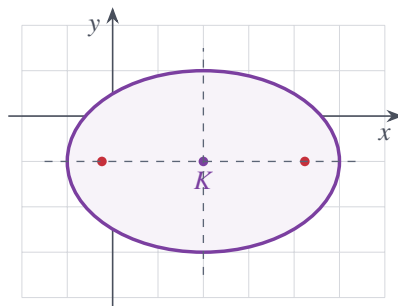
$$4(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 2y) = 11 \iff 4(x-2)^2 - 16 + 9(y+1)^2 - 9 = 11 \iff 4(x-2)^2 + 9(y+1)^2 = 36.$$

Διαιρούμε με 36: $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$

Είναι έλλειψη με **κέντρο** $K(2, -1)$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = \sqrt{5}$, με μεγάλο άξονα παράλληλο στον x' .

- Στο KXY : κορυφές $(\pm 3, 0)$, $(0, \pm 2)$, εστίες $(\pm \sqrt{5}, 0)$.

- Στο Oxy (προσθέτουμε $(2, -1)$): κορυφές $(5, -1)$, $(-1, -1)$, $(2, 1)$, $(2, -3)$ · εστίες $(2 + \sqrt{5}, -1)$, $(2 - \sqrt{5}, -1)$.
- $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.2 Υπερβολή με κέντρο εκτός αρχής

Να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση $x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0$ και τα στοιχεία της.

◀ΛΥΣΗ

$(x^2 + 6x) - 4(y^2 - 4y) = 11 \iff (x+3)^2 - 9 - 4(y-2)^2 + 16 = 11 \iff (x+3)^2 - 4(y-2)^2 = 4$,
δηλαδή

$$\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{1} = 1.$$

Υπερβολή με κέντρο $K(-3, 2)$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = \sqrt{5}$, πραγματικός άξονας παράλληλος στον x' .

Κορυφές: $(-3 \pm 2, 2)$, δηλαδή $(-1, 2)$ και $(-5, 2)$. Εστίες: $(-3 \pm \sqrt{5}, 2)$.

Ασύμπτωτες: $y - 2 = \pm \frac{1}{2}(x + 3)$. $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.3 Παραβολή με κορυφή εκτός αρχής

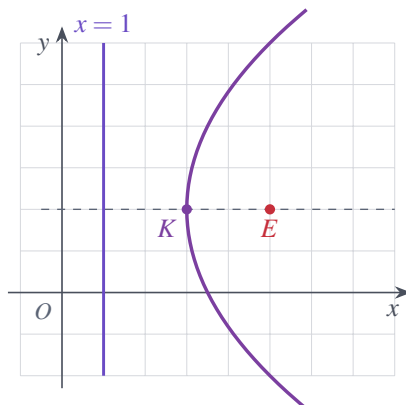
Να βρείτε την κορυφή, την εστία, τη διευθετούσα και τον άξονα της παραβολής $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$.

◀ΛΥΣΗ

$$y^2 - 4y = 8x - 28 \iff (y-2)^2 - 4 = 8x - 28 \iff (y-2)^2 = 8(x-3).$$

Στο σύστημα KXY με $K(3, 2)$: $Y^2 = 8X$, $p = 4$, εστία $(2, 0)$, διευθετούσα $X = -2$.

Στο Oxy : **κορυφή** $K(3, 2)$, **εστία** $E(5, 2)$, **διευθετούσα** $x = 1$, **άξονας** η ευθεία $y = 2$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.4 — Εκφυλισμένες περιπτώσεις

Να βρείτε τι παριστάνουν οι εξισώσεις: α) $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 9 = 0$, β) $x^2 - y^2 - 4x + 4 = 0$, γ) $y^2 - 6y + 5 = 0$.

◀ ΛΥΣΗ

α) $(x-1)^2 + 2(y+2)^2 = -9 + 1 + 8 = 0$. Άθροισμα μη αρνητικών ίσο με μηδέν: $x = 1$, $y = -2$.

Παριστάνει **μόνο το σημείο** $(1, -2)$ (εκφυλισμένη έλλειψη).

β) $(x-2)^2 - y^2 = 0 \iff (x-2-y)(x-2+y) = 0$. Παριστάνει **δύο τεμνόμενες ευθείες**: $y = x-2$ και $y = -x+2$ (εκφυλισμένη υπερβολή, «οι ασύμπτωτες μόνες τους»).

γ) Δεν υπάρχει x : $y^2 - 6y + 5 = 0 \iff y = 1$ ή $y = 5$. Δύο **παράλληλες ευθείες** $y = 1$, $y = 5$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.5 — Εξίσωση από στοιχεία

Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με εστίες $E'(-1, 3)$, $E(5, 3)$ και μεγάλο άξονα 10.

◀ ΛΥΣΗ

Κέντρο το μέσο των εστιών: $K(2, 3)$. $2\gamma = 6 \Rightarrow \gamma = 3$, $\alpha = 5$, $\beta^2 = 25 - 9 = 16$. Ο μεγάλος άξονας είναι οριζόντιος (οι εστίες έχουν ίδια τεταγμένη). Άρα

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.6 — Αναγνώριση με παράμετρο

Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \neq 0$, να βρείτε τι είδους κωνική παριστάνει η εξίσωση $x^2 + \lambda y^2 = \lambda + 1$ (εφόσον δεν είναι εκφυλισμένη).

◀ ΛΥΣΗ

Εδώ $A = 1$, $B = \lambda$.

- $\lambda = 1$: $x^2 + y^2 = 2$, **κύκλος**.
- $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$: $\frac{x^2}{\lambda+1} + \frac{y^2}{(\lambda+1)/\lambda} = 1$, με θετικούς παρονομαστές: **έλλειψη**.
- $-1 < \lambda < 0$: $\lambda + 1 > 0$ και $AB < 0$: $\frac{x^2}{\lambda+1} - \frac{y^2}{(\lambda+1)/(-\lambda)} = 1$, **υπερβολή** (εστίες στον x').
- $\lambda = -1$: $x^2 - y^2 = 0$, δύο ευθείες $y = \pm x$ (εκφυλισμένη).
- $\lambda < -1$: $\lambda + 1 < 0$: διαιρώντας με $\lambda + 1$: $\frac{y^2}{(\lambda+1)/\lambda} - \frac{x^2}{-(\lambda+1)} = 1$, **υπερβολή** με εστίες στον y' .

Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Η αναγνώριση κωνικών με συμπλήρωση τετραγώνων είναι η «σύνθεση» όλου του κεφαλαίου. Στο mathgreece.com θα βρεις 30 εξισώσεις για εξάσκηση, με κινούμενα γραφήματα που δείχνουν την παράλληλη μεταφορά.

Γ

Προσοχή και συχνά λάθη

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | πρόσημο στη μεταφορά

✗ **Λάθος:** $\frac{(x+3)^2}{4} - (y-2)^2 = 1$ έχει κέντρο $(3, -2)$.

✓ **Σωστό:** Κέντρο $(-3, 2)$: η εξίσωση είναι της μορφής $(x - x_0)^2$ με $x_0 = -3$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | συμπλήρωση με συντελεστή

✗ **Λάθος:** $4x^2 - 16x = 4(x-2)^2$ ή $4x^2 - 16x = (2x-4)^2 - 4$.

✓ **Σωστό:** Βγάζουμε πρώτα κοινό παράγοντα: $4(x^2 - 4x) = 4[(x-2)^2 - 4] = 4(x-2)^2 - 16$.
Πρόσεξε ότι αφαιρούμε $4 \cdot 4 = 16$, όχι 4.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | μεταφορά στοιχείων

✗ **Λάθος:** Για $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$: «εστίες $(\pm\sqrt{5}, 0)$ ».

✓ **Σωστό:** Αυτές είναι οι εστίες στο σύστημα KXY . Στο Oxy προσθέτουμε τις συντεταγμένες του κέντρου: $(2 \pm \sqrt{5}, -1)$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ

- Οι τύποι εφαπτομένης $(xx_1/\alpha^2 + \dots)$ του προηγούμενου μαθήματος ισχύουν στο σύστημα KXY · στο Oxy γράφονται π.χ. $\frac{(x-x_0)(x_1-x_0)}{\alpha^2} + \frac{(y-y_0)(y_1-y_0)}{\beta^2} = 1$.
- Πριν πεις «είναι έλλειψη», έλεγξε ότι το δεξί μέλος μετά τη συμπλήρωση είναι **θετικό**. Αλλιώς έχεις σημείο ή κενό σύνολο.

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 3.5 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Μεταφορά

$X = x - x_0, Y = y - y_0$: κάθε $x \rightarrow x - x_0, y \rightarrow y - y_0$

Αναγνώριση

$A = B$: κύκλος· $AB > 0$: έλλειψη· $AB < 0$: υπερβολή· $AB = 0$: παραβολή
σημείο, κενό, ευθεία ή ζεύγος ευθειών

Εκφυλισμένες

συμπλήρωση τετραγώνων $\rightarrow$ κανονική μορφή $\rightarrow$ στοιχεία στο KXY
 $\rightarrow$ μεταφορά

Μέθοδος

$\frac{(ME)}{d(M,\delta)} = \varepsilon$: $\varepsilon < 1$ έλλειψη, $= 1$ παραβολή, > 1 υπερβολή

Ενιαίος ορισμός



Ασκήσεις για λύση

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

- Να βρείτε τι παριστάνει καθεμιά από τις εξισώσεις και να προσδιορίσετε το κέντρο (ή την κορυφή) της: α) $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$, β) $9x^2 - 4y^2 + 36x + 8y - 4 = 0$, γ) $x^2 - 4x - 4y + 8 = 0$, δ) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$.

2. • Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής $y^2 + 6y - 4x + 1 = 0$.
3. • Να βρείτε τις εστίες και την εκκεντρότητα της έλλειψης $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$.
4. • Να βρείτε τις ασύμπτωτες της υπερβολής $(x-1)^2 - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$.
5. • Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με κορυφή $K(1, -2)$ και εστία $E(1, 1)$.

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμπάθυνσης

6. •• Να βρείτε την υπερβολή με κέντρο $K(2, 1)$, μία κορυφή στο $(5, 1)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{3}$.
7. •• Να εξετάσετε τι παριστάνουν οι εξισώσεις: α) $x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0$, β) $4x^2 - y^2 - 8x + 4 = 0$, γ) $x^2 + 3y^2 - 2x + 1 = 0$.
8. •• Για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση $(\kappa - 1)x^2 + (3 - \kappa)y^2 = (\kappa - 1)(3 - \kappa)$.
9. •• Να βρείτε την εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y+1)^2}{2} = 1$ στο σημείο της $(3, 0)$.
10. ••• Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία η απόσταση από το σημείο $E(4, 0)$ είναι διπλάσια από την απόσταση από την ευθεία $x = 1$. Τι είδους καμπύλη είναι;
11. ••• Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία $(ME) = \frac{1}{2}d(M, \delta)$, όπου $E(1, 0)$ και $\delta : x = 4$, και να επαληθεύσετε ότι είναι έλλειψη με εκκεντρότητα $\frac{1}{2}$.



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Τελείωσες τις κωνικές τομές! Στο mathgreece.com σε περιμένει το επαναληπτικό διαγώνισμα του 3ου κεφαλαίου και συλλογή θεμάτων τύπου εξετάσεων με βιντεολύσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

4

Θεωρία Αριθμών

Το παλαιότερο και ίσως το ομορφότερο κεφάλαιο των Μαθηματικών:
οι ακέραιοι και τα μυστικά τους

4.1

Η μαθηματική επαγωγή

4.2

Ευκλείδεια διαίρεση

4.3

Διαιρετότητα

4.4

Μέγιστος κοινός διαιρέτης – Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο

4.5

Πρώτοι αριθμοί

4.6

Η γραμμική διοφαντική εξίσωση

4.7

Ισοϋπόλοιποι αριθμοί



4.1 Η μαθηματική επαγωγή

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

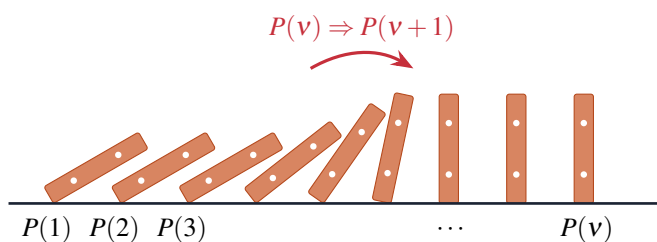
- ▶ τι είναι η αρχή της μαθηματικής επαγωγής και γιατί «δουλεύει»,
- ▶ τα δύο βήματα κάθε απόδειξης με επαγωγή,
- ▶ να αποδεικνύεις με επαγωγή ισότητες, ανισότητες και προτάσεις διαιρετότητας,
- ▶ την ανισότητα του Bernoulli,
- ▶ τα πιο συνηθισμένα λάθη στις αποδείξεις με επαγωγή.

A Θεωρία

Το «φαινόμενο του ντόμινο»

Φαντάσου μια ατελείωτη σειρά από ντόμινο. Για να είσαι βέβαιος ότι θα πέσουν **όλα**, χρειάζεσαι δύο πράγματα:

1. να πέσει το **πρώτο**, και
2. κάθε ντόμινο που πέφτει να ρίχνει το **επόμενο**.



Αυτή η απλή ιδέα είναι η βάση μιας από τις πιο ισχυρές μεθόδους απόδειξης.

Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής

ΘΕΩΡΗΜΑ | Αρχή μαθηματικής επαγωγής

Έστω $P(n)$ μια πρόταση που αναφέρεται στον θετικό ακέραιο n . Αν:

- (i) η $P(1)$ είναι αληθής, και
 - (ii) για κάθε $n \geq 1$ ισχύει: αν η $P(n)$ είναι αληθής, τότε και η $P(n+1)$ είναι αληθής,
- τότε η $P(n)$ είναι αληθής για **όλους** τους θετικούς ακεραίους n .

🔍 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | απόδειξη με επαγωγή

Βήμα 1 (Αρχικό βήμα): Ελέγχουμε ότι η πρόταση ισχύει για την πρώτη τιμή, συνήθως $n = 1$.

Βήμα 2 (Επαγωγική υπόθεση): Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο n , δηλαδή γράφουμε τι σημαίνει η $P(n)$.

Βήμα 3 (Επαγωγικό βήμα): Γράφουμε τι **θέλουμε** να αποδείξουμε, την $P(n+1)$, και την αποδεικνύουμε **χρησιμοποιώντας** την $P(n)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ | αρχή από άλλο αριθμό

Αν μια πρόταση ισχύει μόνο από κάποιο n_0 και πέρα (π.χ. $n \geq 5$), το αρχικό βήμα γίνεται για $n = n_0$ και το επαγωγικό βήμα για $n \geq n_0$. Τα ντόμινο αρχίζουν να πέφτουν από το n_0 -οστό.

■ Η ανισότητα του Bernoulli

ΘΕΩΡΗΜΑ | Ανισότητα Bernoulli

Για κάθε $\alpha > -1$ και κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

Απόδειξη. Για $n = 1$: $1 + \alpha \geq 1 + \alpha$, ισχύει. Έστω ότι $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$. Αφού $1 + \alpha > 0$, πολλαπλασιάζοντας διατηρείται η φορά:

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq (1 + n\alpha)(1 + \alpha) = 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 \geq 1 + (n+1)\alpha,$$

αφού $n\alpha^2 \geq 0$. Άρα ισχύει και για $n+1$.

⚠️ ΠΡΟΣΟΧΗ | και τα δύο βήματα είναι απαραίτητα

Μια «απόδειξη» μόνο με το επαγωγικό βήμα **δεν** είναι απόδειξη. Παράδειγμα: η πρόταση $P(n)$: « $n = n+1$ » είναι προφανώς ψευδής, όμως αν υποθέσουμε $n = n+1$, προσθέτοντας 1 βρίσκουμε $n+1 = n+2$, δηλαδή $P(n+1)$. Το επαγωγικό βήμα «δουλεύει», αλλά το πρώτο ντόμινο δεν πέφτει ποτέ!

? ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Η πρώτη σαφής χρήση επαγωγικού συλλογισμού αποδίδεται στον Francesco Maurolico (1575) και στον Blaise Pascal (1654), ο οποίος τη χρησιμοποίησε για να αποδείξει ιδιότητες του περίφημου «τριγώνου» του. Όμως ήδη ο Ευκλείδης, στην απόδειξη ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι, χρησιμοποίησε ένα «σπέρμα» αυτής της ιδέας.

B

Λυμένα παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.1 — **Άθροισμα των πρώτων n περιττών**

Να αποδείξετε ότι $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ για κάθε $n \geq 1$.

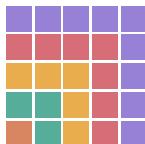
◀ ΛΥΣΗ

Για $n = 1$: αριστερό μέλος 1, δεξί $1^2 = 1$. Ισχύει.

Επαγωγική υπόθεση: $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Θα δείξουμε: $1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Πράγματι, από την υπόθεση:

$$\underbrace{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}_{=n^2} + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$



$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$: κάθε «γωνία» (περιττός αριθμός) μεγαλώνει το τετράγωνο κατά 1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.2 — **Άθροισμα τετραγώνων**

Να αποδείξετε ότι $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ για κάθε $n \geq 1$.

◀ ΛΥΣΗ

Για $n = 1$: $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$. Ισχύει.

Υπόθεση: $1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Θα δείξουμε: $1^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

$$\begin{aligned} 1^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}. \end{aligned}$$

Αφού $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$, προκύπτει το ζητούμενο.

Συμβουλή: βγάλε κοινό παράγοντα το $(n+1)$ αμέσως — μην αναπτύσσεις τα πάντα. Και γράφε πάντα από πριν το «τι θέλω να δείξω», για να ξέρεις πού πρέπει να καταλήξεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.3 — **Επαγωγή και διαιρετότητα**

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $8^n - 1$ διαιρείται με το 7 για κάθε $n \geq 1$.

◀ ΛΥΣΗ

Για $n = 1$: $8 - 1 = 7$, διαιρείται με 7.

Υπόθεση: $8^n - 1 = 7\kappa$ για κάποιον ακέραιο κ , δηλαδή $8^n = 7\kappa + 1$.

Βήμα: $8^{n+1} - 1 = 8 \cdot 8^n - 1 = 8(7\kappa + 1) - 1 = 56\kappa + 7 = 7(8\kappa + 1)$, πολλαπλάσιο του 7.

Τέχνασμα: «λύσε» την υπόθεση ως προς τη δύναμη ($8^n = 7\kappa + 1$) και αντικατέστησε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.4 — **Ανισότητα από κάποιο n_0**

Να αποδείξετε ότι $2^n > n^2$ για κάθε $n \geq 5$.

◀ ΛΥΣΗ

Για $n = 5$: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. Ισχύει.

Υπόθεση: $2^v > v^2$ για κάποιο $v \geq 5$.

Θα δείξουμε: $2^{v+1} > (v+1)^2$. Έχουμε $2^{v+1} = 2 \cdot 2^v > 2v^2$. Αρκεί λοιπόν $2v^2 \geq (v+1)^2$, δηλαδή

$$2v^2 \geq v^2 + 2v + 1 \iff v^2 - 2v - 1 \geq 0 \iff (v-1)^2 \geq 2,$$

που ισχύει για $v \geq 5$ (αφού $(v-1)^2 \geq 16$). Άρα $2^{v+1} > 2v^2 \geq (v+1)^2$.

Η ανισότητα δεν ισχύει για $v = 2, 3, 4$ ($4 = 4$, $8 < 9$, $16 = 16$). Γι' αυτό η επαγωγή ξεκινά από το 5.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.5 — Επαγωγή με αναδρομική ακολουθία

Η ακολουθία (α_v) ορίζεται από $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{v+1} = 2\alpha_v + 1$. Να αποδείξετε ότι $\alpha_v = 2^v - 1$.

◀ **ΛΥΣΗ**

Για $v = 1$: $\alpha_1 = 1 = 2^1 - 1$. **Υπόθεση:** $\alpha_v = 2^v - 1$. **Βήμα:**

$$\alpha_{v+1} = 2\alpha_v + 1 = 2(2^v - 1) + 1 = 2^{v+1} - 1.$$

Αυτή είναι η ακολουθία των κινήσεων στον γρίφο «Πύργοι του Ανόι»: με v δίσκους χρειάζονται $2^v - 1$ κινήσεις!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1.6 — Γεωμετρική εφαρμογή

Να αποδείξετε ότι v ευθείες του επιπέδου, ανά δύο τεμνόμενες και ανά τρεις μη συντρέχουσες, χωρίζουν το επίπεδο σε $\frac{v^2+v+2}{2}$ περιοχές.

◀ **ΛΥΣΗ**

Για $v = 1$: μία ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε $2 = \frac{1+1+2}{2}$ περιοχές.

Βήμα: Έστω ότι v ευθείες δημιουργούν $\frac{v^2+v+2}{2}$ περιοχές. Η $(v+1)$ -οστή ευθεία τέμνει τις v προηγούμενες σε v διαφορετικά σημεία, που τη χωρίζουν σε $v+1$ κομμάτια. Κάθε κομμάτι χωρίζει μια παλιά περιοχή στα δύο, άρα προστίθενται $v+1$ περιοχές:

$$\frac{v^2 + v + 2}{2} + (v + 1) = \frac{v^2 + 3v + 4}{2} = \frac{(v+1)^2 + (v+1) + 2}{2}.$$

Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com



Η επαγωγή θέλει «χέρι». Στο mathgreece.com θα βρεις βιντεομάθημα με τη «συνταγή των τριών βημάτων» και 30 ασκήσεις επαγωγής ταξινομημένες ανά τύπο (ισότητες, ανισότητες, διαιρετότητα).

Γ

Προσοχή και συχνά λάθη

✗ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** | χρήση του ζητούμενου

✗ **Λάθος:** Στο επαγωγικό βήμα ξεκινώ από την $P(v+1)$ σαν να ισχύει και καταλήγω σε κάτι αληθές.

✓ **Σωστό:** Ξεκινάμε από το ένα μέλος της $P(v+1)$ και, **χρησιμοποιώντας την $P(v)$** , φτάνουμε

στο άλλο. Ή γράφουμε ισοδυναμίες ($\iff$) μέχρι κάτι αληθές.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | δεν χρησιμοποιείται η υπόθεση

✗ Λάθος: Το επαγωγικό βήμα αποδεικνύεται «από την αρχή», χωρίς την $P(n)$.

✓ Σωστό: Αν δεν χρησιμοποιήσες πουθενά την επαγωγική υπόθεση, μάλλον δεν έκανες επαγωγή! Η υπόθεση είναι το «ντόμινο που πέφτει» και ρίχνει το επόμενο.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | το $P(n+1)$ γραμμένο λάθος

✗ Λάθος: Για $P(n) : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, γράφουν $P(n+1) : 1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

✓ Σωστό: Το n αντικαθίσταται με $n+1$ παντού: $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Το άθροισμα αποκτά έναν όρο επιπλέον!

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 4.1 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Αρχή

$P(1)$ αληθής και $P(n) \Rightarrow P(n+1) \Rightarrow P(n)$ για κάθε n

Βήματα

αρχικό βήμα $\rightarrow$ υπόθεση $\rightarrow$ απόδειξη για $n+1$ με χρήση της υπόθεσης

Από n_0

αρχικό βήμα για $n = n_0$

Bernoulli

$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha, \alpha > -1$

Διαιρετότητα

λύσε την υπόθεση ως προς τη δύναμη και αντικατέστησε



Ασκήσεις για λύση

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

- Να αποδείξετε με επαγωγή ότι $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Να αποδείξετε ότι $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$.
- Να αποδείξετε ότι $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
- Να αποδείξετε ότι $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.
- Να αποδείξετε ότι ο $5^n - 1$ διαιρείται με το 4 για κάθε $n \geq 1$.
- Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμβάθυνσης

7. •• Να αποδείξετε ότι $3^n \geq 2n + 1$ για κάθε $n \geq 1$.
8. •• Να αποδείξετε ότι ο $n^3 + 2n$ διαιρείται με το 3 για κάθε $n \geq 1$.
9. •• Να αποδείξετε ότι $n! > 2^n$ για κάθε $n \geq 4$. (Υπενθύμιση: $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.)
10. •• Να αποδείξετε ότι $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.
11. ••• Να αποδείξετε ότι $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} \leq n\sqrt{n}$, αλλά και ότι $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, για κάθε $n \geq 1$.
12. ••• Να αποδείξετε ότι ο $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ διαιρείται με το 7 για κάθε $n \geq 0$.



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο **mathgreece.com** θα βρεις κουίζ «Βρες το λάθος στην απόδειξη» με 10 «ψευδοαποδείξεις» με επαγωγή — ο καλύτερος τρόπος να καταλάβεις τι πραγματικά απαιτεί η μέθοδος.

4.2 Ευκλείδεια διαίρεση

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

- τη «διαίρεση με υπόλοιπο» για όλους τους ακέραιους, και θετικούς και αρνητικούς,
- γιατί το πηλίκο και το υπόλοιπο είναι μοναδικά,
- πώς γράφεται κάθε ακέραιος στις μορφές $2κ$, $2κ+1$ ή $3κ$, $3κ+1$, $3κ+2$ κ.λπ.,
- τη μέθοδο «διάκρισης περιπτώσεων» με βάση το υπόλοιπο.

A Θεωρία

Από το Δημοτικό στο Λύκειο

Όταν στο Δημοτικό διαιρούσαμε $17 : 5$ βρίσκαμε πηλίκο 3 και υπόλοιπο 2: $17 = 5 \cdot 3 + 2$. Το υπόλοιπο ήταν πάντα *μικρότερο από τον διαιρέτη*. Τι γίνεται όμως αν ο διαιρετέος ή ο διαιρέτης είναι αρνητικός; Η απάντηση δίνεται από το ακόλουθο θεμελιώδες θεώρημα.

