

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ · Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Το πλήρες εικονογραφημένο βοήθημα

Όλη η θεωρία της Άλγεβρας, της Γεωμετρίας και της Τριγωνομετρίας της Γ' Γυμνασίου, εξηγημένη βήμα-βήμα.

Πλήρης θεωρία

Εκατοντάδες σχήματα

Λυμένα παραδείγματα

Προσοχή & συχνά λάθη

Ασκήσεις με λύσεις

€

ημω

=

x^2

mathgreece.com

Πλήρες & δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών

Συγγραφή – επιμέλεια

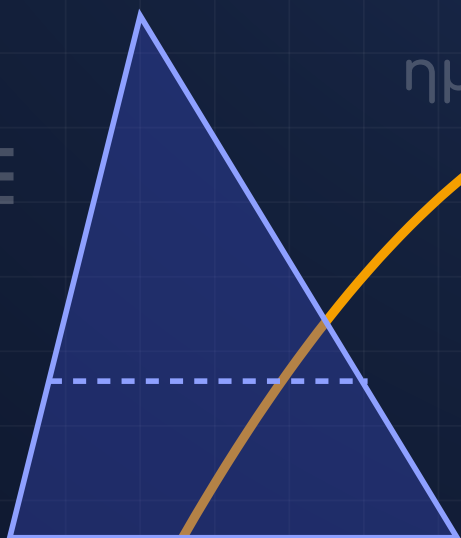
Τάσος Κοβατσίδης

καθηγητής μαθηματικών

$\alpha + \beta$

%

π



Πώς να διαβάσεις αυτό το βοήθημα

Αγαπητέ μαθητή, αγαπητή μαθήτριά,

Η Γ' Γυμνασίου είναι η τάξη όπου τα μαθηματικά αλλάζουν «ταχύτητα». Μαθαίνεις εργαλεία — ταυτότητες, παραγοντοποίηση, εξισώσεις δευτέρου βαθμού, ομοιότητα, τριγωνομετρία — που θα χρησιμοποιείς σε **κάθε** τάξη του Λυκείου. Γι' αυτό αξίζει να τα μάθεις σωστά από την αρχή, με κατανόηση και όχι με αποστήθιση.

Το βοήθημα αυτό γράφτηκε με την εμπειρία πολλών χρόνων στην τάξη. Κάθε μάθημα εξηγείται με απλά λόγια, με πολλά σχήματα και με παραδείγματα λυμένα βήμα-βήμα, όπως θα τα έλυνα στον πίνακα. Επειδή γνωρίζω καλά πού «σκοντάφτουν» οι μαθητές, σε κάθε μάθημα θα βρεις και τα **συχνά λάθη**, ώστε να τα αποφύγεις πριν τα κάνεις!

Πώς είναι οργανωμένο

Το βιβλίο ακολουθεί τη δομή της ύλης της Γ' Γυμνασίου και χωρίζεται σε **δύο μέρη**: το **Α' Μέρος (Άλγεβρα)** με 5 κεφάλαια και το **Β' Μέρος (Γεωμετρία – Τριγωνομετρία)** με 2 κεφάλαια. Κάθε κεφάλαιο χωρίζεται σε **μαθήματα** (π.χ. *Μάθημα 1.5 – Αξιοσημείωτες ταυτότητες*).

Για να μη χαθείς ποτέ:

- Στην **κορυφή κάθε σελίδας** γράφεται το μέρος, το κεφάλαιο και το μάθημα στο οποίο βρίσκεσαι.
- Στο **πλάι της σελίδας** υπάρχει ένα χρωματιστό «αυτάκι» με το κεφάλαιο. Κάθε κεφάλαιο έχει **το δικό του χρώμα**.
- Κάθε μάθημα ξεκινά σε **νέα σελίδα** με μια χρωματιστή κεφαλίδα που γράφει τον αριθμό και τον τίτλο του.
- Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχει **Επανάληψη** με σύνοψη και ασκήσεις από όλο το κεφάλαιο.
- Οι **λύσεις** όλων των ασκήσεων βρίσκονται στο **τέλος του βιβλίου**, οργανωμένες ανά μάθημα.

Τα «κουτιά» του βιβλίου

Θεωρία

Η βασική θεωρία του μαθήματος, εξηγημένη απλά.

Ορισμός

Οι ορισμοί που πρέπει να ξέρεις **ακριβώς**.

Πρέπει να θυμάμαι

Τύποι και ιδιότητες «χρυσής» σημασίας.

Μέθοδος βήμα-βήμα

Η πορεία που ακολουθούμε για να λύσουμε ένα είδος άσκησης.

Προσοχή!

Λεπτά σημεία που χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή.

Συχνό λάθος

✗ Αυτό που γράφουν λάθος πολλοί μαθητές...

✓ ...και το σωστό.

Συμβουλή του καθηγητή

Μικρά «μυστικά» που κάνουν τη λύση πιο εύκολη.

Σύνοψη μαθήματος

Όλο το μάθημα με μια ματιά — ιδανικό για επανάληψη.

Οι ασκήσεις είναι βαθμολογημένες με αστεράκια: ★★ απλή, ★★★ μέτρια, ★★★★★ απαιτητική.

Συνέχισε στο mathgreece.com



Το βοήθημα αυτό είναι μέρος του mathgreece.com, όπου θα βρεις ένα **πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο**: βιντεομαθήματα για κάθε ενότητα, σημειώσεις, κουίζ, podcasts και παιχνίδια γνώσεων. Όποτε θέλεις κάτι περισσότερο, εκεί θα το βρεις!

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

Καλή μελέτη και... καλή επιτυχία!

Τάσος Κοβατσίδης
καθηγητής μαθηματικών · mathgreece.com

Περιεχόμενα

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ

Κεφ. 1	Αλγεβρικές παραστάσεις	7
1.1	Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς	8
1.2	Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα	17
1.3	Πολυώνυμα – Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων	24
1.4	Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων	29
1.5	Αξιοσημείωτες ταυτότητες	34
1.6	Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων	41
1.7	Διαίρεση πολυωνύμων	49
1.8	Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων	55
1.9	Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις	59
1.10	Πράξεις ρητών παραστάσεων	64
★	Επανάληψη 1ου Κεφαλαίου	70
Κεφ. 2	Εξισώσεις – Ανισώσεις	73
2.1	Η εξίσωση $ax + b = 0$	74
2.2	Εξισώσεις δευτέρου βαθμού	81
2.3	Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού	88
2.4	Κλασματικές εξισώσεις	94
2.5	Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο	99
★	Επανάληψη 2ου Κεφαλαίου	105
Κεφ. 3	Συστήματα γραμμικών εξισώσεων	108
3.1	Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης	109
3.2	Γραμμικό σύστημα και γραφική επίλυσή του	114
3.3	Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος	119
★	Επανάληψη 3ου Κεφαλαίου	125
Κεφ. 4	Συναρτήσεις	127
4.1	Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a \neq 0$	128
4.2	Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$	133
★	Επανάληψη 4ου Κεφαλαίου	139
Κεφ. 5	Πιθανότητες	141
5.1	Σύνολα	142
5.2	Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα	147

5.3	Η έννοια της πιθανότητας	152
★	Επανάληψη 5ου Κεφαλαίου	158

Β' ΜΕΡΟΣ · ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Κεφ. 1	Γεωμετρία	161
1.1	Ισότητα τριγώνων	162
1.2	Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων	168
1.3	Θεώρημα του Θαλή	173
1.4	Ομοιοθεσία	179
1.5	Ομοιότητα	184
1.6	Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων	189
★	Επανάληψη 1ου Κεφαλαίου	194
Κεφ. 2	Τριγωνομετρία	196
2.1	Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$	197
2.2	Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών	203
2.3	Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας	208
2.4	Νόμος των ημιτόνων – Νόμος των συνημιτόνων	213
★	Επανάληψη 2ου Κεφαλαίου	219

Λύσεις όλων των ασκήσεων	222
--------------------------	-----

Α΄ ΜΕΡΟΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

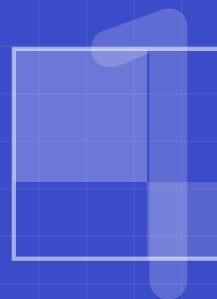
Κεφάλαιο 1ο Αλγεβρικές παραστάσεις

Κεφάλαιο 2ο Εξισώσεις – Ανισώσεις

Κεφάλαιο 3ο Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Κεφάλαιο 4ο Συναρτήσεις

Κεφάλαιο 5ο Πιθανότητες



Κεφάλαιο 1ο

Αλγεβρικές παραστάσεις

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

$$3x^2y \cdot 2xy = 6x^3y^2$$

Στο κεφάλαιο αυτό μαθαίνουμε να «μιλάμε» τη γλώσσα της Άλγεβρας. Ξεκινάμε από τους πραγματικούς αριθμούς, τις δυνάμεις και τις ρίζες και περνάμε στα **μονώνυμα** και τα **πολυώνυμα**. Στη συνέχεια γνωρίζουμε τις **ταυτότητες**, το πιο δυνατό «εργαλείο» της Γ' Γυμνασίου, και την **παραγοντοποίηση**, που θα τη χρειαστούμε σε όλα τα επόμενα κεφάλαια. Κλείνουμε με τις **ρητές παραστάσεις**, δηλαδή τα «αλγεβρικά κλάσματα».

- 1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς
- 1.2 Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα
- 1.3 Πολυώνυμα – Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων
- 1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων
- 1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες
- 1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων
- 1.7 Διάρθρωση πολυωνύμων
- 1.8 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων
- 1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις
- 1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων
- ★ Επανάληψη κεφαλαίου

Για κάθε μάθημα αυτού του κεφαλαίου θα βρεις **βιντεομαθήματα, σημειώσεις, κουίζ και επιπλέον ασκήσεις** στο mathgreece.com — ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο · ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ > ΜΑΘΗΜΑ 1.1

1.1

Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- να αναγνωρίζεις σε ποιο σύνολο (φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι, πραγματικοί) ανήκει ένας αριθμός,
- να κάνεις σωστά τις τέσσερις πράξεις και να τηρείς την **προτεραιότητα των πράξεων**,
- να χειρίζεσαι **δυνάμεις** με ακέραιο εκθέτη και τις ιδιότητές τους,
- να υπολογίζεις και να απλοποιείς **τετραγωνικές ρίζες**.

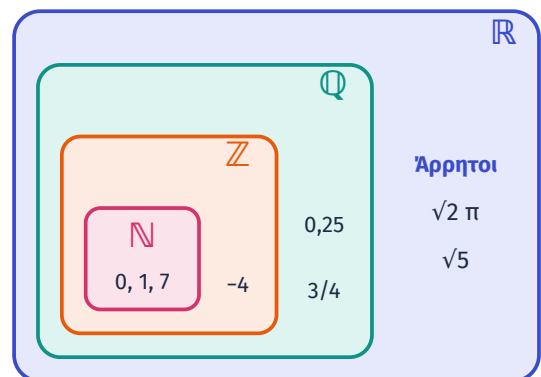
Το μάθημα αυτό είναι μια «γέφυρα» από τη Β' Γυμνασίου. Μην το υποτιμήσεις: σχεδόν όλα τα λάθη στην Άλγεβρα της Γ' τάξης ξεκινούν από ένα λάθος πρόσημο ή μια λάθος δύναμη!

Α. Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους

► Τα σύνολα των αριθμών

Οι αριθμοί που γνωρίζουμε μέχρι σήμερα οργανώνονται σε σύνολα, το ένα «μέσα» στο άλλο:

- **Φυσικοί** $\mathbb{N}$: $0, 1, 2, 3, \dots$
- **Ακέραιοι** $\mathbb{Z}$: $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$
- **Ρητοί** $\mathbb{Q}$: όσοι γράφονται ως κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ με μ, ν ακέραιους και $\nu \neq 0$. Π.χ. $\frac{3}{4}, -5 = \frac{-5}{1}, 0,2 = \frac{1}{5}, 0,\overline{3} = \frac{1}{3}$.
- **Άρρητοι**: όσοι **δεν** γράφονται ως κλάσμα ακεραίων. Π.χ. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$. Έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία που **δεν** επαναλαμβάνονται περιοδικά.
- **Πραγματικοί** $\mathbb{R}$: όλοι μαζί, οι ρητοί και οι άρρητοι.



Κάθε σύνολο περιέχεται στο επόμενο: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε **ένα** σημείο ενός άξονα και, αντίστροφα, κάθε σημείο του άξονα αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό. Γι' αυτό τον λέμε **άξονα των πραγματικών αριθμών**.



Μερικοί πραγματικοί αριθμοί πάνω στον άξονα

► Πρόσθεση πραγματικών αριθμών

★ Οι δύο κανόνες της πρόσθεσης

- **Ομόσημοι:** προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές και βάζουμε το **κοινό** πρόσημο. $(+7) + (+5) = +12$, $(-7) + (-5) = -12$
- **Ετερόσημοι:** αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή τη μικρότερη και βάζουμε το πρόσημο του αριθμού με τη **μεγαλύτερη** απόλυτη τιμή. $(-7) + (+5) = -2$, $(+7) + (-5) = +2$

Θυμίζουμε ότι η **απόλυτη τιμή** $|α|$ ενός αριθμού είναι η **απόσταση** του σημείου του από την αρχή του άξονα. Γι' αυτό είναι πάντα $|α| ≥ 0$. Για παράδειγμα $|-6| = 6$, $|6| = 6$, $|0| = 0$.

Δύο αριθμοί λέγονται **αντίθετοι** όταν έχουν άθροισμα μηδέν, π.χ. 5 και -5. Ο αντίθετος του $α$ είναι ο $-α$.

★ Ιδιότητες της πρόσθεσης

Ιδιότητα	Τύπος
Αντιμεταθετική	$α + β = β + α$
Προσεταιριστική	$α + (β + γ) = (α + β) + γ$
Ουδέτερο στοιχείο	$α + 0 = α$
Αντίθετοι	$α + (-α) = 0$

Η **αφαίρεση** ανάγεται σε πρόσθεση: $α - β = α + (-β)$. Δηλαδή, για να αφαιρέσουμε έναν αριθμό, **προσθέτουμε τον αντίθετό του**.

► Πολλαπλασιασμός και διαίρεση

★ Κανόνες ποσών

$(+) \cdot (+)$	$+$
$(-) \cdot (-)$	$+$
$(+) \cdot (-)$	$-$
$(-) \cdot (+)$	$-$

Ομόσημοι → **θετικό** αποτέλεσμα, ετερόσημοι → **αρνητικό**. Ο ίδιος κανόνας ισχύει και στη διαίρεση.

★ Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού

- $α \cdot β = β \cdot α$ (αντιμεταθετική)
- $α(βγ) = (αβ)γ$ (προσεταιριστική)
- $α \cdot 1 = α$, $α \cdot 0 = 0$
- $α \cdot \frac{1}{α} = 1$, για $α \neq 0$ (αντίστροφοι)
- $α(β + γ) = αβ + αγ$ (επιμεριστική)

Δύο αριθμοί λέγονται **αντίστροφοι** όταν έχουν γινόμενο 1, π.χ. $-\frac{2}{3}$ και $-\frac{3}{2}$. Ο 0 **δεν έχει αντίστροφο**. Η διαίρεση ανάγεται σε πολλαπλασιασμό: $α : β = α \cdot \frac{1}{β}$, με $β \neq 0$.

⚠ Η διαίρεση με το μηδέν

Η διαίρεση $\alpha : 0$ **δεν ορίζεται**. Σε κάθε κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ πρέπει πάντα $\beta \neq 0$. Αντίθετα, $\frac{0}{\beta} = 0$ για κάθε $\beta \neq 0$.

✓ Πρόσημο γινομένου πολλών παραγόντων

Σε ένα γινόμενο μη μηδενικών παραγόντων **μέτρα τα «μείον»**: αν είναι **άρτιο** πλήθος, το γινόμενο είναι **θετικό**· αν είναι **περιττό**, είναι **αρνητικό**. Π.χ. $(-2)(-1)(-3)(+5)$: τρία «μείον» → αρνητικό, άρα $= -30$.

► Προτεραιότητα των πράξεων**☰ Η σειρά που κάνουμε τις πράξεις**

- 1 Πρώτα οι πράξεις μέσα στις **παρενθέσεις** (από τις εσωτερικές προς τις εξωτερικές).
- 2 Μετά οι **δυνάμεις**.
- 3 Μετά οι **πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις**, με τη σειρά που εμφανίζονται (από αριστερά προς τα δεξιά).
- 4 Τέλος οι **προσθέσεις και οι αφαιρέσεις**, από αριστερά προς τα δεξιά.

✏ Παράδειγμα 1 · Αριθμητική παράσταση με προτεραιότητα

Να υπολογιστεί η παράσταση $A = -12 : (-3) + 4 \cdot (-2)^2 - (5 - 8)$.

ΛΥΣΗ

Δουλεύουμε με τη σωστή σειρά:

- **Παρένθεση**: $5 - 8 = -3$.
- **Δύναμη**: $(-2)^2 = 4$.
- **Πολλαπλασιασμοί – διαιρέσεις**: $-12 : (-3) = 4$ και $4 \cdot 4 = 16$.
- **Προσθέσεις – αφαιρέσεις**:

$$A = 4 + 16 - (-3) = 4 + 16 + 3 = 23.$$

✏ Παράδειγμα 2 · Κλάσματα και απαλοιφή παρενθέσεων

Να υπολογιστεί η παράσταση $B = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6} \right) : \frac{4}{3}$.

ΛΥΣΗ

Μέσα στην παρένθεση κάνουμε ομώνυμα με Ε.Κ.Π. $(2, 6) = 6$:

$$\frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{3}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Η διαίρεση γίνεται πολλαπλασιασμός με τον αντίστροφο:

$$-\frac{1}{3} : \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Άρα

$$B = \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}.$$

✗ Συχνό λάθος · Το «μείον» μπροστά από την παρένθεση

$$\times \quad 10 - (4 - 7) = 10 - 4 - 7 = -1$$

$$\checkmark \quad 10 - (4 - 7) = 10 - 4 + 7 = 13$$

Όταν **απαλείφουμε** μια παρένθεση που έχει μπροστά το «-», αλλάζουμε τα πρόσημα **όλων** των όρων της, όχι μόνο του πρώτου.

Β. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

☒ Ορισμός · Δύναμη με εκθέτη φυσικό

Για κάθε πραγματικό α και φυσικό $\nu \geq 2$:

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

Ο α λέγεται **βάση** και ο ν **εκθέτης**. Ορίζουμε επίσης $\alpha^1 = \alpha$.

Για να έχουν νόημα οι ιδιότητες και για εκθέτες 0 ή αρνητικούς, ορίζουμε:

★ Μηδενικός και αρνητικός εκθέτης

$$\alpha^0 = 1 \quad (\alpha \neq 0) \quad \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} \quad (\alpha \neq 0)$$

Ειδικά για κλάσματα: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$ – «αναποδογυρίζουμε» το κλάσμα και ο εκθέτης γίνεται θετικός.

Για παράδειγμα: $5^0 = 1$, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, $(-4)^{-1} = -\frac{1}{4}$.

★ Ιδιότητες των δυνάμεων (για ακέραιους εκθέτες)

$$1. \alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$$

$$2. \alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$$

$$3. (\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$$

$$4. (\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$$

$$5. \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$$

Στη 2 και στη 5 οι βάσεις στους παρονομαστές πρέπει να είναι $\neq 0$.

Πρόσημο δύναμης. Αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha^\nu > 0$. Αν $\alpha < 0$, τότε η α^ν είναι **θετική** όταν ο ν είναι **άρτιος** και **αρνητική** όταν ο ν είναι **περιττός**.

✗ Συχνό λάθος · Η μεγάλη παγίδα: $(-a)^n$ και $-a^n$

✗ $-3^2 = 9$

✓ $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$, ενώ $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$.