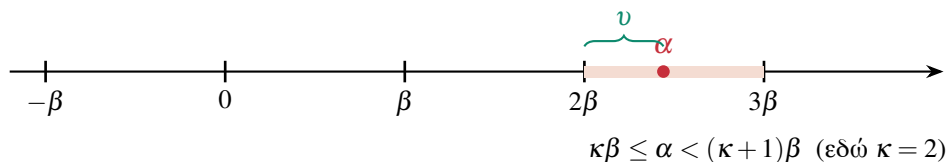
ΘΕΩΡΗΜΑ | Ευκλείδεια διαίρεση

Αν α και β είναι ακέραιοι με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν **μοναδικοί** ακέραιοι κ και v τέτοιοι ώστε

$$\alpha = \beta\kappa + v, \quad 0 \leq v < |\beta|$$

Ο κ λέγεται **πηλίκο** και ο v **υπόλοιπο** της διαίρεσης του α με τον β .

Ιδέα της απόδειξης (για $\beta > 0$). Τα πολλαπλάσια του β , δηλαδή $\dots, -2\beta, -\beta, 0, \beta, 2\beta, \dots$, χωρίζουν την ευθεία των αριθμών σε διαστήματα μήκους β . Ο α βρίσκεται σε ακριβώς ένα από αυτά, π.χ. $\kappa\beta \leq \alpha < (\kappa+1)\beta$. Τότε $v = \alpha - \kappa\beta$ ικανοποιεί $0 \leq v < \beta$.



Μοναδικότητα. Αν $\alpha = \beta\kappa + v = \beta\kappa' + v'$ με $0 \leq v, v' < |\beta|$, τότε $\beta(\kappa - \kappa') = v' - v$. Το δεξί μέλος έχει απόλυτη τιμή μικρότερη από $|\beta|$, ενώ το αριστερό είναι πολλαπλάσιο του β . Άρα και τα δύο είναι 0: $\kappa = \kappa'$, $v = v'$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ | το υπόλοιπο δεν είναι ποτέ αρνητικό

Για $\alpha = -17$, $\beta = 5$: η γραφή $-17 = 5 \cdot (-3) - 2$ **δεν** είναι ευκλείδεια διαίρεση, γιατί $-2 < 0$. Η σωστή είναι $-17 = 5 \cdot (-4) + 3$: πηλίκο -4 , υπόλοιπο 3.

Οι «μορφές» των ακεραίων

Αφού το υπόλοιπο της διαίρεσης με $\beta > 0$ είναι ένας από τους $0, 1, \dots, \beta - 1$, κάθε ακέραιος γράφεται σε ακριβώς μία από τις μορφές:

Διαίρεση με	Κάθε ακέραιος είναι της μορφής
2	2κ (άρτιος) ή $2\kappa + 1$ (περιττός)
3	$3\kappa, 3\kappa + 1, 3\kappa + 2$
4	$4\kappa, 4\kappa + 1, 4\kappa + 2, 4\kappa + 3$
β	$\beta\kappa + \nu, \nu = 0, 1, \dots, \beta - 1$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Συχνά βολεύει να χρησιμοποιούμε και «συμμετρικές» μορφές: π.χ. κάθε ακέραιος είναι 3κ ή $3\kappa \pm 1$ (αφού $3\kappa + 2 = 3(\kappa + 1) - 1$). Αυτό απλοποιεί πολύ τις πράξεις με τετράγωνα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | διάκριση περιπτώσεων

Για να αποδείξουμε μια ιδιότητα που αφορά «κάθε ακέραιο ν »:

1. Διαλέγουμε κατάλληλο διαιρέτη β (συνήθως αυτόν που εμφανίζεται στην εκφώνηση).
2. Γράφουμε $\nu = \beta\kappa + \nu$ για κάθε δυνατό υπόλοιπο ν .
3. Εξετάζουμε κάθε περίπτωση χωριστά.

? ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Η Ευκλείδεια διαίρεση πήρε το όνομά της από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη (περ. 300 π.Χ.), όπου χρησιμοποιείται για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη. Σήμερα η πράξη «υπόλοιπο» (στους υπολογιστές συμβολίζεται mod ή $\%$) είναι από τις πιο χρησιμοποιούμενες: από τον υπολογισμό της ημέρας της εβδομάδας μέχρι την κρυπτογράφηση των τραπεζικών συναλλαγών.

B

Λυμένα παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.1 Διαιρέσεις με αρνητικούς

Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης: α) $45 : 7$, β) $-45 : 7$, γ) $45 : (-7)$, δ) $-45 : (-7)$.

ΛΥΣΗ

α) $45 = 7 \cdot 6 + 3$: $\kappa = 6, \nu = 3$.

β) $-45 = 7 \cdot (-7) + 4$: $\kappa = -7, \nu = 4$. (Έλεγχος: $-49 + 4 = -45$ ✓.)

γ) $45 = (-7) \cdot (-6) + 3$: $\kappa = -6, \nu = 3$.

δ) $-45 = (-7) \cdot 7 + 4$: $\kappa = 7, \nu = 4$.

Πρακτικός τρόπος για αρνητικό διαιρετέο: αν $|\alpha| = \beta q + r$ με $r > 0$, τότε $\alpha = -|\alpha| = \beta(-q - 1) + (\beta - r)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.2 Τετράγωνα και διαίρεση με 4

Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο κάθε ακέραιου είναι της μορφής $4κ$ ή $4κ + 1$. Να συμπεράνετε ότι κανένας ακέραιος της μορφής $4κ + 3$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

◀ ΛΥΣΗ

Κάθε ακέραιος είναι άρτιος ή περιττός.

- $v = 2λ$: $v^2 = 4λ^2 = 4κ$ με $κ = λ^2$.
- $v = 2λ + 1$: $v^2 = 4λ^2 + 4λ + 1 = 4(λ^2 + λ) + 1 = 4κ + 1$.

Επομένως ένα τέλειο τετράγωνο αφήνει υπόλοιπο 0 ή 1 στη διαίρεση με 4, ποτέ 3 (ούτε 2). Π.χ. οι 2023, 1003, 99 δεν είναι τέλεια τετράγωνα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.3 Το τετράγωνο περιττού

Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο κάθε περιττού είναι της μορφής $8κ + 1$.

◀ ΛΥΣΗ

$v = 2λ + 1 \Rightarrow v^2 = 4λ^2 + 4λ + 1 = 4λ(λ + 1) + 1$. Οι $λ$, $λ + 1$ είναι διαδοχικοί, άρα ο ένας είναι άρτιος και το γινόμενο $λ(λ + 1) = 2μ$. Τότε $v^2 = 8μ + 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.4 Γινόμενο τριών διαδοχικών

Να αποδείξετε ότι το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 6.

◀ ΛΥΣΗ

Έστω $P = v(v + 1)(v + 2)$. Από δύο διαδοχικούς ο ένας είναι άρτιος, άρα P άρτιος. Για το 3 εξετάζουμε τις μορφές του v :

- $v = 3κ$: ο παράγοντας v είναι πολλαπλάσιο του 3.
- $v = 3κ + 1$: ο $v + 2 = 3κ + 3 = 3(κ + 1)$ είναι πολλαπλάσιο του 3.
- $v = 3κ + 2$: ο $v + 1 = 3(κ + 1)$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Άρα $P = 2μ$ και $P = 3λ$. Τότε $P = 3P - 2P = 6λ - 6μ = 6(λ - μ)$, πολλαπλάσιο του 6.

Στο Μάθημα 4.4 θα δούμε ότι «αν $2 \mid P$ και $3 \mid P$, τότε $6 \mid P$ » προκύπτει πιο γενικά, επειδή οι 2, 3 είναι πρώτοι μεταξύ τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.5 Υπόλοιπο παράστασης

Ο ακέραιος $α$ διαιρούμενος με το 7 αφήνει υπόλοιπο 3. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $α^2 + 2α + 5$ με το 7.

◀ ΛΥΣΗ

$α = 7κ + 3$. Τότε

$$α^2 + 2α + 5 = 49κ^2 + 42κ + 9 + 14κ + 6 + 5 = 49κ^2 + 56κ + 20 = 7(7κ^2 + 8κ + 2) + 6.$$

Αφού $0 \leq 6 < 7$, το υπόλοιπο είναι 6.

Μυστικό: όλοι οι όροι με $κ$ είναι πολλαπλάσια του 7· αρκεί να υπολογίσουμε $3^2 + 2 \cdot 3 + 5 = 20 = 7 \cdot 2 + 6$.

Στο Μάθημα 4.7 αυτό θα γίνει «κανόνας».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.6 — Εύρεση αριθμού από υπόλοιπα

Ένας θετικός ακέραιος διαιρούμενος με το 9 δίνει πηλίκο κ και υπόλοιπο 5, ενώ διαιρούμενος με το 6 δίνει πηλίκο $\kappa + 3$ και υπόλοιπο 2. Να βρείτε τον αριθμό.

ΛΥΣΗ

$$\alpha = 9\kappa + 5 = 6(\kappa + 3) + 2 \iff 9\kappa + 5 = 6\kappa + 20 \iff 3\kappa = 15 \iff \kappa = 5. \text{ Άρα } \alpha = 50.$$

Έλεγχος: $50 = 9 \cdot 5 + 5$ και $50 = 6 \cdot 8 + 2$. ✓



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις ψηφιακό «εργαστήριο υπολοίπων», όπου βλέπεις οπτικά πώς οι ακέραιοι χωρίζονται σε «κλάσεις» ανάλογα με το υπόλοιπο, και φυλλάδιο ασκήσεων για την Ευκλείδεια διαίρεση.

Γ

Προσοχή και συχνά λάθη

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | αρνητικό υπόλοιπο

✗ **Λάθος:** $-23 = 4 \cdot (-5) - 3$, άρα «υπόλοιπο -3 ».

✓ **Σωστό:** $-23 = 4 \cdot (-6) + 1$: υπόλοιπο 1. Το υπόλοιπο ικανοποιεί **πάντα** $0 \leq v < |\beta|$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | ίδιο κ σε διαφορετικούς αριθμούς

✗ **Λάθος:** «Αν $\alpha = 3\kappa + 1$ και $\beta = 3\kappa + 2$, τότε $\alpha + \beta = 6\kappa + 3$ ».

✓ **Σωστό:** Δύο διαφορετικοί αριθμοί έχουν γενικά **διαφορετικά** πηλίκα: $\alpha = 3\kappa + 1$, $\beta = 3\lambda + 2$, οπότε $\alpha + \beta = 3(\kappa + \lambda + 1)$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ

Στη μέθοδο των περιπτώσεων πρέπει να εξεταστούν **όλα** τα δυνατά υπόλοιπα. Αν παραλείψεις μία περίπτωση, η απόδειξη είναι ελλιπής.

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 4.2 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Θεώρημα

$$\alpha = \beta\kappa + v, \quad 0 \leq v < |\beta|, \text{ μοναδικοί } \kappa, v$$

Μορφές

$$2\kappa, 2\kappa + 1, 3\kappa, 3\kappa \pm 1, \beta\kappa + v$$

Τετράγωνα

$$v^2 = 4\kappa \text{ ή } 4\kappa + 1, \text{ περιπτώς }^2 = 8\kappa + 1$$

Διαδοχικοί

$$2 \mid v(v+1), \quad 6 \mid v(v+1)(v+2)$$

Μέθοδος

διάκριση περιπτώσεων ως προς το υπόλοιπο



Ασκήσεις για λύση

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

- Να βρείτε πηλίκο και υπόλοιπο στις διαιρέσεις: α) $100 : 13$, β) $-100 : 13$, γ) $100 : (-13)$, δ) $-7 : 12$.
- Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δύο περιττών είναι άρτιος και το γινόμενό τους περιττός.
- Αν ο α διαιρούμενος με το 5 αφήνει υπόλοιπο 4, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης με το 5 των αριθμών: α) 3α , β) α^2 , γ) $\alpha^2 + \alpha + 1$.
- Να αποδείξετε ότι κάθε τέλειο τετράγωνο είναι της μορφής 3κ ή $3\kappa + 1$.
- Να αποδείξετε ότι ο $n^2 + n$ είναι άρτιος για κάθε ακέραιο n .

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμβάθυνσης

- Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο n ο $n^3 - n$ διαιρείται με το 6.
- Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $n^2 + 1$ δεν διαιρείται με το 3 για κανέναν ακέραιο n .
- Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο περιττών ακεραίων δεν είναι τέλειο τετράγωνο.
- Ένας αριθμός διαιρούμενος με το 12 αφήνει υπόλοιπο 7. Ποιο υπόλοιπο αφήνει όταν διαιρεθεί με το 4 και ποιο με το 6;
- Να αποδείξετε ότι αν ο $p > 3$ είναι πρώτος, τότε ο $p^2 - 1$ διαιρείται με το 24.
- Να αποδείξετε ότι κανένας αριθμός της μορφής $8\kappa + 7$ δεν γράφεται ως άθροισμα τριών τετραγώνων ακεραίων.



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο **mathgreece.com** μπορείς να δεις όλες τις λύσεις του μαθήματος σε βίντεο και να γράψεις ένα σύντομο τεστ αυτοαξιολόγησης για την Ευκλείδεια διαίρεση.

4.3 Διαιρετότητα

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

- τον ορισμό «ο β διαιρεί τον α » ($\beta \mid \alpha$),
- τις βασικές ιδιότητες της διαιρετότητας και πώς χρησιμοποιούνται,
- τη σημαντική ιδιότητα του γραμμικού συνδυασμού: $\alpha \mid \beta, \alpha \mid \gamma \Rightarrow \alpha \mid \kappa\beta + \lambda\gamma$,
- να αποδεικνύεις και να «αξιοποιείς» σχέσεις διαιρετότητας,
- τα γνωστά κριτήρια διαιρετότητας και γιατί ισχύουν.

A Θεωρία

Ορισμός

ΟΡΙΣΜΟΣ | Διαιρετότητα

Έστω α, β ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Λέμε ότι ο β **διαιρεί** τον α , και γράφουμε $\beta \mid \alpha$, όταν η διαίρεση του α με τον β είναι **τέλεια** (υπόλοιπο 0), δηλαδή όταν υπάρχει ακέραιος κ τέτοιος ώστε

$$\alpha = \kappa\beta.$$

Τότε ο β λέγεται **διαιρέτης** του α και ο α **πολλαπλάσιο** του β . Αν ο β δεν διαιρεί τον α , γράφουμε $\beta \nmid \alpha$.

Για παράδειγμα: $3 \mid 12$, $-4 \mid 20$, $7 \nmid 0$, $5 \nmid 12$. Οι διαιρέτες του 12 είναι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

Διαιρέτες του 12 (θετικοί)



Πολλαπλάσια του 12

$\dots, -24, -12, 0, 12, 24, 36, \dots$
(άπειρα στο πλήθος)

Βασικές ιδιότητες

ΘΕΩΡΗΜΑ | Ιδιότητες διαιρετότητας

Για ακραίους α, β, γ (μη μηδενικούς όπου είναι διαιρέτες) ισχύουν:

- (1) $\alpha \mid \alpha$, $1 \mid \alpha$, $\alpha \mid 0$.
- (2) Αν $\alpha \mid \beta$ και $\beta \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid \gamma$. (μεταβατική)
- (3) Αν $\alpha \mid \beta$ και $\beta \mid \alpha$, τότε $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$.
- (4) Αν $\alpha \mid \beta$, τότε $\alpha \mid \lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ .

(5) Αν $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid (\kappa\beta + \lambda\gamma)$ για κάθε ακέραιους κ, λ . (γραμμικός συνδυασμός)

(6) Αν $\alpha \mid \beta$ και $\beta \neq 0$, τότε $|\alpha| \leq |\beta|$.

Απόδειξη της (5). $\beta = \mu\alpha$ και $\gamma = \nu\alpha$, άρα $\kappa\beta + \lambda\gamma = (\kappa\mu + \lambda\nu)\alpha$, πολλαπλάσιο του α .

Απόδειξη της (6). $\beta = \kappa\alpha$ με $\kappa \neq 0$ (αφού $\beta \neq 0$), άρα $|\kappa| \geq 1$ και $|\beta| = |\kappa||\alpha| \geq |\alpha|$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | η «χρυσή» ιδιότητα (5)

Η ιδιότητα του γραμμικού συνδυασμού είναι το πιο χρήσιμο εργαλείο. Δύο συνηθισμένες χρήσεις:

- **Ειδικές περιπτώσεις:** αν $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid \beta + \gamma$ και $\alpha \mid \beta - \gamma$.
- **«Εξάλειψη» της μεταβλητής:** αν $d \mid 2\nu + 3$ και $d \mid \nu + 1$, τότε $d \mid (2\nu + 3) - 2(\nu + 1) = 1$, άρα $d = \pm 1$.

Κριτήρια διαιρετότητας

Αν $\alpha = \overline{\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha_0}$ είναι ένας φυσικός αριθμός γραμμένος στο δεκαδικό σύστημα, τότε $\alpha = \alpha_n 10^n + \dots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$. Από αυτή τη γραφή και τις ιδιότητες προκύπτουν τα γνωστά κριτήρια:

Διαιρέτης	Κριτήριο
2 ή 5	το τελευταίο ψηφίο διαιρείται με 2 ή 5 αντίστοιχα
4 ή 25	ο αριθμός των δύο τελευταίων ψηφίων διαιρείται με 4 ή 25
3 ή 9	το άθροισμα των ψηφίων διαιρείται με 3 ή 9
11	η διαφορά (άθροισμα ψηφίων σε περιττές θέσεις) – (σε άρτιες θέσεις) διαιρείται με 11

Γιατί για το 9; Κάθε δύναμη 10^k είναι $99\dots 9 + 1$, δηλαδή $10^k = 9m_k + 1$. Άρα $\alpha = 9M + (\alpha_n + \dots + \alpha_1 + \alpha_0)$, οπότε ο α και το άθροισμα των ψηφίων του αφήνουν **το ίδιο υπόλοιπο** με το 9.

? ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ο αριθμός 142857 έχει μια μαγική ιδιότητα: $2 \cdot 142857 = 285714$, $3 \cdot 142857 = 428571$, $4 \cdot 142857 = 571428\dots$ τα ψηφία απλώς «περιστρέφονται»! Και $7 \cdot 142857 = 999999$. Το μυστικό κρύβεται στο ότι $\frac{1}{7} = 0,142857\dots$ — μια ιστορία διαιρετότητας!

B

Λυμένα παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.1 Χρήση της ιδιότητας γραμμικού συνδυασμού

Αν $7 \mid \alpha + 2\beta$, να αποδείξετε ότι $7 \mid 10\alpha + 6\beta$ και $7 \mid 3\alpha - \beta$.

◀ ΛΥΣΗ

$10\alpha + 6\beta = 10(\alpha + 2\beta) - 14\beta$. Αφού $7 \mid \alpha + 2\beta$ και $7 \mid 14\beta$, από την ιδιότητα (5): $7 \mid 10\alpha + 6\beta$.

Για το $3\alpha - \beta$: $3\alpha - \beta = 3(\alpha + 2\beta) - 7\beta$, άρα επίσης $7 \mid 3\alpha - \beta$.

Η τεχνική: γράφουμε την παράσταση που θέλουμε ως (πολλαπλάσιο της γνωστής) + (κάτι που προφανώς διαιρείται).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.2 — Διαιρέτες με μεταβλητή

Να βρείτε τους ακεραίους n για τους οποίους $n + 2 \mid 3n + 11$.

◀ ΛΥΣΗ

Αφού $n + 2 \mid n + 2$, έχουμε $n + 2 \mid 3(n + 2) = 3n + 6$. Από (5):

$$n + 2 \mid (3n + 11) - (3n + 6) = 5.$$

Οι διαιρέτες του 5 είναι $\pm 1, \pm 5$, άρα $n + 2 \in \{1, -1, 5, -5\}$, δηλαδή $n \in \{-1, -3, 3, -7\}$.

Αντίστροφα, για αυτές τις τιμές ο $n + 2$ διαιρεί το 5 και τον $3n + 6$, άρα και το άθροισμά τους $3n + 11$. ✓

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.3 — «Διαδοχικοί» αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους

Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο n οι αριθμοί $2n + 3$ και $3n + 4$ δεν έχουν κοινό διαιρέτη μεγαλύτερο του 1.

◀ ΛΥΣΗ

Έστω $d > 0$ κοινός διαιρέτης. Τότε $d \mid 3(2n + 3) - 2(3n + 4) = 9 - 8 = 1$. Άρα $d = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.4 — Απόδειξη διαιρετότητας για κάθε n

Να αποδείξετε ότι $6 \mid n(n + 1)(2n + 1)$ για κάθε ακέραιο n .

◀ ΛΥΣΗ

Γράφουμε $2n + 1 = (n + 2) + (n - 1)$. Τότε

$$n(n + 1)(2n + 1) = n(n + 1)(n + 2) + (n - 1)n(n + 1).$$

Κάθε προσθετέος είναι γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων, άρα διαιρείται με 6 (Μάθημα 4.2). Από την ιδιότητα (5), 6 διαιρεί και το άθροισμα.

Συνέπεια: το $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ είναι πάντα ακέραιος!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.5 — Διαιρετότητα με επαγωγή και χωρίς

Να αποδείξετε ότι $9 \mid 10^n - 1$ για κάθε $n \geq 1$, και να εξηγήσετε πώς προκύπτει από αυτό το κριτήριο διαιρετότητας με το 9.

◀ ΛΥΣΗ

$$10^n - 1 = (10 - 1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 1) = 9 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_n. \text{ Άρα } 9 \mid 10^n - 1.$$

Για τον αριθμό $\alpha = \sum \alpha_k 10^k$: $\alpha - (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n) = \sum \alpha_k (10^k - 1)$, που διαιρείται με 9. Επομένως $9 \mid \alpha \iff 9 \mid (\text{άθροισμα ψηφίων})$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.6 Άγνωστα ψηφία

Να βρείτε τα ψηφία x, y ώστε ο πενταψήφιος $\overline{3x56y}$ να διαιρείται με το 36, δηλαδή με το 4 και με το 9.

◀ ΛΥΣΗ

Με 4: ο $\overline{6y}$ διαιρείται με 4: $y \in \{0, 4, 8\}$.

Με 9: $3 + x + 5 + 6 + y = 14 + x + y$ διαιρείται με 9, άρα $x + y \in \{4, 13\}$.

- $y = 0$: $x = 4$ (αφού $x = 13$ αδύνατο): 34560.
- $y = 4$: $x = 0$ ή $x = 9$: 30564, 39564.
- $y = 8$: $x = 5$: 35568.

Αφού $36 = 4 \cdot 9$ και οι 4, 9 δεν έχουν κοινό διαιρέτη > 1 , «διαιρείται με 36» είναι ισοδύναμο με «διαιρείται με 4 και με 9» — θα το αιτιολογήσουμε πλήρως στο Μάθημα 4.4.

Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις παιχνίδια γνώσεων «Κυνήγι διαιρετών» και ειδικό φυλλάδιο με τις τεχνικές απόδειξης διαιρετότητας (γραμμικός συνδυασμός, παραγοντοποίηση, επαγωγή, περιπτώσεις).

Γ

Προσοχή και συχνά λάθη

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | σύμβολο | και κλάσμα

✗ **Λάθος**: Γράφουν « $3 \mid 12 = 4$ » ή συγχέουν το $3 \mid 12$ με το $\frac{3}{12}$.

✓ **Σωστό**: Το $3 \mid 12$ είναι **πρόταση** (αληθής ή ψευδής), όχι αριθμός. Διαβάζεται «το 3 διαιρεί το 12».

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | αντιστροφή της (5)

✗ **Λάθος**: «Αν $\alpha \mid \beta + \gamma$, τότε $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$.»

✓ **Σωστό**: Αντιπαράδειγμα: $5 \mid 2 + 3$, αλλά $5 \nmid 2$. Ισχύει όμως: αν $\alpha \mid \beta + \gamma$ και $\alpha \mid \beta$, τότε $\alpha \mid \gamma$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | διαιρετότητα γινομένου

✗ **Λάθος**: «Αν $6 \mid \alpha\beta$, τότε $6 \mid \alpha$ ή $6 \mid \beta$.»

✓ **Σωστό**: Αντιπαράδειγμα: $6 \mid 2 \cdot 3$, αλλά $6 \nmid 2$ και $6 \nmid 3$. (Η ιδιότητα αυτή ισχύει μόνο όταν ο διαιρέτης είναι **πρώτος** — Μάθημα 4.5.)

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ

Στο Παράδειγμα 4.3.2 ο $n + 2$ μπορεί να είναι και **αρνητικός** διαιρέτης. Μην ξεχνάς τους αρνητικούς διαιρέτες όταν ψάχνεις ακέραιες (όχι φυσικές) λύσεις!

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 4.3 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Ορισμός	$\beta \mid \alpha \iff \alpha = \kappa\beta, \kappa \in \mathbb{Z}$
Μεταβατική	$\alpha \mid \beta, \beta \mid \gamma \Rightarrow \alpha \mid \gamma$
Γραμμ. συνδυασμός	$\alpha \mid \beta, \alpha \mid \gamma \Rightarrow \alpha \mid \kappa\beta + \lambda\gamma$
Μέγεθος	$\alpha \mid \beta \neq 0 \Rightarrow \alpha \leq \beta $
Κριτήρια	2,5: τελευταίο ψηφίο· 4,25: δύο τελευταία· 3,9: άθροισμα ψηφίων· 11: εναλλασσόμενο άθροισμα

Ασκήσεις για λύση

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

- Να βρείτε όλους τους (θετικούς και αρνητικούς) διαιρέτες των αριθμών 18, -30, 37.
- Αν $5 \mid \alpha - \beta$, να αποδείξετε ότι $5 \mid 3\alpha + 2\beta$.
- Να βρείτε τους ακραίους n για τους οποίους $n - 1 \mid n + 5$.
- Να εξετάσετε αν ο αριθμός 123456789 διαιρείται με το 3, το 9 και το 11.
- Να αποδείξετε ότι αν $\alpha \mid \beta$, τότε $\alpha^2 \mid \beta^2$. Ισχύει το αντίστροφο για θετικούς ακραίους; (Θα το ξαναδούμε στο Μάθημα 4.5.)

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμβάθυνσης

- Να βρείτε τους ακραίους n για τους οποίους το κλάσμα $\frac{2n+7}{n+1}$ είναι ακέραιος.
- Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο n οι αριθμοί $3n+2$ και $5n+3$ δεν έχουν κοινό διαιρέτη μεγαλύτερο του 1.
- Να βρείτε τα ψηφία x, y ώστε ο αριθμός $\overline{7x36y}$ να διαιρείται με το 45.
- Να αποδείξετε ότι $30 \mid n^5 - n$ για κάθε ακέραιο n . (Υπόδειξη: $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$ και $n^2+1 = (n^2-4)+5$.)
- Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\overline{\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma}$ (εξαψήφιος, που προκύπτει γράφοντας δύο φορές τον ίδιο τριψήφιο) διαιρείται με το 7, το 11 και το 13.
- Να αποδείξετε ότι αν ο n είναι περιττός, τότε $24 \mid n^3 - n$.



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο mathgreece.com μπορείς να δεις τις λύσεις όλων των ασκήσεων σε βίντεο και να λύσεις επιπλέον «ασκήσεις με ψηφία» που είναι πολύ αγαπητές στους διαγωνισμούς της ΕΜΕ.

4.4

Μέγιστος κοινός διαιρέτης –
Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

- τον ορισμό του Μ.Κ.Δ. (α, β) και του Ε.Κ.Π. $[\alpha, \beta]$,
- τον **Ευκλείδειο αλγόριθμο** για τον υπολογισμό του Μ.Κ.Δ.,
- ότι ο Μ.Κ.Δ. γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός: $(\alpha, \beta) = \kappa\alpha + \lambda\beta$,
- τι σημαίνει «πρώτοι μεταξύ τους» και το σημαντικό λήμμα του Ευκλείδη,
- τη σχέση $(\alpha, \beta) \cdot [\alpha, \beta] = |\alpha\beta|$.

A Θεωρία

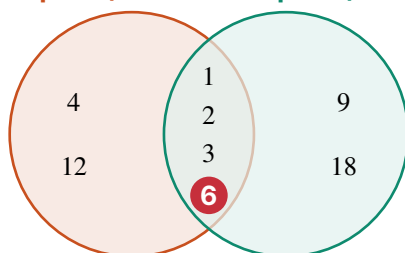
Μέγιστος κοινός διαιρέτης

ΟΡΙΣΜΟΣ | Μ.Κ.Δ.

Έστω α, β ακέραιοι, όχι και οι δύο μηδέν. **Μέγιστος κοινός διαιρέτης** τους λέγεται ο μεγαλύτερος από τους κοινούς θετικούς διαιρέτες τους. Συμβολίζεται (α, β) ή $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta)$.

Π.χ. οι θετικοί διαιρέτες του 12 είναι 1, 2, 3, 4, 6, 12 και του 18 είναι 1, 2, 3, 6, 9, 18· κοινοί: 1, 2, 3, 6. Άρα $(12, 18) = 6$.

Διαιρέτες του 12 Διαιρέτες του 18



← ο μέγιστος κοινός: $(12, 18) = 6$

Ισχύουν: $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha) = (|\alpha|, |\beta|)$, $(\alpha, 0) = |\alpha|$, $(\alpha, 1) = 1$, και αν $\beta \mid \alpha$ τότε $(\alpha, \beta) = |\beta|$.

Ο Ευκλείδειος αλγόριθμος

Η εύρεση όλων των διαιρετών είναι πρακτικά αδύνατη για μεγάλους αριθμούς. Ο Ευκλείδης βρήκε έναν εκπληκτικά γρήγορο τρόπο, που στηρίζεται στο εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ | Βασικό λήμμα

Αν $\alpha = \beta\kappa + \nu$, τότε $(\alpha, \beta) = (\beta, \nu)$.

Απόδειξη. Κάθε κοινός διαιρέτης d των α, β διαιρεί και τον $\nu = \alpha - \beta\kappa$. Αντίστροφα, κάθε κοινός διαιρέτης των β, ν διαιρεί και τον $\alpha = \beta\kappa + \nu$. Άρα τα δύο ζεύγη έχουν τους ίδιους κοινούς διαιρέτες,

επομένως και τον ίδιο μέγιστο.

🔍 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | Ευκλείδειος αλγόριθμος

Για $\alpha \geq \beta > 0$: διαιρούμε τον α με τον β , μετά τον β με το υπόλοιπο, μετά το υπόλοιπο με το νέο υπόλοιπο κ.ο.κ. Τα υπόλοιπα μικραίνουν, άρα κάποτε βρίσκουμε υπόλοιπο 0. **Ο Μ.Κ.Δ. είναι το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο.**

$$\begin{aligned} 1071 &= 462 \cdot 2 + 147 \\ 462 &= 147 \cdot 3 + 21 \\ 147 &= 21 \cdot 7 + 0 \end{aligned}$$

$$(1071, 462) = (462, 147) = (147, 21) = (21, 0) = \boxed{21}$$

Τρεις μόνο διαιρέσεις αντί για «ψάξιμο» διαιρετών!

■ Ο Μ.Κ.Δ. ως γραμμικός συνδυασμός

ΘΕΩΡΗΜΑ | Ταυτότητα Βézout

Αν α, β ακέραιοι, όχι και οι δύο μηδέν, τότε υπάρχουν ακέραιοι κ, λ τέτοιοι ώστε

$$(\alpha, \beta) = \kappa\alpha + \lambda\beta$$

Μάλιστα, ο (α, β) είναι ο **μικρότερος θετικός** άκεραιος της μορφής $\kappa\alpha + \lambda\beta$.

Πρακτικά, τους κ, λ τους βρίσκουμε «ανεβαίνοντας» προς τα πίσω τον Ευκλείδειο αλγόριθμο (Παράδειγμα 4.4.2).

ΠΡΟΤΑΣΗ | Συνέπειες

(1) Κάθε κοινός διαιρέτης των α, β διαιρεί και τον (α, β) .

(2) $(\lambda\alpha, \lambda\beta) = |\lambda|(\alpha, \beta)$.

(3) Αν $d = (\alpha, \beta)$, τότε $\left(\frac{\alpha}{d}, \frac{\beta}{d}\right) = 1$.

■ Πρώτοι μεταξύ τους

ΟΡΙΣΜΟΣ | Πρώτοι μεταξύ τους

Οι ακέραιοι α, β λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** όταν $(\alpha, \beta) = 1$, δηλαδή όταν δεν έχουν κοινό διαιρέτη μεγαλύτερο του 1.

$$(\alpha, \beta) = 1 \iff \text{υπάρχουν ακέραιοι } \kappa, \lambda \text{ με } \kappa\alpha + \lambda\beta = 1$$

ΘΕΩΡΗΜΑ | Λήμμα του Ευκλείδη

Αν $\alpha \mid \beta\gamma$ και $(\alpha, \beta) = 1$, τότε $\alpha \mid \gamma$.

Απόδειξη. Αφού $(\alpha, \beta) = 1$, υπάρχουν κ, λ με $\kappa\alpha + \lambda\beta = 1$. Πολλαπλασιάζουμε με γ : $\gamma = \kappa\alpha\gamma + \lambda\beta\gamma$. Ο α διαιρεί τον $\kappa\alpha\gamma$ και τον $\lambda\beta\gamma$ (αφού $\alpha \mid \beta\gamma$), άρα διαιρεί και το άθροισμα γ .

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $\alpha \mid \gamma, \beta \mid \gamma$ και $(\alpha, \beta) = 1$, τότε $\alpha\beta \mid \gamma$.

Απόδειξη. $\gamma = \alpha\mu$. Αφού $\beta \mid \alpha\mu$ και $(\beta, \alpha) = 1$, από το λήμμα $\beta \mid \mu$, δηλαδή $\mu = \beta\nu$. Άρα $\gamma = \alpha\beta\nu$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ | η προϋπόθεση «πρώτοι μεταξύ τους»

Χωρίς την υπόθεση $(\alpha, \beta) = 1$ η πρόταση είναι λανθασμένη: $4 \mid 12$ και $6 \mid 12$, αλλά $24 \nmid 12$. Έτσι αιτιολογούμε τελικά γιατί «διαιρείται με 6» $\iff$ «διαιρείται με 2 και με 3»: επειδή $(2, 3) = 1$.

Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο

ΟΡΙΣΜΟΣ | Ε.Κ.Π.

Αν α, β μη μηδενικοί ακέραιοι, **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο** τους λέγεται το μικρότερο θετικό κοινό πολλαπλάσιό τους. Συμβολίζεται $[\alpha, \beta]$ ή $\text{ΕΚΠ}(\alpha, \beta)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ | Σχέση Μ.Κ.Δ. – Ε.Κ.Π.

$$(\alpha, \beta) \cdot [\alpha, \beta] = |\alpha\beta|$$

Επιπλέον, κάθε κοινό πολλαπλάσιο των α, β είναι πολλαπλάσιο του $[\alpha, \beta]$.

Ειδικά, αν $(\alpha, \beta) = 1$, τότε $[\alpha, \beta] = |\alpha\beta|$.

? ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ο Ευκλείδειος αλγόριθμος (Στοιχεία, Βιβλίο VII, περ. 300 π.Χ.) θεωρείται ο **αρχαιότερος αλγόριθμος** που χρησιμοποιείται ακόμα σήμερα! Τρέχει μέσα σε κάθε υπολογιστή όταν κρυπτογραφούνται δεδομένα με το σύστημα RSA. Ο Lamé απέδειξε το 1844 ότι το πλήθος των διαιρέσεων που χρειάζονται δεν ξεπερνά ποτέ το πενταπλάσιο του πλήθους των ψηφίων του μικρότερου αριθμού.

B Λυμένα παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.1 — Ευκλείδειος αλγόριθμος

Να βρείτε τον $(2024, 345)$.

◀ ΛΥΣΗ

$$2024 = 345 \cdot 5 + 299, \quad 345 = 299 \cdot 1 + 46, \quad 299 = 46 \cdot 6 + 23, \quad 46 = 23 \cdot 2 + 0.$$

Το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο είναι 23, άρα $(2024, 345) = 23$.

Έλεγχος: $2024 = 23 \cdot 88$, $345 = 23 \cdot 15$ και $(88, 15) = 1$. ✓

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.2 — **Ο Μ.Κ.Δ. ως γραμμικός συνδυασμός**

Να βρείτε ακραίους κ, λ με $(2024, 345) = 2024\kappa + 345\lambda$.

◀ΛΥΣΗ

Λύνουμε τις ισότητες του αλγορίθμου ως προς τα υπόλοιπα και αντικαθιστούμε «από κάτω προς τα πάνω»:

$$\begin{aligned} 23 &= 299 - 46 \cdot 6 \\ &= 299 - (345 - 299) \cdot 6 = 7 \cdot 299 - 6 \cdot 345 \\ &= 7 \cdot (2024 - 345 \cdot 5) - 6 \cdot 345 = 7 \cdot 2024 - 41 \cdot 345. \end{aligned}$$

Άρα $\kappa = 7, \lambda = -41$. (Έλεγχος: $14168 - 14145 = 23$. ✓)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.3 — **Μ.Κ.Δ. με μεταβλητή**

Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό n το κλάσμα $\frac{21n+4}{14n+3}$ είναι ανάγωγο.

◀ΛΥΣΗ

Αρκεί $(21n+4, 14n+3) = 1$. Αν d είναι κοινός διαιρέτης, τότε

$$d \mid 3(14n+3) - 2(21n+4) = 42n+9-42n-8 = 1.$$

Άρα $d = 1$ και το κλάσμα είναι ανάγωγο.

Αυτό ήταν το πρώτο πρόβλημα της πρώτης Διεθνούς Μαθηματικής Ολυμπιάδας (Ρουμανία, 1959)!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.4 — **Τιμές του Μ.Κ.Δ.**

Να βρείτε τις δυνατές τιμές του $(n+3, 2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

◀ΛΥΣΗ

Αν $d = (n+3, 2n+1)$, τότε $d \mid 2(n+3) - (2n+1) = 5$. Άρα $d = 1$ ή $d = 5$.

- $d = 5$ όταν $5 \mid n+3$, δηλαδή $n = 5\kappa + 2$ (τότε και $2n+1 = 10\kappa+5$). Π.χ. $n = 2$: $(5, 5) = 5$.
- $d = 1$ σε κάθε άλλη περίπτωση. Π.χ. $n = 1$: $(4, 3) = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.5 — **Αριθμοί με γνωστό Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π.**

Να βρείτε δύο θετικούς ακραίους με $ΜΚΔ = 12$ και $ΕΚΠ = 360$.

◀ΛΥΣΗ

Γράφουμε $\alpha = 12x, \beta = 12y$ με $(x, y) = 1$. Από $(\alpha, \beta)[\alpha, \beta] = \alpha\beta$: $12 \cdot 360 = 144xy \Rightarrow xy = 30$. Ζεύγη (x, y) πρώτων μεταξύ τους με γινόμενο 30 (με $x \leq y$): $(1, 30), (2, 15), (3, 10), (5, 6)$. Άρα:

$$(\alpha, \beta) \in \{(12, 360), (24, 180), (36, 120), (60, 72)\}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.6 — **Εφαρμογή του λήμματος του Ευκλείδη**

Να αποδείξετε ότι αν $5 \mid 4\alpha$, τότε $5 \mid \alpha$, και ότι αν $(\alpha, 6) = 1$, τότε $24 \mid \alpha^2 - 1$.

◀ΛΥΣΗ

α) $(5, 4) = 1$ και $5 \mid 4\alpha$, άρα από το λήμμα του Ευκλείδη $5 \mid \alpha$.

β) Αφού $(\alpha, 6) = 1$, ο α είναι περιττός και δεν διαιρείται με 3. Τότε $8 \mid \alpha^2 - 1$ (περιττός² = $8\kappa + 1$) και $3 \mid \alpha^2 - 1$ (αφού $\alpha = 3\lambda \pm 1$). Επειδή $(8, 3) = 1$, από την πρόταση: $24 \mid \alpha^2 - 1$.



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο mathgreece.com υπάρχει «υπολογιστής Ευκλείδειου αλγορίθμου» που δείχνει βήμα-βήμα και την αντίστροφη πορεία για τους κ, λ , καθώς και βιντεομάθημα για τον Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π.

Γ

Προσοχή και συχνά λάθη

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | μοναδικότητα των κ, λ

✗ **Λάθος:** «Οι κ, λ στο $(\alpha, \beta) = \kappa\alpha + \lambda\beta$ είναι μοναδικοί.»

✓ **Σωστό:** Υπάρχουν **άπειρα** ζεύγη: π.χ. $1 = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 = 3 \cdot 3 + (-4) \cdot 2$. Και το αντίστροφο θέλει προσοχή: από $\kappa\alpha + \lambda\beta = d$ δεν έπεται $d = (\alpha, \beta)$, παρά μόνο $(\alpha, \beta) \mid d$ — εκτός αν $d = 1$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | Ε.Κ.Π. ως γινόμενο

✗ **Λάθος:** $[12, 18] = 12 \cdot 18 = 216$.

✓ **Σωστό:** $[12, 18] = \frac{12 \cdot 18}{(12, 18)} = \frac{216}{6} = 36$. Το γινόμενο ισούται με το Ε.Κ.Π. μόνο για αριθμούς πρώτους μεταξύ τους.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ

Στον Ευκλείδειο αλγόριθμο ο Μ.Κ.Δ. είναι το **τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο**, όχι το τελευταίο πηλίκο ούτε το πρώτο υπόλοιπο.

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 4.4 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Λήμμα

$$\alpha = \beta\kappa + \upsilon \Rightarrow (\alpha, \beta) = (\beta, \upsilon)$$

Αλγόριθμος

Μ.Κ.Δ. = τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο

Bézout

$$(\alpha, \beta) = \kappa\alpha + \lambda\beta \text{ (ο μικρότερος θετικός τέτοιος)}$$

Πρώτοι μεταξύ τους

$$(\alpha, \beta) = 1 \iff \kappa\alpha + \lambda\beta = 1 \text{ για κάποιους } \kappa, \lambda$$

Ευκλείδης

$$\alpha \mid \beta\gamma, (\alpha, \beta) = 1 \Rightarrow \alpha \mid \gamma$$

Γινόμενο

$$\alpha \mid \gamma, \beta \mid \gamma, (\alpha, \beta) = 1 \Rightarrow \alpha\beta \mid \gamma$$

Ε.Κ.Π.

$$(\alpha, \beta)[\alpha, \beta] = |\alpha\beta|$$

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

1. • Με τον Ευκλείδειο αλγόριθμο να βρείτε: α) $(252, 198)$, β) $(1001, 357)$, γ) $(987, 610)$.
2. • Να βρείτε ακραίους κ, λ ώστε $(252, 198) = 252\kappa + 198\lambda$.
3. • Να βρείτε το Ε.Κ.Π. των αριθμών: α) 252 και 198, β) 35 και 48.
4. • Να αποδείξετε ότι δύο διαδοχικοί ακέραιοι είναι πάντα πρώτοι μεταξύ τους, όπως και δύο διαδοχικοί περιττοί.
5. • Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το κλάσμα $\frac{3n+5}{2n+3}$ είναι ανάγωγο.

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμβάθυνσης

6. •• Να βρείτε τις δυνατές τιμές του $(3n+1, n+2)$ και για ποιους n πιάνεται καθεμία.
7. •• Να βρείτε δύο θετικούς ακραίους με άθροισμα 168 και Μ.Κ.Δ. 24.
8. •• Αν $(\alpha, \beta) = 1$, να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta, \alpha\beta) = 1$. (Υπόδειξη: δείξτε πρώτα ότι ο $d = (\alpha + \beta, \alpha\beta)$ είναι πρώτος προς τον α και προς τον β .)
9. •• Αν $(\alpha, \beta) = 1$, να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta, \alpha - \beta) \in \{1, 2\}$.
10. ••• Να αποδείξετε ότι $(2^\mu - 1, 2^\nu - 1) = 2^{(\mu, \nu)} - 1$ για τις περιπτώσεις $(\mu, \nu) = (6, 4)$ και $(12, 9)$, υπολογίζοντας και τα δύο μέλη. Μπορείτε να δώσετε εξήγηση γιατί ο $2^\nu - 1$ διαιρεί τον $2^{k\nu} - 1$;
11. ••• Τρία λεωφορεία αναχωρούν ταυτόχρονα από την αφετηρία στις 7:00. Το πρώτο επιστρέφει κάθε 24 λεπτά, το δεύτερο κάθε 36 και το τρίτο κάθε 40. Πότε θα ξαναβρεθούν και τα τρία ταυτόχρονα στην αφετηρία;

Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις περισσότερα προβλήματα «καθημερινής ζωής» με Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π. και ένα σύντομο κουίζ για να ελέγξεις αν κατέκτησες τον Ευκλείδειο αλγόριθμο.

4.5 Πρώτοι αριθμοί

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

- τι είναι πρώτος και τι σύνθετος αριθμός,
- ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι (απόδειξη του Ευκλείδη),
- πώς ελέγχουμε αν ένας αριθμός είναι πρώτος και το κόσκινο του Ερατοσθένη,
- το **Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής** (ανάλυση σε πρώτους παράγοντες),
- εφαρμογές: πλήθος διαιρετών, Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π. μέσω της ανάλυσης.

A Θεωρία

Ορισμός

ΟΡΙΣΜΟΣ | Πρώτος – σύνθετος

Ένας ακέραιος $p > 1$ λέγεται **πρώτος** αν οι μόνοι θετικοί διαιρέτες του είναι το 1 και ο εαυτός του. Ένας ακέραιος $n > 1$ που δεν είναι πρώτος λέγεται **σύνθετος**.

Οι πρώτοι αριθμοί είναι τα «άτομα» των ακεραίων: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... Το 1 **δεν** είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος, και ο 2 είναι ο **μόνος άρτιος** πρώτος.

ΘΕΩΡΗΜΑ | Ύπαρξη πρώτου διαιρέτη

Κάθε ακέραιος $n > 1$ έχει τουλάχιστον έναν πρώτο διαιρέτη. Μάλιστα, ο μικρότερος διαιρέτης του n που είναι μεγαλύτερος του 1 είναι πρώτος.

Απόδειξη. Έστω p ο μικρότερος διαιρέτης του n με $p > 1$. Αν ο p είχε διαιρέτη d με $1 < d < p$, τότε $d \mid p \mid n$, δηλαδή ο d θα ήταν μικρότερος διαιρέτης του n — άτοπο.

Οι πρώτοι είναι άπειροι

ΘΕΩΡΗΜΑ | Ευκλείδης

Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

Απόδειξη (Στοιχεία, Βιβλίο IX, Πρόταση 20). Έστω ότι οι πρώτοι είναι πεπερασμένοι, οι $p_1, p_2, \dots, p_k$. Θεωρούμε τον αριθμό

$$N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1 > 1.$$

Ο N έχει πρώτο διαιρέτη p , που θα ήταν ένας από τους p_i . Τότε $p \mid N$ και $p \mid p_1 \cdots p_k$, άρα $p \mid N - p_1 \cdots p_k = 1$ — άτοπο. Άρα οι πρώτοι είναι άπειροι.

Πώς ελέγχουμε αν ένας αριθμός είναι πρώτος

ΘΕΩΡΗΜΑ | Κριτήριο της τετραγωνικής ρίζας

Αν ο $n > 1$ είναι σύνθετος, τότε έχει πρώτο διαιρέτη $p \leq \sqrt{n}$.

Απόδειξη. $n = \alpha\beta$ με $1 < \alpha \leq \beta < n$. Τότε $\alpha^2 \leq \alpha\beta = n$, άρα $\alpha \leq \sqrt{n}$, και ένας πρώτος διαιρέτης του α είναι $\leq \sqrt{n}$ και διαιρεί τον n .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | έλεγχος πρώτου

Για να ελέγξεις αν ο n είναι πρώτος, δοκίμασε τη διαίρεση με τους πρώτους $p \leq \sqrt{n}$. Αν κανένας δεν τον διαιρεί, ο n είναι πρώτος. Π.χ. για τον 211: $\sqrt{211} < 15$, και κανένας από τους 2, 3, 5, 7, 11, 13 δεν τον διαιρεί, άρα ο 211 είναι πρώτος.

Το κόσκινο του Ερατοσθένη

Ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος (3ος αι. π.Χ.) επινόησε έναν απλό τρόπο να βρίσκουμε όλους τους πρώτους μέχρι έναν αριθμό N : γράφουμε τους αριθμούς $2, \dots, N$, και για κάθε πρώτο $p \leq \sqrt{N}$ «διαγράφουμε» τα πολλαπλάσιά του (εκτός από τον ίδιο). Όσοι αριθμοί μένουν είναι οι πρώτοι.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Οι **25 πρώτοι** μέχρι το 100. Αρκεί να διαγράψουμε τα πολλαπλάσια των 2, 3, 5, 7, αφού $\sqrt{100} = 10$.

Κάθε πρώτος μεγαλύτερος του 3 είναι της μορφής $6k \pm 1$ (Παράδειγμα 4.5.4).

Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής

ΘΕΩΡΗΜΑ | Πρώτος και γινόμενο

Αν ο πρώτος p διαιρεί το γινόμενο $\alpha\beta$, τότε $p \mid \alpha$ ή $p \mid \beta$.

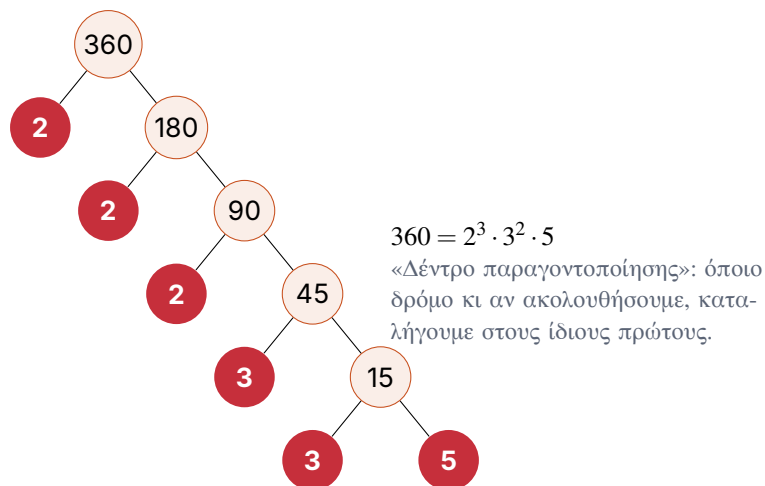
Απόδειξη. Αν $p \nmid \alpha$, τότε $(p, \alpha) = 1$ (οι μόνοι θετικοί διαιρέτες του p είναι 1 και p). Από το λήμμα του Ευκλείδη (4.4), $p \mid \beta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ | Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής

Κάθε ακέραιος $n > 1$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων αριθμών, και η γραφή αυτή είναι **μοναδική**, αν δεν λάβουμε υπόψη τη σειρά των παραγόντων. Συγκεντρώνοντας ίσους παράγοντες:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \quad p_1 < p_2 < \cdots < p_k \text{ πρώτοι, } \alpha_i \geq 1.$$

Η μορφή αυτή λέγεται **κανονική μορφή** του n .



Εφαρμογές της κανονικής μορφής

Αν $v = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, τότε:

- οι θετικοί διαιρέτες του v είναι οι αριθμοί $p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$ με $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ · το **πλήθος** τους είναι

$$\tau(v) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

- ο **Μ.Κ.Δ.** δύο αριθμών είναι το γινόμενο των *κοινών* πρώτων με τον *μικρότερο* εκθέτη, και το **Ε.Κ.Π.** το γινόμενο *όλων* των πρώτων με τον *μεγαλύτερο* εκθέτη·
- ο v είναι **τέλειο τετράγωνο** αν και μόνο αν όλοι οι εκθέτες α_i είναι άρτιοι.

? ΉΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ο μεγαλύτερος γνωστός πρώτος (βρέθηκε τον Οκτώβριο του 2024) είναι ο $2^{136279841} - 1$, με πάνω από 41 εκατομμύρια ψηφία — ένας «πρώτος Mersenne», βρέθηκε από το εθελοντικό πρόγραμμα GIMPS. Και η ασφάλεια του διαδικτύου στηρίζεται στο ότι, ενώ είναι εύκολο να πολλαπλασιάσουμε δύο τεράστιους πρώτους, είναι **εξαιρετικά δύσκολο** να κάνουμε το αντίστροφο: να βρούμε τους πρώτους παράγοντες ενός αριθμού με εκατοντάδες ψηφία.

B Λυμένα παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.5.1 Έλεγχος πρώτου

Να εξετάσετε αν είναι πρώτοι οι αριθμοί 221 και 401.