Ο εκθέτης «πιάνει» **μόνο** ό,τι βρίσκεται ακριβώς αριστερά του. Στο -3^2 ο εκθέτης ανήκει μόνο στο 3· το «μείον» μένει απ' έξω. Για να υψωθεί και το πρόσημο, χρειάζεται παρένθεση.

αρνητική βάση, άρτιος εκθέτης

$$(-3)^4 = +81$$

αρνητική βάση, περιττός εκθέτης

$$(-3)^3 = -27$$

Με μια ματιά: πρόσημο της δύναμης

✗ Συχνό λάθος · Αρνητικός εκθέτης δεν σημαίνει αρνητικό αριθμό

✗ $2^{-3} = -8$ ή $2^{-3} = -6$

✓ $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ (θετικός αριθμός!)

✎ Παράδειγμα 3 · Εφαρμογή ιδιοτήτων δυνάμεων

Να γραφτούν ως μία δύναμη: α) $3^5 \cdot 3^{-2} \cdot 3$ β) $\frac{(2^3)^4}{2^{10}}$ γ) $5^{-3} \cdot 2^{-3}$ δ) $\frac{x^7 x^{-4}}{x^2}, x \neq 0$.

ΛΥΣΗ

α) Προσθέτουμε τους εκθέτες: $3^{5+(-2)+1} = 3^4 (= 81)$.

β) $(2^3)^4 = 2^{12}$, οπότε $\frac{2^{12}}{2^{10}} = 2^{12-10} = 2^2 (= 4)$.

γ) Ίδιος εκθέτης, άρα πολλαπλασιάζουμε τις βάσεις: $5^{-3} \cdot 2^{-3} = (5 \cdot 2)^{-3} = 10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001$.

δ) $\frac{x^{7+(-4)}}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} = x^{3-2} = x$.

✎ Παράδειγμα 4 · Αριθμητική παράσταση με δυνάμεις

Να υπολογιστεί η παράσταση $\Gamma = (-1)^{2027} + (-2)^3 - (-2)^{-2} \cdot 8 + 4^0$.

ΛΥΣΗ

- $(-1)^{2027} = -1$, γιατί ο εκθέτης είναι περιττός.
- $(-2)^3 = -8$.
- $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$, άρα $(-2)^{-2} \cdot 8 = 2$.
- $4^0 = 1$.

$$\Gamma = -1 - 8 - 2 + 1 = -10.$$

► **Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών**

Πολύ μεγάλους ή πολύ μικρούς αριθμούς τους γράφουμε στη μορφή $\alpha \cdot 10^{\nu}$ με $1 \leq \alpha < 10$ και ν ακέραιο. Π.χ. η απόσταση Γης-Ήλιου είναι περίπου $150\,000\,000 \text{ km} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$, ενώ η διάμετρος ενός ιού περίπου $0,0000001 \text{ m} = 10^{-7} \text{ m}$.

Γ. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού**☰ Ορισμός · Τετραγωνική ρίζα**

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός **μη αρνητικού** αριθμού α συμβολίζεται $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο **μη αρνητικός** αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει α :

$$\sqrt{\alpha} = x \iff x^2 = \alpha \text{ και } x \geq 0 \quad (\alpha \geq 0)$$

Για παράδειγμα $\sqrt{49} = 7$ (και όχι -7 , παρότι $(-7)^2 = 49$), $\sqrt{0} = 0$,
 $\sqrt{0,25} = 0,5$, $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$.

⚠ Ρίζα αρνητικού αριθμού

Η $\sqrt{-9}$ **δεν ορίζεται** στους πραγματικούς αριθμούς, γιατί δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικό. Αντίθετα, η $-\sqrt{9} = -3$ ορίζεται κανονικά: είναι ο **αντίθετος** της $\sqrt{9}$.

Εμβαδόν
E = 9

πλευρά = $\sqrt{9} = 3$

Η $\sqrt{\alpha}$ είναι η πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν α

★ Ιδιότητες των ριζών

- $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$, για $\alpha \geq 0$
- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$, για **κάθε** α (π.χ. $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$)
- $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$, για $\alpha, \beta \geq 0$
- $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$, για $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$

✗ Συχνό λάθος · Η ρίζα ΔΕΝ «σπάει» σε άθροισμα

$$\times \quad \sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

$$\checkmark \quad \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Γενικά $\sqrt{\alpha + \beta} \neq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$. Η ρίζα «σπάει» μόνο σε **γινόμενο** και σε **πηλίκο**.

► **Απλοποίηση ριζών**

Αν ο αριθμός κάτω από τη ρίζα έχει παράγοντα που είναι τέλειο τετράγωνο, τον «βγάζουμε έξω»:

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}, \quad \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

✓ Χρήσιμα τέλεια τετράγωνα

4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225. Όταν απλοποιείς, ψάξε τον **μεγαλύτερο** από αυτούς που διαιρεί τον αριθμό. Π.χ. για το $\sqrt{48}$ διάλεξε το 16 (όχι το 4): $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

✎ Παράδειγμα 5 · Πράξεις με ρίζες

Να γίνουν οι πράξεις: α) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2}$ β) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$ γ) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ δ) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$.

ΛΥΣΗ

α) Οι «όμοιες» ρίζες προστίθενται όπως τα όμοια μονώνυμα: $(3 + 5 - 1)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$.

β) Απλοποιούμε πρώτα: $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$. Άρα

$$2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 0.$$

γ) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$.

δ) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$.

► Ρητοποίηση παρονομαστή

Στα μαθηματικά προτιμάμε να **μην** αφήνουμε ρίζα στον παρονομαστή. Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με την ίδια ρίζα:

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

✎ Παράδειγμα 6 · Ρητοποίηση και σύγκριση

α) Να γραφτεί χωρίς ρίζα στον παρονομαστή ο αριθμός $\frac{10}{\sqrt{5}}$. β) Ποιος είναι μεγαλύτερος: ο $3\sqrt{5}$ ή ο $5\sqrt{2}$;

ΛΥΣΗ

α) $\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$.

β) Βάζουμε τους συντελεστές «μέσα» στη ρίζα: $3\sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$ και $5\sqrt{2} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50}$. Επειδή $45 < 50$, είναι $\sqrt{45} < \sqrt{50}$, δηλαδή $3\sqrt{5} < 5\sqrt{2}$.

✎ Παράδειγμα 7 · Ρίζα και απόλυτη τιμή

Να απλοποιηθεί η παράσταση $\Delta = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}$.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\sqrt{a^2} = |a|$:

$$\Delta = |2 - \sqrt{5}| + |\sqrt{5} - 1|.$$

Επειδή $\sqrt{5} \approx 2,24$, είναι $2 - \sqrt{5} < 0$ και $\sqrt{5} - 1 > 0$. Άρα

$$\Delta = -(2 - \sqrt{5}) + (\sqrt{5} - 1) = -2 + \sqrt{5} + \sqrt{5} - 1 = 2\sqrt{5} - 3.$$

Συνέχισε στο mathgreece.com



Θέλεις να εμπεδώσεις καλύτερα τη θεωρία; Δες τα σχετικά βίντεο στο **mathgreece.com** και στο κανάλι **MATHGREECE** στο YouTube — ένα ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

Σύνοψη μαθήματος

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Άρρητοι: όσοι πραγματικοί δεν είναι ρητοί ($\sqrt{2}$, π , ...).
- Προτεραιότητα: **παρενθέσεις** → **δυνάμεις** → **πολ/σμοί & διαιρέσεις** → **προσθέσεις & αφαιρέσεις**.
- $\alpha^0 = 1$, $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$, $\alpha^{\mu}\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$, $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$, $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$.
- $(-\alpha)^{\text{άρτιος}} > 0$, $(-\alpha)^{\text{περιττός}} < 0$ (για $\alpha > 0$), και **προσοχή**: $-3^2 = -9$.
- $\sqrt{\alpha} \geq 0$ ορίζεται μόνο για $\alpha \geq 0$. $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$, $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\alpha+\beta} \neq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.

Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να συμπληρώσεις με $\in$ ή $\notin$: α) $-7 \square \mathbb{N}$ β) $-7 \square \mathbb{Z}$ γ) $\sqrt{16} \square \mathbb{N}$ δ) $\sqrt{7} \square \mathbb{Q}$ ε) $0,6 \square \mathbb{Q}$. ★★
- 2 Να υπολογίσεις: α) $-8 + 15 - (-6) - 9$ β) $(-4) \cdot (-5) \cdot (-1) \cdot 2$ γ) $-36 : (-4) : (-3)$. ★★
- 3 Να υπολογίσεις την παράσταση $A = 5 - 3 \cdot (2 - 6)^2 : 8 + (-1)^{10}$. ★★★
- 4 Να υπολογίσεις την παράσταση $B = \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{12}{5} - \frac{1}{5}$. ★★★
- 5 Να υπολογίσεις: α) -2^4 β) $(-2)^4$ γ) $(-2)^5$ δ) 3^{-2} ε) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ στ) $(-7)^0$. ★★
- 6 Να γράψεις ως μία δύναμη: α) $7^3 \cdot 7^{-5} \cdot 7^4$ β) $\frac{(5^2)^3 \cdot 5}{5^4}$ γ) $4^5 \cdot 25^5$ δ) $\frac{x^{-2} \cdot x^6}{(x^2)^3}$, $x \neq 0$. ★★★
- 7 Να υπολογίσεις την παράσταση $\Gamma = \frac{2^{-1} + 2^{-2}}{2^{-3}}$. ★★★
- 8 Να υπολογίσεις: α) $\sqrt{81}$ β) $\sqrt{0,09}$ γ) $\sqrt{\frac{25}{64}}$ δ) $\sqrt{(-6)^2}$ ε) $(\sqrt{11})^2$ στ) $\sqrt{36 + 64}$. ★★
- 9 Να απλοποιήσεις τις ρίζες: α) $\sqrt{18}$ β) $\sqrt{98}$ γ) $\sqrt{200}$ δ) $\sqrt{45}$ ε) $\sqrt{108}$. ★★★



10 Να κάνεις τις πράξεις: α) $\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$ β) $2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{5}$ γ) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}$.



11 Να γράψεις χωρίς ρίζα στον παρονομαστή: α) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ β) $\frac{15}{\sqrt{5}}$ γ) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$.



12 Να απλοποιήσεις την παράσταση $E = \sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} - \sqrt{(\sqrt{10} - 4)^2}$.



13 Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν 72 cm^2 . Να βρεις την πλευρά του σε απλοποιημένη μορφή και τη διαγώνιό του.

1.2 Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι είναι **αλγεβρική παράσταση** και πώς βρίσκουμε την **αριθμητική της τιμή**,
- τι είναι **μονώνυμο**, ποιος είναι ο **συντελεστής**, το **κύριο μέρος** και ο **βαθμός** του,
- πότε δύο μονώνυμα είναι **όμοια**, **ίσα** ή **αντίθετα**,
- να **προσθέτεις**, να **πολλαπλασιάζεις** και να **διαιρείς** μονώνυμα.

A. Αλγεβρικές παραστάσεις – Μονώνυμα

► Αλγεβρικές παραστάσεις

Όταν σε μια παράσταση υπάρχουν, εκτός από αριθμούς, και **γράμματα** (μεταβλητές), τη λέμε **αλγεβρική παράσταση**. Για παράδειγμα:

$$3x^2 - 5x + 1, \quad 2\alpha\beta^3, \quad \frac{x+1}{y}, \quad \sqrt{x} + 4.$$

Τα γράμματα «κρατούν θέση» για αριθμούς. Αν βάλουμε στη θέση των μεταβλητών συγκεκριμένους αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις, βρίσκουμε την **αριθμητική τιμή** της παράστασης.

✏ Παράδειγμα 1 · Αριθμητική τιμή

Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης $A = 2x^2 - 3xy + y^3$ για $x = -1$ και $y = 2$.

ΛΥΣΗ

Αντικαθιστούμε **πάντα μέσα σε παρενθέσεις**, για να μη χαθούν τα πρόσημα:

$$A = 2(-1)^2 - 3(-1)(2) + (2)^3 = 2 \cdot 1 + 6 + 8 = 16.$$

✅ Η «χρυσή» παρένθεση

Όταν αντικαθιστάς αρνητικό αριθμό, βάλε τον σε παρένθεση. Το x^2 για $x = -3$ είναι $(-3)^2 = 9$, ενώ αν γράφεις -3^2 θα βρεις λάθος -9 .

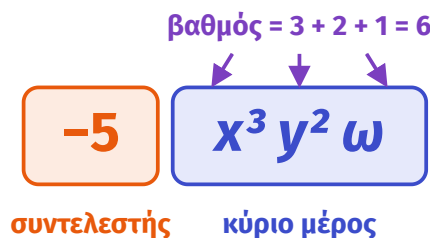
Μια αλγεβρική παράσταση λέγεται **ακέραια** όταν ανάμεσα στις μεταβλητές της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της **πρόσθεσης** και του **πολλαπλασιασμού** (και οι μεταβλητές έχουν εκθέτες φυσικούς αριθμούς). Π.χ. η $4x^2y - x + 7$ είναι ακέραια, ενώ οι $\frac{3}{x}$ και $\sqrt{x}$ **δεν** είναι.

► Μονώνυμο

☰ Ορισμός · Μονώνυμο

Μονώνυμο λέγεται μια ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία σημειώνεται **μόνο πολλαπλασιασμός** ανάμεσα σε έναν αριθμό και σε μεταβλητές (με εκθέτες φυσικούς).

Παραδείγματα μονωνύμων: $-5x^3y$, $\frac{2}{3}\alpha^2\beta$, x , 7 , $-\sqrt{2}\omega^4$. Δεν είναι μονώνυμα: $x + y$ (έχει πρόσθεση), $\frac{4}{x}$ (μεταβλητή σε παρονομαστή), $3x^{-2}$ (αρνητικός εκθέτης).



Η «ανατομία» ενός μονωνύμου

- Ο αριθμός του μονωνύμου λέγεται **συντελεστής**.
- Το γινόμενο των μεταβλητών λέγεται **κύριο μέρος**.
- **Βαθμός ως προς μια μεταβλητή** είναι ο εκθέτης της. Στο $-5x^3y^2\omega$: βαθμός 3 ως προς x , 2 ως προς y , 1 ως προς ω .
- **Βαθμός (ως προς όλες τις μεταβλητές)** είναι το **άθροισμα** των εκθετών: $3 + 2 + 1 = 6$.

⚠ Ειδικές περιπτώσεις

- Στο μονώνυμο x^2y ο συντελεστής είναι 1 και στο $-\alpha\beta$ είναι -1 (δεν «φαίνονται», αλλά υπάρχουν!).
- Ένας αριθμός, π.χ. 7, είναι **σταθερό μονώνυμο**, μηδενικού βαθμού (γιατί $7 = 7x^0$).
- Ο αριθμός 0 λέγεται **μηδενικό μονώνυμο** και **δεν έχει βαθμό**.

✖ Συχνό λάθος · Ο βαθμός ενός μονωνύμου

✖ Ο βαθμός του $6x^2y^3$ είναι 6 (ο συντελεστής) ή 3 (ο μεγαλύτερος εκθέτης).

✓ Ο βαθμός του $6x^2y^3$ είναι $2 + 3 = 5$. Ο συντελεστής **δεν παίζει κανέναν ρόλο** στον βαθμό.

► Όμοια, ίσα και αντίθετα μονώνυμα

Όμοια

Έχουν το **ίδιο κύριο μέρος**.

$$3x^2y \text{ και } -\frac{1}{2}x^2y$$

Ίσα

Είναι όμοια **και** έχουν τον **ίδιο συντελεστή**.

$$4\alpha\beta^2 \text{ και } 4\alpha\beta^2$$

Αντίθετα

Είναι όμοια **και** έχουν **αντίθετους** συντελεστές.

$$5xy^3 \text{ και } -5xy^3$$

⚠ Η σειρά των μεταβλητών δεν μετράει

Τα $3x^2y$ και $7yx^2$ είναι **όμοια**, γιατί $yx^2 = x^2y$ (αντιμεταθετική ιδιότητα). Αντίθετα, τα x^2y και xy^2 **δεν** είναι όμοια: οι εκθέτες «ανήκουν» σε διαφορετικές μεταβλητές.

✎ Παράδειγμα 2 · Μονώνυμο με παράμετρο

Να βρεθούν οι τιμές των κ και λ ώστε τα μονώνυμα $(\kappa - 2)x^3y^{\lambda+1}$ και $5x^3y^4$ να είναι **ίσα**.

ΛΥΣΗ

Για να είναι ίσα πρέπει:

- να είναι όμοια, άρα οι εκθέτες του y ίσοι: $\lambda + 1 = 4 \iff \lambda = 3$,
- να έχουν ίσους συντελεστές: $\kappa - 2 = 5 \iff \kappa = 7$.

✎ Παράδειγμα 3 · Ερμηνεία με εμβαδόν

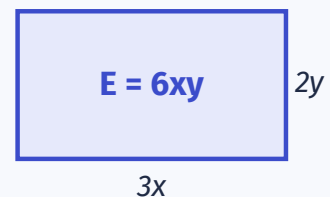
Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις $3x$ και $2y$. Να εκφραστεί η περίμετρος και το εμβαδόν του.

ΛΥΣΗ

Περίμετρος: $\Pi = 3x + 2y + 3x + 2y = 6x + 4y$ (άθροισμα, όχι μονώνυμο).

Εμβαδόν: $E = 3x \cdot 2y = 6xy$, που είναι μονώνυμο 2ου βαθμού.

Βλέπουμε ότι ο **πολλαπλασιασμός** μονωνύμων δίνει πάντα μονώνυμο, ενώ η **πρόσθεση** δίνει μονώνυμο **μόνο** όταν τα μονώνυμα είναι όμοια.

**B. Πράξεις με μονώνυμα****► Πρόσθεση – αφαίρεση μονωνύμων****★ Άθροισμα όμοιων μονωνύμων**

Το άθροισμα **όμοιων** μονωνύμων είναι μονώνυμο **όμοιο** με αυτά, με συντελεστή το **άθροισμα των συντελεστών**:

$$5x^2y + 3x^2y - x^2y = (5 + 3 - 1)x^2y = 7x^2y.$$

Η διαδικασία αυτή λέγεται **αναγωγή όμοιων όρων**.

Αν τα μονώνυμα **δεν** είναι όμοια, το άθροισμά τους απλώς σημειώνεται: π.χ. $4x^2 + 3x$ **δεν** «κάνει» $7x^3$ ούτε $7x^2$. Παραμένει όπως είναι.

$$\boxed{x^2} \boxed{x^2} \boxed{x^2} + \boxed{x^2} \boxed{x^2} = \boxed{x^2} \boxed{x^2} \boxed{x^2} \boxed{x^2} \boxed{x^2}$$

$5x^2$

Μόνο τα «ίδια πράγματα» προστίθενται: 3 τετράγωνα x^2 + 2 τετράγωνα x^2 = 5 τετράγωνα x^2

✗ Συχνό λάθος · Πρόσθεση μη όμοιων μονωνύμων

$$\times \quad 3x^2 + 2x = 5x^3 \quad \times \quad 2x + 3y = 5xy$$

✓ Δεν γίνεται καμία πράξη: οι παραστάσεις $3x^2 + 2x$ και $2x + 3y$ μένουν ως έχουν.

$$\times \quad 4x^2 + x^2 = 5x^4 \quad \checkmark \quad 4x^2 + x^2 = 5x^2 - \text{στην πρόσθεση οι εκθέτες δεν αλλάζουν!}$$

✎ Παράδειγμα 4 · Αναγωγή όμοιων όρων

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = 3\alpha\beta^2 - 5\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - 2\beta^2\alpha + 4\alpha^2\beta - \alpha^2\beta$.