◀ ΛΥΣΗ

221: $\sqrt{221} < 15$. Δοκιμάζουμε 2, 3, 5, 7, 11, 13: $221 = 13 \cdot 17$. **Σύνθετος**.

401: $\sqrt{401} < 21$ (αφού $20^2 = 400 < 401 < 441$). Δοκιμάζουμε 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19: κανένας δεν τον διαιρεί ($401 = 7 \cdot 57 + 2 = 11 \cdot 36 + 5 = 13 \cdot 30 + 11 = 17 \cdot 23 + 10 = 19 \cdot 21 + 2$). **Πρώτος**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.5.2 — Κανονική μορφή, διαιρέτες, Μ.Κ.Δ., Ε.Κ.Π.

Να γράψετε τους $\alpha = 1260$ και $\beta = 756$ σε κανονική μορφή και να βρείτε: το πλήθος των διαιρετών του α , τον (α, β) και το $[\alpha, \beta]$.

ΛΥΣΗ

$$1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \quad \text{και} \quad 756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7.$$

- $\tau(1260) = (2+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 36$ θετικοί διαιρέτες.
- $(1260, 756) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$ (κοινοί πρώτοι, μικρότερος εκθέτης).
- $[1260, 756] = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 3780$ (όλοι οι πρώτοι, μεγαλύτερος εκθέτης).

Έλεγχος: $252 \cdot 3780 = 952560 = 1260 \cdot 756$. ✓

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.5.3 — Η $\sqrt{2}$ είναι άρρητος

Να αποδείξετε, με τη βοήθεια του Θεμελιώδους Θεωρήματος, ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

ΛΥΣΗ

Έστω $\sqrt{2} = \frac{\mu}{\nu}$ με μ, ν θετικούς ακεραίους. Τότε $\mu^2 = 2\nu^2$. Στην κανονική μορφή του μ^2 ο εκθέτης του 2 είναι **άρτιος** (διπλάσιος του εκθέτη στο μ). Στον $2\nu^2$ ο εκθέτης του 2 είναι **περιττός** (άρτιος + 1). Από τη μοναδικότητα της ανάλυσης, αυτό είναι άτοπο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.5.4 — Πρώτοι της μορφής $6k \pm 1$

Να αποδείξετε ότι κάθε πρώτος $p > 3$ είναι της μορφής $6k + 1$ ή $6k - 1$.

ΛΥΣΗ

Κάθε ακέραιος είναι $6k$, $6k \pm 1$, $6k \pm 2$ ή $6k + 3$. Οι $6k$, $6k \pm 2$ είναι άρτιοι και ο $6k + 3$ πολλαπλάσιο του 3· κανένας τους δεν είναι πρώτος > 3 . Μένουν οι $6k \pm 1$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει: $25 = 6 \cdot 4 + 1$ δεν είναι πρώτος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.5.5 — Πρώτος με παράμετρο

Να βρείτε τους πρώτους p για τους οποίους ο $p^2 + 2$ είναι επίσης πρώτος.

ΛΥΣΗ

Για $p = 3$: $p^2 + 2 = 11$, πρώτος. ✓

Για $p \neq 3$: $p = 3k \pm 1$, οπότε $p^2 = 3\mu + 1$ και $p^2 + 2 = 3\mu + 3 = 3(\mu + 1)$, πολλαπλάσιο του 3 και μεγαλύτερο του 3, άρα σύνθετος.

Μοναδική λύση: $p = 3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.5.6 — Πλήθος διαιρετών και ειδικοί αριθμοί

Να βρείτε τον μικρότερο θετικό ακέραιο που έχει ακριβώς 6 θετικούς διαιρέτες.

ΛΥΣΗ

$\tau(v) = 6 = 6 \cdot 1 = 3 \cdot 2$. Άρα είτε $v = p^5$ είτε $v = p^2 q$ ($p \neq q$ πρώτοι). Μικρότερες τιμές: $2^5 = 32$ και $2^2 \cdot 3 = 12$. Ο ζητούμενος είναι ο 12 (διαιρέτες: 1, 2, 3, 4, 6, 12).



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις διαδραστικό «κόσκινο του Ερατοσθένη», όπου διαγράφεις μόνοι σου τα πολλαπλάσια, και το βίντεο «Γιατί οι πρώτοι αριθμοί προστατεύουν τα δεδομένα μας».

Γ

Προσοχή και συχνά λάθη

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | το 1

✗ **Λάθος:** «Το 1 είναι πρώτος, αφού διαιρείται μόνο με το 1 και τον εαυτό του.»

✓ **Σωστό:** Ο ορισμός απαιτεί $p > 1$. Αν το 1 ήταν πρώτος, η ανάλυση σε πρώτους **δεν θα ήταν μοναδική** ($6 = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1^5 \cdot 2 \cdot 3 \dots$).

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | ο $p_1 \cdots p_k + 1$ είναι πρώτος;

✗ **Λάθος:** «Ο $N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$ είναι πάντα πρώτος.»

✓ **Σωστό:** Η απόδειξη του Ευκλείδη δείχνει ότι ο N έχει πρώτο διαιρέτη *διαφορετικό* από τους p_i , όχι ότι είναι πρώτος. Π.χ. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ

Η ιδιότητα « $p \mid \alpha\beta \Rightarrow p \mid \alpha$ ή $p \mid \beta$ » ισχύει **μόνο για πρώτους**. Για σύνθετους δεν ισχύει: $4 \mid 2 \cdot 6$, αλλά $4 \nmid 2$ και $4 \nmid 6$.

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 4.5 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Πρώτος

$p > 1$ με μόνους θετικούς διαιρέτες 1, p

Άπειροι

απόδειξη Ευκλείδη: $N = p_1 \cdots p_k + 1$

Έλεγχος

δοκιμή με πρώτους $p \leq \sqrt{N}$: κόσκινο Ερατοσθένη

Βασική ιδιότητα

$p \mid \alpha\beta \Rightarrow p \mid \alpha$ ή $p \mid \beta$

Θεμελιώδεις

$v = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ μοναδικά

Διαιρέτες

$\tau(v) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$

Μ.Κ.Δ. / Ε.Κ.Π.

κοινοί με μικρότερο εκθέτη / όλοι με μεγαλύτερο εκθέτη

Δ

Ασκήσεις για λύση

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

1. • Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς 91, 127, 143, 199, 323 είναι πρώτοι.
2. • Να γράψετε σε κανονική μορφή τους αριθμούς 720, 1001, 2310 και 4096.
3. • Να βρείτε το πλήθος των θετικών διαιρετών των αριθμών 720 και 2310.
4. • Με τη βοήθεια της ανάλυσης σε πρώτους να βρείτε τον Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. των 720 και 1050.
5. • Να βρείτε τον μικρότερο θετικό ακέραιο κ ώστε ο 720κ να είναι τέλειο τετράγωνο.

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμπάθυνσης

6. •• Να βρείτε τους πρώτους p για τους οποίους και οι $p+2$, $p+4$ είναι πρώτοι.
7. •• Να αποδείξετε ότι ο $\sqrt{3}$ είναι άρρητος.
8. •• Να αποδείξετε ότι αν ο $2^v - 1$ είναι πρώτος, τότε ο v είναι πρώτος. (Υπόδειξη: αν $v = \alpha\beta$ με $1 < \alpha$, χρησιμοποιήστε την άσκηση 10 του Μαθήματος 4.4.)
9. •• Να αποδείξετε ότι για κάθε $v \geq 2$ ο αριθμός $v^4 + 4$ είναι σύνθετος. (Υπόδειξη: $v^4 + 4 = (v^2 + 2)^2 - (2v)^2$.)
10. ••• Να βρείτε όλους τους θετικούς ακераίους που έχουν ακριβώς 3 θετικούς διαιρετές. Ποιοι από αυτούς είναι μικρότεροι του 100;
11. ••• Να αποδείξετε ότι υπάρχουν όσο μεγάλα θέλουμε «κενά» ανάμεσα σε διαδοχικούς πρώτους: για κάθε $v \geq 2$, οι $v-1$ διαδοχικοί αριθμοί $v!+2$, $v!+3$, $\dots$, $v!+v$ είναι όλοι σύνθετοι.



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις podcast για τις «μεγάλες άλυτες εικασίες» των πρώτων αριθμών (Goldbach, δίδυμοι πρώτοι) και ένα παιχνίδι γνώσεων με πρώτους αριθμούς.

4.6

Η γραμμική διοφαντική εξίσωση

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

- τι είναι η εξίσωση $ax + by = \gamma$ με ακέραιες λύσεις,
- πότε έχει λύση: $(\alpha, \beta) \mid \gamma$,
- πώς βρίσκουμε μια λύση (με δοκιμές ή με τον Ευκλείδειο αλγόριθμο),
- τον τύπο της γενικής λύσης,
- να λύνεις προβλήματα με θετικές ακέραιες λύσεις.

A Θεωρία

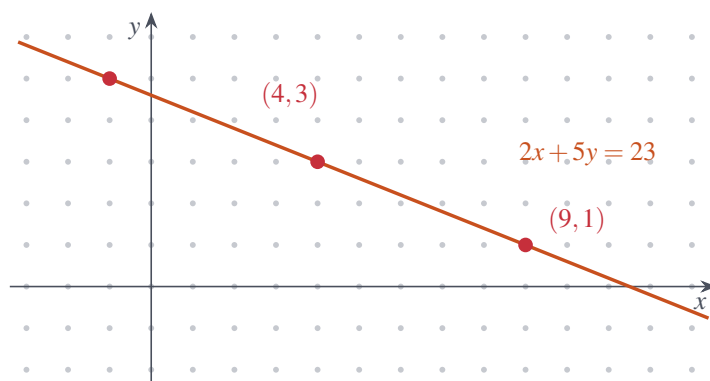
Το πρόβλημα

«Ένα μηχανήμα δέχεται μόνο κέρματα των 2 € και χαρτονομίσματα των 5 €. Με πόσους τρόπους μπορώ να πληρώσω ακριβώς 23 €;» Αν x τα κέρματα και y τα χαρτονομίσματα, ζητάμε ακέραιες λύσεις της $2x + 5y = 23$. Μια εξίσωση αυτής της μορφής, όπου ζητάμε **ακέραιες** λύσεις, λέγεται **γραμμική διοφαντική εξίσωση**, από τον Διόφαντο τον Αλεξανδρέα (3ος αι. μ.Χ.).

ΟΡΙΣΜΟΣ | Γραμμική διοφαντική εξίσωση

Είναι μια εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$, όπου α, β, γ ακέραιοι με $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, για την οποία αναζητούμε λύσεις (x, y) με $x, y \in \mathbb{Z}$.

Γεωμετρικά, η εξίσωση παριστάνει μια ευθεία και ζητάμε τα σημεία της με **ακέραιες συντεταγμένες** (τα «κόμβους» του πλέγματος):



Οι «κόκκινοι» κόμβοι απέχουν μεταξύ τους σταθερό βήμα: $(+5, -2)$. Αυτή είναι η ουσία της γενικής λύσης.

Πότε υπάρχει λύση

ΘΕΩΡΗΜΑ | Ύπαρξη λύσης

Η εξίσωση $ax + by = \gamma$ έχει ακέραιες λύσεις **αν και μόνο αν** ο $d = (\alpha, \beta)$ διαιρεί τον γ .

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Αν $ax_0 + by_0 = \gamma$, αφού $d \mid a$ και $d \mid b$, έχουμε $d \mid \gamma$.

($\Leftarrow$) Αν $\gamma = d\mu$, από την ταυτότητα Βézout υπάρχουν κ, λ με $\kappa\alpha + \lambda\beta = d$. Πολλαπλασιάζοντας με μ : $\alpha(\kappa\mu) + \beta(\lambda\mu) = \gamma$. Άρα $(x_0, y_0) = (\kappa\mu, \lambda\mu)$ είναι λύση.

Ειδικά: αν $(\alpha, \beta) = 1$, η εξίσωση έχει λύση για **κάθε** γ .

Η γενική λύση

ΘΕΩΡΗΜΑ | Γενική λύση

Αν $d = (\alpha, \beta) \mid \gamma$ και (x_0, y_0) είναι μια λύση, τότε **όλες** οι λύσεις δίνονται από τους τύπους

$$x = x_0 + \frac{\beta}{d}t, \quad y = y_0 - \frac{\alpha}{d}t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Απόδειξη. Ότι είναι λύσεις ελέγχεται με αντικατάσταση: $ax_0 + \frac{\alpha\beta}{d}t + \beta y_0 - \frac{\alpha\beta}{d}t = \gamma$. Αντίστροφα, αν (x, y) λύση, αφαιρώντας: $\alpha(x - x_0) = -\beta(y - y_0)$. Διαιρούμε με d : $\frac{\alpha}{d}(x - x_0) = -\frac{\beta}{d}(y - y_0)$. Αφού $\left(\frac{\alpha}{d}, \frac{\beta}{d}\right) = 1$, από το λήμμα του Ευκλείδη $\frac{\beta}{d} \mid x - x_0$, δηλαδή $x - x_0 = \frac{\beta}{d}t$, και τότε $y - y_0 = -\frac{\alpha}{d}t$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | επίλυση της $ax + by = \gamma$

- Βρες $d = (\alpha, \beta)$. Αν $d \nmid \gamma$: **αδύνατη**.
- Αν $d \mid \gamma$, διαιρέσε όλη την εξίσωση με d (απλούστερη εξίσωση με $(\alpha', \beta') = 1$).
- Βρες **μία** λύση (x_0, y_0) : με δοκιμές (για μικρούς αριθμούς) ή με τον Ευκλείδειο αλγόριθμο «προς τα πίσω».
- Γράψε τη γενική λύση. Αν ζητούνται θετικές λύσεις, λύσε τις ανισώσεις $x > 0$, $y > 0$ ως προς t .

? ΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ο Διόφαντος έγραψε τα *Αριθμητικά*, 13 βιβλία με προβλήματα που ζητούν ακέραιες ή ρητές λύσεις. Σε ένα αντίτυπό τους, το 1637, ο Pierre de Fermat σημείωσε στο περιθώριο ότι η εξίσωση $x^n + y^n = z^n$ δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις για $n \geq 3$, και ότι «έχει μια θαυμάσια απόδειξη που δεν χωράει στο περιθώριο». Η απόδειξη βρέθηκε μόλις το 1994, από τον Andrew Wiles, μετά από 357 χρόνια!

B

Λυμένα παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.6.1 — Λύση με δοκιμή

Να λύσετε στους ακεραίους την εξίσωση $2x + 5y = 23$ και να βρείτε τις λύσεις με $x, y \geq 0$.

◀ ΛΥΣΗ

$(2, 5) = 1 \mid 23$: έχει λύσεις. Δοκιμάζοντας $y = 1$: $2x = 18$, $x = 9$. Άρα $(x_0, y_0) = (9, 1)$ και

$$x = 9 + 5t, \quad y = 1 - 2t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Για $x \geq 0, y \geq 0$: $9 + 5t \geq 0 \iff t \geq -\frac{9}{5}$ και $1 - 2t \geq 0 \iff t \leq \frac{1}{2}$. Άρα $t \in \{-1, 0\}$:

- $t = 0$: $(9, 1)$ — εννέα κέρματα, ένα χαρτονόμισμα.
- $t = -1$: $(4, 3)$ — τέσσερα κέρματα, τρία χαρτονομίσματα.

Δηλαδή **δύο** τρόποι πληρωμής (με $x, y \geq 0$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.6.2 — Αδύνατη εξίσωση

Να εξετάσετε αν έχουν ακέραιες λύσεις οι εξισώσεις: α) $6x + 9y = 10$, β) $12x - 18y = 30$.

◀ ΛΥΣΗ

α) $(6, 9) = 3$ και $3 \nmid 10$: **αδύνατη** στους ακεραίους.

β) $(12, 18) = 6$ και $6 \mid 30$: έχει λύσεις. Διαιρούμε με 6: $2x - 3y = 5$. Μια λύση: $(x_0, y_0) = (1, -1)$. Εδώ $\alpha = 2, \beta = -3, d = 1$, οπότε ο τύπος δίνει $x = 1 + (-3)t = 1 - 3t$ και $y = -1 - 2t, t \in \mathbb{Z}$. Έλεγχος: $2(1 - 3t) - 3(-1 - 2t) = 2 - 6t + 3 + 6t = 5$ ✓.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.6.3 — Λύση με τον Ευκλείδειο αλγόριθμο

Να λύσετε την εξίσωση $47x + 29y = 3$.

◀ ΛΥΣΗ

Ευκλείδειος αλγόριθμος: $47 = 29 \cdot 1 + 18$, $29 = 18 \cdot 1 + 11$, $18 = 11 \cdot 1 + 7$, $11 = 7 \cdot 1 + 4$, $7 = 4 \cdot 1 + 3$, $4 = 3 \cdot 1 + 1$. Άρα $(47, 29) = 1$.

Προς τα πίσω:

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 = 4 - (7 - 4) = 2 \cdot 4 - 7 = 2(11 - 7) - 7 = 2 \cdot 11 - 3 \cdot 7 \\ &= 2 \cdot 11 - 3(18 - 11) = 5 \cdot 11 - 3 \cdot 18 = 5(29 - 18) - 3 \cdot 18 = 5 \cdot 29 - 8 \cdot 18 \\ &= 5 \cdot 29 - 8(47 - 29) = 13 \cdot 29 - 8 \cdot 47. \end{aligned}$$

Άρα $47 \cdot (-8) + 29 \cdot 13 = 1$. Πολλαπλασιάζουμε με 3: $47 \cdot (-24) + 29 \cdot 39 = 3$, οπότε $(x_0, y_0) = (-24, 39)$ και

$$x = -24 + 29t, \quad y = 39 - 47t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Με $t = 1$ βρίσκουμε την «απλούστερη» λύση $(5, -8)$: $235 - 232 = 3$. ✓

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.6.4 — Πρόβλημα με θετικές λύσεις

Ένα κατάστημα πουλά τετράδια προς 3 € και μπλοκ ζωγραφικής προς 7 €. Ένας μαθητής ξόδεψε ακριβώς 50 € και αγόρασε τουλάχιστον ένα από κάθε είδος. Πόσα αγόρασε από το καθένα;

◀ ΛΥΣΗ

$3x + 7y = 50$ με $x, y \geq 1$. $(3, 7) = 1$. Δοκιμάζοντας $y = 2$: $3x = 36, x = 12$. Γενική λύση: $x = 12 + 7t, y = 2 - 3t$.

$$x \geq 1 \iff t \geq -\frac{11}{7}, \quad y \geq 1 \iff t \leq \frac{1}{3}.$$

Άρα $t \in \{-1, 0\}$: $(x, y) = (12, 2)$ ή $(5, 5)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.6.5 — Πόσες θετικές λύσεις;

Πόσες λύσεις με x, y θετικούς ακεραίους έχει η $5x + 8y = 200$;

ΛΥΣΗ

$(5, 8) = 1$. Προφανής λύση: $(40, 0)$. Γενική: $x = 40 + 8t, y = -5t$. Θέλουμε $40 + 8t > 0 \iff t > -5$ και $-5t > 0 \iff t < 0$. Άρα $t \in \{-4, -3, -2, -1\}$: **τέσσερις** λύσεις: $(8, 20), (16, 15), (24, 10), (32, 5)$.



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις «λύτη διοφαντικών εξισώσεων» που δείχνει τα σημεία του πλέγματος πάνω στην ευθεία, και φυλλάδιο με προβλήματα καθημερινής ζωής που οδηγούν σε διοφαντικές εξισώσεις.

Γ

Προσοχή και συχνά λάθη

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | πρόσημα στη γενική λύση

✗ Λάθος: Για $3x + 5y = 7$ με λύση $(4, -1)$: $x = 4 + 5t, y = -1 + 3t$.

✓ Σωστό: Ο ένας τύπος έχει $+$ και ο άλλος $-$: $x = 4 + 5t, y = -1 - 3t$. Έλεγχος: $3(4 + 5t) + 5(-1 - 3t) = 7$ ✓. **Πάντα να ελέγχεις τη γενική λύση με αντικατάσταση!**

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | ξεχνώ να διαιρέσω με τον d

✗ Λάθος: Για $6x + 10y = 8$ με λύση $(3, -1)$: $x = 3 + 10t, y = -1 - 6t$.

✓ Σωστό: Τα βήματα είναι $\frac{b}{d} = 5$ και $\frac{a}{d} = 3$: $x = 3 + 5t, y = -1 - 3t$. Με βήματα 10 και 6 «χάνουμε» τις μισές λύσεις (π.χ. την $(-2, 2)$).

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ

Στα προβλήματα πρόσεξε αν ζητούνται λύσεις **θετικές** (≥ 1) ή **μη αρνητικές** (≥ 0) — η διαφορά μπορεί να αλλάξει το πλήθος των λύσεων!

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 4.6 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Εξίσωση

$$\alpha x + \beta y = \gamma, \text{ λύσεις στο } \mathbb{Z}$$

Ύπαρξη

$$\iff (\alpha, \beta) \mid \gamma$$

Μία λύση

με δοκιμές ή Ευκλείδειο αλγόριθμο προς τα πίσω

Γενική λύση

$$x = x_0 + \frac{\beta}{d}t, \quad y = y_0 - \frac{\alpha}{d}t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Θετικές λύσεις

λύνουμε $x > 0, y > 0$ ως προς t



Ασκήσεις για λύση

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

- Να εξετάσετε ποιες από τις εξισώσεις έχουν ακέραιες λύσεις: α) $4x + 6y = 9$, β) $15x + 21y = 33$, γ) $7x - 11y = 1$.
- Να λύσετε στους ακεραίους: α) $x + 3y = 10$, β) $5x + 3y = 1$, γ) $4x - 6y = 10$.
- Να βρείτε τις λύσεις της $3x + 4y = 31$ με x, y θετικούς ακεραίους.
- Να λύσετε την εξίσωση $37x + 13y = 1$ με τη βοήθεια του Ευκλείδειου αλγορίθμου.

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμβάθυνσης

- Με γραμματόσημα των 6 λεπτών και των 15 λεπτών, μπορούμε να πληρώσουμε ακριβώς ταχυδρομικά τέλη 1,20 €; Και 1,25 €; Με πόσους τρόπους στην πρώτη περίπτωση;
- Να βρείτε τους θετικούς ακεραίους που διαιρούνται με το 7 αφήνουν υπόλοιπο 3 και διαιρούνται με το 11 αφήνουν υπόλοιπο 5. Ποιος είναι ο μικρότερος;
- Να χωρίσετε τον αριθμό 100 σε δύο θετικούς προσθετέους, ώστε ο ένας να είναι πολλαπλάσιο του 7 και ο άλλος πολλαπλάσιο του 11.
- Να βρείτε τα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες της ευθείας $3x - 5y = 4$ που βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $x^2 + y^2 = 100$.
- («Πρόβλημα των 100 πουλιών», αρχαία Κίνα.) Ένας κόκορας κοστίζει 5 νομίσματα, μια κότα 3 νομίσματα, και με 1 νόμισμα αγοράζεις 3 κοτοπουλάκια. Με 100 νομίσματα αγοράζουμε ακριβώς 100 πουλιά, από κάθε είδος τουλάχιστον ένα. Πόσα από κάθε είδος;



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο mathgreece.com θα βρεις τη συνέχεια των διοφαντικών εξισώσεων με αριθμητικούς γρίφους και προβλήματα από μαθηματικούς διαγωνισμούς, λυμένα σε βίντεο.

4.7 Ισοϋπόλοιποι αριθμοί

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΑ ΜΑΘΕΙΣ:

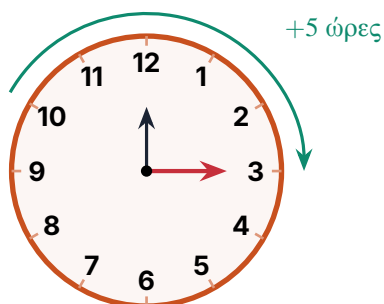
- τι σημαίνει $\alpha \equiv \beta \pmod{m}$ («ισοϋπόλοιποι» ή «ισότιμοι» αριθμοί),
- τις ιδιότητες των ισοτιμιών: πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, δυνάμεις,
- πότε επιτρέπεται η «διαγραφή» κοινού παράγοντα,
- εφαρμογές: υπόλοιπα τεράστιων δυνάμεων, τελευταίο ψηφίο, κριτήρια διαιρετότητας, ημερολόγιο.

A

Θεωρία

Αριθμητική του ρολογιού

Αν τώρα είναι 10 η ώρα, τι ώρα θα είναι σε 5 ώρες; Όχι «15», αλλά 3! Στο ρολόι «μετράμε» με υπόλοιπα της διαίρεσης με το 12: οι αριθμοί 3, 15, 27, -9 δείχνουν την ίδια θέση στο καντράν. Λέμε ότι είναι **ισοϋπόλοιποι modulo 12**.



$$10 + 5 = 15 \equiv 3 \pmod{12}$$

$$3 \equiv 15 \equiv 27 \equiv -9 \pmod{12}$$

Όλοι αφήνουν υπόλοιπο 3 όταν διαιρεθούν με το 12.

Ορισμός

ΟΡΙΣΜΟΣ | Ισοϋπόλοιποι αριθμοί

Έστω m θετικός ακέραιος ($m \geq 2$). Δύο ακέραιοι α, β λέγονται **ισοϋπόλοιποι modulo m** (ή **ισότιμοι κατά μέτρο m**) όταν αφήνουν **το ίδιο υπόλοιπο** στη διαίρεσή τους με τον m . Γράφουμε

$$\alpha \equiv \beta \pmod{m}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ | Χαρακτηρισμός

$$\alpha \equiv \beta \pmod{m} \iff m \mid \alpha - \beta$$

Απόδειξη. Αν $\alpha = m\kappa + v$ και $\beta = m\lambda + v$ (ίδιο υπόλοιπο), τότε $\alpha - \beta = m(\kappa - \lambda)$. Αντίστροφα, αν $\alpha = m\kappa + v_1$, $\beta = m\lambda + v_2$ και $m \mid \alpha - \beta$, τότε $m \mid v_1 - v_2$. Αφού $|v_1 - v_2| < m$, πρέπει $v_1 = v_2$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ειδικά: $\alpha \equiv \nu \pmod{m}$, όπου ν το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με τον m . Και $m \mid \alpha \iff \alpha \equiv 0 \pmod{m}$.

Ιδιότητες

ΘΕΩΡΗΜΑ | Ιδιότητες ισοτιμιών

Για κάθε ακέραιους και κάθε μέτρο m :

(1) $\alpha \equiv \alpha \cdot$ αν $\alpha \equiv \beta$ τότε $\beta \equiv \alpha \cdot$ αν $\alpha \equiv \beta$ και $\beta \equiv \gamma$ τότε $\alpha \equiv \gamma$.

(2) Αν $\alpha \equiv \beta$ και $\gamma \equiv \delta \pmod{m}$, τότε

$$\alpha + \gamma \equiv \beta + \delta, \quad \alpha - \gamma \equiv \beta - \delta, \quad \alpha\gamma \equiv \beta\delta \pmod{m}.$$

(3) Αν $\alpha \equiv \beta \pmod{m}$, τότε $\alpha^\nu \equiv \beta^\nu \pmod{m}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν .

Απόδειξη του γινομένου. $\alpha\gamma - \beta\delta = \alpha\gamma - \beta\gamma + \beta\gamma - \beta\delta = \gamma(\alpha - \beta) + \beta(\gamma - \delta)$, και ο m διαιρεί και τους δύο όρους. Η (3) προκύπτει από τη (2) με επαγωγή.

Σε μια ισοτιμία μπορούμε να **αντικαταστήσουμε** κάθε αριθμό με έναν ισοϋπόλοιπό του — συνήθως με τον μικρότερο σε απόλυτη τιμή — σε αθροίσματα, γινόμενα και δυνάμεις.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ | η διαίρεση θέλει προσοχή

Από $\alpha\gamma \equiv \beta\gamma \pmod{m}$ δεν έπεται γενικά $\alpha \equiv \beta \pmod{m}$. Π.χ. $2 \cdot 3 \equiv 2 \cdot 1 \pmod{4}$ ($6 \equiv 2$), αλλά $3 \not\equiv 1 \pmod{4}$. Η «διαγραφή» του γ επιτρέπεται όταν $(\gamma, m) = 1$ (από το λήμμα του Ευκλείδη: $m \mid \gamma(\alpha - \beta)$ και $(m, \gamma) = 1 \Rightarrow m \mid \alpha - \beta$).

🔍 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ | υπόλοιπο μεγάλης δύναμης

Για να βρούμε το υπόλοιπο του α^ν με τον m :

- Αντικαθιστούμε τον α με το υπόλοιπό του (ή με αρνητικό ισοϋπόλοιπο, π.χ. $\equiv -1$).
- Ψάχνουμε μια μικρή δύναμη που να είναι $\equiv 1$ ή $\equiv -1 \pmod{m}$.
- Γράφουμε τον εκθέτη ως $\nu = \kappa q + r$ και υπολογίζουμε: $\alpha^\nu = (\alpha^\kappa)^q \cdot \alpha^r$.

❓ ΗΞΕΡΕΣ ΟΤΙ...

Ο συμβολισμός $\equiv$ οφείλεται στον **Carl Friedrich Gauss**, που τον εισήγαγε στο αριστούργημά του *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), γραμμένο όταν ήταν μόλις 21 ετών. Ένα από τα ωραιότερα θεωρήματα της περιοχής είναι το «**μικρό θεώρημα του Fermat**»: αν p πρώτος και $p \nmid \alpha$, τότε $\alpha^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Π.χ. $2^6 = 64 \equiv 1 \pmod{7}$. Σε αυτό στηρίζονται οι έλεγχοι πρώτων αριθμών που κάνουν οι υπολογιστές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.7.1 Υπόλοιπο μεγάλης δύναμης

Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του 3^{2025} με το 7.

◀ ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε διαδοχικές δυνάμεις modulo 7:

$$3^1 \equiv 3, \quad 3^2 = 9 \equiv 2, \quad 3^3 \equiv 6 \equiv -1 \pmod{7}.$$

Άρα $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$. Αφού $2025 = 6 \cdot 337 + 3$:

$$3^{2025} = (3^6)^{337} \cdot 3^3 \equiv 1^{337} \cdot (-1) \equiv -1 \equiv 6 \pmod{7}.$$

Το υπόλοιπο είναι 6.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.7.2 Το τελευταίο ψηφίο

Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 7^{2024} και του $2^{100} + 3^{100}$.

◀ ΛΥΣΗ

Το τελευταίο ψηφίο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης με 10.

7^{2024} : $7^2 = 49 \equiv -1 \pmod{10}$, άρα $7^4 \equiv 1$. Αφού $2024 = 4 \cdot 506$: $7^{2024} \equiv 1 \pmod{10}$. Τελευταίο ψηφίο: 1.

$2^{100} + 3^{100}$: Τα τελευταία ψηφία των δυνάμεων του 2 επαναλαμβάνονται ανά 4: 2, 4, 8, 6, ... αφού $100 = 4 \cdot 25$, το 2^{100} λήγει σε 6. Για το 3: $3^2 \equiv -1 \pmod{10}$, $3^4 \equiv 1$, άρα $3^{100} \equiv 1$. Σύνολο: $6 + 1 = 7$. Τελευταίο ψηφίο: 7.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.7.3 Απόδειξη διαιρετότητας με ισοτιμίες

Να αποδείξετε ότι $13 \mid 4^{2v+1} + 3^{v+2}$ για κάθε $v \geq 0$.

◀ ΛΥΣΗ

Είναι $4^{2v+1} = 4 \cdot 16^v$ και $16 \equiv 3 \pmod{13}$, άρα $4^{2v+1} \equiv 4 \cdot 3^v$. Επίσης $3^{v+2} = 9 \cdot 3^v$. Οπότε

$$4^{2v+1} + 3^{v+2} \equiv 4 \cdot 3^v + 9 \cdot 3^v = 13 \cdot 3^v \equiv 0 \pmod{13}.$$

Σύγκρινε με την απόδειξη με επαγωγή (Μάθημα 4.1): οι ισοτιμίες δίνουν συχνά πολύ συντομότερη λύση!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.7.4 Κριτήριο διαιρετότητας με το 11

Να αποδείξετε το κριτήριο διαιρετότητας με το 11 και να το εφαρμόσετε στον 918082.

◀ ΛΥΣΗ

Είναι $10 \equiv -1 \pmod{11}$, άρα $10^k \equiv (-1)^k$. Για $\alpha = \alpha_v 10^v + \dots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$:

$$\alpha \equiv \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots \pmod{11}.$$

Για 918082: $2 - 8 + 0 - 8 + 1 - 9 = -22 \equiv 0 \pmod{11}$. Άρα $11 \mid 918082$ (πράγματι $918082 = 11 \cdot 83462$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.7.5 Επίλυση γραμμικής ισοτιμίας

Να βρείτε τους ακεραίους x για τους οποίους $5x \equiv 3 \pmod{12}$.

ΛΥΣΗ

Αφού $(5, 12) = 1$, ψάχνουμε τον «αντίστροφο» του 5 modulo 12: $5 \cdot 5 = 25 \equiv 1 \pmod{12}$. Πολλαπλασιάζουμε την ισοτιμία με 5:

$$25x \equiv 15 \pmod{12} \iff x \equiv 3 \pmod{12}.$$

Άρα $x = 12\kappa + 3$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Ισοδύναμα, λύσαμε τη διοφαντική $5x - 12y = 3$. Οι δύο θεωρίες είναι στενά συνδεδεμένες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.7.6 Ημερολόγιο

Η 1η Ιανουαρίου 2026 ήταν Πέμπτη. Τι μέρα θα είναι η 1η Ιανουαρίου 2027;

ΛΥΣΗ

Το 2026 δεν είναι δίσεκτο, άρα έχει 365 ημέρες. Επειδή $365 = 7 \cdot 52 + 1$, είναι $365 \equiv 1 \pmod{7}$: η ίδια ημερομηνία του επόμενου έτους «μετακινείται» κατά 1 ημέρα. Άρα η 1η Ιανουαρίου 2027 είναι **Παρασκευή**.

Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Στο **mathgreece.com** θα βρεις το βίντεο «Η αριθμητική του ρολογιού» και ένα διαδραστικό «ρολόι modulo m », με το οποίο εξερευνάς τις δυνάμεις και τα υπόλοιπα. Υπάρχει επίσης επαναληπτικό διαγώνισμα για όλο το 4ο κεφάλαιο.

Γ Προσοχή και συχνά λάθη**✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | δυνάμεις στον εκθέτη**

✗ Λάθος: «Αφού $10 \equiv 3 \pmod{7}$, έχουμε $2^{10} \equiv 2^3 \pmod{7}$.»

✓ Σωστό: Τους εκθέτες δεν τους αντικαθιστούμε με ισοϋπόλοιπους mod m ! (Εδώ $2^{10} = 1024 \equiv 2 \pmod{7}$, ενώ $2^3 = 8 \equiv 1$.) Για τους εκθέτες χρησιμοποιούμε την «περίοδο» των δυνάμεων: αφού $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$, ο εκθέτης ανάγεται modulo 3: $2^{10} = (2^3)^3 \cdot 2 \equiv 2$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ | διαγραφή παράγοντα

✗ Λάθος: $6x \equiv 6 \pmod{9} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{9}$.

✓ Σωστό: $(6, 9) = 3 \neq 1$, δεν επιτρέπεται η διαγραφή. Η σωστή λύση: $9 \mid 6(x-1) \iff 3 \mid 2(x-1) \iff 3 \mid x-1$, δηλαδή $x \equiv 1 \pmod{3}$ (και οι $x = 4, 7$ είναι λύσεις!).

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ

Στις ισοτιμίες χρησιμοποίησε ελεύθερα **αρνητικά** υπόλοιπα: $9 \equiv -1 \pmod{10}$, $16 \equiv -1 \pmod{17}$. Κάνουν τους υπολογισμούς πολύ ευκολότερους. Στο τελικό αποτέλεσμα όμως, το

υπόλοιπο γράφεται στο $\{0, 1, \dots, m-1\}$.

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ 4.7 ΣΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Ορισμός

$$\alpha \equiv \beta \pmod{m} \iff \text{ίδιο υπόλοιπο} \iff m \mid \alpha - \beta$$

Πράξεις

προσθέτουμε, αφαιρούμε, πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη, υψώνουμε σε δύναμη

Διαγραφή

$$\alpha\gamma \equiv \beta\gamma \text{ και } (\gamma, m) = 1 \Rightarrow \alpha \equiv \beta$$

Μεγάλες δυνάμεις

$$\text{βρες } \alpha^k \equiv \pm 1, \text{ γράψε } v = \kappa q + r$$

Τελευταίο ψηφίο

υπόλοιπο mod 10

Κριτήρια

$$10 \equiv 1 \pmod{9}, \quad 10 \equiv -1 \pmod{11}$$



Ασκήσεις για λύση

ΟΜΑΔΑ Α Βασικές ασκήσεις

- Να εξετάσετε αν ισχύουν: α) $47 \equiv 5 \pmod{7}$, β) $-11 \equiv 13 \pmod{6}$, γ) $100 \equiv 1 \pmod{11}$.
- Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης: α) του 2^{50} με το 7, β) του 5^{100} με το 6, γ) του 9^{2026} με το 10.
- Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του 3^{2026} και του 4^{2025} .
- Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$ με το 11, χωρίς να υπολογίσετε το άθροισμα. (Υπόδειξη: $11 - \kappa \equiv -\kappa \pmod{11}$.)
- Να λύσετε την ισοτιμία $3x \equiv 5 \pmod{7}$.

ΟΜΑΔΑ Β Ασκήσεις εμβάθυνσης

- Να αποδείξετε με ισοτιμίες ότι για κάθε $n \geq 0$: α) $7 \mid 2^{3n} - 1$, β) $17 \mid 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$.
- Να βρείτε τα δύο τελευταία ψηφία του 7^{100} .
- Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο n ο $n^7 - n$ διαιρείται με το 7, ελέγχοντας όλα τα υπόλοιπα modulo 7 (ή με το μικρό θεώρημα του Fermat).
- Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\underbrace{11 \dots 1}_{2026 \text{ μονάδες}}$ διαιρείται με το 11, αλλά ο $\underbrace{11 \dots 1}_{2025 \text{ μονάδες}}$ όχι.
- Η 25η Μαρτίου 2026 ήταν Τετάρτη. Τι μέρα της εβδομάδας θα είναι η 25η Μαρτίου 2030; (Προσοχή στα δίσεκτα έτη!)



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Συγχαρητήρια — ολοκλήρωσες όλη την ύλη! Στο **mathgreece.com** σε περιμένουν επαναληπτικά διαγωνίσματα για όλα τα κεφάλαια, βιντεολύσεις και υλικό για την προετοιμασία σου για την Γ' Λυκείου.

Τυπολόγιο

Όλοι οι βασικοί τύποι του βοηθήματος, οργανωμένοι ανά κεφάλαιο και μάθημα. Ιδανικό για γρήγορη επανάληψη πριν από κάθε διαγώνισμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 | Διανύσματα

1.1 Βασικά

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \iff AB\Delta\Gamma \text{ παραλληλόγραμμο} \cdot \text{γωνία } \theta \in [0, \pi]$$

1.2 Πρόσθεση

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \cdot ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha} \pm \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$$

1.3 Αριθμός επί διάνυσμα

$$\vec{\alpha} \neq \vec{0}: \vec{\beta} \parallel \vec{\alpha} \iff \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \cdot \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OI}}{3}$$

1.4 Συντεταγμένες

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \cdot M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \cdot |\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \iff x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \cdot \lambda = \frac{y}{x}$$

1.5 Εσωτερικό γινόμενο

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \theta = x_1 x_2 + y_1 y_2 \cdot \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \cdot \alpha^2 = |\vec{\alpha}|^2 \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{v}}{|\vec{\alpha}|} \vec{\alpha}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 | Η Ευθεία στο Επίπεδο

2.1 Εξίσωση ευθείας

$$\lambda = \varepsilon \varphi \varpi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot y - y_0 = \lambda(x - x_0) \cdot x = x_0 \cdot \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \iff \lambda_1 = \lambda_2 \cdot \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \iff \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

2.2 Γενική μορφή

$$Ax + By + \Gamma = 0 \cdot \vec{\delta} = (B, -A) \text{ παράλληλο, } \vec{\eta} = (A, B) \text{ κάθετο} \cdot \lambda = -\frac{A}{B}$$

2.3 Απόσταση – εμβαδόν

$$d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot (AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AI})|$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 | Κωνικές Τομές

3.1 Κύκλος

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \text{ εφαπτομένη } xx_1 + yy_1 = \rho^2 \cdot (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \cdot x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \text{ κύκλος αν } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$$

3.2 Παραβολή

$$y^2 = 2px: E\left(\frac{p}{2}, 0\right), \delta: x = -\frac{p}{2}, \text{ εφαπτομένη } yy_1 = p(x + x_1) \cdot x^2 = 2py: E\left(0, \frac{p}{2}\right), xx_1 = p(y + y_1)$$

3.3 Έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \beta^2 = a^2 - \gamma^2, \varepsilon = \frac{\gamma}{a} < 1 \cdot \text{εφαπτομένη } \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \cdot x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi$$

3.4 Υπερβολή

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \beta^2 = \gamma^2 - a^2, \varepsilon > 1 \cdot \text{ασύμπτωτες } y = \pm \frac{b}{a} x \cdot \text{εφαπτομένη } \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

3.5 Γενική εξίσωση

$$\text{μεταφορά } x \rightarrow x - x_0, y \rightarrow y - y_0 \cdot A = B \text{ κύκλος, } AB > 0 \text{ έλλειψη, } AB < 0 \text{ υπερβολή, } AB = 0 \text{ παραβολή}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 | Θεωρία Αριθμών

4.1 Επαγωγή

$$P(1) \text{ και } P(v) \Rightarrow P(v+1) \cdot \text{Bernoulli: } (1+\alpha)^v \geq 1+v\alpha, \alpha > -1$$

4.2 Ευκλ. διαίρεση

$$\alpha = \beta\kappa + \nu, 0 \leq \nu < |\beta| \text{ (μοναδικοί } \kappa, \nu)$$

4.3 Διαιρετότητα

$$\alpha \mid \beta, \alpha \mid \gamma \Rightarrow \alpha \mid \kappa\beta + \lambda\gamma \cdot \alpha \mid \beta \neq 0 \Rightarrow |\alpha| \leq |\beta|$$

4.4 Μ.Κ.Δ. – Ε.Κ.Π.

$$(\alpha, \beta) = (\beta, \nu) \cdot (\alpha, \beta) = \kappa\alpha + \lambda\beta \cdot \alpha \mid \beta\gamma, (\alpha, \beta) = 1 \Rightarrow \alpha \mid \gamma \cdot (\alpha, \beta)[\alpha, \beta] = |\alpha\beta|$$

4.5 Πρώτοι

$$\text{άπειροι} \cdot \text{έλεγχος με } p \leq \sqrt{v} \cdot v = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \text{ μοναδικά} \cdot \tau(v) = \prod (\alpha_i + 1)$$

4.6 Διοφαντική

$$\alpha x + \beta y = \gamma \text{ λύσιμη } \iff (\alpha, \beta) \mid \gamma \cdot x = x_0 + \frac{\beta}{d}t, y = y_0 - \frac{\alpha}{d}t$$

4.7 Ισοϋπόλοιποι

$$\alpha \equiv \beta \pmod{m} \iff m \mid \alpha - \beta \cdot \text{πρόσθεση, γινόμενο, δυνάμεις κατά μέλη}$$



Θέλεις περισσότερα; mathgreece.com

Το τυπολόγιο αυτό υπάρχει και σε μορφή **εκτυπώσιμης κάρτας** στο mathgreece.com, μαζί με επαναληπτικά διαγωνίσματα για κάθε κεφάλαιο.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

Λύσεις

των ασκήσεων

Εδώ θα βρεις τις λύσεις όλων των άλυτων ασκήσεων του βοηθήματος, οργανωμένες ανά **κεφάλαιο** και **μάθημα**, με την ίδια αρίθμηση που έχουν στο τέλος κάθε μαθήματος.

Συμβουλή: πριν κοιτάξεις μια λύση, δώσε στην άσκηση τουλάχιστον 15 λεπτά πραγματικής προσπάθειας. Αν «κολλήσεις», διάβασε μόνο τις πρώτες γραμμές της λύσης και συνέχισε μόνος σου.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 | Διανύσματα

Κεφάλαιο 1 • Μάθημα 1.1: Η έννοια του διανύσματος

1. α) Διανυσματικό (το βάρος είναι δύναμη, με κατακόρυφη διεύθυνση και φορά προς τα κάτω). β) Μονόμετρο. γ) Μονόμετρο. δ) Διανυσματικό. ε) Μονόμετρο. στ) Διανυσματικό.
2. α) $\vec{AD} = \vec{BF}$. β) Αφού οι διαγώνιοι διχοτομούνται, $\vec{OB} = \vec{DO}$. γ) $\vec{BA}$ και $\vec{GD}$. δ) Οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι κάθετες, άρα π.χ. $\vec{BD}$ και $\vec{OB}$ (ή $\vec{BD}$, $\vec{OD}$) είναι κάθετα στο $\vec{AF}$.
3. α) Σ. β) Λ (μπορεί να έχουν διαφορετική διεύθυνση). γ) Σ. δ) Σ: αφού $\vec{BA} = -\vec{AB}$, από $\vec{AB} = \vec{BA}$ έχουμε $\vec{AB} = -\vec{AB}$, άρα $\vec{AB} = \vec{0}$, δηλαδή $A \equiv B$. ε) Λ (ίσα μέτρα, όχι απαραίτητα ίδια κατεύθυνση).
4. α) Κοινή αρχή A : 60° . β) Μεταφέρουμε το $\vec{AB}$ στο B : όπως στο «Συχνό λάθος» του μαθήματος, η γωνία είναι 120° . γ) Στο ισόπλευρο τρίγωνο η διάμεσος AM είναι και ύψος, άρα $\vec{AM} \perp \vec{BF}$: 90° . δ) Το $\vec{MF}$ είναι ομόρροπο του $\vec{BF}$, άρα $(\vec{BA}, \vec{MF}) = (\vec{BA}, \vec{BF}) = 60^\circ$.
5. Το εξάγωνο αποτελείται από 6 ισόπλευρα τρίγωνα με κορυφή O , άρα κάθε τμήμα που ενώνει «γειτονικά» σημεία του σχήματος έχει μήκος ίσο με την πλευρά. Τα διανύσματα που είναι αντίρροπα του $\vec{AB}$ με ίσο μέτρο είναι: $\vec{BA}$, $\vec{GO}$, $\vec{OZ}$, $\vec{DE}$.
6. Αφού $ABGD$ παραλληλόγραμμο, $\vec{DA} = \vec{GB}$. Το E βρίσκεται στην προέκταση της DA με $AE = AD$, άρα $\vec{AE} = \vec{DA}$. Ομοίως $\vec{BZ} = \vec{GB}$. Επομένως $\vec{AE} = \vec{BZ}$. Τότε το $ABZE$ είναι παραλληλόγραμμο (τα A, B, E δεν είναι συνευθειακά), οπότε $\vec{EZ} = \vec{AB}$.
7. Από $\vec{AB} = \vec{DG}$, το $ABGD$ είναι παραλληλόγραμμο. Οι διαγώνιοί του έχουν $|\vec{AG}| = |\vec{BD}|$, δηλαδή $AG = BD$. Παραλληλόγραμμο με ίσες διαγώνιες είναι ορθογώνιο.
8. Τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$ είναι **αντίρροπα**: το $\vec{\alpha}$ έχει τη φορά του $\vec{\beta}$, ενώ το $\vec{\gamma}$ την αντίθετη. Τότε $\vec{\gamma}$ είναι ομόρροπο του $-\vec{\alpha}$, άρα $(\vec{\gamma}, \vec{\delta}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.
9. Είναι $\vec{AD} = \vec{BF}$ και $\vec{AE} = \vec{GB} = -\vec{BF} = -\vec{AD}$. Άρα τα $\vec{AE}$, $\vec{AD}$ είναι αντίθετα: έχουν κοινή αρχή A , βρίσκονται στην ίδια ευθεία, έχουν ίσα μέτρα και αντίθετες φορές. Επομένως τα D, A, E είναι συνευθειακά με $AD = AE$, δηλαδή το A είναι μέσο του DE .
10. Υπάρχουν $6 \cdot 5 = 30$ «βέλη». Τα χωρίζουμε σε τρεις κατηγορίες:
 - Πλευρές (μήκος α): 12 βέλη. Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και ίσες, άρα κάθε διάνυσμα εμφανίζεται 2 φορές: **6** διαφορετικά.
 - Μικρές διαγώνιες (μήκος $\alpha\sqrt{3}$, π.χ. AG): 12 βέλη, που πάλι ανά δύο είναι ίσα (π.χ. $\vec{AG} = \vec{ZD}$): **6** διαφορετικά.
 - Μεγάλες διαγώνιες (μήκος 2α): 6 βέλη, όλα διαφορετικά: **6**.Σύνολο: $6 + 6 + 6 = 18$ διαφορετικά μη μηδενικά διανύσματα.

Κεφάλαιο 1 • Μάθημα 1.2: Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

1. α) Αλυσίδα: $\vec{AB} + \vec{BF} + \vec{FD} + \vec{DA} = \vec{AA} = \vec{0}$.
β) $\vec{AB} - \vec{GB} - \vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BF} - \vec{AF} = \vec{AF} - \vec{AF} = \vec{0}$.
γ) $\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{BA}$ και $\vec{NB} - \vec{NA} = \vec{AB}$, άρα το άθροισμα είναι $\vec{BA} + \vec{AB} = \vec{0}$.
2. α) $\vec{AF}$. β) $\vec{GB}$. γ) $\vec{GB} + \vec{BA} + \vec{AG} = \vec{GB} = \vec{0}$. δ) $\vec{GA} - \vec{GB} = \vec{BA}$, οπότε $\vec{AB} + \vec{BA} + \vec{BF} = \vec{0} + \vec{BF} = \vec{BF}$.