ΛΥΣΗ

Ομαδοποιούμε τους όμοιους όρους (προσέχοντας ότι $\beta^2\alpha = \alpha\beta^2$):

$$A = (3 + 1 - 2)\alpha\beta^2 + (-5 + 4 - 1)\alpha^2\beta = 2\alpha\beta^2 - 2\alpha^2\beta.$$

► Πολλαπλασιασμός μονωνύμων

★ Γινόμενο μονωνύμων

Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο με:

- **συντελεστή** το γινόμενο των συντελεστών,
- **κύριο μέρος** το γινόμενο των κύριων μερών (εδώ χρησιμοποιούμε $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$).

$$(-2x^2y) \cdot (3xy^4) = (-2 \cdot 3) x^{2+1} y^{1+4} = -6x^3y^5.$$

✎ Παράδειγμα 5 · Γινόμενα και δυνάμεις μονωνύμων

Να γίνουν οι πράξεις: α) $\left(-\frac{3}{4}\alpha^3\beta\right) \left(\frac{8}{9}\alpha\beta^2\right)$ β) $(-2x^3y)^3$ γ) $5x^2 \cdot (-x)^4 \cdot (-y)$.

ΛΥΣΗ

α) $-\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = -\frac{24}{36} = -\frac{2}{3}$, οπότε το γινόμενο είναι $-\frac{2}{3}\alpha^4\beta^3$.

β) Υψώνουμε **κάθε παράγοντα**: $(-2)^3(x^3)^3y^3 = -8x^9y^3$.

γ) $(-x)^4 = x^4$, άρα $5x^2 \cdot x^4 \cdot (-y) = -5x^6y$.

✗ Συχνό λάθος · Δύναμη μονωνύμου

$$\times (3x^2)^2 = 3x^4 \quad \text{ή} \quad (3x^2)^2 = 6x^4$$

$$\checkmark (3x^2)^2 = 9x^4$$

Ο εκθέτης έξω από την παρένθεση υψώνει **και τον συντελεστή**: $(3x^2)^2 = 3^2 \cdot (x^2)^2 = 9x^4$. Επίσης $(x^3)^2 = x^6$ και **όχι** x^5 .

► Διαίρεση μονωνύμων

★ Πηλίκο μονωνύμων

Για να διαιρέσουμε δύο μονώνυμα, διαιρούμε **συντελεστή με συντελεστή** και **μεταβλητή με μεταβλητή** (με $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$):

$$\frac{12x^5y^3}{-4x^2y} = \frac{12}{-4} \cdot \frac{x^5}{x^2} \cdot \frac{y^3}{y} = -3x^3y^2.$$

Το πηλίκο **δεν είναι πάντα μονώνυμο**: π.χ. $\frac{6x^2}{3x^5} = \frac{2}{x^3}$, που δεν είναι μονώνυμο.

✎ Παράδειγμα 6 · Σύνθετη παράσταση με μονώνυμα

Να απλοποιηθεί η παράσταση $B = \frac{(2x^2y)^3 \cdot (-3xy^2)}{-6x^5y^4} + 4x^2y$.

ΛΥΣΗ

Αριθμητής: $(2x^2y)^3 = 8x^6y^3$ και $8x^6y^3 \cdot (-3xy^2) = -24x^7y^5$.

Διαίρεση: $\frac{-24x^7y^5}{-6x^5y^4} = 4x^2y$.

Άρα $B = 4x^2y + 4x^2y = 8x^2y$.

✎ Παράδειγμα 7 · Από τη γεωμετρία

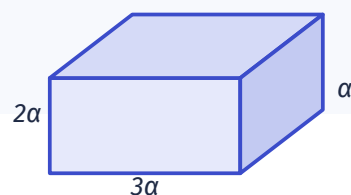
Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις 2α , 3α και α . Να εκφραστεί ο όγκος του και το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.

ΛΥΣΗ

Όγκος: $V = 2\alpha \cdot 3\alpha \cdot \alpha = 6\alpha^3$.

Ολική επιφάνεια: τρία ζεύγη ίσων εδρών:

$$E = 2(2\alpha \cdot 3\alpha) + 2(2\alpha \cdot \alpha) + 2(3\alpha \cdot \alpha) = 12\alpha^2 + 4\alpha^2 + 6\alpha^2 = 22\alpha^2.$$



Συνέχισε στο **mathgreece.com**

Κόλλησες κάπου; Στο **mathgreece.com** υπάρχει ολόκληρο το μάθημα με βιντεομαθήματα, σημειώσεις και ασκήσεις — ένα πλήρες δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

☰ Σύνοψη μαθήματος

- **Μονώνυμο** = αριθμός × μεταβλητές (μόνο πολλαπλασιασμός, φυσικοί εκθέτες).
- **Βαθμός** = άθροισμα εκθετών των μεταβλητών. Ο 0 δεν έχει βαθμό· οι σταθεροί $\neq 0$ έχουν βαθμό 0.
- **Όμοια**: ίδιο κύριο μέρος. **Ίσα**: όμοια + ίσοι συντελεστές. **Αντίθετα**: όμοια + αντίθετοι συντελεστές.
- **Πρόσθεση**: μόνο όμοια· προσθέτουμε συντελεστές, οι εκθέτες **μένουν ίδιοι**.
- **Πολλαπλασιασμός**: πολλαπλασιάζουμε συντελεστές, **προσθέτουμε** εκθέτες ίδιων μεταβλητών.
- **Διαίρεση**: διαιρούμε συντελεστές, **αφαιρούμε** εκθέτες.

🎯 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι μονώνυμα; α) $-4x^2y$ β) $3x + 1$ γ) $\frac{x^3}{5}$ δ) $\frac{5}{x^3}$ ε) -9 στ) $2\sqrt{x}$. ★ ★ ★
- 2 Για καθένα από τα μονώνυμα $-7x^4y$, $\frac{2}{3}\alpha\beta^2\gamma^3$, x , -12 να γράψεις τον συντελεστή, το κύριο μέρος και τον βαθμό. ★ ★ ★
- 3 Να βρεις την αριθμητική τιμή της $A = x^3 - 2x^2y + 3y^2$ για $x = -2$, $y = -1$. ★ ★ ★
- 4 Να βρεις τις τιμές των μ, ν ώστε τα μονώνυμα $(2\mu + 1)x^{\nu-1}y^2$ και $-9x^4y^2$ να είναι αντίθετα. ★ ★ ★
- 5 Να κάνεις αναγωγή όμοιων όρων: α) $7x - 3x + x - 10x$ β) $2x^2y - 5yx^2 + x^2y$ γ) $4\alpha^2 - 3\alpha + \alpha^2 + 5\alpha - \alpha^2$. ★ ★ ★
- 6 Να απλοποιήσεις την παράσταση $A = 3xy - (2x^2 - xy) + (x^2 - 5xy) - (-x^2)$. ★ ★ ★
- 7 Να κάνεις τους πολλαπλασιασμούς: α) $4x^3 \cdot (-2x^2)$ β) $(-\alpha\beta^2)(-3\alpha^2\beta)$ γ) $\frac{3}{5}xy \cdot \frac{10}{9}x^2$ δ) $(-x)(-x)(-x)$. ★ ★ ★
- 8 Να υπολογίσεις: α) $(-3x^2y^3)^2$ β) $\left(-\frac{1}{2}\alpha\beta^2\right)^3$ γ) $(2x)^2 \cdot (-x^2)^3$. ★ ★ ★
- 9 Να κάνεις τις διαιρέσεις: α) $\frac{-15x^4y^2}{5x^3y}$ β) $\frac{8\alpha^3\beta^5}{-2\alpha\beta^5}$ γ) $(18x^6) : (-3x^2)^2$. ★ ★ ★

★★★

- 10 Να απλοποιήσεις την παράσταση $B = \frac{(-2xy^2)^3 \cdot x^2}{4x^3y^4} - (3xy)^2 : \frac{9}{2}x^0$, για $x, y \neq 0$.

★★★

- 11 Ένας κύβος έχει ακμή $3x$. Να εκφράσεις: α) το εμβαδόν μιας έδρας του, β) την ολική επιφάνειά του, γ) τον όγκο του. Πόσες φορές μεγαλώνει ο όγκος αν η ακμή διπλασιαστεί;

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο · ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ > ΜΑΘΗΜΑ 1.3

1.3

Πολυώνυμα – Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων

🕒 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι είναι **πολυώνυμο**, ποιοι είναι οι **όροι** του και ποιος ο **βαθμός** του,
- τον συμβολισμό $P(x)$ και πώς βρίσκουμε την **τιμή** $P(\alpha)$,
- να γράφεις ένα πολυώνυμο **κατά τις φθίνουσες δυνάμεις**,
- να **προσθέτεις** και να **αφαιρείς** πολυώνυμα.

Η έννοια του πολυωνύμου

📖 Ορισμός · Πολυώνυμο

Πολυώνυμο λέγεται ένα **άθροισμα μονωνύμων** που **δεν** είναι όμοια μεταξύ τους. Κάθε μονώνυμο λέγεται **όρος** του πολυωνύμου.

Για παράδειγμα, η παράσταση $4x^3 - 2x^2 + x - 7$ είναι πολυώνυμο με τέσσερις όρους: $4x^3$, $-2x^2$, x και -7 . Ο όρος -7 , που δεν περιέχει μεταβλητή, λέγεται **σταθερός όρος**.

- Ένα πολυώνυμο με **δύο** όρους λέγεται **διώνυμο**, π.χ. $x^2 - 9$.
- Ένα πολυώνυμο με **τρεις** όρους λέγεται **τριώνυμο**, π.χ. $x^2 + 5x + 6$.
- Και ένα μονώνυμο θεωρείται «πολυώνυμο» με έναν όρο.



Οι όροι του πολυωνύμου $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 7$

► Βαθμός πολυωνύμου

★ Βαθμός πολυωνύμου

Βαθμός ενός πολυωνύμου είναι ο **μεγαλύτερος** από τους βαθμούς των όρων του.

- Το $5x^4 - x^2 + 3$ είναι **4ου βαθμού**.
- Το $3x^2y + xy^3 - 2$ έχει όρους βαθμών 3, 4 και 0, οπότε είναι **4ου βαθμού** (ως προς x και y). Ως προς x μόνο είναι 2ου βαθμού, ενώ ως προς y 3ου βαθμού.

- Ένας σταθερός αριθμός $\neq 0$ είναι πολυώνυμο **μηδενικού βαθμού**, ενώ το **μηδενικό πολυώνυμο** 0 **δεν έχει βαθμό**.

✗ Συχνό λάθος · Βαθμός πολυωνύμου $\neq$ άθροισμα βαθμών

✗ Το $x^3 + x^2 + x$ είναι $3 + 2 + 1 = 6$ ου βαθμού.

✓ Το $x^3 + x^2 + x$ είναι **3ου** βαθμού. Στο **μονώνυμο** προσθέτουμε εκθέτες· στο **πολυώνυμο** παίρνουμε **τον μεγαλύτερο βαθμό όρου**.

► Ο συμβολισμός $P(x)$ και η τιμή του πολυωνύμου

Τα πολυώνυμα μιας μεταβλητής x τα συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα: $P(x)$, $Q(x)$, $A(x)$ κ.λπ. Γράφουμε π.χ.

$$P(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 5.$$

Το $P(x)$ διαβάζεται «πε του χι». Η **τιμή του πολυωνύμου** για $x = \alpha$ συμβολίζεται $P(\alpha)$ και βρίσκεται αν αντικαταστήσουμε όπου x το α .

✍ Παράδειγμα 1 · Τιμές πολυωνύμου

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 5$. Να υπολογιστούν τα $P(0)$, $P(1)$, $P(-2)$.

ΛΥΣΗ

$$P(0) = 2 \cdot 0 - 0 + 0 - 5 = -5 \quad (\text{πάντα } P(0) = \text{σταθερός όρος!})$$

$$P(1) = 2 - 1 + 4 - 5 = 0$$

$$P(-2) = 2(-2)^3 - (-2)^2 + 4(-2) - 5 = -16 - 4 - 8 - 5 = -33.$$

✓ Δύο χρήσιμα «κόλπα»

- Το $P(0)$ ισούται πάντα με τον **σταθερό όρο**.
- Το $P(1)$ ισούται πάντα με το **άθροισμα των συντελεστών**. Στο παραπάνω παράδειγμα $2 - 1 + 4 - 5 = 0$.

► Διάταξη κατά τις φθίνουσες δυνάμεις

Συνηθίζουμε να γράφουμε ένα πολυώνυμο μιας μεταβλητής **από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη δύναμη** — λέμε ότι το γράφουμε **κατά τις φθίνουσες δυνάμεις** του x :

$$3x - x^4 + 7 + 2x^2 \longrightarrow -x^4 + 2x^2 + 3x + 7.$$

Έτσι φαίνεται αμέσως ο βαθμός (από τον πρώτο όρο) και ο σταθερός όρος (από τον τελευταίο). Ο όρος x^3 «λείπει», δηλαδή έχει συντελεστή 0.

► Ίσα πολυώνυμα

Δύο πολυώνυμα είναι **ίσα** όταν έχουν **ίσους τους συντελεστές των όμοιων όρων** τους. Π.χ. τα $P(x) = ax^2 + 3x - 1$ και $Q(x) = 5x^2 + bx - 1$ είναι ίσα αν και μόνο αν $a = 5$ και $b = 3$.

Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων

≡ Πρόσθεση / αφαίρεση πολυωνύμων

- 1 Γράφουμε τα πολυώνυμα **μέσα σε παρενθέσεις**, με το κατάλληλο πρόσημο ανάμεσα.
- 2 **Απαλείφουμε** τις παρενθέσεις: αν μπροστά υπάρχει «+» οι όροι μένουν ίδιοι, αν υπάρχει «-» **αλλάζουν όλα τα πρόσημα**.
- 3 Κάνουμε **αναγωγή όμοιων όρων**.

✎ Παράδειγμα 2 · Πρόσθεση και αφαίρεση

Δίνονται $A(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$ και $B(x) = x^3 + 4x^2 - x - 2$. Να βρεθούν τα $A(x) + B(x)$ και $A(x) - B(x)$.

ΛΥΣΗ

$$A + B = (3x^3 - 2x^2 + 5) + (x^3 + 4x^2 - x - 2) = 3x^3 - 2x^2 + 5 + x^3 + 4x^2 - x - 2 = 4x^3 + 2x^2 - x + 3.$$

$$A - B = (3x^3 - 2x^2 + 5) - (x^3 + 4x^2 - x - 2) = 3x^3 - 2x^2 + 5 - x^3 - 4x^2 + x + 2 = 2x^3 - 6x^2 + x + 7.$$

Β' ΤΡΟΠΟΣ: ΚΑΘΕΤΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

Γράφουμε τους όμοιους όρους τον έναν κάτω από τον άλλον (σαν κάθετη πρόσθεση αριθμών), αφήνοντας κενό όπου «λείπει» όρος:

	x^3	x^2	x	σταθ.
$A(x)$	3	-2	0	5
$B(x)$	1	4	-1	-2
$A + B$	4	2	-1	3

✖ Συχνό λάθος · Το «μείον» στην αφαίρεση πολυωνύμων

$$\times (5x^2 - 3x) - (2x^2 - x + 4) = 5x^2 - 3x - 2x^2 - x + 4$$

$$\checkmark (5x^2 - 3x) - (2x^2 - x + 4) = 5x^2 - 3x - 2x^2 + x - 4 = 3x^2 - 2x - 4$$

Το «-» αλλάζει το πρόσημο **σε όλους** τους όρους της παρένθεσης, ακόμη και στον τελευταίο.

✎ Παράδειγμα 3 · Παράσταση με τρία πολυώνυμα

Αν $P(x) = x^2 - 3x + 1$, $Q(x) = 2x^2 + x$ και $R(x) = -x^2 + 5$, να βρεθεί το πολυώνυμο $\Sigma(x) = 2P(x) - Q(x) + 3R(x)$ και η τιμή $\Sigma(-1)$.

ΛΥΣΗ

$$\Sigma(x) = 2(x^2 - 3x + 1) - (2x^2 + x) + 3(-x^2 + 5)$$

$$= 2x^2 - 6x + 2 - 2x^2 - x - 3x^2 + 15 = -3x^2 - 7x + 17.$$

$$\text{Τότε } \Sigma(-1) = -3(1) - 7(-1) + 17 = -3 + 7 + 17 = 21.$$

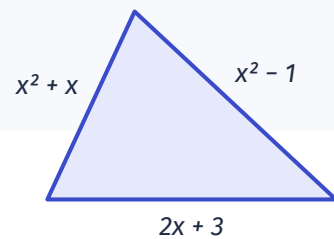
✎ Παράδειγμα 4 · Γεωμετρική εφαρμογή

Ένα τρίγωνο έχει πλευρές $2x + 3$, $x^2 - 1$ και $x^2 + x$. Να βρεθεί η περίμετρός του ως πολυώνυμο και η τιμή της για $x = 3$.

ΛΥΣΗ

$$\Pi(x) = (2x + 3) + (x^2 - 1) + (x^2 + x) = 2x^2 + 3x + 2.$$

Για $x = 3$: $\Pi(3) = 2 \cdot 9 + 9 + 2 = 29$. (Έλεγχος: οι πλευρές γίνονται 9, 8 και 12 με άθροισμα 29 ✓.)



✎ Παράδειγμα 5 · Εύρεση άγνωστου πολυωνύμου

Να βρεθεί πολυώνυμο $K(x)$ τέτοιο ώστε $K(x) + (3x^2 - x + 2) = 5x^2 + 4x$.

ΛΥΣΗ

Λύνουμε όπως σε εξίσωση: $K(x) = (5x^2 + 4x) - (3x^2 - x + 2) = 5x^2 + 4x - 3x^2 + x - 2 = 2x^2 + 5x - 2$.

Συνέχισε στο mathgreece.com



Κόλλησες κάπου; Στο mathgreece.com υπάρχει ολόκληρο το μάθημα με βιντεομαθήματα, σημειώσεις και ασκήσεις — ένα πλήρες δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών.

mathgreece.com
δωρεάν φροντιστήριο

☰ Σύνοψη μαθήματος

- **Πολυώνυμο** = άθροισμα μη όμοιων μονωνύμων (όρων). Διώνυμο: 2 όροι, τριώνυμο: 3 όροι.
- **Βαθμός πολυωνύμου** = ο **μεγαλύτερος** βαθμός όρου (όχι το άθροισμα!).
- $P(\alpha)$: αντικαθιστούμε $x = \alpha$. $P(0)$ = σταθερός όρος, $P(1)$ = άθροισμα συντελεστών.
- Πρόσθεση/αφαίρεση: παρενθέσεις → απαλοιφή (προσοχή στο «-») → αναγωγή όμοιων όρων.

Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να γράψεις κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x και να βρεις τον βαθμό: α) $5 - x^2 + 3x^4 - x$ β) $7x - 2 + x^3$ γ) $1 - x$. ★ ★ ★
- 2 Να βρεις τον βαθμό του πολυωνύμου $2x^3y^2 - 5xy + y^4 - 1$ ως προς x , ως προς y και ως προς x και y . ★ ★ ★
- 3 Δίνεται $P(x) = x^3 - 4x + 3$. Να υπολογίσεις τα $P(0), P(1), P(2), P(-1), P(-3)$. ★ ★ ★
- 4 Δίνονται $A = 2x^2 - 5x + 3$ και $B = -x^2 + x - 4$. Να βρεις τα: α) $A + B$ β) $A - B$ γ) $B - A$ δ) $3A + 2B$. ★ ★ ★
- 5 Να απλοποιήσεις: $(x^3 - 2x + 1) - (3x^2 - 2x) - [x^3 - (x^2 + 5)]$. ★ ★ ★
- 6 Να βρεις τους αριθμούς α, β, γ ώστε τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha - 1)x^2 + 3x + \gamma$ και $Q(x) = 4x^2 + (\beta + 2)x - 7$ να είναι ίσα. ★ ★ ★
- 7 Να βρεις το πολυώνυμο $K(x)$ για το οποίο ισχύει $(2x^3 - x + 6) - K(x) = x^3 + x^2 - 3$. ★ ★ ★
- 8 Δίνεται $P(x) = x^2 + \kappa x - 6$. Αν $P(2) = 4$, να βρεις τον κ και μετά την τιμή $P(-3)$. ★ ★ ★
- 9 Ένα ορθογώνιο έχει μήκος $3x + 2$ και πλάτος $x - 1$ ($x > 1$). Ένα τετράγωνο έχει την ίδια περίμετρο με το ορθογώνιο. Να εκφράσεις την πλευρά του τετραγώνου ως πολυώνυμο του x . ★ ★ ★

1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

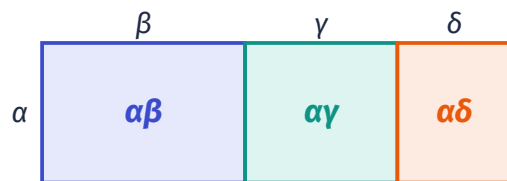
☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- να πολλαπλασιάζεις **μονώνυμο με πολυώνυμο** με την επιμεριστική ιδιότητα,
- να πολλαπλασιάζεις **πολυώνυμο με πολυώνυμο** («όλοι με όλους»),
- να «βλέπεις» τον πολλαπλασιασμό ως **εμβαδόν ορθογωνίου**,
- να προβλέπεις τον **βαθμό** του γινομένου.

Μονώνυμο επί πολυώνυμο

Η βάση όλων είναι η **επιμεριστική ιδιότητα**: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$. Για να πολλαπλασιάσουμε ένα μονώνυμο με ένα πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με **κάθε όρο** του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα.

$$3x(2x^2 - 5x + 4) = 3x \cdot 2x^2 + 3x \cdot (-5x) + 3x \cdot 4 \\ = 6x^3 - 15x^2 + 12x.$$



Το εμβαδόν «σπάει» σε κομμάτια

★ Επιμεριστική ιδιότητα

$$\alpha(\beta + \gamma + \delta) = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta$$

Κάθε όρος μέσα στην παρένθεση πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα που βρίσκεται απ' έξω.

✎ Παράδειγμα 1 · Μονώνυμο επί πολυώνυμο

Να γίνουν οι πράξεις: α) $-2x^2(x^3 - 3x + 1)$ β) $\frac{1}{2}\alpha\beta(4\alpha^2 - 6\beta + 2)$ γ) $(5y - y^2)(-3y)$.

ΛΥΣΗ

α) $-2x^2 \cdot x^3 - 2x^2 \cdot (-3x) - 2x^2 \cdot 1 = -2x^5 + 6x^3 - 2x^2.$

β) $2\alpha^3\beta - 3\alpha\beta^2 + \alpha\beta.$

γ) Η σειρά δεν έχει σημασία: $-15y^2 + 3y^3$, δηλαδή κατά τις φθίνουσες: $3y^3 - 15y^2.$

✗ Συχνό λάθος · Ξεχνάμε κάποιον όρο ή το πρόσημο

✗ $-4x(x-3) = -4x^2 - 12x$

✓ $-4x(x-3) = -4x^2 + 12x$, γιατί $(-4x) \cdot (-3) = +12x$.

✗ $2(x^2 + 3x - 1) = 2x^2 + 3x - 1$ ✓ $2x^2 + 6x - 2$ — ο 2 πολλαπλασιάζει **όλους** τους όρους!

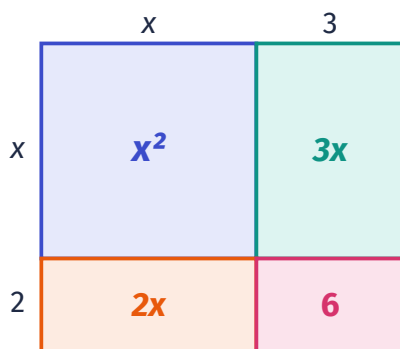
Πολυώνυμο επί πολυώνυμο

★ Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο πολυώνυμα, πολλαπλασιάζουμε **κάθε όρο του πρώτου με κάθε όρο του δεύτερου** και προσθέτουμε τα γινόμενα («όλοι με όλους»):

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta.$$

Στο τέλος κάνουμε **αναγωγή όμοιων όρων**.



Μοντέλο εμβαδού για το $(x+3)(x+2)$

Το ορθογώνιο έχει διαστάσεις $x+3$ και $x+2$. Το εμβαδόν του, υπολογισμένο ως άθροισμα των τεσσάρων κομματιών, είναι:

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= x^2 + 3x + 2x + 6 \\ &= x^2 + 5x + 6.\end{aligned}$$

Κάθε «κουτάκι» του σχήματος είναι ένα από τα γινόμενα «όλοι με όλους».

≡ Πώς οργανώνω τον πολλαπλασιασμό

- 1 Παίρνω τον **πρώτο** όρο του πρώτου πολυωνύμου και τον πολλαπλασιάζω με **όλους** τους όρους του δεύτερου.
- 2 Κάνω το ίδιο με τον **δεύτερο** όρο, μετά με τον τρίτο κ.ο.κ.
- 3 **Μετράω** τα γινόμενα: αν τα πολυώνυμα έχουν μ και ν όρους, πρέπει να βρω $\mu \cdot \nu$ γινόμενα πριν την αναγωγή.
- 4 Κάνω αναγωγή όμοιων όρων και γράφω το αποτέλεσμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις.

✎ Παράδειγμα 2 · Διώνυμο επί διώνυμο

Να γίνουν οι πράξεις: α) $(2x-3)(x+4)$ β) $(3\alpha-\beta)(2\alpha-5\beta)$.

ΛΥΣΗ

$$\alpha) (2x - 3)(x + 4) = 2x^2 + 8x - 3x - 12 = 2x^2 + 5x - 12.$$

$$\beta) (3\alpha - \beta)(2\alpha - 5\beta) = 6\alpha^2 - 15\alpha\beta - 2\alpha\beta + 5\beta^2 = 6\alpha^2 - 17\alpha\beta + 5\beta^2.$$

✎ Παράδειγμα 3 · Διώνυμο επί τριώνυμο

Να βρεθεί το γινόμενο $(x - 2)(x^2 + 3x - 1)$.

ΛΥΣΗ

$2 \cdot 3 = 6$ γινόμενα:

$$\begin{aligned} x \cdot x^2 + x \cdot 3x + x \cdot (-1) - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot 3x - 2 \cdot (-1) \\ = x^3 + 3x^2 - x - 2x^2 - 6x + 2 = x^3 + x^2 - 7x + 2. \end{aligned}$$

Β' ΤΡΟΠΟΣ: ΚΑΘΕΤΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

Όπως στον πολλαπλασιασμό αριθμών, γράφουμε τα μερικά γινόμενα σε στήλες ανά δύναμη:

	x^3	x^2	x	σταθ.
$x \cdot (x^2 + 3x - 1)$	1	3	-1	
$-2 \cdot (x^2 + 3x - 1)$		-2	-6	2
Άθροισμα	1	1	-7	2

★ Βαθμός γινομένου

Ο βαθμός του γινομένου δύο (μη μηδενικών) πολυωνύμων ισούται με το **άθροισμα** των βαθμών τους. Π.χ. 1ου επί 2ου βαθμού δίνει 3ου βαθμού, όπως είδαμε παραπάνω.

✓ Γρήγορος έλεγχος του αποτελέσματος

Βάλε μια εύκολη τιμή, π.χ. $x = 1$, και στο αρχικό γινόμενο και στο αποτέλεσμα. Στο παραπάνω: $(1 - 2)(1 + 3 - 1) = -3$ και $1 + 1 - 7 + 2 = -3$ ✓. Αν βγουν διαφορετικά, σίγουρα υπάρχει λάθος!

✎ Παράδειγμα 4 · Γινόμενο τριών παραγόντων

Να βρεθεί το γινόμενο $(x + 1)(x - 1)(x + 2)$.

ΛΥΣΗ

Πολλαπλασιάζουμε **δύο-δύο**. Πρώτα $(x + 1)(x - 1) = x^2 - x + x - 1 = x^2 - 1$. Μετά

$$(x^2 - 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2.$$

Παράδειγμα 5 · Απλοποίηση παράστασης

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = (x + 3)(x - 2) - x(x + 1) + 2(x - 5)$.

ΛΥΣΗ

Κάνουμε πρώτα τους πολλαπλασιασμούς και μετά τις προσθαφαιρέσεις:

$$\begin{aligned} A &= (x^2 - 2x + 3x - 6) - (x^2 + x) + (2x - 10) \\ &= x^2 + x - 6 - x^2 - x + 2x - 10 = 2x - 16. \end{aligned}$$

✗ Συχνό λάθος · Το «μείον» μπροστά από γινόμενο

$$\times \quad 5 - (x + 1)(x - 2) = 5 - x^2 - 2x + x - 2$$

✓ Πρώτα κάνουμε το γινόμενο μέσα σε παρένθεση και μετά απαλείφουμε:

$$5 - (x + 1)(x - 2) = 5 - (x^2 - x - 2) = 5 - x^2 + x + 2 = -x^2 + x + 7.$$

Παράδειγμα 6 · Πρόβλημα με εμβαδά

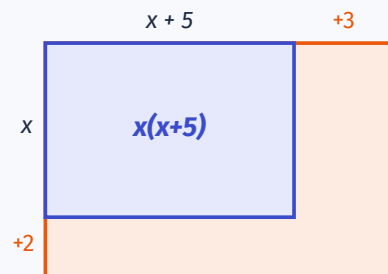
Ένα ορθογώνιο οικόπεδο έχει διαστάσεις x m και $(x + 5)$ m. Ο ιδιοκτήτης αγοράζει διπλανή λωρίδα, ώστε το μήκος να αυξηθεί κατά 3 m και το πλάτος κατά 2 m. Κατά πόσα τετραγωνικά μέτρα αυξήθηκε το εμβαδόν;

ΛΥΣΗ

Αρχικό εμβαδόν: $x(x + 5) = x^2 + 5x$.

Νέο εμβαδόν: $(x + 8)(x + 2) = x^2 + 2x + 8x + 16 = x^2 + 10x + 16$.

Αύξηση: $(x^2 + 10x + 16) - (x^2 + 5x) = 5x + 16$ τετραγωνικά μέτρα. Για παράδειγμα, αν $x = 20$, το εμβαδόν αυξήθηκε κατά 116 m^2 .

**Συνέχισε στο mathgreece.com**

Θέλεις να εμπεδώσεις καλύτερα τη θεωρία; Δες τα σχετικά βίντεο στο **mathgreece.com** και στο κανάλι **MATHGREECE** στο YouTube — ένα ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

Σύνοψη μαθήματος

- Μονώνυμο $\times$ πολυώνυμο: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ — το μονώνυμο «μοιράζεται» σε **όλους** τους όρους.
- Πολυώνυμο $\times$ πολυώνυμο: «όλοι με όλους», μετά αναγωγή. Πλήθος γινομένων $= \mu \cdot \nu$.
- Βαθμός γινομένου = **άθροισμα** των βαθμών.
- Έλεγχος με $x = 1$. Πρώτα γινόμενα, μετά προσθαφαιρέσεις· προσοχή στο «−» μπροστά από γινόμενο.

Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να κάνεις τις πράξεις: α) $4x(3x - 2)$ β) $-x^2(x^2 - x + 5)$ γ) $2\alpha\beta(\alpha - 3\beta + 1)$ δ) $-\frac{1}{3}x(6x^2 - 9)$. ★ ★ ★
- 2 Να κάνεις τις πράξεις: α) $(x + 5)(x + 1)$ β) $(x - 4)(x + 3)$ γ) $(2x - 1)(3x - 2)$ δ) $(\alpha + 2\beta)(\alpha - \beta)$. ★ ★ ★
- 3 Να βρεις τα γινόμενα: α) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ β) $(2x - 1)(x^2 + x - 3)$. ★ ★ ★
- 4 Να βρεις το γινόμενο $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$. ★ ★ ★
- 5 Να απλοποιήσεις: $A = (x - 1)(x + 4) - (x + 2)(x - 3)$. ★ ★ ★
- 6 Να απλοποιήσεις: $B = 2(\alpha - 3)(\alpha + 1) - \alpha(2\alpha - 1) + 3(\alpha + 2)$. ★ ★ ★
- 7 Να βρεις το γινόμενο $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ και να το ελέγξεις για $x = 0$. ★ ★ ★
- 8 Να βρεις τον αριθμό κ ώστε το γινόμενο $(x + \kappa)(x - 3)$ να ισούται με $x^2 + 2x - 15$. ★ ★ ★
- 9 Ένα κουτί σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου έχει διαστάσεις x , $x + 1$ και $x + 2$ (σε cm). Να εκφράσεις τον όγκο του ως πολυώνυμο και να τον υπολογίσεις για $x = 4$. ★ ★ ★

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο · ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ > ΜΑΘΗΜΑ 1.5

1.5

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι είναι **ταυτότητα** και σε τι διαφέρει από μια εξίσωση,
- τις **αξιοσημείωτες ταυτότητες**: τετράγωνο αθροίσματος και διαφοράς, γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά, κύβος αθροίσματος και διαφοράς,
- τη **γεωμετρική ερμηνεία** τους,
- να τις χρησιμοποιείς για γρήγορους υπολογισμούς και για **αποδείξεις**.

Τι είναι ταυτότητα

📖 Ορισμός · Ταυτότητα

Ταυτότητα λέγεται μια ισότητα που περιέχει μεταβλητές και **αληθεύει για όλες τις τιμές** των μεταβλητών.

Για παράδειγμα, η ισότητα $2(x + 3) = 2x + 6$ αληθεύει για **κάθε** x · είναι ταυτότητα. Αντίθετα, η $2x + 6 = 10$ αληθεύει μόνο για $x = 2$ · αυτή είναι **εξίσωση**.

Ορισμένες ταυτότητες εμφανίζονται τόσο συχνά, ώστε αξίζει να τις ξέρουμε «απ' έξω». Τις λέμε **αξιοσημείωτες ταυτότητες**. Είναι το πιο χρήσιμο εργαλείο της Άλγεβρας της Γ' Γυμνασίου — και του Λυκείου!

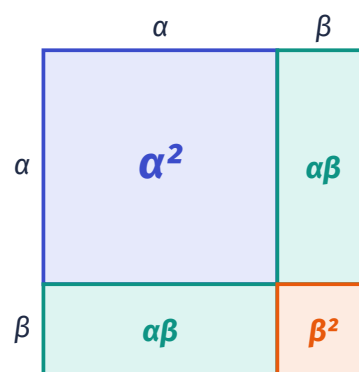
1. Τετράγωνο αθροίσματος

★ Τετράγωνο αθροίσματος

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

«Το τετράγωνο του πρώτου, **συν** το διπλάσιο γινόμενο του πρώτου επί τον δεύτερο, **συν** το τετράγωνο του δεύτερου.»

Απόδειξη. $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.



Το τετράγωνο πλευράς $\alpha + \beta$ χωρίζεται σε α^2 , β^2 και δύο ορθογώνια $\alpha\beta$

✎ Παράδειγμα 1 · Ανάπτυγμα τετραγώνου αθροίσματος

Να γίνουν τα αναπτύγματα: α) $(x + 5)^2$ β) $(3\alpha + 2\beta)^2$ γ) $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2$.

ΛΥΣΗ

Σε κάθε περίπτωση εντοπίζουμε **ποιος είναι ο «πρώτος»** και **ποιος ο «δεύτερος»**.

α) Πρώτος x , δεύτερος 5: $(x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$.

β) Πρώτος 3α , δεύτερος 2β : $(3\alpha)^2 + 2 \cdot 3\alpha \cdot 2\beta + (2\beta)^2 = 9\alpha^2 + 12\alpha\beta + 4\beta^2$.

γ) Πρώτος x^2 , δεύτερος $\frac{1}{2}$: $x^4 + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = x^4 + x^2 + \frac{1}{4}$.

✖ Συχνό λάθος · Το πιο συχνό λάθος της Γ' Γυμνασίου!

$$\times (x + 3)^2 = x^2 + 9$$

$$\checkmark (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Το τετράγωνο **δεν** «μοιράζεται» στους όρους του αθροίσματος. **Ποτέ μη ξεχνάς το διπλάσιο γινόμενο!**
Έλεγχος με αριθμούς: $(1 + 3)^2 = 16$, ενώ $1^2 + 3^2 = 10$.

✖ Συχνό λάθος · Ξεχνάμε να υψώσουμε τον συντελεστή

$$\times (2x + 1)^2 = 2x^2 + 4x + 1$$

$$\checkmark (2x + 1)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

2. Τετράγωνο διαφοράς

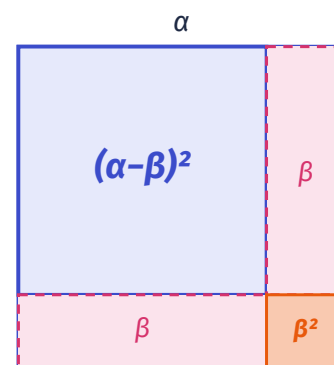
★ Τετράγωνο διαφοράς

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

Ίδια με το τετράγωνο αθροίσματος, μόνο που το **διπλάσιο γινόμενο έχει «μείον»**. Τα τετράγωνα είναι πάντα **θετικά**.

Απόδειξη. $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$.

Επίσης ισχύει $(\beta - \alpha)^2 = (\alpha - \beta)^2$, γιατί δύο αντίθετοι αριθμοί έχουν το ίδιο τετράγωνο.



Από το τετράγωνο α^2 αφαιρούμε τις δύο λωρίδες: $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Παράδειγμα 2 · Ανάπτυγμα τετραγώνου διαφοράς

Να γίνουν τα αναπτύγματα: α) $(x - 4)^2$ β) $(5 - 2y)^2$ γ) $(-x - 3)^2$.

ΛΥΣΗ

α) $x^2 - 8x + 16$.

β) $25 - 20y + 4y^2$, δηλαδή $4y^2 - 20y + 25$.

γ) Βγάζουμε το «μείον» κοινό παράγοντα: $(-x - 3)^2 = [-(x + 3)]^2 = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

✓ Τέχνη στους υπολογισμούς με το μυαλό

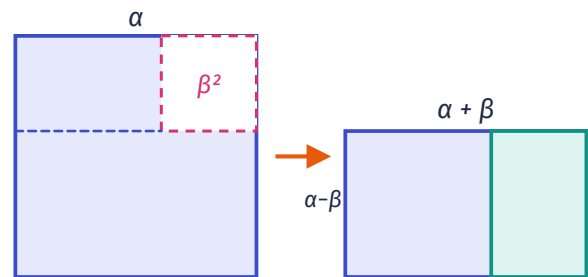
Οι ταυτότητες κάνουν «μαγικούς» υπολογισμούς:

$$51^2 = (50 + 1)^2 = 2500 + 100 + 1 = 2601, \quad 99^2 = (100 - 1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801.$$

3. Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά**★ Διαφορά τετραγώνων**

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

Οι «μεσαίοι» όροι αλληλοαναιρούνται: $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta\alpha - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$.



Κόβουμε τη λωρίδα και τη μεταφέρουμε: $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$

Παράδειγμα 3 · Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά

Να γίνουν οι πράξεις: α) $(x + 7)(x - 7)$ β) $(3\alpha - 2)(3\alpha + 2)$ γ) $(x^2 + y)(y - x^2)$ δ) $(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$.

ΛΥΣΗ

α) $x^2 - 49$. β) $9\alpha^2 - 4$.

γ) Προσοχή: ο «κοινός» όρος είναι ο y και ο «αλλαγμένος» ο x^2 : $(y + x^2)(y - x^2) = y^2 - x^4$.