3. α) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$ και $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AG}$. Άρα τα δύο μέλη είναι ίσα.
β) Η ισότητα γράφεται ισοδύναμα $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BG} - \overrightarrow{BD}$, δηλαδή $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DG}$, που ισχύει.
4. Είναι $|\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}| = 7$, οπότε $|4 - 7| \leq |\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}| \leq 4 + 7$, δηλαδή $3 \leq |\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}| \leq 11$. Μέγιστο 11 όταν τα $\overrightarrow{\alpha}, -\overrightarrow{\beta}$ είναι ομόρροπα, δηλαδή όταν $\overrightarrow{\alpha} \uparrow \overrightarrow{\beta}$. Ελάχιστο 3 όταν $\overrightarrow{\alpha} \uparrow \overrightarrow{\beta}$.
5. α) $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AG} = -(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta})$. β) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}$. γ) $\overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{\alpha}$, άρα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$. δ) $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{\alpha}$, άρα $\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{\alpha}$.
6. $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AD}$. Είναι $\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{GB}$, οπότε $\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$. Μένει $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$.
7. $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BG}$. Τότε $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$, άρα $B \equiv \Delta$.
8. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BG}$. Από το θεώρημα του Μαθήματος 1.1, αφού $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BG}$ και τα A, B, Δ δεν είναι συνευθειακά, το $AB\Gamma\Delta$ είναι **παραλληλόγραμμο** (είναι ο κανόνας του παραλληλογράμμου με διαγώνιο AG).
9. Σχεδιάζουμε $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\beta}$, οπότε $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$. Το τρίγωνο OAM έχει $OA = AM = OM = 2$, είναι δηλαδή ισόπλευρο, με $\widehat{OAM} = 60^\circ$. Η γωνία των $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ είναι η γωνία του $\overrightarrow{AM}$ με την προέκταση του OA πέρα από το A , δηλαδή $(\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
10. Είναι $|\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}| = 7 = 3 + 4 = |\overrightarrow{\alpha}| + |\overrightarrow{\beta}|$ · η ισότητα στην τριγωνική ανισότητα ισχύει μόνο για ομόρροπα διανύσματα, άρα $\overrightarrow{\alpha} \uparrow \overrightarrow{\beta}$. Τα μοναδιαία διανύσματα $\frac{1}{3}\overrightarrow{\alpha}$ και $\frac{1}{4}\overrightarrow{\beta}$ είναι ομόρροπα με μέτρο 1, άρα ίσα: $\frac{1}{3}\overrightarrow{\alpha} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\beta} \Rightarrow 4\overrightarrow{\alpha} = 3\overrightarrow{\beta}$.
11. Ομαδοποιούμε τους όρους σε δύο «κλειστές αλυσίδες»: $(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DZ} + \overrightarrow{ZB}) = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Κεφάλαιο 1 • Μάθημα 1.3: Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

1. α) $3\overrightarrow{\alpha} - 6\overrightarrow{\beta} + 2\overrightarrow{\beta} - 2\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\alpha} - 4\overrightarrow{\beta}$. β) $2\overrightarrow{\alpha} + 3\overrightarrow{\beta} - 3\overrightarrow{\alpha} - 3\overrightarrow{\beta} = -\overrightarrow{\alpha}$. γ) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GB}$, άρα $2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GB} = 4\overrightarrow{GB}$.
2. α) $2\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x} = -\overrightarrow{\beta} - 3\overrightarrow{\alpha}$, άρα $\overrightarrow{x} = -3\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}$. β) $4\overrightarrow{x} - 4\overrightarrow{\beta} = 2\overrightarrow{\alpha} + 2\overrightarrow{x} \iff 2\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{\alpha} + 4\overrightarrow{\beta} \iff \overrightarrow{x} = \overrightarrow{\alpha} + 2\overrightarrow{\beta}$.
3. α) $\frac{\overrightarrow{\alpha}}{5}$. β) $-\frac{\overrightarrow{\alpha}}{5}$. γ) Το $-3\overrightarrow{\alpha}$ είναι αντίρροπο του $\overrightarrow{\alpha}$, άρα το ζητούμενο είναι $-\frac{\overrightarrow{\alpha}}{5}$. Τέλος $|\frac{2}{5}\overrightarrow{\alpha}| = \frac{2}{5} \cdot 5 = 2$.
4. Με σημείο αναφοράς το A : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$. Άρα $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$. Συνεπώς $DE \parallel BG$ και $DE = \frac{1}{2}BG$: είναι το **θεώρημα των μέσων** των πλευρών τριγώνου.
5. Αφού $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ μη συγγραμμικά, εξισώνουμε συντελεστές: $x + 2 = 3$ και $y - 1 = -2y$. Άρα $x = 1, y = \frac{1}{3}$.
6. $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DG} \iff \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD}) \iff 3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AG} \iff \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$.
7. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = 4\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$ και $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = 12\overrightarrow{\alpha} + 3\overrightarrow{\beta} = 3(4\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}) = 3\overrightarrow{AG}$. Τα $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AD}$ είναι παράλληλα με κοινό σημείο A , άρα τα A, Γ, Δ είναι συνευθειακά.
8. Το $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ (αλλιώς $\overrightarrow{\alpha} = -\lambda\overrightarrow{\beta}$). Άρα $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u} = \mu\overrightarrow{v}$: $\lambda\overrightarrow{\alpha} + 4\overrightarrow{\beta} = \mu\overrightarrow{\alpha} + \mu\lambda\overrightarrow{\beta}$, οπότε $\lambda = \mu$ και $4 = \mu\lambda = \lambda^2$. Άρα $\lambda = 2$ ή $\lambda = -2$.
Για $\lambda = 2$: $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{\alpha} + 4\overrightarrow{\beta} = 2\overrightarrow{v}$, **ομόρροπα**. Για $\lambda = -2$: $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{\alpha} + 4\overrightarrow{\beta} = -2(\overrightarrow{\alpha} - 2\overrightarrow{\beta}) = -2\overrightarrow{v}$, **αντίρροπα**.
9. Με σημείο αναφοράς O : $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3}$. Το δεύτερο μέλος είναι ορισμένο διάνυσμα, άρα το M είναι μοναδικό. Με $O \equiv A$: $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Κατασκευή: χωρίζουμε το AB σε τρία ίσα μέρη· το M είναι το σημείο της AB με $AM = \frac{2}{3}AB$.

10. Θέτουμε $\vec{AB} = \vec{\alpha}, \vec{AD} = \vec{\beta}$. Τότε $\vec{AM} = \vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$ και $\vec{BD} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$. Αφού $K \in AM$: $\vec{AK} = s\vec{AM} = s\vec{\alpha} + \frac{s}{2}\vec{\beta}$. Αφού $K \in BD$: $\vec{AK} = \vec{AB} + t\vec{BD} = (1-t)\vec{\alpha} + t\vec{\beta}$. Εξισώνοντας συντελεστές (μη συγγραμμικά): $s = 1-t$, $\frac{s}{2} = t$. Άρα $s = \frac{2}{3}, t = \frac{1}{3}$, δηλαδή $\vec{BK} = \frac{1}{3}\vec{BD}$.
11. Με σημείο αναφοράς O : $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{\Gamma\Gamma'} = (\vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{O\Gamma'}) - (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma}) = 3\vec{OG'} - 3\vec{OG} = 3\vec{GG'}$. Αν $G \equiv G'$, τότε $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{\Gamma\Gamma'} = \vec{0}$.
12. $\vec{AM} = \lambda\vec{MB} \iff \vec{OM} - \vec{OA} = \lambda(\vec{OB} - \vec{OM}) \iff (1+\lambda)\vec{OM} = \vec{OA} + \lambda\vec{OB}$, και αφού $\lambda \neq -1$, $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \lambda\vec{OB}}{1+\lambda}$. Για $\lambda = 1$: $\vec{AM} = \vec{MB}$ (M μέσο) και $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$.

Κεφάλαιο 1 • Μάθημα 1.4: Συντεταγμένες στο επίπεδο

1. α) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (-1, 3)$, μέτρο $\sqrt{1+9} = \sqrt{10}$.
β) $3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = (6, -3) - (-6, 8) = (12, -11)$, μέτρο $\sqrt{144+121} = \sqrt{265}$.
γ) $\frac{1}{2}\vec{\beta} - \vec{\alpha} = (-\frac{3}{2}, 2) - (2, -1) = (-\frac{7}{2}, 3)$, μέτρο $\sqrt{\frac{49}{4} + 9} = \sqrt{\frac{85}{4}} = \frac{\sqrt{85}}{2}$.
2. α) $M(\frac{-2+4}{2}, \frac{3-5}{2}) = M(1, -1)$. β) $\vec{AB} = (6, -8)$, $(AB) = \sqrt{36+64} = 10$. γ) Αν $\Gamma(x, y)$, τότε $\frac{-2+x}{2} = 4$ και $\frac{3+y}{2} = -5$, άρα $\Gamma(10, -13)$.
3. $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = x(x+1) - 2 \cdot 3 = x^2 + x - 6 = 0 \iff x = 2 \text{ ή } x = -3$.
4. $\vec{AB} = (2, 6)$, $\vec{AI} = (4, 12)$, $\det(\vec{AB}, \vec{AI}) = 2 \cdot 12 - 4 \cdot 6 = 0$. Άρα τα σημεία είναι συνευθειακά (μάλιστα $\vec{AI} = 2\vec{AB}$, οπότε το B είναι μέσο του AI).
5. $P(0, y)$: $(PA)^2 = 16 + (y-1)^2 = 25 \iff (y-1)^2 = 9 \iff y = 4 \text{ ή } y = -2$. Άρα $P_1(0, 4), P_2(0, -2)$.
6. $|\vec{\alpha}| = \sqrt{25+144} = 13$. Το ζητούμενο είναι $\vec{\nu} = -\frac{26}{13}\vec{\alpha} = -2\vec{\alpha} = (-10, 24)$.
7. α) $G(\frac{1+5+3}{3}, \frac{1+3+7}{3}) = G(3, \frac{11}{3})$. β) $\vec{AD} = \vec{BI} = (-2, 4)$, άρα $\Delta(-1, 5)$. γ) Μέσο του AB : $M(3, 2)$, $\vec{\Gamma M} = (0, -5)$, άρα $(\Gamma M) = 5$.
8. $(MA)^2 = (MB)^2 \iff (t-2)^2 + t^2 = t^2 + (t-4)^2 \iff -4t + 4 = -8t + 16 \iff t = 3$. Άρα $M(3, 3)$.
9. $\kappa(1, -2) + \lambda(2, 1) = (4, 7) \iff \kappa + 2\lambda = 4, -2\kappa + \lambda = 7$. Από την πρώτη $\kappa = 4 - 2\lambda$, οπότε $-8 + 5\lambda = 7$, $\lambda = 3$, $\kappa = -2$. Άρα $\vec{\nu} = -2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.
10. Είναι $\lambda^2 - 4 = 0 \iff \lambda = \pm 2$ και $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \iff \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 2$.
α) Και οι δύο μηδέν: $\lambda = 2$. β) Τεταγμένη μηδέν και τετμημένη μη μηδενική: $\lambda = 1$ (τότε $\vec{\alpha} = (-3, 0)$).
γ) Τετμημένη μηδέν και τεταγμένη μη μηδενική: $\lambda = -2$ (τότε $\vec{\alpha} = (0, 12)$).
11. Από το Μάθημα 1.3 (άσκηση 12) με $\lambda = 2$: $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + 2\vec{OB}}{3}$, άρα $M(\frac{1+8}{3}, \frac{2+6}{3}) = M(3, \frac{8}{3})$.
Για το N εκτός του τμήματος με $(NA) = 2(NB)$: το N είναι πέρα από το B και $(NB) = (AB)$, δηλαδή το B είναι μέσο του AN . Άρα $N(2 \cdot 4 - 1, 2 \cdot 3 - 2) = N(7, 4)$. Έλεγχος: $(NA) = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$, $(NB) = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$. ✓
12. $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} = (3, 4)$, $|\vec{\alpha}| = 5$, και $\vec{\beta} = (2\sin\theta, 2\eta\mu\theta)$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{4\sin^2\theta + 4\eta\mu^2\theta} = 2$. Από την τριγωνική ανισότητα $|5-2| \leq |\vec{u}| \leq 5+2$, δηλαδή $3 \leq |\vec{u}| \leq 7$.
Η τιμή 7 πιάνεται όταν $\vec{\beta} \uparrow \vec{\alpha}$, δηλαδή $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$, και η τιμή 3 όταν $\vec{\beta} \downarrow \vec{\alpha}$, δηλαδή $\sin\theta = -\frac{3}{5}$, $\eta\mu\theta = -\frac{4}{5}$. Άρα μέγιστο 7, ελάχιστο 3.

Κεφάλαιο 1 • Μάθημα 1.5: Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

1. α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 5$. β) $(\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = 4 - 2 \cdot 5 + 25 = 19$. γ) $3\vec{\alpha}^2 - 6\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}^2 = 12 - 25 - 50 = -63$. δ) $|2\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 25 = 61$, άρα $|2\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{61}$.
2. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 12 - 12 = 0$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = -3 - 10 = -13$, $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = -4 + 30 = 26$, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} = -13 + 26 = 13$. Κάθετο είναι μόνο το ζεύγος $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
3. α) $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.
β) $\sin \theta = \frac{-2-6}{2 \cdot 4} = -1$, $\theta = \pi$ (αντίρροπα· πράγματι $(-2, 2\sqrt{3}) = -2(1, -\sqrt{3})$).
γ) $\sin \theta = \frac{2+3}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.
4. $\kappa(\kappa - 1) - 6 = 0 \iff \kappa^2 - \kappa - 6 = 0 \iff \kappa = 3 \text{ ή } \kappa = -2$.
5. Το $(12, 5)$ είναι κάθετο στο $(5, -12)$ (γινόμενο $60 - 60 = 0$) με μέτρο 13. Τα ζητούμενα: $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ και $(-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13})$.
6. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = 9 + 0 + 16 = 25$, άρα 5. $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|^2 = 9 - 0 + 4 \cdot 16 = 73$, άρα $\sqrt{73}$.
7. α) $7 = 1 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 4 \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1$. β) $\sin \theta = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$. γ) $(\lambda \vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} = \lambda \cdot 1 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -4$.
8. $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = 6 - 4 = 2$. $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v} = \frac{2}{5}(2, -1) = (\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$ και $\text{προβ}_{\vec{v}} \vec{\alpha} = \frac{2}{25}(3, 4) = (\frac{6}{25}, \frac{8}{25})$.
9. α) $\vec{AB} = (4, 2)$, $\vec{AI} = (-1, 3)$, $\vec{AB} \cdot \vec{AI} = -4 + 6 = 2 > 0$, άρα η $\hat{A}$ είναι οξεία.
β) $\vec{BA} = (-4, -2)$, $\vec{BI} = (-5, 1)$, $\vec{BA} \cdot \vec{BI} = 20 - 2 = 18$, $|\vec{BA}| = 2\sqrt{5}$, $|\vec{BI}| = \sqrt{26}$. Άρα $\sin \hat{B} = \frac{18}{2\sqrt{130}} = \frac{9}{\sqrt{130}} = \frac{9\sqrt{130}}{130}$.
γ) $\Delta(x, 0): \vec{DA} \cdot \vec{DB} = (2-x)(6-x) + 1 \cdot 3 = 0 \iff x^2 - 8x + 15 = 0 \iff x = 3 \text{ ή } x = 5$. Άρα $\Delta(3, 0)$ ή $\Delta(5, 0)$.
10. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. Τότε $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot \vec{\alpha} = 1 + 2(-\frac{1}{2}) = 0$. Επίσης $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2 = 0$, άρα η γωνία τους είναι $\frac{\pi}{2}$ (ρόμβος!).
11. Υψώνουμε το $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ στο τετράγωνο: $9 + 25 + 49 + 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}) = 0$, άρα το άθροισμα είναι $-\frac{83}{2}$.
Για τη γωνία: $\vec{\gamma} = -(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \Rightarrow 49 = 9 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 25 \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{15}{2}$, οπότε $\sin \theta = \frac{15/2}{15} = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$.
12. Με $\vec{u} = (3, 4)$, $\vec{v} = (x, y)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3x + 4y$, $|\vec{u}|^2 = 25$, $|\vec{v}|^2 = x^2 + y^2$. Από $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$, υψώνοντας στο τετράγωνο: $(3x + 4y)^2 \leq 25(x^2 + y^2)$. Ισότητα όταν $\vec{u} \parallel \vec{v}$, δηλαδή $3y - 4x = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 | Η Ευθεία στο Επίπεδο

Κεφάλαιο 2 • Μάθημα 2.1: Εξίσωση ευθείας

1. α) $\lambda = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, $\omega = 60^\circ$. β) $\lambda = \frac{2-5}{1+2} = -1$, $\omega = 135^\circ$. γ) $\lambda = 0$, $\omega = 0$ (οριζόντια ευθεία $y = 3$).
2. α) $y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 1) \iff y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. β) $\lambda = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$: $y = \sqrt{3}x - 3$. γ) $\lambda = \frac{-3-3}{5-2} = -2$: $y - 3 = -2(x - 2) \iff y = -2x + 7$. δ) Ίδια τετμημένη: $x = 4$.
3. $\lambda_{BI} = \frac{-2-4}{3-1} = -3$. α) $y - 1 = -3(x + 2) \iff y = -3x - 5$. β) $\lambda = \frac{1}{3}$: $y - 1 = \frac{1}{3}(x + 2) \iff y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.
4. $3x - 4 = -2x + 6 \iff x = 2$, $y = 2$: σημείο $(2, 2)$. Για $x = 2$: $\frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$, άρα η τρίτη ευθεία **διέρχεται** από αυτό (οι τρεις ευθείες συντρέχουν).
5. Για $x = 0$: $y = 3$, σημείο $(0, 3)$. Για $y = 0$: $x = 4$, σημείο $(4, 0)$. Εμβαδόν $E = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ τ.μ.
6. α) $\mu - 1 = 3 - \mu \iff \mu = 2$. β) $(\mu - 1)(3 - \mu) = -1 \iff \mu^2 - 4\mu + 2 = 0 \iff \mu = 2 \pm \sqrt{2}$.

7. α) Μέσο της $B\Gamma$: $M(1,0)$. Τα A, M έχουν την ίδια τετμημένη, άρα η διάμεσος είναι η κατακόρυφη $x = 1$.
 β) $\lambda_{AG} = \frac{1-5}{5-1} = -1$, άρα το ύψος BD έχει $\lambda = 1$: $y + 1 = x + 3 \iff y = x + 2$.
 γ) $\lambda_{BG} = \frac{1+1}{5+3} = \frac{1}{4}$, άρα το ύψος από το A έχει $\lambda = -4$: $y - 5 = -4(x - 1) \iff y = -4x + 9$. Τομή με $y = x + 2$: $x + 2 = -4x + 9 \iff x = \frac{7}{5}, y = \frac{17}{5}$. Ορθόκεντρο $H(\frac{7}{5}, \frac{17}{5})$.
8. Κάθετη από A στην $y = 2x$: $\lambda = -\frac{1}{2}$, $y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 4) \iff y = -\frac{1}{2}x$. Τομή με $y = 2x$: $x = 0, y = 0$, δηλαδή $M \equiv O(0,0)$. Άρα $A'(2 \cdot 0 - 4, 2 \cdot 0 + 2) = A'(-4, 2)$.
9. Μέσο $K(2,2)$, $\lambda_{AB} = \frac{1-3}{5+1} = -\frac{1}{3}$, άρα η μεσοκάθετος έχει $\lambda = 3$: $y - 2 = 3(x - 2) \iff y = 3x - 4$. Για $x = 0$: σημείο $(0, -4)$.
10. $\vec{AB} = (4, 2)$, $\lambda_{AB} = \frac{1}{2}$. Οι $B\Gamma$ και AD είναι κάθετες στην AB , άρα έχουν $\lambda = -2$:
 $B\Gamma$: $y - 3 = -2(x - 5) \iff y = -2x + 13$, AD : $y - 1 = -2(x - 1) \iff y = -2x + 3$.
 Το $\vec{B\Gamma}$ είναι κάθετο στο $\vec{AB}$ με ίσο μέτρο, άρα $\vec{B\Gamma} = (-2, 4)$ ή $(2, -4)$. Οπότε $\Gamma(3, 7)$, $\Delta(-1, 5)$ ή $\Gamma(7, -1)$, $\Delta(3, -3)$.
11. Η ευθεία δεν είναι κατακόρυφη, έστω $y - 3 = \lambda(x - 2)$ με $\lambda < 0$ (για να τέμνει τους θετικούς ημιάξονες).
 Για $y = 0$: $x = 2 - \frac{3}{\lambda}$, για $x = 0$: $y = 3 - 2\lambda$. Θέτουμε $\mu = -\lambda > 0$:
 $\frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{\mu} \right) (3 + 2\mu) = 12 \iff 12 + 4\mu + \frac{9}{\mu} = 24 \iff 4\mu^2 - 12\mu + 9 = 0 \iff (2\mu - 3)^2 = 0 \iff \mu = \frac{3}{2}$.
 Άρα υπάρχει **μία** τέτοια ευθεία: $y = -\frac{3}{2}x + 6$ (τέμνει τους άξονες στα $(4, 0)$ και $(0, 6)$).
12. Το συμμετρικό του A ως προς τον $x'x$ είναι $A'(1, -4)$. Η ανακλώμενη ακτίνα, προεκτεινόμενη προς τα πίσω, διέρχεται από το A' : άρα το σημείο ανάκλασης είναι η τομή της $A'B$ με τον $x'x$. $\lambda_{A'B} = \frac{2+4}{5-1} = \frac{3}{2}$, $A'B$: $y - 2 = \frac{3}{2}(x - 5)$. Για $y = 0$: $x = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$. Σημείο ανάκλασης $(\frac{11}{3}, 0)$.

Κεφάλαιο 2 • Μάθημα 2.2: Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

1. α) $\lambda = -\frac{5}{2}$, $\vec{\delta} = (2, -5)$, $\vec{n} = (5, 2)$. β) $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\vec{\delta} = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{n} = (1, -\sqrt{3})$. γ) Οριζόντια ($y = -2$): $\lambda = 0$, $\vec{\delta} = (1, 0)$, $\vec{n} = (0, 1)$. δ) Κατακόρυφη ($x = 2$): δεν ορίζεται λ , $\vec{\delta} = (0, 1)$, $\vec{n} = (1, 0)$.
2. α) $4x - y + \Gamma = 0$ με $-12 - 2 + \Gamma = 0$: $4x - y + 14 = 0$. β) $x + 4y + \Gamma = 0$ με $-3 + 8 + \Gamma = 0$: $x + 4y - 5 = 0$.
 γ) $2x + 5y + \Gamma = 0$ με $-6 + 10 + \Gamma = 0$: $2x + 5y - 4 = 0$. δ) Κάθετο διάνυσμα το $(3, 1)$: $3x + y + \Gamma = 0$ με $-9 + 2 + \Gamma = 0$: $3x + y + 7 = 0$.
3. α) Η δεύτερη είναι η πρώτη επί 2: **ταυτίζονται**. β) $D = 1 \cdot 6 - (-3)(-2) = 0$: η $-3(x - 2y + 1) = 0$ δίνει $-3x + 6y - 3 = 0$, διαφορετικός σταθερός όρος από +2: **παράλληλες**. γ) $D = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -3 \neq 0$: **τέμνονται**: προσθέτοντας $3x - 3 = 0$, άρα στο $(1, 2)$.
4. $\sin \varphi = \frac{|1 \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, άρα $\varphi = 75^\circ$. (Εναλλακτικά: οι ευθείες έχουν γωνίες 135° και 60° με τον $x'x$, που διαφέρουν κατά 75° .)
5. α) $3\alpha + 2(\alpha + 1) = 0 \iff \alpha = -\frac{2}{5}$. β) $D = \alpha(\alpha + 1) - 2 \cdot 3 = 0 \iff \alpha^2 + \alpha - 6 = 0 \iff \alpha = 2$ ή $\alpha = -3$. Και για τις δύο τιμές οι σταθεροί όροι δεν είναι ανάλογοι, οπότε οι ευθείες είναι παράλληλες (όχι ταυτιζόμενες).
6. Από $2x - y - 4 = 0$: $y = 2x - 4$. Αντικαθιστούμε: $x + 4x - 8 = 7$, $x = 3$, $y = 2$. Η ευθεία από O και $(3, 2)$: $y = \frac{2}{3}x$, δηλαδή $2x - 3y = 0$.
7. α) $2\lambda + 1 = 0$ και $\lambda - 1 = 0$ δεν συναλθεύουν. β) $\lambda(2x + y - 3) + (x - y) = 0$: από $2x + y - 3 = 0$ και $x - y = 0$: $x = y = 1$. Σταθερό σημείο $(1, 1)$. γ) $2\lambda + 1 = 0 \iff \lambda = -\frac{1}{2}$: η ευθεία $-\frac{3}{2}y + \frac{3}{2} = 0$, δηλαδή $y = 1$.
8. Μέσο $M(2, 4)$, $\vec{AB} = (2, 4)$ κάθετο στη μεσοκάθετο: $2x + 4y + \Gamma = 0$ με $4 + 16 + \Gamma = 0$, δηλαδή $x + 2y - 10 = 0$. Το $P(6, 2)$: $6 + 4 - 10 = 0$, άρα ανήκει στη μεσοκάθετο και ισαπέχει από A, B (πράγματι $(PA)^2 = 25 + 0 = 25$, $(PB)^2 = 9 + 16 = 25$).

9. Α: λύνουμε $x - y + 2 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$: $A(0, 2)$. Αφού K μέσο του $ΑΓ$: $Γ(6, 2)$.
 $ΓΔ \parallel AB$: $x - y - 4 = 0$. $BΓ \parallel AD$: $x + 2y - 10 = 0$.
 $B = AB \cap BΓ$: $B(2, 4)$. $Δ = AD \cap ΓΔ$: $Δ(4, 0)$. (Έλεγχος: μέσο του $BΔ$ το $(3, 2) = K$. ✓)
10. Η κατακόρυφη $x = 1$ δεν σχηματίζει 45° με την ε (θα έπρεπε $\sin \varphi = \frac{|2|}{1 \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, που δεν ισχύει). Έστω λοιπόν $y - 1 = m(x - 1)$, δηλαδή $mx - y + 1 - m = 0$, με $\vec{n} = (m, -1)$. Με $\vec{n}_\varepsilon = (2, -1)$:
- $$\frac{|2m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff 2(2m + 1)^2 = 5(m^2 + 1) \iff 3m^2 + 8m - 3 = 0 \iff m = \frac{1}{3} \text{ ή } m = -3.$$
- Ευθείες: $x - 3y + 2 = 0$ και $3x + y - 4 = 0$.
11. $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$: $y = 2x$, $3x = 3$, άρα $K(1, 2)$. Η ε_3 είναι ευθεία για κάθε α (α και $\alpha - 1$ δεν μηδενίζονται μαζί) και για το K : $\alpha \cdot 1 + (\alpha - 1) \cdot 2 + 2 - 3\alpha = \alpha + 2\alpha - 2 + 2 - 3\alpha = 0$. Άρα η ε_3 διέρχεται από το K για κάθε α , και οι τρεις ευθείες συντρέχουν.
12. Το ύψος από B (ε_1) είναι κάθετο στην $ΑΓ$, άρα η $ΑΓ$ έχει κάθετο διάνυσμα το παράλληλο της ε_1 , δηλαδή το $(2, 1)$: $ΑΓ$: $2x + y + c = 0$ με $4 + 4 + c = 0$, άρα $2x + y - 8 = 0$.
Ομοίως η AB είναι κάθετη στην ε_2 , οπότε έχει κάθετο διάνυσμα το $(1, -1)$: AB : $x - y + c = 0$ με $2 - 4 + c = 0$, άρα $x - y + 2 = 0$.

Κεφάλαιο 2 • Μάθημα 2.3: Εμβαδόν τριγώνου – απόσταση σημείου από ευθεία

1. α) $d = \frac{|-10 - 36 + 7|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{39}{13} = 3$. β) $x + y - 4 = 0$: $d = \frac{|-2 + 3 - 4|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. γ) $y + 1 = 0$: $d = |3 + 1| = 4$.
2. Η πρώτη γράφεται $4x + 2y - 6 = 0$. Άρα $d = \frac{|-6 - 9|}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{15}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.
3. $\vec{AB} = (4, 3)$, $\vec{AG} = (1, 6)$, $\det = 24 - 3 = 21$, άρα $(ABΓ) = \frac{21}{2}$ τ.μ. Είναι $(BΓ) = |(-3, 3)| = 3\sqrt{2}$, οπότε $v_A = \frac{2 \cdot \frac{21}{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.
4. $\vec{AB} = (3, 2)$, $\vec{AG} = (-6, -4)$, $\det = -12 + 12 = 0$. Τα σημεία είναι συνευθειακά, άρα **δεν** σχηματίζουν τρίγωνο.
5. Τομές με τους άξονες: $(-10, 0)$ και $(0, 4)$. Εμβαδόν $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$ τ.μ. Απόσταση του O : $\frac{|20|}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{20}{\sqrt{29}} = \frac{20\sqrt{29}}{29}$.
6. $\frac{|3\kappa + 8 - 1|}{5} = 4 \iff |3\kappa + 7| = 20 \iff \kappa = \frac{13}{3} \text{ ή } \kappa = -9$. Αφού $\kappa > 0$: $\kappa = \frac{13}{3}$.
7. Ζητάμε $3x - 4y + c = 0$ με $\frac{|c - 2|}{5} = 2 \iff c = 12 \text{ ή } c = -8$. Ευθείες: $3x - 4y + 12 = 0$ και $3x - 4y - 8 = 0$.
8. Η κατακόρυφη $x = 2$ απέχει από το Q απόσταση $|5 - 2| = 3$: **είναι λύση**. Για $y - 5 = \lambda(x - 2)$, δηλαδή $\lambda x - y + 5 - 2\lambda = 0$:

$$\frac{|5\lambda - 1 + 5 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 3 \iff (3\lambda + 4)^2 = 9\lambda^2 + 9 \iff \lambda = -\frac{7}{24}.$$

Ευθεία: $7x + 24y - 134 = 0$. Άρα οι ζητούμενες είναι $x = 2$ και $7x + 24y - 134 = 0$.

9. $Γ(0, t)$: $\vec{AB} = (4, 3)$, $\vec{AG} = (-2, t - 1)$, $\det = 4(t - 1) + 6 = 4t + 2$. $\frac{1}{2}|4t + 2| = 8 \iff |2t + 1| = 8 \iff t = \frac{7}{2}$ ή $t = -\frac{9}{2}$. Άρα $Γ(0, \frac{7}{2})$ ή $Γ(0, -\frac{9}{2})$.
10. Το πεντάγωνο είναι κυρτό. Το χωρίζουμε με τις διαγώνιες από το A :
 $(ABΓ) = \frac{1}{2}|4 \cdot 3 - 6 \cdot 0| = 6$, $(ΑΓΔ) = \frac{1}{2}|6 \cdot 6 - 3 \cdot 3| = \frac{27}{2}$, $(ΑΔΕ) = \frac{1}{2}|3 \cdot 4 - 0 \cdot 6| = 6$.
Σύνολο: $6 + \frac{27}{2} + 6 = \frac{51}{2}$ τ.μ.

11. Το ύψος του ισόπλευρου είναι $h = d(A, \varepsilon) = \frac{|1+1-4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, οπότε η πλευρά είναι $a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Το ίχνος H του ύψους είναι η προβολή του A στην ε : η κάθετη $y = x$ τέμνει την ε στο $H(2, 2)$. Τα B, Γ απέχουν από το H απόσταση $\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ κατά μήκος της ε , που έχει μοναδιαίο διάνυσμα $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$. Άρα

$$B\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}, 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad \Gamma\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

12. $\frac{|x-2y+3|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x-y-1|}{\sqrt{5}} \iff x-2y+3 = \pm(2x-y-1)$. Με «+»: $x+y-4=0$. Με «-»: $3x-3y+2=0$. Τα κάθετα διανύσματα $(1, 1)$ και $(3, -3)$ έχουν εσωτερικό γινόμενο 0, άρα οι δύο ευθείες (οι διχοτόμοι) είναι κάθετες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 | Κωνικές Τομές

Κεφάλαιο 3 • Μάθημα 3.1: Ο κύκλος

- α) $x^2 + y^2 = 7$. β) $\rho^2 = (2+1)^2 + (0-4)^2 = 25$: $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 25$. γ) Κέντρο το μέσο $K(1, 1)$, $\rho^2 = (KA)^2 = 4 + 9 = 13$: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 13$. δ) Εφάπτεται στον x' , άρα $\rho = d(K, x') = 3$: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$.
- α) $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$: $K(-4, 3)$, $\rho = 5$. β) $x^2 + (y-5)^2 = 9$: $K(0, 5)$, $\rho = 3$. γ) Διαιρούμε με 3: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, δηλαδή $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$: $K(1, -2)$, $\rho = 3$.
- $(-2)^2 + 4^2 = 20$ ✓. Εφαπτομένη: $-2x + 4y = 20$, δηλαδή $x - 2y + 10 = 0$. Τομές με τους άξονες: $(-10, 0)$ και $(0, 5)$.
- Ο κύκλος: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$, $K(2, -1)$, $\rho = 3$. $(KP) = \sqrt{1+0} = 1 < 3$: το P είναι **εσωτερικό**.
- $d(O, \varepsilon) = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} = \rho$: η ευθεία **εφάπτεται**. Σημείο επαφής: η προβολή του O στην ευθεία, κατά μήκος του $\vec{n} = (1, 2)$: $(t, 2t)$ με $t + 4t = 5$, άρα $(1, 2)$.
- $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4\mu^2 + 16 - 4\mu - 32 > 0 \iff \mu^2 - \mu - 4 > 0 \iff \mu < \frac{1-\sqrt{17}}{2}$ ή $\mu > \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.
- P εξωτερικό ($9 + 1 > 5$). Σημείο επαφής (x_1, y_1) : $3x_1 + y_1 = 5$ και $x_1^2 + y_1^2 = 5$. Με $y_1 = 5 - 3x_1$: $10x_1^2 - 30x_1 + 20 = 0 \iff x_1 = 1$ ή $x_1 = 2$. Σημεία $(1, 2)$, $(2, -1)$. Εφαπτομένες: $x + 2y = 5$ και $2x - y = 5$.
- $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$: $K(1, 2)$, $\rho = \sqrt{5}$. Οι κάθετες στην $x + 2y = 0$ είναι $2x - y + c = 0$. $\frac{|2-2+c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \iff c = \pm 5$. Εφαπτομένες: $2x - y + 5 = 0$ και $2x - y - 5 = 0$.
- Κέντρο $K(\alpha, 0)$ με $(KA) = (KB)$: $(1-\alpha)^2 + 1 = (3-\alpha)^2 + 9 \iff 4\alpha = 16 \iff \alpha = 4$. $\rho^2 = 9 + 1 = 10$. Κύκλος: $(x-4)^2 + y^2 = 10$.
- 1ος τρόπος: $x^2 + 4x^2 - 10x = 0 \iff x = 0$ ή $x = 2$. Άρα $A(2, 4)$ και $(OA) = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$.
2ος τρόπος: Ο κύκλος είναι $(x-5)^2 + y^2 = 25$, $K(5, 0)$, $\rho = 5$. $d(K, 2x-y=0) = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$, οπότε χορδή $= 2\sqrt{25-20} = 2\sqrt{5}$.
- $(MA)^2 = 4(MB)^2 \iff (x+3)^2 + y^2 = 4(x-3)^2 + 4y^2 \iff 3x^2 + 3y^2 - 30x + 27 = 0 \iff x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0 \iff (x-5)^2 + y^2 = 16$. Ο τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο $(5, 0)$ και ακτίνα 4.
- Με εφαπτομένες: η ευθεία $x + y = c$ έχει κοινά σημεία με τον κύκλο όταν $\frac{|c|}{\sqrt{2}} \leq 2\sqrt{2} \iff |c| \leq 4$. Άρα $-4 \leq x + y \leq 4$: μέγιστο 4 (στο $(2, 2)$), ελάχιστο -4 (στο $(-2, -2)$).
Με παραμετρικές: $x + y = 2\sqrt{2}(\sin\varphi + \eta\mu\varphi) = 4\eta\mu(\varphi + 45^\circ) \in [-4, 4]$.

Κεφάλαιο 3 • Μάθημα 3.2: Η παραβολή

1. α) $p = 1: E(\frac{1}{2}, 0), \delta: x = -\frac{1}{2}$. β) $p = -4: E(0, -2), \delta: y = 2$. γ) $x^2 = 4y, p = 2: E(0, 1), \delta: y = -1$. δ) $y^2 = -3x, p = -\frac{3}{2}: E(-\frac{3}{4}, 0), \delta: x = \frac{3}{4}$.
2. α) $y^2 = 2px$ με $\frac{p}{2} = -4: y^2 = -16x$. β) $x^2 = 2py$ με $-\frac{p}{2} = 2: x^2 = -8y$. γ) $x^2 = 2py$ με $16 = 2p \cdot (-2), p = -4: x^2 = -8y$.
3. Για $x = 6: y = 6$, σημείο $(6, 6)$, και $p = 3$. Εφαπτομένη: $6x = 3(y + 6) \iff 2x - y - 6 = 0$.
4. $p = 4, E(2, 0)$. $(ME) = x + 2 = 10 \Rightarrow x = 8, y^2 = 64$. Σημεία $(8, 8)$ και $(8, -8)$.
5. $y = x + 2: \lambda = 1, \beta = 2, 2\lambda\beta = 4 = p$. Άρα εφάπτεται. Σημείο: $(x + 2)^2 = 8x \iff (x - 2)^2 = 0$, άρα $(2, 4)$.
6. Κάθετη στην $x + 2y - 3 = 0$ (με $\lambda = -\frac{1}{2}$) σημαίνει $\lambda = 2$. Με $p = 2: 2 = 2 \cdot 2 \cdot \beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$. Εφαπτομένη: $y = 2x + \frac{1}{2}$.
7. $p = 4$. Σημείο επαφής $(x_1, y_1): yy_1 = 4(x + x_1)$ διέρχεται από $P: 3y_1 = 4(x_1 - 2)$, με $x_1 = \frac{y_1^2}{8}: y_1^2 - 6y_1 - 16 = 0 \iff y_1 = 8$ ή $y_1 = -2$.
 $y_1 = 8, x_1 = 8: x - 2y + 8 = 0 (\lambda_1 = \frac{1}{2})$. $y_1 = -2, x_1 = \frac{1}{2}: 2x + y + 1 = 0 (\lambda_2 = -2)$.
 $\lambda_1\lambda_2 = -1$, άρα κάθετες. Το P βρίσκεται πάνω στη διευθετούσα $x = -2$.
8. Η εφαπτομένη $yy_1 = p(x + x_1)$ τέμνει τον $x'x$ στο $T(-x_1, 0)$ και τον $y'y$ στο $\Sigma(0, \frac{px_1}{y_1})$. Αφού $y_1^2 = 2px_1$, είναι $px_1 = \frac{y_1^2}{2}$, άρα $\Sigma(0, \frac{y_1}{2})$. Το μέσο του TM_1 είναι $(\frac{-x_1 + x_1}{2}, \frac{0 + y_1}{2}) = (0, \frac{y_1}{2}) \equiv \Sigma$.
9. Το κέντρο M ισαπέχει από το $A(1, 0)$ (σημείο του κύκλου) και από την ευθεία $x = -1$ (εφαπτομένη), αφού και οι δύο αποστάσεις ισούνται με την ακτίνα. Άρα ο τόπος είναι η παραβολή με εστία A και διευθετούσα $x = -1: y^2 = 4x$.
10. Λόγω συμμετρίας οι δύο άλλες κορυφές είναι (α, β) και $(\alpha, -\beta)$, $\alpha, \beta > 0$, και η OA σχηματίζει γωνία 30° με τον $x'x: \beta = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$. Από την παραβολή $\beta^2 = 4\alpha: \frac{\alpha^2}{3} = 4\alpha \Rightarrow \alpha = 12, \beta = 4\sqrt{3}$. Πλευρά $= 2\beta = 8\sqrt{3}$.
11. Τοποθετούμε την κορυφή στο O και τον άξονα κατά τον $x'x: y^2 = 2px$. Το χείλος του πιάτου είναι στα σημεία $(10, \pm 40)$. Άρα $1600 = 20p, p = 80$, και η εστία είναι στο $(\frac{p}{2}, 0) = (40, 0)$. Ο δέκτης τοποθετείται 40 cm από τον πυθμένα (πάνω στον άξονα).

Κεφάλαιο 3 • Μάθημα 3.3: Η έλλειψη

1. α) $\alpha = 10, \beta = 6, \gamma = 8$: κορυφές $(\pm 10, 0), (0, \pm 6)$ · εστίες $(\pm 8, 0)$ · άξονες 20 και 12· $\varepsilon = \frac{4}{5}$.
β) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1: \alpha = 2, \beta = 1, \gamma = \sqrt{3}$: κορυφές $(\pm 2, 0), (0, \pm 1)$ · εστίες $(\pm \sqrt{3}, 0)$ · άξονες 4 και 2· $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
γ) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1: \alpha = 5$ (στον $y'y$), $\beta = 3, \gamma = 4$: κορυφές $(0, \pm 5), (\pm 3, 0)$ · εστίες $(0, \pm 4)$ · άξονες 10 και 6· $\varepsilon = \frac{4}{5}$.
2. α) $\gamma = 5, \beta = 12, \alpha^2 = 144 + 25 = 169: \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$. β) $\alpha = 6, \gamma = 4, \beta^2 = 20: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$. γ) $\gamma = 4, \alpha = 5, \beta^2 = 9: \frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$.
3. Έλεγχος: $\frac{9}{12} + \frac{1}{4} = 1$ ✓. Εφαπτομένη: $\frac{3x}{12} - \frac{y}{4} = 1 \iff x - y = 4$.
4. $x = 2y: 4y^2 + 4y^2 = 8 \iff y = \pm 1$. Σημεία $(2, 1)$ και $(-2, -1)$.
5. $y = -x + 5: \kappa^2 = 25$ και $\alpha^2\lambda^2 + \beta^2 = 16 + 9 = 25$. Άρα **εφάπτεται**. Σημείο επαφής: $9x^2 + 16(5 - x)^2 = 144 \iff (5x - 16)^2 = 0$, άρα $(\frac{16}{5}, \frac{9}{5})$.
6. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$. Κάθετες στην $y = 2x: \lambda = -\frac{1}{2}$. $\kappa^2 = 6 \cdot \frac{1}{4} + 3 = \frac{9}{2}, \kappa = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Εφαπτομένες: $y = -\frac{1}{2}x \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$.
7. Η $x = 0$ τέμνει την έλλειψη σε δύο σημεία, άρα δεν εφάπτεται. Για $y = \lambda x + 2: 4 = 4\lambda^2 + 1 \iff \lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Εφαπτομένες: $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2$.

8. Για $y = 0$: $x = \frac{\alpha^2}{x_1}$, άρα $(OA) = \frac{\alpha^2}{|x_1|}$. Για $x = 0$: $(OB) = \frac{\beta^2}{|y_1|}$. Τότε $\frac{\alpha^2}{(OA)^2} + \frac{\beta^2}{(OB)^2} = \frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1$, αφού το M_1 ανήκει στην έλλειψη.
9. $A(a, 0), B(0, b)$ με $a^2 + b^2 = 36$. Αφού $(AM) = 2, (MB) = 4$: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, άρα $M(\frac{2a}{3}, \frac{b}{3})$. Με $x = \frac{2a}{3}, y = \frac{b}{3}$: $a = \frac{3x}{2}, b = 3y$, και $\frac{9x^2}{4} + 9y^2 = 36 \iff \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Ο τόπος είναι έλλειψη.
10. Οι εστίες $(\pm\gamma, 0)$ και τα άκρα $(0, \pm\beta)$ σχηματίζουν τετράγωνο όταν οι διαγώνιοι (μήκη 2γ και 2β) είναι ίσες: $\gamma = \beta$. Τότε $\alpha^2 = 2\gamma^2, \varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
11. Ελάχιστη απόσταση $\alpha - \gamma = 7$, μέγιστη $\alpha + \gamma = 13$. Άρα $\alpha = 10, \gamma = 3, \varepsilon = 0,3, \beta^2 = 100 - 9 = 91$.
Εξίσωση: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{91} = 1$.

Κεφάλαιο 3 • Μάθημα 3.4: Η υπερβολή

1. α) $\alpha = 6, \beta = 8, \gamma = 10$: κορυφές $(\pm 6, 0)$, εστίες $(\pm 10, 0)$, ασύμπτωτες $y = \pm \frac{4}{3}x, \varepsilon = \frac{5}{3}$.
β) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$: $\alpha = 4, \beta = 3, \gamma = 5$: κορυφές $(\pm 4, 0)$, εστίες $(\pm 5, 0)$, ασύμπτωτες $y = \pm \frac{3}{4}x, \varepsilon = \frac{5}{4}$.
γ) $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$: εστίες στον y' , $\alpha = \sqrt{3}, \beta = 1, \gamma = 2$: κορυφές $(0, \pm\sqrt{3})$, εστίες $(0, \pm 2)$, ασύμπτωτες $y^2 = 3x^2 \iff y = \pm\sqrt{3}x, \varepsilon = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
2. α) $\beta^2 = 25 - 9 = 16$: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. β) $\alpha = 5, \beta^2 = 169 - 25 = 144$: $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$. γ) $\alpha = \frac{4}{2} = 2, \beta^2 = 16 - 4 = 12$: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.
3. Έλεγχος: $\frac{16}{8} - \frac{4}{4} = 1$ ✓. Εφαπτομένη: $\frac{4x}{8} - \frac{2y}{4} = 1 \iff x - y = 2$.
4. $\alpha = 3, \frac{\beta}{\alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow \beta = 4$: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.
5. $x^2 - 2(x-1)^2 = 2 \iff -x^2 + 4x - 4 = 0 \iff (x-2)^2 = 0$. Διπλή ρίζα $x = 2, y = 1$. Η ευθεία δεν είναι παράλληλη σε ασύμπτωτη ($\lambda = 1 \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$), άρα **εφάπτεται** στο $(2, 1)$. (Πράγματι η εφαπτομένη στο $(2, 1)$ είναι $2x - 2y = 2$, δηλαδή $y = x - 1$.)
6. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. Η $x = 1$ δεν έχει κοινά σημεία με την υπερβολή ($\frac{1}{4} - y^2 = 1$ αδύνατη), άρα δεν εφάπτεται. Για $y = \lambda x + \kappa$ από το P : $\kappa = 1 - \lambda$, και η συνθήκη επαφής $\kappa^2 = 4\lambda^2 - 1$ δίνει $(1 - \lambda)^2 = 4\lambda^2 - 1 \iff 3\lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0 \iff \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$.
Εφαπτομένες: $y = \lambda x + 1 - \lambda$ με $\lambda = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}$ και $\lambda = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3}$ (καμία δεν είναι παράλληλη σε ασύμπτωτη, $\lambda \neq \pm \frac{1}{2}$).

7. Οι ασύμπτωτες είναι $\beta x - \alpha y = 0$ και $\beta x + \alpha y = 0$. Για $M(x, y)$ της υπερβολής:

$$d_1 d_2 = \frac{|\beta x - \alpha y|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \frac{|\beta x + \alpha y|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{|\beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2|}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2},$$

αφού από την εξίσωση $\beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$.

8. Εφαπτομένη στο $M(x_1, y_1)$: $xx_1 - yy_1 = \alpha^2$. Τομές με τις ασύμπτωτες $y = x$ και $y = -x$:

$$K\left(\frac{\alpha^2}{x_1 - y_1}, \frac{\alpha^2}{x_1 - y_1}\right), \quad \Lambda\left(\frac{\alpha^2}{x_1 + y_1}, -\frac{\alpha^2}{x_1 + y_1}\right).$$

(Οι παρονομαστές δεν μηδενίζονται, αφού $x_1^2 - y_1^2 = \alpha^2 \neq 0$.)

Άθροισμα τετμημένων: $\alpha^2 \frac{(x_1 + y_1) + (x_1 - y_1)}{x_1^2 - y_1^2} = \frac{\alpha^2 \cdot 2x_1}{\alpha^2} = 2x_1$. Άθροισμα τεταγμένων: $\alpha^2 \frac{(x_1 + y_1) - (x_1 - y_1)}{\alpha^2} = 2y_1$.

Άρα το μέσο του $K\Lambda$ είναι το M .

9. $\frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\phi 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, οπότε $\varepsilon^2 = 1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \varepsilon = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

10. Παίρνουμε $E'(-5,0)$, $E(5,0)$. Η διαφορά αποστάσεων είναι $15 \cdot \frac{1}{3} = 5 \text{ km} = 2\alpha$, άρα $\alpha = \frac{5}{2}$, $\gamma = 5$, $\beta^2 = 25 - \frac{25}{4} = \frac{75}{4}$. Το σημείο βρίσκεται στην υπερβολή $\frac{4x^2}{25} - \frac{4y^2}{75} = 1$, και μάλιστα στον κλάδο που είναι πιο κοντά στον σταθμό E (δεξιός κλάδος, $x \geq \frac{5}{2}$).
11. Αν M κέντρο και r ακτίνα του ζητούμενου κύκλου, με $K_1(-4,0)$, $K_2(4,0)$: $(MK_1) = r+1$ και $(MK_2) = r+3$, άρα $(MK_2) - (MK_1) = 2$. Ο τόπος είναι ο κλάδος της υπερβολής με εστίες K_1 , K_2 και $2\alpha = 2$ που βρίσκεται πιο κοντά στο K_1 : $\alpha = 1$, $\gamma = 4$, $\beta^2 = 15$, δηλαδή ο **αριστερός κλάδος** της $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$ ($x \leq -1$).

Κεφάλαιο 3 • Μάθημα 3.5: Η εξίσωση $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$

- α) $(x-1)^2 + 4(y-2)^2 = -13 + 1 + 16 = 4$, δηλαδή $\frac{(x-1)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$: **έλλειψη** με κέντρο $(1,2)$.
 β) $9(x+2)^2 - 36 - 4(y-1)^2 + 4 = 4$, δηλαδή $9(x+2)^2 - 4(y-1)^2 = 36 \iff \frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$: **υπερβολή** με κέντρο $(-2,1)$.
 γ) $(x-2)^2 - 4 = 4y - 8 \iff (x-2)^2 = 4(y-1)$: **παραβολή** με κορυφή $(2,1)$.
 δ) Διαιρούμε με 2: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 + 1 + 4 = 9$: **κύκλος** με κέντρο $(-1,2)$, $\rho = 3$.
- $(y+3)^2 - 9 = 4x - 1 \iff (y+3)^2 = 4(x+2)$. Κορυφή $(-2,-3)$, $p = 2$. Στο KXY : εστία $(1,0)$, διευθετούσα $X = -1$. Στο Oxy : εστία $(-1,-3)$, διευθετούσα $x = -3$.
- Κέντρο $(-1,2)$, $\alpha = 5$ (κατά τον y'), $\beta = 4$, $\gamma = 3$. Εστίες $(-1, 2 \pm 3)$, δηλαδή $(-1,5)$ και $(-1,-1)$. $\varepsilon = \frac{3}{5}$.
- Κέντρο $(1,-2)$, $\alpha = 1$, $\beta = 3$: ασύμπτωτες $y+2 = \pm 3(x-1)$, δηλαδή $y = 3x-5$ και $y = -3x+1$.
- Κορυφή και εστία έχουν ίδια τετμημένη, άρα ο άξονας είναι κατακόρυφος ($x = 1$) και $\frac{p}{2} = 3$, $p = 6$: $(x-1)^2 = 12(y+2)$.
- $\alpha = 3$ (οριζόντιος πραγματικός άξονας), $\gamma = \varepsilon\alpha = 5$, $\beta^2 = 16$: $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$.
- α) $(x+1)^2 + y^2 = -1$: **κενό σύνολο**. β) $4(x-1)^2 - y^2 = 0 \iff y = \pm 2(x-1)$: **δύο τεμνόμενες ευθείες**.
 γ) $(x-1)^2 + 3y^2 = 0$: **το σημείο** $(1,0)$.
- Για $\kappa = 1$: $2y^2 = 0$, δηλαδή η ευθεία $y = 0$. Για $\kappa = 3$: $2x^2 = 0$, η ευθεία $x = 0$. Για $\kappa \neq 1, 3$ διαιρούμε: $\frac{x^2}{3-\kappa} + \frac{y^2}{\kappa-1} = 1$.
 - $1 < \kappa < 3$: θετικοί παρονομαστές· για $\kappa = 2$ **κύκλος** $x^2 + y^2 = 1$, αλλιώς **έλλειψη**.
 - $\kappa < 1$: $\frac{x^2}{3-\kappa} - \frac{y^2}{1-\kappa} = 1$, **υπερβολή** με εστίες στον x' .
 - $\kappa > 3$: $\frac{y^2}{\kappa-1} - \frac{x^2}{\kappa-3} = 1$, **υπερβολή** με εστίες στον y' .
- Έλεγχος: $\frac{4}{8} + \frac{1}{2} = 1$ ✓. Εφαπτομένη: $\frac{(x-1)(3-1)}{8} + \frac{(y+1)(0+1)}{2} = 1 \iff \frac{x-1}{4} + \frac{y+1}{2} = 1 \iff x + 2y - 3 = 0$.
- $\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2|x-1| \iff x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4x^2 - 8x + 4 \iff 3x^2 - y^2 = 12 \iff \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. **Υπερβολή** με $\alpha = 2$, $\gamma = 4$, $\varepsilon = 2$ (όπως αναμενόταν).
- $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x-4)^2 \iff \frac{3}{4}x^2 + y^2 = 3 \iff \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. Έλλειψη με $\alpha = 2$, $\gamma = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$. η διευθετούσα $x = \frac{\alpha^2}{\gamma} = 4$ επαληθεύεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 | Θεωρία Αριθμών

Κεφάλαιο 4 • Μάθημα 4.1: Η μαθηματική επαγωγή

1. Για $v = 1$: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. Αν $1 + \dots + v = \frac{v(v+1)}{2}$, τότε $1 + \dots + v + (v+1) = \frac{v(v+1)}{2} + (v+1) = \frac{(v+1)(v+2)}{2}$.
2. Για $v = 1$: $2 = 1 \cdot 2$. Βήμα: $v(v+1) + 2(v+1) = (v+1)(v+2)$.
3. Για $v = 1$: $1 = 1$. Βήμα: $\frac{v^2(v+1)^2}{4} + (v+1)^3 = \frac{(v+1)^2(v^2+4v+4)}{4} = \frac{(v+1)^2(v+2)^2}{4}$.
4. Για $v = 1$: $1 = 2 - 1$. Βήμα: $(2^v - 1) + 2^v = 2^{v+1} - 1$.
5. Για $v = 1$: $4 \checkmark$. Αν $5^v = 4\kappa + 1$, τότε $5^{v+1} - 1 = 5(4\kappa + 1) - 1 = 20\kappa + 4 = 4(5\kappa + 1)$.
6. Για $v = 1$: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Βήμα: $\frac{v}{v+1} + \frac{1}{(v+1)(v+2)} = \frac{v^2+2v+1}{(v+1)(v+2)} = \frac{v+1}{v+2}$.
7. Για $v = 1$: $3 \geq 3$. Αν $3^v \geq 2v + 1$, τότε $3^{v+1} \geq 3(2v + 1) = 6v + 3 \geq 2v + 3 = 2(v + 1) + 1$.
8. Για $v = 1$: $3 \checkmark$. Βήμα: $(v+1)^3 + 2(v+1) = (v^3 + 2v) + 3(v^2 + v + 1)$. Ο πρώτος όρος διαιρείται με 3 από την υπόθεση και ο δεύτερος είναι πολλαπλάσιο του 3.
9. Για $v = 4$: $24 > 16$. Αν $v! > 2^v$ με $v \geq 4$, τότε $(v+1)! = (v+1)v! > (v+1)2^v \geq 2 \cdot 2^v = 2^{v+1}$.
10. Για $v = 1$: $1 = 2! - 1$. Βήμα: $(v+1)! - 1 + (v+1)(v+1)! = (v+1)!(v+2) - 1 = (v+2)! - 1$.
11. 1η: για $v = 1$ ισότητα. Βήμα: $\sqrt{1} + \dots + \sqrt{v+1} \leq v\sqrt{v} + \sqrt{v+1} \leq v\sqrt{v+1} + \sqrt{v+1} = (v+1)\sqrt{v+1}$.
2η: για $v = 1$ ισότητα. Βήμα: αρκεί $\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{v+1}} \geq \sqrt{v+1} \iff \sqrt{v(v+1)} + 1 \geq v+1 \iff \sqrt{v(v+1)} \geq v$, που ισχύει.
12. Για $v = 0$: $3 + 4 = 7 \checkmark$. Έστω $3^{2v+1} = 7\kappa - 2^{v+2}$. Τότε $3^{2v+3} + 2^{v+3} = 9 \cdot 3^{2v+1} + 2 \cdot 2^{v+2} = 9(7\kappa - 2^{v+2}) + 2 \cdot 2^{v+2} = 63\kappa - 7 \cdot 2^{v+2} = 7(9\kappa - 2^{v+2})$.