δ) $(\sqrt{5})^2 - 1^2 = 5 - 1 = 4$. Η ταυτότητα αυτή «διώχνει» τις ρίζες!

✓ Υπολογισμοί με διαφορά τετραγώνων

$$48 \cdot 52 = (50 - 2)(50 + 2) = 2500 - 4 = 2496, \quad 37^2 - 33^2 = (37 - 33)(37 + 33) = 4 \cdot 70 = 280.$$

4. Κύβος αθροίσματος και κύβος διαφοράς

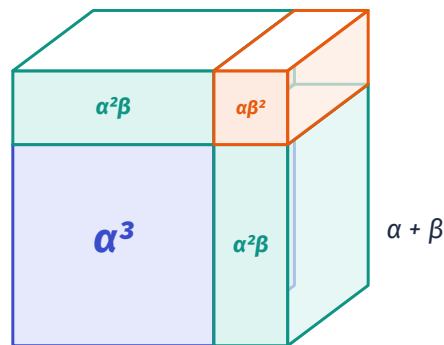
★ Κύβοι

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

Στον κύβο διαφοράς τα πρόσημα **εναλλάσσονται**: +, -, +, -.

Απόδειξη. $(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta) = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)(\alpha + \beta)$
 $= \alpha^3 + \alpha^2\beta + 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3.$



Ο κύβος ακμής $\alpha + \beta$ αποτελείται από 8 στερεά: α^3 , β^3 , τρία «πλακάκια» $\alpha^2\beta$ και τρεις «ράβδους» $\alpha\beta^2$

✎ Παράδειγμα 4 · Ανάπτυγμα κύβων

Να γίνουν τα αναπτύγματα: α) $(x + 2)^3$ β) $(2y - 1)^3$.

ΛΥΣΗ

α) $x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8.$

β) Πρώτος $2y$, δεύτερος 1 :

$$(2y)^3 - 3(2y)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2y \cdot 1^2 - 1^3 = 8y^3 - 12y^2 + 6y - 1.$$

✖ Συχνό λάθος · Κύβος $\neq$ άθροισμα κύβων

$$\times (x + 1)^3 = x^3 + 1 \quad \times (x - 2)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 4 - 8 = x^3 - 6x^2 + 12x + 8$$

$$\checkmark (x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \quad \checkmark (x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \text{ (ο τελευταίος όρος είναι } -\beta^3 = -8).$$

Ανακεφαλαίωση των ταυτοτήτων

Οι πέντε ταυτότητες με μια ματιά

Ονομασία	Ταυτότητα
Τετράγωνο αθροίσματος	$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
Τετράγωνο διαφοράς	$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
Άθροισμα επί διαφορά	$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$
Κύβος αθροίσματος	$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
Κύβος διαφοράς	$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

Εφαρμογές: απλοποιήσεις και αποδείξεις

Παράδειγμα 5 · Απλοποίηση με ταυτότητες

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = (x + 3)^2 - (x - 1)^2 - (x + 2)(x - 2)$.

ΛΥΣΗ

Κάθε ανάπτυσμα το κλείνουμε **σε παρένθεση** πριν το απαλείψουμε:

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 4) \\ &= x^2 + 6x + 9 - x^2 + 2x - 1 - x^2 + 4 = -x^2 + 8x + 12. \end{aligned}$$

Πώς αποδεικνύω μια ταυτότητα

- Ξεκινώ από **το ένα μέλος** (συνήθως το πιο «πολύπλοκο»).
- Κάνω πράξεις μέχρι να καταλήξω στο **άλλο μέλος**.
- Εναλλακτικά: κάνω πράξεις και στα **δύο μέλη** χωριστά και δείχνω ότι καταλήγουν στην **ίδια** παράσταση.

Παράδειγμα 6 · Απόδειξη ταυτότητας

Να αποδειχθεί ότι $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$.

ΛΥΣΗ

Ξεκινάμε από το πρώτο μέλος:

$$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = 4\alpha\beta.$$

Β' ΤΡΟΠΟΣ: ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Το πρώτο μέλος είναι της μορφής $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ με $A = \alpha + \beta$, $B = \alpha - \beta$:

$$[(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)][(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)] = 2\beta \cdot 2\alpha = 4\alpha\beta.$$

 Παράδειγμα 7 · Χρήση ταυτοτήτων με δεδομένα

Αν $x + y = 7$ και $xy = 10$, να υπολογιστεί η παράσταση $x^2 + y^2$ χωρίς να βρεθούν οι x, y .

ΛΥΣΗ

Από την ταυτότητα $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ έχουμε

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 7^2 - 2 \cdot 10 = 49 - 20 = 29.$$

(Πράγματι, για $x = 5, y = 2$: $25 + 4 = 29$ ✓.)

 Παράδειγμα 8 · Ρίζες και ταυτότητες

Να υπολογιστεί η παράσταση $B = (\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2$.

ΛΥΣΗ

$$B = (3 + 2\sqrt{3} + 1) + (3 - 2\sqrt{3} + 1) = 8.$$

Οι ρίζες εξαφανίστηκαν, γιατί τα διπλάσια γινόμενα είναι αντίθετα.

 Η ταυτότητα δουλεύει και «ανάποδα»

Μια ταυτότητα διαβάζεται και **από δεξιά προς τα αριστερά**: π.χ. $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$. Αυτό είναι ακριβώς η βάση της **παραγοντοποίησης**, που θα δούμε στο επόμενο μάθημα. Γι' αυτό πρέπει να αναγνωρίζεις τις ταυτότητες και στις **δύο** κατευθύνσεις.

Συνέχισε στο mathgreece.com

Θέλεις να εμπεδώσεις καλύτερα τη θεωρία; Δες τα σχετικά βίντεο στο **mathgreece.com** και στο κανάλι **MATHGREECE** στο YouTube — ένα ολοκληρωμένο **δωρεάν φροντιστήριο**.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

★ ★ ★

- 1 Να γίνουν τα αναπτύγματα: α) $(x + 6)^2$ β) $(2\alpha + 3)^2$ γ) $(x + 3y)^2$ δ) $\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$.

★ ★ ★

- 2 Να γίνουν τα αναπτύγματα: α) $(x - 9)^2$ β) $(4 - 3y)^2$ γ) $(2x^2 - 5)^2$ δ) $(-\alpha + 2\beta)^2$.

★ ★ ★

- 3 Να κάνεις τις πράξεις: α) $(x - 8)(x + 8)$ β) $(5\alpha + 1)(5\alpha - 1)$ γ) $(2x - 3y)(3y + 2x)$ δ) $(\sqrt{7} + 2)(\sqrt{7} - 2)$.

- 4 Να γίνουν τα αναπτύγματα: α) $(x+3)^3$ β) $(x-1)^3$ γ) $(2\alpha+\beta)^3$. ★★ ★
- 5 Να υπολογίσεις με τη βοήθεια ταυτοτήτων: α) 101^2 β) 49^2 γ) $103 \cdot 97$ δ) $68^2 - 32^2$. ★★ ★
- 6 Να απλοποιήσεις: $A = (2x-1)^2 - (x+2)^2 + 3(x-1)(x+1)$. ★★ ★
- 7 Να συμπληρώσεις τα κενά ώστε να προκύψουν ταυτότητες: α) $(x+\square)^2 = x^2 + \square + 16$ β) $(\square - 3)^2 = 4\alpha^2 - \square + 9$ γ) $(x+\square)(x-\square) = x^2 - \frac{1}{9}$. ★★ ★
- 8 Να αποδείξεις ότι $(\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$. ★★ ★
- 9 Αν $\alpha - \beta = 3$ και $\alpha\beta = 4$, να υπολογίσεις τα $\alpha^2 + \beta^2$ και $(\alpha + \beta)^2$. ★★ ★
- 10 Να αποδείξεις ότι για κάθε x ισχύει $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1 = (x^2 + 5x + 5)^2$. ★★ ★
- 11 Να αποδείξεις ότι η παράσταση $\Pi = (x+2)^2 - (x-2)^2 - 8x$ είναι ίση με μηδέν για κάθε x . Στη συνέχεια να υπολογίσεις χωρίς κομπιουτεράκι την $1002^2 - 998^2$. ★★ ★
- 12 Να αποδείξεις ότι $(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$ (ταυτότητα του Lagrange). ★★ ★

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο · ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ > ΜΑΘΗΜΑ 1.6

1.6

Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

🕒 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

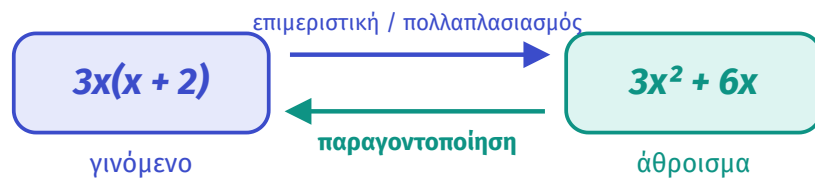
- τι σημαίνει **παραγοντοποίηση** και γιατί είναι τόσο χρήσιμη,
- τις βασικές μεθόδους: **κοινός παράγοντας**, **ομαδοποίηση**, **διαφορά τετραγώνων**, **ανάπτυγμα τετραγώνου**, **διαφορά και άθροισμα κύβων**, **τριώνυμο** $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$,
- να συνδυάζεις μεθόδους ακολουθώντας μια **σταθερή στρατηγική**.

Τι είναι η παραγοντοποίηση

Μέχρι τώρα μετατρέπαμε **γινόμενα σε αθροίσματα**: $3x(x + 2) = 3x^2 + 6x$. Η **παραγοντοποίηση** είναι η **αντίστροφη** διαδικασία:

📖 Ορισμός · Παραγοντοποίηση

Παραγοντοποίηση μιας αλγεβρικής παράστασης λέγεται η μετατροπή της σε **γινόμενο** παραγόντων.



Πολλαπλασιασμός και παραγοντοποίηση είναι αντίστροφες διαδικασίες

Γιατί μας ενδιαφέρει; Γιατί με την παραγοντοποίηση:

- **απλοποιούμε κλάσματα** (μαθήματα 1.9 – 1.10),
- βρίσκουμε **Ε.Κ.Π.** και **Μ.Κ.Δ.** παραστάσεων (μάθημα 1.8),
- **λύνουμε εξισώσεις** με την ιδιότητα « $\alpha\beta = 0 \iff \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$ » (μάθημα 2.2).

1. Κοινός παράγοντας

Αν **όλοι** οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τον «βγάζουμε έξω» με την επιμεριστική ιδιότητα **ανάποδα**: $\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma)$.

≡ Πώς βρίσκω τον κοινό παράγοντα

- 1 **Αριθμός:** παίρνω τον Μ.Κ.Δ. των συντελεστών.
- 2 **Μεταβλητές:** παίρνω όσες υπάρχουν σε **όλους** τους όρους, με τον **μικρότερο** εκθέτη.
- 3 **Διαιρώ** κάθε όρο με τον κοινό παράγοντα για να βρω τι μένει στην παρένθεση.
- 4 **Ελέγχω** κάνοντας τον πολλαπλασιασμό.

✎ Παράδειγμα 1 · Κοινός παράγοντας

Να παραγοντοποιηθούν: α) $6x^3 - 9x^2$ β) $8\alpha^2\beta - 12\alpha\beta^2 + 4\alpha\beta$ γ) $3(x-2) + y(x-2)$ δ) $5x(\alpha-\beta) - (\beta-\alpha)$.

ΛΥΣΗ

α) Μ.Κ.Δ.(6, 9) = 3 και κοινό x^2 : $6x^3 - 9x^2 = 3x^2(2x - 3)$.

β) Κοινός παράγοντας $4\alpha\beta$: $4\alpha\beta(2\alpha - 3\beta + 1)$. Προσοχή: όπου ο όρος «φεύγει» ολόκληρος, μένει 1.

γ) Κοινός παράγοντας είναι **ολόκληρη η παρένθεση** $(x-2)$: $(x-2)(3+y)$.

δ) Παρατηρούμε ότι $\beta - \alpha = -(\alpha - \beta)$. Άρα

$$5x(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(5x + 1).$$

✖ Συχνό λάθος · Ο «χαμένος» όρος 1

$$\times 4x^2 + x = x(4x) \quad \checkmark 4x^2 + x = x(4x + 1)$$

Όταν ένας όρος ταυτίζεται με τον κοινό παράγοντα, στη θέση του στην παρένθεση γράφουμε 1. Έλεγχος: $x(4x) = 4x^2$, που δεν είναι η αρχική παράσταση.

2. Ομαδοποίηση

Όταν **δεν** υπάρχει κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους, τους χωρίζουμε σε **ομάδες** που έχουν κοινό παράγοντα, ώστε μετά να εμφανιστεί κοινός παράγοντας **ανάμεσα στις ομάδες**.

✎ Παράδειγμα 2 · Ομαδοποίηση

Να παραγοντοποιηθούν: α) $\alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y$ β) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ γ) $\alpha\beta - \alpha - \beta + 1$.

ΛΥΣΗ

α) $\alpha(x+y) + \beta(x+y) = (x+y)(\alpha+\beta)$.

β) $x^2(x-2) + 3(x-2) = (x-2)(x^2+3)$.

γ) $\alpha(\beta-1) - (\beta-1) = (\beta-1)(\alpha-1)$. Προσοχή: βγάζοντας το «-» από τους $-\beta+1$, αυτοί γίνονται $-(\beta-1)$.

✓ **Αν η ομαδοποίηση δεν «βγαίνει»**

Δοκίμασε **άλλο ζευγάρι** των όρων. Π.χ. στο $x^2 - y + xy - x$ το ζευγάρι $(x^2 - x) + (xy - y) = x(x - 1) + y(x - 1) = (x - 1)(x + y)$ δουλεύει, ενώ το $(x^2 - y) + (xy - x)$ όχι.

3. Διαφορά τετραγώνων

★ **Διαφορά τετραγώνων**

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

✎ **Παράδειγμα 3 · Διαφορά τετραγώνων**

Να παραγοντοποιηθούν: α) $x^2 - 25$ β) $9\alpha^2 - 16\beta^2$ γ) $(x + 1)^2 - 4$ δ) $x^4 - 81$.

ΛΥΣΗ

α) $x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5)$.

β) $(3\alpha)^2 - (4\beta)^2 = (3\alpha - 4\beta)(3\alpha + 4\beta)$.

γ) $(x + 1)^2 - 2^2 = (x + 1 - 2)(x + 1 + 2) = (x - 1)(x + 3)$.

δ) Δύο φορές! $x^4 - 81 = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$. Το $x^2 + 9$ **δεν** παραγοντοποιείται (είναι **άθροισμα** τετραγώνων).

✗ **Συχνό λάθος · Άθροισμα τετραγώνων**

✗ $x^2 + 4 = (x + 2)(x + 2)$ ή $(x - 2)(x + 2)$

✓ Το $x^2 + 4$ **δεν** παραγοντοποιείται με τα εργαλεία μας. Μόνο η **διαφορά** τετραγώνων «σπάει».

4. Ανάπτυγμα τετραγώνου (τέλειο τετράγωνο)

★ **Τέλειο τετράγωνο**

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

Για να αναγνωρίσουμε ένα τέλειο τετράγωνο ελέγχουμε τρία πράγματα: δύο όροι είναι **τετράγωνα** (α^2 και β^2) και ο τρίτος είναι το **διπλάσιο γινόμενο** $\pm 2\alpha\beta$.

✎ **Παράδειγμα 4 · Αναγνώριση τέλειου τετραγώνου**

Να παραγοντοποιηθούν: α) $x^2 + 14x + 49$ β) $4y^2 - 12y + 9$ γ) $x^2 + 5x + 25$.

ΛΥΣΗ

α) $x^2 = (x)^2$, $49 = 7^2$ και $2 \cdot x \cdot 7 = 14x \checkmark$. Άρα $(x + 7)^2$.

β) $4y^2 = (2y)^2$, $9 = 3^2$ και $2 \cdot 2y \cdot 3 = 12y \checkmark$. Άρα $(2y - 3)^2$.

γ) x^2 και $25 = 5^2$, αλλά το διπλάσιο γινόμενο θα ήταν $10x$, όχι $5x$. Άρα **δεν** είναι τέλειο τετράγωνο.

5. Διαφορά και άθροισμα κύβων**★ Κύβοι**

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

Μπορείς να τις επαληθεύσεις κάνοντας τον πολλαπλασιασμό στο δεύτερο μέλος. **Βοήθημα μνήμης:** το πρόσημο της πρώτης παρένθεσης είναι **το ίδιο** με της παράστασης, ενώ στο $\alpha\beta$ της δεύτερης είναι **το αντίθετο**.

✎ Παράδειγμα 5 · Κύβοι

Να παραγοντοποιηθούν: α) $x^3 - 8$ β) $27\alpha^3 + 1$ γ) $2x^4 - 54x$.

ΛΥΣΗ

α) $x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

β) $(3\alpha)^3 + 1^3 = (3\alpha + 1)(9\alpha^2 - 3\alpha + 1)$.

γ) Πρώτα κοινός παράγοντας: $2x(x^3 - 27) = 2x(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$.

6. Τριώνυμο της μορφής $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

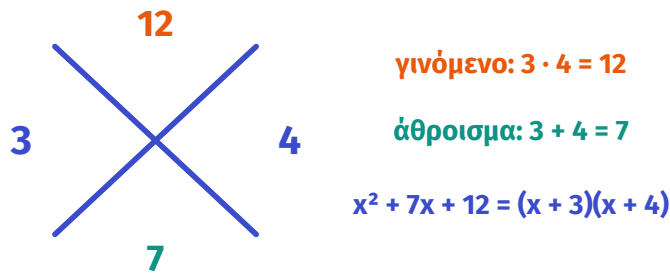
Από τον πολλαπλασιασμό ξέρουμε ότι $(x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$. Διαβάζοντας ανάποδα:

★ Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Για να παραγοντοποιήσουμε το $x^2 + Sx + P$ ψάχνουμε **δύο αριθμούς** α, β με

$$\alpha + \beta = S \quad (\text{άθροισμα}) \quad \text{και} \quad \alpha \cdot \beta = P \quad (\text{γινόμενο}).$$

Τότε $x^2 + Sx + P = (x + \alpha)(x + \beta)$.



«Σταυρός» για το $x^2 + 7x + 12$: ψάχνουμε αριθμούς με γινόμενο 12 και άθροισμα 7

✎ Παράδειγμα 6 · Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Να παραγοντοποιηθούν: α) $x^2 + 7x + 12$ β) $x^2 - 8x + 15$ γ) $x^2 + 2x - 15$ δ) $x^2 - x - 20$.

ΛΥΣΗ

Σε κάθε περίπτωση ξεκινάμε από το **γινόμενο** (έχει λιγότερες επιλογές) και ελέγχουμε το άθροισμα.

α) Γινόμενο 12, άθροισμα 7: 3 και 4. $\Rightarrow (x + 3)(x + 4)$.

β) Γινόμενο $15 > 0$ και άθροισμα $-8 < 0$: και οι δύο **αρνητικοί**, -3 και -5 . $\Rightarrow (x - 3)(x - 5)$.

γ) Γινόμενο $-15 < 0$: **ετερόσημοι**. Άθροισμα 2: 5 και -3 . $\Rightarrow (x + 5)(x - 3)$.

δ) Γινόμενο -20 , άθροισμα -1 : -5 και 4. $\Rightarrow (x - 5)(x + 4)$.

✓ Τα πρόσημα «μιλάνε»

- Γινόμενο **θετικό** $\rightarrow$ ομόσημοι αριθμοί, με το πρόσημο του αθροίσματος.
- Γινόμενο **αρνητικό** $\rightarrow$ ετερόσημοι· ο μεγαλύτερος κατ' απόλυτη τιμή έχει το πρόσημο του αθροίσματος.

Η στρατηγική της παραγοντοποίησης

☰ Η σειρά που ακολουθώ — πάντα!

- 1 Κοινός παράγοντας;** Αν ναι, τον βγάζω πρώτα.
- 2 Μετρώ τους όρους που έμειναν:** - **2 όροι** $\rightarrow$ διαφορά τετραγώνων ή διαφορά/άθροισμα κύβων; - **3 όροι** $\rightarrow$ τέλειο τετράγωνο ή τριώνυμο $x^2 + Sx + P$; - **4 ή περισσότεροι όροι** $\rightarrow$ ομαδοποίηση (ή ομάδα που κάνει τέλειο τετράγωνο).
- 3 Συνεχίζω** σε κάθε παράγοντα μέχρι να μην «σπάει» άλλο.
- 4 Ελέγχω** με πολλαπλασιασμό ή με μια τιμή του x .

✎ Παράδειγμα 7 · Συνδυασμός μεθόδων

Να παραγοντοποιηθούν πλήρως: α) $3x^3 - 12x$ β) $2x^3 + 8x^2 + 8x$ γ) $x^2 - y^2 + 6y - 9$ δ) $x^3 - x^2 - 4x + 4$.

ΛΥΣΗ

α) $3x(x^2 - 4) = 3x(x - 2)(x + 2)$.

β) $2x(x^2 + 4x + 4) = 2x(x + 2)^2$.

γ) Οι τρεις τελευταίοι όροι κρύβουν τετράγωνο: $x^2 - (y^2 - 6y + 9) = x^2 - (y - 3)^2$, οπότε

$$= (x - y + 3)(x + y - 3)$$
.

δ) Ομαδοποίηση: $x^2(x - 1) - 4(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$.

✗ Συχνό λάθος · Ημιτελής παραγοντοποίηση

✗ $5x^2 - 45 = 5(x^2 - 9)$ — και σταματάμε εδώ.

✓ $5x^2 - 45 = 5(x^2 - 9) = 5(x - 3)(x + 3)$

Πάντα ρώτα τον εαυτό σου: «σπάει κι άλλο κάποιος παράγοντας;»

✎ Παράδειγμα 8 · Εφαρμογή σε αριθμητικό υπολογισμό

Να υπολογιστεί χωρίς κομπιουτεράκι: $A = 17 \cdot 83 + 17 \cdot 17$ και $B = \frac{2027^2 - 2023^2}{8}$.

ΛΥΣΗ

$A = 17(83 + 17) = 17 \cdot 100 = 1700$ (κοινός παράγοντας).

$B = \frac{(2027 - 2023)(2027 + 2023)}{8} = \frac{4 \cdot 4050}{8} = 2025$ (διαφορά τετραγώνων).



Συνέχισε στο mathgreece.com

Για περισσότερη εξάσκηση: στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο, κουίζ, παιχνίδια γνώσεων και επιπλέον φυλλάδια ασκήσεων — **όλα δωρεάν**.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

Σύνοψη μαθήματος

Μορφή	Παραγοντοποίηση
$\alpha\beta + \alpha\gamma$	$\alpha(\beta + \gamma)$
$\alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y$	$(x + y)(\alpha + \beta)$
$\alpha^2 - \beta^2$	$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$
$\alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$	$(\alpha \pm \beta)^2$
$\alpha^3 - \beta^3$	$(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
$\alpha^3 + \beta^3$	$(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$	$(x + \alpha)(x + \beta)$

Πρώτα κοινός παράγοντας – μετά μετράω όρους – συνεχίζω μέχρι τέλους.

 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να παραγοντοποιήσεις: α) $10x - 15$ β) $x^2 - 7x$ γ) $6\alpha^3\beta^2 + 9\alpha^2\beta^3$ δ) $2x(y + 1) - 5(y + 1)$. ★★☆☆
- 2 Να παραγοντοποιήσεις: α) $x(\alpha - 2) + 3(2 - \alpha)$ β) $(x - 1)^2 - 3(x - 1)$ γ) $4x^2(x + 3) - x(x + 3)$. ★★★☆
- 3 Να παραγοντοποιήσεις με ομαδοποίηση: α) $x^2 + 3x + xy + 3y$ β) $\alpha^3 + \alpha^2 - \alpha - 1$ γ) $2xy - 6x - y + 3$. ★★★☆
- 4 Να παραγοντοποιήσεις: α) $x^2 - 36$ β) $49 - 4y^2$ γ) $25\alpha^2 - \frac{1}{9}$ δ) $(2x + 1)^2 - x^2$. ★★☆☆
- 5 Να γράψεις ως τετράγωνο: α) $x^2 - 6x + 9$ β) $9\alpha^2 + 30\alpha + 25$ γ) $x^2 - x + \frac{1}{4}$. ★★☆☆
- 6 Να παραγοντοποιήσεις: α) $x^2 + 9x + 20$ β) $x^2 - 10x + 21$ γ) $x^2 + 4x - 12$ δ) $x^2 - 3x - 28$. ★★★☆
- 7 Να παραγοντοποιήσεις: α) $x^3 + 64$ β) $8 - y^3$ γ) $\alpha^3\beta^3 - 1$. ★★★☆
- 8 Να παραγοντοποιήσεις πλήρως: α) $2x^2 - 18$ β) $x^3 - 10x^2 + 25x$ γ) $3x^2 + 6x - 24$ δ) $x^4 - 16$. ★★★☆
- 9 Να παραγοντοποιήσεις: α) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$ β) $\alpha^2 - 4\beta^2 + \alpha - 2\beta$ γ) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$. ★★★★★
- 10 Να υπολογίσεις χωρίς κομπιουτεράκι: α) $63^2 - 37^2$ β) $45 \cdot 72 - 45 \cdot 22$ γ) $\frac{999^3 + 1}{999^2 - 999 + 1}$. ★★★★★

- 11 Να αποδείξεις ότι ο αριθμός $n^3 - n$ διαιρείται με το 6 για κάθε φυσικό n . (Υπόδειξη: παραγοντοποίησε.)



1.7 Διαίρεση πολυωνύμων

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- να θυμηθείς την **ευκλείδεια διαίρεση** φυσικών αριθμών,
- να κάνεις **διαίρεση πολυωνύμων** με τον αλγόριθμο της «κάθετης» διαίρεσης,
- την **ταυτότητα της διαίρεσης** $\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \nu(x)$,
- πότε μια διαίρεση είναι **τέλεια** και πώς αυτό συνδέεται με την παραγοντοποίηση.

Θυμόμαστε: η ευκλείδεια διαίρεση αριθμών

Όταν διαιρούμε τον 47 με τον 5 βρίσκουμε πηλίκο 9 και υπόλοιπο 2. Αυτό γράφεται:

$$47 = 5 \cdot 9 + 2, \quad 0 \leq 2 < 5.$$

Διαιρετέος

$$\Delta = 47$$

Διαιρέτης

$$\delta = 5$$

Πηλίκο

$$\pi = 9$$

Υπόλοιπο

$$\nu = 2 < \delta$$

Ακριβώς η ίδια ιδέα ισχύει και για τα πολυώνυμα. Η «αξία» ενός πολυωνύμου μετριέται με τον **βαθμό** του, οπότε η συνθήκη «υπόλοιπο μικρότερο από τον διαιρέτη» γίνεται «**βαθμός υπολοίπου μικρότερος από τον βαθμό του διαιρέτη**».

Η διαίρεση πολυωνύμων

★ Ταυτότητα της διαίρεσης

Για δύο πολυώνυμα $\Delta(x)$ (διαιρετέος) και $\delta(x) \neq 0$ (διαιρέτης) υπάρχουν **μοναδικά** πολυώνυμα $\pi(x)$ (πηλίκο) και $\nu(x)$ (υπόλοιπο) ώστε

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \nu(x),$$

όπου το $\nu(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει **βαθμό μικρότερο** από τον βαθμό του $\delta(x)$.

≡ Ο αλγόριθμος της διαίρεσης

- 1 Γράφουμε διαιρετέο και διαιρέτη **κατά τις φθίνουσες δυνάμεις**. Στον διαιρετέο συμπληρώνουμε με **μηδενικούς όρους** όσες δυνάμεις λείπουν.
- 2 Διαιρούμε τον **πρώτο όρο του διαιρετέου** με τον **πρώτο όρο του διαιρέτη**: βρίσκουμε τον πρώτο όρο του πηλίκου.
- 3 Πολλαπλασιάζουμε αυτόν τον όρο με **όλο** τον διαιρέτη και γράφουμε το γινόμενο **με αλλαγμένα πρόσημα** κάτω από τους όμοιους όρους.
- 4 Προσθέτουμε: προκύπτει ένα νέο πολυώνυμο («μερικό υπόλοιπο»).
- 5 Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2-4 με το νέο πολυώνυμο, **μέχρι ο βαθμός του να γίνει μικρότερος από τον βαθμό του διαιρέτη**.

✎ Παράδειγμα 1 · Διαίρεση με δινώνυμο

Να γίνει η διαίρεση $(3x^3 - 2x^2 + 5) : (x - 2)$ και να γραφτεί η ταυτότητα της διαίρεσης.

ΛΥΣΗ

Ο διαιρετέος δεν έχει όρο με x , οπότε τον γράφουμε $3x^3 - 2x^2 + 0x + 5$.

$3x^3$	$-2x^2$	$+0x$	$+5$	$x - 2$
$-3x^3$	$+6x^2$			$3x^2 + 4x + 8$
	$4x^2$		$+5$	
	$-4x^2$	$+8x$		
		$8x$	$+5$	
		$-8x$	$+16$	
			21	

- $3x^3 : x = 3x^2$. Πολλαπλασιάζουμε: $3x^2(x - 2) = 3x^3 - 6x^2$, γράφουμε $-3x^3 + 6x^2$ και προσθέτουμε: $4x^2 + 0x + 5$.
- $4x^2 : x = 4x$. $4x(x - 2) = 4x^2 - 8x \rightarrow$ γράφουμε $-4x^2 + 8x \rightarrow$ μένει $8x + 5$.
- $8x : x = 8$. $8(x - 2) = 8x - 16 \rightarrow$ γράφουμε $-8x + 16 \rightarrow$ μένει 21.

Ο βαθμός του 21 είναι $0 < 1$, οπότε σταματάμε. Πηλίκο $\pi(x) = 3x^2 + 4x + 8$, υπόλοιπο $v = 21$:

$$3x^3 - 2x^2 + 5 = (x - 2)(3x^2 + 4x + 8) + 21.$$

✓ Έλεγχος με μία τιμή

Βάλε $x = 1$ στην ταυτότητα της διαίρεσης: αριστερά $3 - 2 + 5 = 6$, δεξιά $(1 - 2)(3 + 4 + 8) + 21 = -15 + 21 = 6 \checkmark$.

Παράδειγμα 2 · Διαίρεση με τριώνυμο

Να γίνει η διαίρεση $(2x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 4) : (x^2 + 1)$.

ΛΥΣΗ

Γράφουμε τον διαιρέτη ως $x^2 + 0x + 1$:

$2x^4$	$-x^3$	$+3x^2$	$-x$	$+4$	$x^2 + 1$
$-2x^4$		$-2x^2$			$2x^2 - x + 1$
	$-x^3$	$+x^2$	$-x$	$+4$	
	x^3		$+x$		
		x^2		$+4$	
		$-x^2$		-1	
				3	

Πηλίκο $\pi(x) = 2x^2 - x + 1$ και υπόλοιπο $v = 3$ (βαθμού $0 < 2$). Δηλαδή

$$2x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 4 = (x^2 + 1)(2x^2 - x + 1) + 3.$$

✗ Συχνό λάθος · Το υπόλοιπο «σταματάει» νωρίτερα

✗ Συνεχίζω τη διαίρεση ενώ το μερικό υπόλοιπο έχει ήδη μικρότερο βαθμό από τον διαιρέτη (π.χ. διαιρώ $5x$ με x^2).

✓ Σταματάω **μόλις** ο βαθμός του μερικού υπολοίπου γίνει **μικρότερος** από τον βαθμό του διαιρέτη. Στη διαίρεση με $x^2 + 1$, ένα υπόλοιπο της μορφής $5x - 2$ είναι **αποδεκτό** τελικό υπόλοιπο.

✗ Συχνό λάθος · Ξεχνάμε τους μηδενικούς όρους

✗ Διαιρώ $x^3 - 8$ με $x - 2$ γράφοντας τον διαιρετέο σκέτο « $x^3 - 8$ » — οι στήλες «μπερδεύονται».

✓ Γράφω $x^3 + 0x^2 + 0x - 8$, ώστε κάθε δύναμη να έχει τη δική της στήλη.

Τέλεια διαίρεση**☒ Ορισμός · Τέλεια διαίρεση**

Αν το υπόλοιπο είναι **μηδέν**, η διαίρεση λέγεται **τέλεια**. Τότε $\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x)$ και λέμε ότι το $\delta(x)$ είναι **παράγοντας** (ή **διαιρέτης**) του $\Delta(x)$.

Παράδειγμα 3 · Τέλεια διαίρεση και παραγοντοποίηση

Να γίνει η διαίρεση $(x^3 - 8) : (x - 2)$ και να παραγοντοποιηθεί το $x^3 - 8$.

ΛΥΣΗ

x^3	$+0x^2$	$+0x$	-8	$x - 2$
$-x^3$	$+2x^2$			$x^2 + 2x + 4$
$2x^2$				
	$-2x^2$	$+4x$	-8	
$4x - 8$				
	$-4x$	$+8$		
0				

Το υπόλοιπο είναι 0, άρα $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ — ακριβώς η ταυτότητα διαφοράς κύβων του προηγούμενου μαθήματος!

► Το υπόλοιπο της διαίρεσης με $x - \rho$

Αν διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο $P(x)$ με το $x - \rho$, το υπόλοιπο είναι **αριθμός** v (βαθμού 0), οπότε $P(x) = (x - \rho)\pi(x) + v$. Αν βάλουμε $x = \rho$, ο πρώτος όρος μηδενίζεται:

★ Υπόλοιπο διαίρεσης με $x - \rho$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - \rho)$ είναι $v = P(\rho)$.

Επομένως: η διαίρεση είναι **τέλεια** $\iff P(\rho) = 0$. Ο αριθμός ρ τότε λέγεται **ρίζα** του πολυωνύμου.

Παράδειγμα 4 · Χρήση του υπολοίπου

α) Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης $(x^3 + 2x^2 - 5x + 1) : (x - 1)$ χωρίς να γίνει η διαίρεση. β) Να εξεταστεί αν το $x + 3$ είναι παράγοντας του $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ και να παραγοντοποιηθεί το $P(x)$.

ΛΥΣΗ

α) $v = P(1) = 1 + 2 - 5 + 1 = -1$.

β) Είναι $x + 3 = x - (-3)$, άρα ελέγχουμε το $P(-3) = -27 + 27 + 12 - 12 = 0$. Η διαίρεση είναι τέλεια, οπότε το $x + 3$ είναι παράγοντας. Με ομαδοποίηση:

$$P(x) = x^2(x + 3) - 4(x + 3) = (x + 3)(x^2 - 4) = (x + 3)(x - 2)(x + 2).$$

Παράδειγμα 5 · Εύρεση παραμέτρου

Να βρεθεί ο αριθμός κ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - \kappa x^2 + x + 6$ να διαιρείται ακριβώς με το $x - 2$.

ΛΥΣΗ

Πρέπει $P(2) = 0$: $16 - 4\kappa + 2 + 6 = 0 \iff 24 = 4\kappa \iff \kappa = 6$.

✎ Παράδειγμα 6 · Εύρεση διαιρετέου

Σε μια διαίρεση πολυωνύμων ο διαιρέτης είναι $x^2 - 3$, το πηλίκο $2x + 1$ και το υπόλοιπο $x - 4$. Να βρεθεί ο διαιρετέος.

ΛΥΣΗ

Από την ταυτότητα της διαίρεσης:

$$\Delta(x) = (x^2 - 3)(2x + 1) + (x - 4) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3 + x - 4 = 2x^3 + x^2 - 5x - 7.$$

(Το υπόλοιπο $x - 4$ έχει βαθμό $1 < 2$, άρα είναι αποδεκτό.)

Συνέχισε στο **mathgreece.com**

Θέλεις να δεις αυτό το μάθημα σε βίντεο, με επιπλέον λυμένες ασκήσεις και κουίζ αυτοαξιολόγησης; Μπες στο **mathgreece.com** — θα βρεις ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

☰ Σύνοψη μαθήματος

- $\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \nu(x)$, με $\nu(x) = 0$ ή βαθμός $\nu < \text{βαθμός } \delta$.
- Αλγόριθμος: πρώτος : πρώτο $\rightarrow$ πολλαπλασιάζω $\rightarrow$ αλλάζω πρόσημα $\rightarrow$ προσθέτω $\rightarrow$ επαναλαμβάνω.
- Συμπληρώνω μηδενικούς όρους στον διαιρετέο.
- Τέλεια διαίρεση: $\nu = 0$, τότε $\Delta = \delta \cdot \pi$ (παραγοντοποίηση).
- Υπόλοιπο της $P(x)$: $(x - \rho)$ είναι το $P(\rho)$.

🎯 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να κάνεις τη διαίρεση $(x^2 + 5x + 7) : (x + 2)$ και να γράψεις την ταυτότητα της διαίρεσης. ★ ★ ★
- 2 Να κάνεις τη διαίρεση $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 5) : (x - 1)$. ★ ★ ★
- 3 Να κάνεις τη διαίρεση $(x^4 - 1) : (x + 1)$. Είναι τέλεια; ★ ★ ★
- 4 Να κάνεις τη διαίρεση $(6x^3 + x^2 - 7x + 2) : (2x - 1)$. ★ ★ ★
- 5 Να κάνεις τη διαίρεση $(x^4 + 2x^3 - x + 5) : (x^2 - x + 1)$. ★ ★ ★

- 6 Χωρίς να κάνεις τη διαίρεση, να βρεις το υπόλοιπο της $(x^3 - 4x^2 + x + 7) : (x - 3)$. ★ ★ ★
- 7 Να βρεις τον λ ώστε το $x + 1$ να είναι παράγοντας του $P(x) = x^3 + \lambda x^2 - 2x + 4$. ★ ★ ★
- 8 Να εξετάσεις αν το $x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ και να παραγοντοποιήσεις πλήρως το $P(x)$. ★ ★ ★
- 9 Σε μια διαίρεση ο διαιρέτης είναι $x^2 + x$, το πηλίκο $x - 2$ και το υπόλοιπο $3x + 1$. Να βρεις τον διαιρετέο και να εξηγήσεις γιατί το υπόλοιπο είναι αποδεκτό. ★ ★ ★
- 10 Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 2. Να βρεις τα α, β . ★ ★ ★

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο · ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ > ΜΑΘΗΜΑ 1.8

1.8

Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- να θυμηθείς πώς βρίσκουμε **Ε.Κ.Π.** και **Μ.Κ.Δ.** αριθμών με ανάλυση σε πρώτους παράγοντες,
- να βρίσκεις **Ε.Κ.Π.** και **Μ.Κ.Δ.** ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων,
- να καταλάβεις γιατί η **παραγοντοποίηση** είναι το απαραίτητο πρώτο βήμα.