Κεφάλαιο 4 • Μάθημα 4.2: Ευκλείδεια διαίρεση

1. α) $100 = 13 \cdot 7 + 9$: $\kappa = 7$, $v = 9$. β) $-100 = 13 \cdot (-8) + 4$: $\kappa = -8$, $v = 4$. γ) $100 = (-13) \cdot (-7) + 9$: $\kappa = -7$, $v = 9$. δ) $-7 = 12 \cdot (-1) + 5$: $\kappa = -1$, $v = 5$.
2. $(2\kappa + 1) + (2\lambda + 1) = 2(\kappa + \lambda + 1)$, άρτιος. $(2\kappa + 1)(2\lambda + 1) = 2(2\kappa\lambda + \kappa + \lambda) + 1$, περιττός.
3. $\alpha = 5\kappa + 4$. α) $3\alpha = 15\kappa + 12 = 5(3\kappa + 2) + 2$: υπόλοιπο 2. β) $\alpha^2 = 25\kappa^2 + 40\kappa + 16 = 5(5\kappa^2 + 8\kappa + 3) + 1$: υπόλοιπο 1. γ) $\alpha^2 + \alpha + 1 = 5(\dots) + 16 + 4 + 1 = 5(\dots) + 21 = 5(\dots) + 1$: υπόλοιπο 1.
4. $v = 3\kappa$: $v^2 = 3(3\kappa^2)$. $v = 3\kappa \pm 1$: $v^2 = 9\kappa^2 \pm 6\kappa + 1 = 3(3\kappa^2 \pm 2\kappa) + 1$.
5. $v^2 + v = v(v+1)$, γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων, άρα άρτιος.
6. $v^3 - v = (v-1)v(v+1)$: γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων, που (Παράδειγμα 4.2.4) διαιρείται με το 6.
7. Από την άσκηση 4, ο v^2 είναι 3κ ή $3\kappa + 1$, άρα ο $v^2 + 1$ είναι $3\kappa + 1$ ή $3\kappa + 2$: δεν διαιρείται ποτέ με το 3.
8. Τα τετράγωνα περιττών είναι της μορφής $8\kappa + 1$, οπότε το άθροισμα δύο τέτοιων είναι $8(\kappa + \lambda) + 2 = 4\mu + 2$. Όμως κάθε τέλειο τετράγωνο είναι 4κ ή $4\kappa + 1$ (Παράδειγμα 4.2.2). Άρα δεν είναι τέλειο τετράγωνο.
9. $\alpha = 12\kappa + 7 = 4(3\kappa + 1) + 3$: υπόλοιπο 3 με το 4. $\alpha = 6(2\kappa + 1) + 1$: υπόλοιπο 1 με το 6.
10. Ο p είναι περιττός, οπότε $p^2 = 8\kappa + 1$ και $8 \mid p^2 - 1$. Ο p δεν διαιρείται με το 3, άρα $p = 3\lambda \pm 1$ και $p^2 = 9\lambda^2 \pm 6\lambda + 1$, οπότε $3 \mid p^2 - 1$. Αν $N = p^2 - 1 = 8a = 3b$, τότε $N = 9N - 8N = 72a - 24b = 24(3a - b)$. Άρα $24 \mid p^2 - 1$.
11. Βρίσκουμε τις μορφές των τετραγώνων ως προς το 8: αν v περιττός, $v^2 = 8\kappa + 1$: αν $v = 2\lambda$ με λ άρτιο, $v^2 = 16\mu^2 = 8\kappa$: αν $v = 2\lambda$ με λ περιττό, $v^2 = 4(8\mu + 1) = 8\kappa + 4$. Άρα κάθε τετράγωνο αφήνει υπόλοιπο 0, 1 ή 4 με το 8. Αθροίζοντας τρία τέτοια υπόλοιπα παίρνουμε (ως προς υπόλοιπο με το 8) μόνο τις τιμές 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 — ποτέ 7. Άρα κανένας αριθμός $8\kappa + 7$ δεν είναι άθροισμα τριών τετραγώνων.

Κεφάλαιο 4 • Μάθημα 4.3: Διαιρετότητα

1. $18: \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$. $-30: \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$. $37: \pm 1, \pm 37$ (ο 37 είναι πρώτος).
2. $3\alpha + 2\beta = 3(\alpha - \beta) + 5\beta$. Αφού $5 \mid \alpha - \beta$ και $5 \mid 5\beta$, έπεται $5 \mid 3\alpha + 2\beta$.
3. $v - 1 \mid (v + 5) - (v - 1) = 6$, άρα $v - 1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ και $v \in \{2, 0, 3, -1, 4, -2, 7, -5\}$.
4. Άθροισμα ψηφίων $1 + 2 + \dots + 9 = 45$: διαιρείται με 3 και με 9. Για το 11: ψηφία σε περιττές θέσεις (από δεξιά) $9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$, σε άρτιες $8 + 6 + 4 + 2 = 20$, διαφορά 5: **δεν** διαιρείται με 11.
5. $\beta = \kappa\alpha \Rightarrow \beta^2 = \kappa^2\alpha^2$, άρα $\alpha^2 \mid \beta^2$. Το αντίστροφο ισχύει για θετικούς ακεραίους (αποδεικνύεται με την ανάλυση σε πρώτους παράγοντες).
6. $\frac{2v+7}{v+1} = 2 + \frac{5}{v+1}$, ακέραιος $\iff v + 1 \mid 5 \iff v + 1 \in \{\pm 1, \pm 5\} \iff v \in \{0, -2, 4, -6\}$.
7. Αν d κοινός διαιρέτης, $d \mid 5(3v + 2) - 3(5v + 3) = 1$, άρα $d = \pm 1$.
8. $45 = 5 \cdot 9$ (και οι 5, 9 δεν έχουν κοινό διαιρέτη > 1). Με 5: $y \in \{0, 5\}$. Με 9: $16 + x + y \in \{18, 27\}$, άρα $x + y \in \{2, 11\}$.
 $y = 0: x = 2 \Rightarrow 72360$. $y = 5: x = 6 \Rightarrow 76365$.
9. $v^5 - v = (v - 1)v(v + 1)(v^2 + 1) = (v - 2)(v - 1)v(v + 1)(v + 2) + 5(v - 1)v(v + 1)$.
Ο πρώτος όρος είναι γινόμενο πέντε διαδοχικών ακεραίων: διαιρείται με 5 (κάποιος από αυτούς είναι πολλαπλάσιο του 5) και με 6 (περιέχει τρεις διαδοχικούς). Αν $N = 5a = 6b$, τότε $N = 6N - 5N = 30a - 30b$, άρα $30 \mid N$. Ο δεύτερος όρος είναι $5 \cdot 6m = 30m$. Επομένως $30 \mid v^5 - v$.
10. $\overline{\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma} = \overline{\alpha\beta\gamma} \cdot 1000 + \overline{\alpha\beta\gamma} = 1001 \cdot \overline{\alpha\beta\gamma} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{\alpha\beta\gamma}$.
11. Για περιττό v : $v^2 - 1 = 8\kappa$ (Μάθημα 4.2), άρα $8 \mid v^3 - v$. Επίσης $v^3 - v = (v - 1)v(v + 1)$, άρα $3 \mid v^3 - v$.
Αν $N = 8a = 3b$, τότε $N = 9N - 8N = 72a - 24b = 24(3a - b)$.

Κεφάλαιο 4 • Μάθημα 4.4: Μέγιστος κοινός διαιρέτης – Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο

1. α) $252 = 198 \cdot 1 + 54$, $198 = 54 \cdot 3 + 36$, $54 = 36 \cdot 1 + 18$, $36 = 18 \cdot 2$: $(252, 198) = 18$.
β) $1001 = 357 \cdot 2 + 287$, $357 = 287 \cdot 1 + 70$, $287 = 70 \cdot 4 + 7$, $70 = 7 \cdot 10$: $(1001, 357) = 7$.
γ) Οι 987, 610 είναι διαδοχικοί όροι Fibonacci: κάθε βήμα δίνει πηλίκο 1 και υπόλοιπο τον προηγούμενο όρο: 377, 233, 144, 89, 55, 34, 21, 13, 8, 5, 3, 2, 1. Άρα $(987, 610) = 1$.
2. $18 = 54 - 36 = 54 - (198 - 3 \cdot 54) = 4 \cdot 54 - 198 = 4(252 - 198) - 198 = 4 \cdot 252 - 5 \cdot 198$. Άρα $\kappa = 4$, $\lambda = -5$.
3. α) $[252, 198] = \frac{252 \cdot 198}{18} = 2772$. β) $(35, 48) = 1$, άρα $[35, 48] = 1680$.
4. $(v, v + 1)$ διαιρεί το $(v + 1) - v = 1$. $(2v + 1, 2v + 3)$ διαιρεί το 2, αλλά και τους δύο περιττούς, άρα είναι 1.
5. Κοινός διαιρέτης d : $d \mid 2(3v + 5) - 3(2v + 3) = 1$.
6. $d \mid 3(v + 2) - (3v + 1) = 5$, άρα $d \in \{1, 5\}$. $d = 5 \iff 5 \mid v + 2 \iff v = 5\kappa + 3$ (τότε και $3v + 1 = 15\kappa + 10$). Για κάθε άλλο v : $d = 1$.
7. $\alpha = 24x$, $\beta = 24y$, $(x, y) = 1$, $x + y = 7$. Ζεύγη: $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$. Αριθμοί: $(24, 144)$, $(48, 120)$, $(72, 96)$.
8. Έστω $d = (\alpha + \beta, \alpha\beta)$ και e κοινός διαιρέτης των d και α . Τότε $e \mid (\alpha + \beta) - \alpha = \beta$, άρα $e \mid (\alpha, \beta) = 1$. Επομένως $(d, \alpha) = 1$ και ομοίως $(d, \beta) = 1$. Αφού $d \mid \alpha\beta$ και $(d, \alpha) = 1$, από το λήμμα του Ευκλείδη $d \mid \beta$ · μαζί με $(d, \beta) = 1$ έπεται $d = 1$.

9. Αν $d = (\alpha + \beta, \alpha - \beta)$, τότε $d \mid (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = 2\alpha$ και $d \mid 2\beta$. Άρα $d \mid (2\alpha, 2\beta) = 2(\alpha, \beta) = 2$, δηλαδή $d \in \{1, 2\}$.
10. $(63, 15) = 3 = 2^2 - 1$ και $(6, 4) = 2$ ✓. $(4095, 511)$: $4095 = 511 \cdot 8 + 7$, $511 = 7 \cdot 73$, άρα $7 = 2^3 - 1$ και $(12, 9) = 3$ ✓.
Εξήγηση: με $x = 2^v$, $2^{kv} - 1 = x^k - 1 = (x - 1)(x^{k-1} + \dots + x + 1)$, άρα $2^v - 1 \mid 2^{kv} - 1$.
11. Ζητάμε το $[24, 36, 40]$. $[24, 36] = \frac{24 \cdot 36}{12} = 72$ και $[72, 40] = \frac{72 \cdot 40}{8} = 360$. Θα ξαναβρεθούν μετά από 360 λεπτά = 6 ώρες, δηλαδή στις 13:00.

Κεφάλαιο 4 • Μάθημα 4.5: Πρώτοι αριθμοί

1. $91 = 7 \cdot 13$ σύνθετος. 127 : κανένας από $2, 3, 5, 7, 11$ δεν τον διαιρεί ($\sqrt{127} < 12$): πρώτος. $143 = 11 \cdot 13$ σύνθετος. 199 : κανένας από $2, 3, 5, 7, 11, 13$ ($\sqrt{199} < 15$): πρώτος. $323 = 17 \cdot 19$ σύνθετος.
2. $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, $4096 = 2^{12}$.
3. $\tau(720) = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$, $\tau(2310) = 2^5 = 32$.
4. $1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Μ.Κ.Α. $= 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, Ε.Κ.Π. $= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 25200$. (Έλεγχος: $30 \cdot 25200 = 720 \cdot 1050$.)
5. $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$: μόνο ο εκθέτης του 5 είναι περιττός. Άρα $\kappa = 5$ και $720 \cdot 5 = 3600 = 60^2$.
6. Από τους $p, p+2, p+4$ ένας διαιρείται με το 3 (αφήνουν υπόλοιπα $v, v+2, v+4$ ως προς 3, δηλαδή όλα τα δυνατά). Για να είναι πρώτος πρέπει να είναι ίσος με 3· αφού $p+2, p+4 \geq 5$, πρέπει $p = 3$. Πράγματι $3, 5, 7$ πρώτοι.
7. Αν $\sqrt{3} = \frac{\mu}{\nu}$, τότε $\mu^2 = 3\nu^2$. Ο εκθέτης του 3 στον μ^2 είναι άρτιος, ενώ στον $3\nu^2$ περιττός — άτοπο από τη μοναδικότητα της ανάλυσης.
8. Αν ο ν ήταν σύνθετος, $\nu = \alpha\beta$ με $1 < \alpha < \nu$, τότε $2^\alpha - 1 \mid 2^\nu - 1$ και $1 < 2^\alpha - 1 < 2^\nu - 1$, άρα ο $2^\nu - 1$ θα ήταν σύνθετος. (Και για $\nu = 1$: $2^1 - 1 = 1$, όχι πρώτος.)
9. $\nu^4 + 4 = (\nu^2 + 2)^2 - 4\nu^2 = (\nu^2 - 2\nu + 2)(\nu^2 + 2\nu + 2)$. Για $\nu \geq 2$: $\nu^2 - 2\nu + 2 = (\nu - 1)^2 + 1 \geq 2$ και ο δεύτερος παράγοντας είναι ακόμα μεγαλύτερος. Άρα σύνθετος.
10. $\tau(\nu) = 3$ σημαίνει $\nu = p^2$ με p πρώτο (το 3 είναι πρώτος, οπότε μόνο ένας εκθέτης, ίσος με 2). Μικρότεροι του 100: 4, 9, 25, 49.
11. Για $2 \leq \kappa \leq \nu$, ο κ διαιρεί το $\nu!$, άρα και τον $\nu! + \kappa$. Επειδή $\nu! + \kappa > \kappa$, ο $\nu! + \kappa$ είναι σύνθετος.

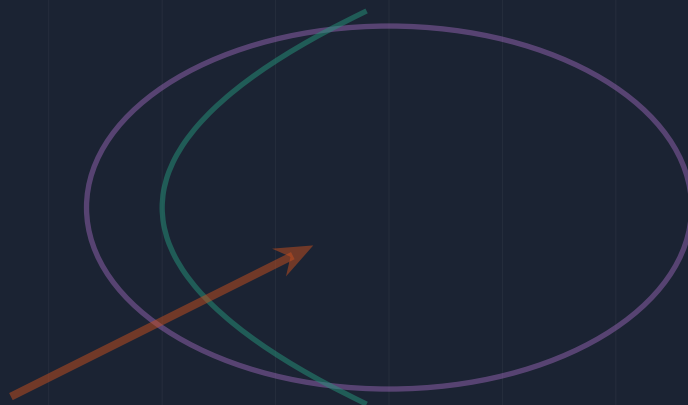
Κεφάλαιο 4 • Μάθημα 4.6: Η γραμμική διοφαντική εξίσωση

1. α) $(4, 6) = 2 \nmid 9$: αδύνατη. β) $(15, 21) = 3 \mid 33$: έχει λύσεις. γ) $(7, 11) = 1$: έχει λύσεις.
2. α) Λύση $(10, 0)$: $x = 10 + 3t, y = -t, t \in \mathbb{Z}$. β) Λύση $(2, -3)$: $x = 2 + 3t, y = -3 - 5t$. γ) Διαιρούμε με 2: $2x - 3y = 5$, λύση $(1, -1)$: $x = 1 - 3t, y = -1 - 2t$.
3. Λύση $(9, 1)$: $x = 9 + 4t, y = 1 - 3t$. $x \geq 1 \iff t \geq -2, y \geq 1 \iff t \leq 0$. Λύσεις: $(1, 7), (5, 4), (9, 1)$.
4. $37 = 13 \cdot 2 + 11, 13 = 11 \cdot 1 + 2, 11 = 2 \cdot 5 + 1$. Προς τα πίσω: $1 = 11 - 5 \cdot 2 = 11 - 5(13 - 11) = 6 \cdot 11 - 5 \cdot 13 = 6(37 - 2 \cdot 13) - 5 \cdot 13 = 6 \cdot 37 - 17 \cdot 13$. Άρα $(x_0, y_0) = (6, -17)$ και $x = 6 + 13t, y = -17 - 37t$.
5. Σε λεπτά: $6x + 15y = 120 \iff 2x + 5y = 40$ (αφού $(6, 15) = 3 \mid 120$). Λύσεις με $x, y \geq 0$: $x = 20 - 5t, y = 2t, t = 0, 1, 2, 3, 4$: πέντε τρόποι $((20, 0), (15, 2), (10, 4), (5, 6), (0, 8))$ · αν θέλουμε και από τα δύο είδη, τρεις. Για 1,25 €: $6x + 15y = 125$ και $3 \nmid 125$: αδύνατο.

6. $N = 7a + 3 = 11b + 5 \iff 7a - 11b = 2$. Λύση: $a = 5, b = 3$ ($35 - 33 = 2$). Γενικά $a = 5 + 11t$, οπότε $N = 7(5 + 11t) + 3 = 38 + 77t$. Μικρότερος θετικός: $N = 38$.
7. $7x + 11y = 100, x, y \geq 1$. Για $y = 4: 7x = 56, x = 8$. Γενική λύση $x = 8 + 11t, y = 4 - 7t$ · οι θετικές ανισότητες δίνουν μόνο $t = 0$. Άρα $100 = 56 + 44$.
8. Λύση $(3, 1)$, γενική $x = 3 + 5s, y = 1 + 3s$. Θέλουμε $x^2 + y^2 < 100 \iff 34s^2 + 36s + 10 < 100 \iff 17s^2 + 18s - 45 < 0$, που ισχύει για $-2,24 < s < 1,18$ περίπου, δηλαδή $s \in \{-2, -1, 0, 1\}$. Σημεία: $(-7, -5), (-2, -2), (3, 1), (8, 4)$.
9. Με x κόκορες, y κότες, z κοιτοπουλάκια: $x + y + z = 100$ και $5x + 3y + \frac{z}{3} = 100$. Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη με 3 και αφαιρώντας την πρώτη: $14x + 8y = 200 \iff 7x + 4y = 100$. Λύση $(4, 18)$, γενική $x = 4 + 4t, y = 18 - 7t$. Με $x, y \geq 1$ και $z = 100 - x - y \geq 1: t \in \{0, 1, 2\}$.
Λύσεις (x, y, z) : $(4, 18, 78), (8, 11, 81), (12, 4, 84)$. (Έλεγχος κόστους: $20 + 54 + 26 = 100, 40 + 33 + 27 = 100, 60 + 12 + 28 = 100$.)

Κεφάλαιο 4 • Μάθημα 4.7: Ισοϋπόλοιποι αριθμοί

- α) $47 - 5 = 42 = 7 \cdot 6$: ισχύει. β) $-11 - 13 = -24 = 6 \cdot (-4)$: ισχύει. γ) $100 - 1 = 99 = 11 \cdot 9$: ισχύει.
- α) $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ και $50 = 3 \cdot 16 + 2$, άρα $2^{50} \equiv 2^2 = 4$: υπόλοιπο 4. β) $5 \equiv -1 \pmod{6}$, άρα $5^{100} \equiv 1$: υπόλοιπο 1. γ) $9 \equiv -1 \pmod{10}$, άρα $9^{2026} \equiv 1$: υπόλοιπο 1.
- $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$ και $2026 = 4 \cdot 506 + 2$, άρα $3^{2026} \equiv 9$: τελευταίο ψηφίο 9. $4^2 = 16 \equiv 6$ και $6 \cdot 4 = 24 \equiv 4$, άρα οι περιττές δυνάμεις του 4 λήγουν σε 4: τελευταίο ψηφίο 4.
- Ζευγαρώνουμε κ και $11 - \kappa$: $\kappa^3 + (11 - \kappa)^3 \equiv \kappa^3 + (-\kappa)^3 = 0 \pmod{11}$. Τα ζεύγη $(1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6)$ καλύπτουν όλους τους όρους, άρα το υπόλοιπο είναι 0. (Πράγματι το άθροισμα είναι $55^2 = 3025 = 11 \cdot 275$.)
- $3 \cdot 5 = 15 \equiv 1 \pmod{7}$, άρα πολλαπλασιάζοντας με 5: $x \equiv 25 \equiv 4 \pmod{7}$. Λύσεις $x = 7\kappa + 4$.
- α) $2^{3^v} = 8^v \equiv 1^v = 1 \pmod{7}$. β) $5^{2^v+1} = 5 \cdot 25^v \equiv 5 \cdot 8^v$ και $2^{3^v+1} = 2 \cdot 8^v \pmod{17}$. Άρα το άθροισμα $\equiv 15 \cdot 8^v + 2 \cdot 8^v = 17 \cdot 8^v \equiv 0 \pmod{17}$.
- $7^2 = 49, 7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$. Άρα $7^{100} = (7^4)^{25} \equiv 1 \pmod{100}$: τα δύο τελευταία ψηφία είναι 01.
- Κάθε ακέραιος είναι ισοϋπόλοιπος με έναν από τους $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pmod{7}$. Αρκεί $v^7 \equiv v$ για αυτούς: $0^7 = 0, (\pm 1)^7 = \pm 1, 2^7 = 128 = 7 \cdot 18 + 2 \equiv 2$ (άρα και $(-2)^7 \equiv -2$), $3^7 = 2187 = 7 \cdot 312 + 3 \equiv 3$ (άρα και $(-3)^7 \equiv -3$). Επομένως $7 \mid v^7 - v$.
- $\underbrace{1 \dots 1}_v = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{v-1} \equiv 1 - 1 + 1 - \dots \pmod{11}$ (αφού $10 \equiv -1$). Για άρτιο v το άθροισμα είναι 0, για περιττό 1. Άρα ο αριθμός με 2026 μονάδες διαιρείται με το 11, ενώ αυτός με 2025 αφήνει υπόλοιπο 1.
- Από 25/3/2026 μέχρι 25/3/2030 μεσολαβούν τρία κανονικά έτη και ένα με 29 Φεβρουαρίου (2028): $3 \cdot 365 + 366 = 1461$ ημέρες, $1461 = 7 \cdot 208 + 5 \equiv 5 \pmod{7}$. Τετάρτη +5 ημέρες = **Δευτέρα**.



Ένα πλήρες βοήθημα για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Β' Λυκείου

- Πλήρης θεωρία για 4 κεφάλαια και 20 μαθήματα, με αποδείξεις
- 140 λυμένα παραδείγματα διαβαθμισμένης δυσκολίας
- Πλαίσια «Προσοχή» και «Συχνό λάθος» σε κάθε μάθημα
- Μεθοδολογίες για κάθε τύπο άσκησης
- Περισσότερες από 220 άλυτες ασκήσεις με πλήρεις λύσεις
- Πλούσια εικονογράφηση, σύνοψη κάθε μαθήματος και τυπολόγιο

mathgreece.com

Το δωρεάν, πλήρες και ολοκληρωμένο φροντιστήριο μαθηματικών

βιντεομαθήματα • σημειώσεις • κουίζ • διαγωνίσματα • podcasts • παιχνίδια γνώσεων