Θυμόμαστε: Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. αριθμών

Για να βρούμε το Ε.Κ.Π. και τον Μ.Κ.Δ. δύο ή περισσότερων αριθμών, τους **αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων**. Για παράδειγμα:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2, \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

★ Ε.Κ.Π. (Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο)

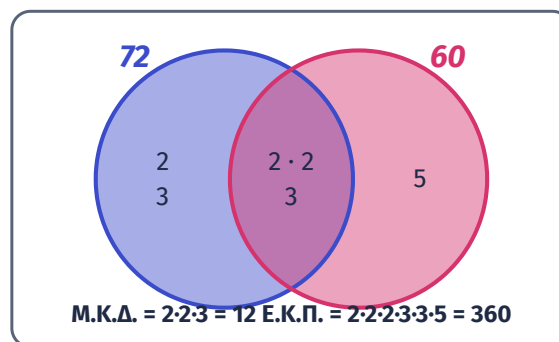
Παίρνουμε **κοινούς και μη κοινούς** παράγοντες, τον καθένα με τον **μεγαλύτερο** εκθέτη.

$$\text{Ε.Κ.Π.}(72, 60) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

★ Μ.Κ.Δ. (Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης)

Παίρνουμε **μόνο τους κοινούς** παράγοντες, τον καθένα με τον **μικρότερο** εκθέτη.

$$\text{Μ.Κ.Δ.}(72, 60) = 2^2 \cdot 3 = 12$$



Διάγραμμα Venn με τους πρώτους παράγοντες: τομή → Μ.Κ.Δ., ένωση → Ε.Κ.Π.

Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. αλγεβρικών παραστάσεων

Ακριβώς ο ίδιος κανόνας ισχύει και για αλγεβρικές παραστάσεις. Οι «πρώτοι παράγοντες» τώρα είναι οι αριθμοί, οι μεταβλητές και οι **παρενθέσεις** που δεν παραγοντοποιούνται άλλο.

≡ Εύρεση Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. παραστάσεων

- 1 Παραγοντοποιούμε πλήρως κάθε παράσταση.
- 2 Για τους **αριθμητικούς** συντελεστές βρίσκουμε Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. όπως στους αριθμούς.
- 3 **Ε.Κ.Π.:** γινόμενο κοινών και μη κοινών παραγόντων, με τον **μεγαλύτερο** εκθέτη.
- 4 **Μ.Κ.Δ.:** γινόμενο μόνο των κοινών παραγόντων, με τον **μικρότερο** εκθέτη.

✎ Παράδειγμα 1 · Μονώνυμα

Να βρεθούν το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ.Δ. των μονωνύμων $12x^3y^2$, $18x^2y^4\omega$ και $8xy^3$.

ΛΥΣΗ

Συντελεστές: $\text{Ε.Κ.Π.}(12, 18, 8) = 72$, $\text{Μ.Κ.Δ.}(12, 18, 8) = 2$.

	x	y	ω
Μεγαλύτεροι εκθέτες (Ε.Κ.Π.)	3	4	1
Κοινοί, μικρότεροι εκθέτες (Μ.Κ.Δ.)	1	2	—

$$\text{Ε.Κ.Π.} = 72x^3y^4\omega, \quad \text{Μ.Κ.Δ.} = 2xy^2.$$

Το ω δεν μπαίνει στον Μ.Κ.Δ., γιατί δεν υπάρχει σε όλα τα μονώνυμα.

✎ Παράδειγμα 2 · Πολυώνυμα

Να βρεθούν το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων

$$A = x^2 - 4, \quad B = x^2 + 4x + 4, \quad \Gamma = 3x + 6.$$

ΛΥΣΗ

Βήμα 1 – παραγοντοποίηση:

$$A = (x - 2)(x + 2), \quad B = (x + 2)^2, \quad \Gamma = 3(x + 2).$$

Βήμα 2 – επιλογή παραγόντων:

- Κοινός σε όλες: μόνο ο $(x + 2)$, με μικρότερο εκθέτη 1.
- Όλοι οι παράγοντες: 3, $(x - 2)$, $(x + 2)$ με μεγαλύτερο εκθέτη 2.

$$\text{Μ.Κ.Δ.} = x + 2, \quad \text{Ε.Κ.Π.} = 3(x - 2)(x + 2)^2.$$

⚠ Αντίθετες παρενθέσεις

Οι παράγοντες $(x - 3)$ και $(3 - x)$ είναι **αντίθετοι**: $3 - x = -(x - 3)$. Πριν βρούμε Ε.Κ.Π./Μ.Κ.Δ., τους φέρνουμε στην **ίδια μορφή**, βγάζοντας το « $-$ » ως κοινό παράγοντα. Το πρόσημο δεν επηρεάζει την επιλογή των παραγόντων.

 Παράδειγμα 3 · Με αντίθετους παράγοντες

Να βρεθούν Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. των $A = 2x^2 - 6x$ και $B = 9 - x^2$.

ΛΥΣΗ

$$A = 2x(x - 3) \text{ και } B = (3 - x)(3 + x) = -(x - 3)(x + 3).$$

Κοινός παράγοντας: $(x - 3)$. Άρα Μ.Κ.Δ. = $x - 3$ και Ε.Κ.Π. = $2x(x - 3)(x + 3)$.

 Συχνό λάθος · Ε.Κ.Π. χωρίς παραγοντοποίηση

$$\times \text{ Ε.Κ.Π. } (x^2 - 1, x + 1) = (x^2 - 1)(x + 1)$$

✓ Αφού $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, ο παράγοντας $x + 1$ περιέχεται ήδη: Ε.Κ.Π. = $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$.

Το απλό γινόμενο είναι **κοινό** πολλαπλάσιο, αλλά όχι το **ελάχιστο** — και θα μας δυσκολέψει πολύ στα κλάσματα.

 Συχνό λάθος · Λάθος εκθέτης

$$\times \text{ Μ.Κ.Δ. } ((x - 1)^3, (x - 1)^2(x + 4)) = (x - 1)^3$$

✓ Στον Μ.Κ.Δ. παίρνουμε τον **μικρότερο** εκθέτη: $(x - 1)^2$.

 Παράδειγμα 4 · Τρεις παραστάσεις

Να βρεθούν Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. των $A = x^3 - x$, $B = x^2 - 2x + 1$, $\Gamma = 4x^2 - 4x$.

ΛΥΣΗ

$$A = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1), B = (x - 1)^2, \Gamma = 4x(x - 1).$$

- **Μ.Κ.Δ.** Κοινός σε όλες: $(x - 1)$ (το x λείπει από τη Β). Μ.Κ.Δ. = $x - 1$.
- **Ε.Κ.Π.** 4, x , $(x - 1)^2$, $(x + 1)$. Ε.Κ.Π. = $4x(x - 1)^2(x + 1)$.

 Πού θα το χρειαστείς

Το **Ε.Κ.Π.** είναι ο **κοινός παρονομαστής** όταν προσθέτουμε ρητές παραστάσεις (μάθημα 1.10) και όταν λύνουμε κλασματικές εξισώσεις (μάθημα 2.4). Ο **Μ.Κ.Δ.** μάς δείχνει με τι **απλοποιείται** ένα κλάσμα (μάθημα 1.9).

Συνέχισε στο **mathgreece.com**

Κόλλησες κάπου; Στο **mathgreece.com** υπάρχει ολόκληρο το μάθημα με βιντεομαθήματα, σημειώσεις και ασκήσεις — ένα πλήρες δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών.

mathgreece.com
δωρεάν φροντιστήριο

Σύνοψη μαθήματος

- **Πρώτα παραγοντοποίηση!** Μετά επιλογή παραγόντων.
- **Ε.Κ.Π.** = κοινοί και μη κοινοί, με τον **μεγαλύτερο** εκθέτη.
- **Μ.Κ.Δ.** = **μόνο** κοινοί, με τον **μικρότερο** εκθέτη.
- Αντίθετοι παράγοντες ($\alpha - \beta$ και $\beta - \alpha$) θεωρούνται ίδιοι, αφού διαφέρουν μόνο κατά πρόσημο.

Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να βρεις Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. των αριθμών: α) 24 και 36 β) 15, 20 και 30. ★ ★ ★
- 2 Να βρεις Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. των μονωνύμων: α) $6x^2y$ και $9xy^3$ β) $4a^3b$, $10a^2b^2$ και $6a^2$. ★ ★ ★
- 3 Να βρεις Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. των $x^2 - 9$ και $x^2 + 3x$. ★ ★ ★
- 4 Να βρεις Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. των $2x + 2$, $x^2 - 1$ και $x^2 + 2x + 1$. ★ ★ ★
- 5 Να βρεις Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. των $\alpha^2 - \alpha\beta$ και $\beta^2 - \alpha^2$. ★ ★ ★
- 6 Να βρεις Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. των $x^2 - 5x + 6$ και $x^2 - 4x + 4$. ★ ★ ★
- 7 Να βρεις Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. των $3x^3 - 12x$, $6x^2 - 24x + 24$ και $x^3 - 8$. ★ ★ ★
- 8 Να εξηγήσεις γιατί ο Μ.Κ.Δ. δύο παραστάσεων διαιρεί πάντα το Ε.Κ.Π. τους. Ισχύει πάντα ότι Μ.Κ.Δ. · Ε.Κ.Π. = Α · Β για δύο μονώνυμα με θετικούς συντελεστές; Να το ελέγξεις με τα $6x^2y$ και $9xy^3$. ★ ★ ★

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο · ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ > ΜΑΘΗΜΑ 1.9

1.9

Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι είναι **ρητή αλγεβρική παράσταση** («αλγεβρικό κλάσμα»),
- για ποιες τιμές της μεταβλητής **ορίζεται** μια ρητή παράσταση,
- να **απλοποιείς** ρητές παραστάσεις σωστά — και να αποφεύγεις τις «απαγορευμένες» απλοποιήσεις.

Η έννοια της ρητής παράστασης

📖 Ορισμός · Ρητή αλγεβρική παράσταση

Ρητή λέγεται μια αλγεβρική παράσταση που είναι **κλάσμα** με αριθμητή και παρονομαστή **πολυώνυμα** (και ο παρονομαστής περιέχει μεταβλητή).

Παραδείγματα ρητών παραστάσεων:

$$\frac{3}{x}, \quad \frac{x+1}{x-2}, \quad \frac{x^2-9}{x^2+3x}, \quad \frac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Οι ρητές παραστάσεις συμπεριφέρονται όπως ακριβώς τα αριθμητικά κλάσματα: απλοποιούνται, πολλαπλασιάζονται, προστίθενται με κοινό παρονομαστή κ.λπ. Υπάρχει όμως ένα σημαντικό «αλλά»...

Πότε ορίζεται μια ρητή παράσταση

★ Περιορισμός

Μια ρητή παράσταση **ορίζεται** μόνο για τις τιμές των μεταβλητών που **δεν μηδενίζουν τον παρονομαστή**. Γιατί; Επειδή η διαίρεση με το μηδέν δεν ορίζεται.

☰ Πώς βρίσκω πότε ορίζεται

- 1 Θέτω τον **παρονομαστή** $\neq 0$.
- 2 **Παραγοντοποιώ** τον παρονομαστή.
- 3 Χρησιμοποιώ ότι **ένα γινόμενο είναι** $\neq 0$ **όταν κάθε παράγοντας είναι** $\neq 0$: $\alpha \cdot \beta \neq 0 \iff \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$.

Παράδειγμα 1 · Πότε ορίζεται

Για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις: α) $\frac{5}{x-4}$ β) $\frac{x+1}{x^2-9}$ γ) $\frac{2x}{x^2+5x}$ δ) $\frac{x}{x^2+1}$;

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $x - 4 \neq 0$, δηλαδή $x \neq 4$.

β) $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) \neq 0$, άρα $x \neq 3$ και $x \neq -3$.

γ) $x^2 + 5x = x(x + 5) \neq 0$, άρα $x \neq 0$ και $x \neq -5$.

δ) Είναι $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ για κάθε x , άρα ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται ποτέ: η παράσταση ορίζεται για κάθε x .



Οι «απαγορευμένες» τιμές της παράστασης $(x+1)/(x^2-9)$ πάνω στον άξονα

⚠ Οι περιορισμοί μένουν... και μετά την απλοποίηση!

Αν μια παράσταση ορίζεται για $x \neq 3$ και την απλοποιήσουμε σε κάτι που «φαίνεται» να ορίζεται παντού, ο περιορισμός $x \neq 3$ **εξακολουθεί να ισχύει**. Γι' αυτό γράφουμε **πάντα** τους περιορισμούς **πριν** απλοποιήσουμε.

Απλοποίηση ρητών παραστάσεων

Θυμηθείτε πώς απλοποιούμε ένα αριθμητικό κλάσμα: $\frac{12}{18} = \frac{6 \cdot 2}{6 \cdot 3} = \frac{2}{3}$. Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με τον **ίδιο κοινό παράγοντα**. Ακριβώς το ίδιο κάνουμε και εδώ.

★ Απλοποίηση

$$\frac{\alpha \cdot \cancel{\gamma}}{\beta \cdot \cancel{\gamma}} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \gamma \neq 0.$$

Απλοποιούμε **μόνο κοινούς παράγοντες** (κάτι που **πολλαπλασιάζει** όλο τον αριθμητή και όλο τον παρονομαστή) — **ποτέ όρους** αθροίσματος.

≡ Πώς απλοποιώ

- 1 Παραγοντοποιώ αριθμητή και παρονομαστή.
- 2 Γράφω τους **περιορισμούς** (παρονομαστής $\neq 0$).
- 3 Διαγράφω τους κοινούς παράγοντες.

 Παράδειγμα 2 · Απλοποιήσεις

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις: α) $\frac{6x^3y}{9xy^2}$ β) $\frac{x^2-25}{x^2+5x}$ γ) $\frac{x^2-6x+9}{2x-6}$ δ) $\frac{x^2+x-12}{x^2-9}$.

ΛΥΣΗ

α) Για $x, y \neq 0$: $\frac{6x^3y}{9xy^2} = \frac{2x^2}{3y}$.

β) $\frac{(x-5)(x+5)}{x(x+5)}$. Περιορισμοί: $x \neq 0, x \neq -5$. Απλοποιούμε το $(x+5)$: $\frac{x-5}{x}$.

γ) $\frac{(x-3)^2}{2(x-3)}$, με $x \neq 3$. Απλοποιούμε **ένα** $(x-3)$: $\frac{x-3}{2}$.

δ) $\frac{(x+4)(x-3)}{(x-3)(x+3)}$, με $x \neq \pm 3$. Απλοποιούμε: $\frac{x+4}{x+3}$.

 Συχνό λάθος · Η «απαγορευμένη» απλοποίηση όρων

$$\times \frac{x+3}{x} = 3 \quad \times \frac{x^2+4}{x+2} = x+2 \quad \times \frac{2x+5}{2} = x+5$$

✓ Καμία από αυτές δεν απλοποιείται έτσι. Το x στο $x+3$ είναι **όρος** αθροίσματος, **όχι παράγοντας**. Δοκίμασε με αριθμούς: για $x=1$, το $\frac{1+3}{1} = 4 \neq 3$.

✓ Σωστά: $\frac{2x+6}{2} = \frac{2(x+3)}{2} = x+3$ — εδώ το 2 είναι **κοινός παράγοντας** όλου του αριθμητή.

 Αντίθετες παρενθέσεις στην απλοποίηση

Χρήσιμο: $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha} = \frac{\alpha-\beta}{-(\alpha-\beta)} = -1$. Για παράδειγμα:

$$\frac{x^2-4x}{8-2x} = \frac{x(x-4)}{-2(x-4)} = -\frac{x}{2}, \quad x \neq 4.$$

 Παράδειγμα 3 · Απλοποίηση με αντίθετους παράγοντες

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \frac{9-x^2}{x^2-x-6}$.

ΛΥΣΗ

$$9-x^2 = (3-x)(3+x) = -(x-3)(x+3) \text{ και } x^2-x-6 = (x-3)(x+2).$$

Περιορισμοί: $x \neq 3, x \neq -2$.

$$A = \frac{-(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = -\frac{x+3}{x+2}.$$

 Παράδειγμα 4 · Αριθμητική τιμή μετά από απλοποίηση

Να υπολογιστεί η τιμή της $B = \frac{x^3 - x}{x^2 + x}$ για $x = 2027$.

ΛΥΣΗ

Πρώτα απλοποιούμε (για $x \neq 0, x \neq -1$):

$$B = \frac{x(x-1)(x+1)}{x(x+1)} = x-1.$$

Άρα για $x = 2027$: $B = 2026$. Χωρίς απλοποίηση ο υπολογισμός θα ήταν πολύ κουραστικός!

 Παράδειγμα 5 · Μία ερώτηση «παγίδα»

Είναι ίσες οι παραστάσεις $A = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ και $B = x + 1$;

ΛΥΣΗ

Η A απλοποιείται σε $x + 1$, **αλλά μόνο για $x \neq 1$** . Για $x = 1$ η B ισούται με 2, ενώ η A **δεν ορίζεται**. Άρα οι παραστάσεις είναι ίσες για κάθε $x \neq 1$ — όχι για κάθε x .

Συνέχισε στο mathgreece.com

Θέλεις να εμπεδώσεις καλύτερα τη θεωρία; Δες τα σχετικά βίντεο στο **mathgreece.com** και στο κανάλι **MATHGREECE** στο YouTube — ένα ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

 Σύνοψη μαθήματος

- Ρητή παράσταση = κλάσμα πολυωνύμων. Ορίζεται όταν ο **παρονομαστής** $\neq 0$.
- Για τους περιορισμούς: παραγοντοποιώ τον παρονομαστή, κάθε παράγοντας $\neq 0$.
- Απλοποίηση: **παραγοντοποίηση** $\rightarrow$ **περιορισμοί** $\rightarrow$ **διαγραφή κοινών παραγόντων**.
- **Ποτέ** δεν απλοποιούμε όρους αθροίσματος. $\frac{\alpha - \beta}{\beta - \alpha} = -1$.

 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

1 Για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις: α) $\frac{x}{x+7}$ β) $\frac{3}{2x-1}$ γ) $\frac{x-1}{x^2-16}$ δ) $\frac{5}{x^2-3x}$; ★★ ★

2 Για ποιες τιμές του x ορίζονται: α) $\frac{1}{x^2-4x+4}$ β) $\frac{x}{x^2-5x+6}$ γ) $\frac{2}{x^2+4}$; ★★ ★

★ ★ ★

3 Να απλοποιήσεις: α) $\frac{15\alpha^2\beta^3}{10\alpha^3\beta}$ β) $\frac{4x-8}{6x-12}$ γ) $\frac{x^2+3x}{x^2-9}$.

★ ★ ★

4 Να απλοποιήσεις: α) $\frac{x^2-10x+25}{x^2-25}$ β) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+3}$ γ) $\frac{2x^2-2}{x^2+2x+1}$.

★ ★ ★

5 Να απλοποιήσεις: α) $\frac{3-x}{x^2-9}$ β) $\frac{\alpha^2-\alpha\beta}{\beta^2-\alpha\beta}$ γ) $\frac{x^3-8}{x^2-4}$.

★ ★ ★

6 Ποιες από τις παρακάτω απλοποιήσεις είναι σωστές; Να διορθώσεις τις λανθασμένες. α) $\frac{x+5}{5} = x$ β) $\frac{5x}{5} = x$ γ) $\frac{x^2-x}{x} = x-1$ δ) $\frac{x^2+9}{x+3} = x+3$.

★ ★ ★

7 Να απλοποιήσεις την $A = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-3x+2}$ και να υπολογίσεις την τιμή της για $x = 99$.

★ ★ ★

8 Να αποδείξεις ότι η τιμή της παράστασης $B = \frac{x^2-4}{x^2-2x} \cdot \frac{x}{x+2}$ είναι **σταθερή** για όλες τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται.

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο · ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ > ΜΑΘΗΜΑ 1.10

1.10

Πράξεις ρητών παραστάσεων

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- να **πολλαπλασιάζεις** και να **διαιρείς** ρητές παραστάσεις,
- να **προσθέτεις** και να **αφαιρείς** ρητές παραστάσεις, με κοινό παρονομαστή το **Ε.Κ.Π.**,
- να απλοποιείς **σύνθετα κλάσματα**.

Ό,τι ξέρεις από τα αριθμητικά κλάσματα ισχύει και εδώ. Το «μυστικό» της επιτυχίας είναι ένα: **παραγοντοποίηση, παραγοντοποίηση, παραγοντοποίηση!**

Α. Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση ρητών παραστάσεων

★ Πολλαπλασιασμός

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$$

Αριθμητής επί αριθμητή, παρονομαστής επί παρονομαστή.

★ Διαίρεση

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$

Πολλαπλασιάζουμε με τον **αντίστροφο** του διαιρέτη ($\gamma \neq 0$).

☰ Πολλαπλασιασμός/διαίρεση ρητών

- 1 (Στη διαίρεση) **αντιστρέφω** το δεύτερο κλάσμα και κάνω πολλαπλασιασμό.
- 2 **Παραγοντοποιώ** όλους τους αριθμητές και παρονομαστές.
- 3 Γράφω τους **περιορισμούς**.
- 4 Γράφω **ένα** κλάσμα και **απλοποιώ** — **πριν** κάνω τους πολλαπλασιασμούς!

✏ Παράδειγμα 1 · Πολλαπλασιασμός

Να γίνουν οι πράξεις: α) $\frac{4x^2}{3y} \cdot \frac{9y^3}{8x}$ β) $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x} \cdot \frac{x + 2}{x - 3}$.

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \frac{4x^2 \cdot 9y^3}{3y \cdot 8x} = \frac{36x^2y^3}{24xy} = \frac{3xy^2}{2} \text{ (για } x, y \neq 0\text{)}.$$

β) Παραγοντοποιούμε:

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x(x+2)} \cdot \frac{x+2}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)(x+2)}{x(x+2)(x-3)} = \frac{x+3}{x},$$

με $x \neq 0, x \neq -2, x \neq 3$.

Παράδειγμα 2 · Διαίρεση

Να γίνει η διαίρεση $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1} : \frac{3x - 6}{x + 1}$.

ΛΥΣΗ

$$\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x+1}{3(x-2)} = \frac{x-2}{3(x-1)}.$$

Περιορισμοί: από τους παρονομαστές $x \neq \pm 1$, και επειδή διαιρούμε με το $\frac{3x-6}{x+1}$, πρέπει και αυτό να είναι $\neq 0$, δηλαδή $x \neq 2$.

⚠ Ο «κρυφός» περιορισμός της διαίρεσης

Στη διαίρεση $\frac{A}{B} : \frac{\Gamma}{\Delta}$ χρειαζόμαστε $B \neq 0$, $\Delta \neq 0$ και $\Gamma \neq 0$, γιατί ο Γ πάει στον παρονομαστή όταν αντιστρέψουμε.

Β. Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων**► Ομώνυμες ρητές παραστάσεις****★ Ίδιος παρονομαστής**

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}, \quad \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma}$$

Παράδειγμα 3 · Ομώνυμα

Να γίνουν οι πράξεις: α) $\frac{3x}{x+2} + \frac{6}{x+2}$ β) $\frac{x^2}{x-1} - \frac{2x-1}{x-1}$.

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \frac{3x+6}{x+2} = \frac{3(x+2)}{x+2} = 3, \text{ για } x \neq -2.$$

$$\beta) \frac{x^2 - (2x-1)}{x-1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x-1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x-1, \text{ για } x \neq 1.$$

✖ Συχνό λάθος · Η παρένθεση στον αριθμητή της αφαίρεσης

$$\times \quad \frac{x^2}{x-1} - \frac{2x-1}{x-1} = \frac{x^2 - 2x - 1}{x-1}$$

$$\checkmark \quad \frac{x^2 - (2x-1)}{x-1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x-1}$$

Το «−» μπροστά από κλάσμα αφορά **ολόκληρο** τον αριθμητή του. Βάλε πάντα τον αριθμητή σε παρένθεση!

► Ετερώνυμες ρητές παραστάσεις

≡ Πρόσθεση/αφαίρεση ετερώνυμων

- 1 Παραγοντοποιώ τους παρονομαστές και γράφω τους **περιορισμούς**.
- 2 Βρίσκω το **Ε.Κ.Π.** των παρονομαστών: αυτός είναι ο **κοινός παρονομαστής**.
- 3 Βρίσκω για κάθε κλάσμα τον **πολλαπλασιαστή**: Ε.Κ.Π. : παρονομαστής (το «καπελάκι»).
- 4 Πολλαπλασιάζω κάθε αριθμητή με το «καπελάκι» του και κάνω τις πράξεις **στον αριθμητή**.
- 5 Παραγοντοποιώ τον τελικό αριθμητή και **απλοποιώ** αν γίνεται.

✍ Παράδειγμα 4 · Ετερώνυμα με μονώνυμους παρονομαστές

Να γίνουν οι πράξεις $\frac{2}{3x} + \frac{5}{6x^2} - \frac{1}{2x}$.

ΛΥΣΗ

Ε.Κ.Π.($3x, 6x^2, 2x$) = $6x^2$. «Καπελάκια»: $6x^2 : 3x = 2x$, $6x^2 : 6x^2 = 1$, $6x^2 : 2x = 3x$.

$$\frac{2 \cdot 2x}{6x^2} + \frac{5}{6x^2} - \frac{3x}{6x^2} = \frac{4x + 5 - 3x}{6x^2} = \frac{x + 5}{6x^2}, \quad x \neq 0.$$

✍ Παράδειγμα 5 · Ετερώνυμα με πολυωνυμικούς παρονομαστές

Να γίνουν οι πράξεις $A = \frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+2} - \frac{8}{x^2-4}$.

ΛΥΣΗ

Παραγοντοποίηση: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. **Περιορισμοί**: $x \neq \pm 2$.

Ε.Κ.Π. = $(x-2)(x+2)$. Τα «καπελάκια» είναι $(x+2)$, $(x-2)$ και 1 αντίστοιχα.

$$A = \frac{x(x+2) - 3(x-2) - 8}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2 + 2x - 3x + 6 - 8}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2 - x - 2}{(x-2)(x+2)}.$$

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή: $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. Άρα

$$A = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+1}{x+2}.$$

✓ **Μην πολλαπλασιάζεις τον παρονομαστή!**

Άφησε τον κοινό παρονομαστή **σε μορφή γινομένου**, π.χ. $(x-2)(x+2)$, και όχι x^2-4 . Έτσι στο τέλος φαίνεται αμέσως αν ο αριθμητής έχει κοινό παράγοντα για απλοποίηση.

✎ **Παράδειγμα 6** · Με αντίθετους παρονομαστές

Να γίνουν οι πράξεις $\frac{5}{x-3} + \frac{2x-1}{3-x}$.

ΛΥΣΗ

Αφού $3-x = -(x-3)$, γράφουμε $\frac{2x-1}{3-x} = -\frac{2x-1}{x-3}$. Έτσι τα κλάσματα γίνονται ομώνυμα:

$$\frac{5-(2x-1)}{x-3} = \frac{6-2x}{x-3} = \frac{-2(x-3)}{x-3} = -2, \quad x \neq 3.$$

✗ **Συχνό λάθος** · Ξεχνάμε το «καπελάκι» σε κάποιον όρο

$$\times \quad \frac{1}{x} + 2 = \frac{1+2}{x}$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{x} + 2 = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x} = \frac{1+2x}{x}$$

Ένας ακέραιος όρος έχει «αόρατο» παρονομαστή 1 και πρέπει κι αυτός να πολλαπλασιαστεί με το «καπελάκι» του.

Σύνθετα κλάσματα

Ένα κλάσμα που έχει στον αριθμητή ή στον παρονομαστή του **άλλα κλάσματα** λέγεται **σύνθετο**. Το απλοποιούμε κάνοντας πρώτα τις πράξεις «πάνω» και «κάτω» και μετά τη διαίρεση: $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$ («άκρα επί άκρα, μέσα επί μέσα»).

✎ **Παράδειγμα 7** · Σύνθετο κλάσμα

Να απλοποιηθεί η παράσταση $B = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}$.

ΛΥΣΗ

Αριθμητής: $1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$. Παρονομαστής: $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$.

$$B = \frac{x^2-1}{x^2} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)x}{x^2(x+1)} = \frac{x-1}{x},$$

με $x \neq 0$ και $x \neq -1$.

 Παράδειγμα 8 · Συνδυαστική άσκηση

Να αποδειχθεί ότι $\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) : \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$, για κάθε $x \neq \pm 1$.

ΛΥΣΗ

Παρένθεση (Ε.Κ.Π. = $(x-1)(x+1)$):

$$\frac{x(x+1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + x - x + 1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)}.$$

Διαίρεση:

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{x^2 + 1} = 1.$$

Συνέχισε στο mathgreece.com

Θέλεις να δεις αυτό το μάθημα σε **βίντεο**, με επιπλέον λυμένες ασκήσεις και κουίζ αυτοαξιολόγησης; Μπες στο **mathgreece.com** — θα βρεις ένα πλήρες και ολοκληρωμένο **δωρεάν φροντιστήριο**.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

 Σύνοψη μαθήματος

- **Πολλαπλασιασμός:** $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$. **Διαίρεση:** επί τον αντίστροφο ($\gamma \neq 0$ επιπλέον).
- **Πρόσθεση/αφαίρεση:** κοινός παρονομαστής = Ε.Κ.Π. των παραγοντοποιημένων παρονομαστών.
- Πάντα: **παραγοντοποίηση** → **περιορισμοί** → **πράξεις** → **παραγοντοποίηση αριθμητή** → **απλοποίηση**.
- Παρένθεση στον αριθμητή όταν αφαιρείς. $\frac{1}{\beta - \alpha} = -\frac{1}{\alpha - \beta}$.

 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να γίνουν οι πράξεις: α) $\frac{2x}{5y} \cdot \frac{15y^2}{4x^3}$ β) $\frac{6\alpha^2}{\beta} : \frac{3\alpha}{\beta^2}$. ★ ★ ★
- 2 Να γίνουν οι πράξεις: α) $\frac{x^2-1}{2x} \cdot \frac{4x^2}{x+1}$ β) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9} : \frac{x+3}{x-3}$. ★ ★ ★
- 3 Να γίνουν οι πράξεις: α) $\frac{x+4}{x} - \frac{4}{x}$ β) $\frac{2x}{x-5} - \frac{10}{x-5}$ γ) $\frac{x^2}{x+3} - \frac{9}{x+3}$. ★ ★ ★
- 4 Να γίνουν οι πράξεις: α) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ β) $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+2}$ γ) $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} + \frac{1}{6}$. ★ ★ ★
- 5 Να γίνουν οι πράξεις: $\frac{2}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1}$. ★ ★ ★

★★★

6 Να γίνουν οι πράξεις: $\frac{x}{x-4} + \frac{4}{4-x}$.

★★★

7 Να αποδείξεις ότι $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{4x}{x^2-1}$.

★★★

8 Να απλοποιήσεις το σύνθετο κλάσμα $\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}}$.

★★★

9 Να απλοποιήσεις την παράσταση $A = \left(\frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2} \right) \cdot \frac{x^2-4}{4}$ και να εξηγήσεις γιατί δεν εξαρτάται από το x .

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο · ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ > ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ



Επανάληψη 1ου Κεφαλαίου

Όλο το κεφάλαιο με μια ματιά

Αριθμοί – Δυνάμεις – Ρίζες

- $\alpha^0 = 1, \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$
- $\alpha^{\mu}\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}, \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}, (\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$
- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|, \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$
- $\sqrt{\alpha+\beta} \neq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

Μονώνυμα – Πολυώνυμα

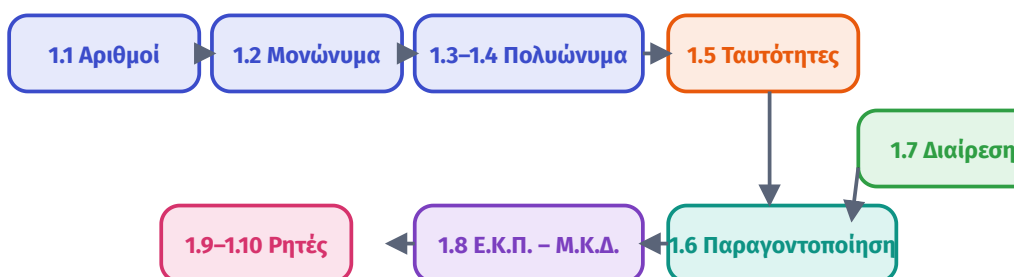
- Βαθμός μονωνύμου: **άθροισμα** εκθετών
- Βαθμός πολυωνύμου: **μέγιστος** βαθμός όρου
- Προσθέτουμε μόνο **όμοια** μονώνυμα
- $\Delta = \delta \cdot \pi + \nu$, υπόλοιπο της $P(x) : (x - \rho)$ είναι $P(\rho)$

Ταυτότητες

- $(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$
- $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$
- $(\alpha \pm \beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3$
- $\alpha^3 \pm \beta^3 = (\alpha \pm \beta)(\alpha^2 \mp \alpha\beta + \beta^2)$

Παραγοντοποίηση – Ρητές

- Κοινός παράγοντας → πλήθος όρων → συνέχεια
- $x^2 + Sx + P = (x + \alpha)(x + \beta)$ με $\alpha + \beta = S, \alpha\beta = P$
- Ε.Κ.Π.: όλοι, μέγιστος εκθέτης· Μ.Κ.Δ.: κοινοί, ελάχιστος
- Ρητές: παραγοντοποίηση → περιορισμοί → πράξεις



Ο «χάρτης» του κεφαλαίου: πώς συνδέονται τα μαθήματα

Τα 10 πιο συχνά λάθη του κεφαλαίου

✗ Συχνό λάθος · Κάνε έναν τελικό έλεγχο: μήπως κάνεις κάποιο από αυτά;

✗ $-3^2 = 9$ ✓ $-3^2 = -9$, $(-3)^2 = 9$

✗ $2^{-2} = -4$ ✓ $2^{-2} = \frac{1}{4}$

✗ $\sqrt{9+16} = 7$ ✓ $\sqrt{25} = 5$

✗ $3x^2 + 2x^2 = 5x^4$ ✓ $5x^2$

✗ $(3x)^2 = 3x^2$ ✓ $9x^2$

✗ $(x+4)^2 = x^2 + 16$ ✓ $x^2 + 8x + 16$

✗ $10 - (x-3) = 10 - x - 3$ ✓ $10 - x + 3$

✗ $\frac{x+6}{6} = x$ ✓ δεν απλοποιείται

✗ $x^2 + 9 = (x+3)(x-3)$ ✓ δεν παραγοντοποιείται

✗ Ε.Κ.Π. $(x^2 - 1, x - 1) = (x^2 - 1)(x - 1)$ ✓ $x^2 - 1$

Συνέχισε στο **mathgreece.com**

Πριν από το διαγώνισμα του κεφαλαίου, δοκίμασε τα **κουίζ αυτοαξιολόγησης** και δες τα **βιντεομαθήματα επανάληψης** στο **mathgreece.com**. Θα βρεις επίσης έτοιμα **διαγωνίσματα** με αναλυτικές λύσεις — ένα πλήρες και ολοκληρωμένο **δωρεάν φροντιστήριο**.

mathgreece.com
δωρεάν φροντιστήριο

Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

1 Να υπολογίσεις την παράσταση $A = (-2)^3 - (-3)^2 + 4^0 \cdot (-1)^7 - 2^{-1} \cdot 6$. ★★

2 Να απλοποιήσεις: $B = \sqrt{50} - 2\sqrt{18} + \sqrt{8} - \frac{6}{\sqrt{2}}$. ★★★

3 Να απλοποιήσεις: $\Gamma = (2x-3)^2 - (x+1)(x-1) - 3(x-2)^2$. ★★★

4 Να παραγοντοποιήσεις: α) $5x^3 - 20x$ β) $x^2 - 8x + 16 - y^2$ γ) $2x^2 + 6x - 20$ δ) $x^3 + x^2 - x - 1$. ★★★

★★★

- 5 Να κάνεις τη διαίρεση $(2x^3 + 3x^2 - 5x + 6) : (x + 3)$ και να ελέγξεις το υπόλοιπο με την τιμή $P(-3)$.

★★★

- 6 Να βρεις Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. των $x^2 - x$, $x^2 - 2x + 1$ και $x^3 - x$.

★★★

- 7 Να απλοποιήσεις: $\Delta = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4} \cdot \frac{x^2 + 2x}{2x - 4}$.

★★★★

- 8 Να γίνουν οι πράξεις: $E = \frac{2}{x+1} + \frac{x-5}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$.

★★★★

- 9 Αν $x + \frac{1}{x} = 4$, να υπολογίσεις την παράσταση $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

★★★★

- 10 Να αποδείξεις ότι για κάθε $x \neq 0, \pm 1$ ισχύει: $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x}$.

★★★★

- 11 Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις $x + 5$ και $x - 5$ ($x > 5$) και ένα τετράγωνο έχει πλευρά x . Ποιο σχήμα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν και κατά πόσο;

★★★★

- 12 Να αποδείξεις ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων, ελαττωμένο κατά 1, είναι πάντα διπλάσιο του γινομένου τους.

Κεφάλαιο 2ο

Εξισώσεις – Ανισώσεις.

Εδώ η Άλγεβρα γίνεται εργαλείο επίλυσης προβλημάτων. Επαναλαμβάνουμε την εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$, μαθαίνουμε να λύνουμε **εξισώσεις δευτέρου βαθμού** με παραγοντοποίηση και με τον **τύπο της διακρίνουσας**, λύνουμε **προβλήματα**, **κλασματικές εξισώσεις** και τέλος **ανισώσεις** πρώτου βαθμού, τις οποίες παριστάνουμε πάνω στον άξονα των αριθμών.

- 2.1 Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$
- 2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού
- 2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού
- 2.4 Κλασματικές εξισώσεις
- 2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο
- ★ Επανάληψη κεφαλαίου

Για κάθε μάθημα αυτού του κεφαλαίου θα βρεις **βιντεομαθήματα**, **σημειώσεις**, **κουίζ** και **επιπλέον ασκήσεις** στο mathgreece.com — ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο · ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ > ΜΑΘΗΜΑ 2.1

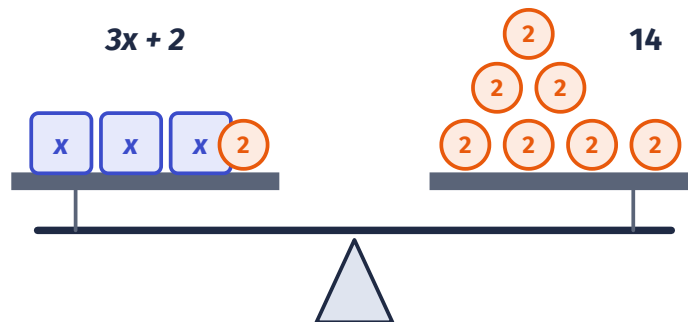
2.1 Η εξίσωση $ax + b = 0$

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι είναι **εξίσωση**, **λύση** (ρίζα) και **επίλυση** εξίσωσης,
- τα **βήματα** επίλυσης μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού,
- τη **διερεύνηση** της $ax = b$: μία λύση, καμία λύση (**αδύνατη**), άπειρες λύσεις (**ταυτότητα**),
- να λύνεις εξισώσεις με κλάσματα και **προβλήματα**.

Τι είναι εξίσωση

Μια **εξίσωση** είναι μια ισότητα που περιέχει έναν (ή περισσότερους) **αγνώστους** και αληθεύει μόνο για ορισμένες τιμές τους. Κάθε τιμή του αγνώστου που την επαληθεύει λέγεται **λύση** ή **ρίζα** της εξίσωσης. Η διαδικασία εύρεσης όλων των λύσεων λέγεται **επίλυση**.



Η εξίσωση σαν ζυγαριά σε ισορροπία: ό,τι κάνω στο ένα μέλος το κάνω και στο άλλο

Στο σχήμα, $3x + 2 = 14$. Αν αφαιρέσουμε από **κάθε** πλευρά της ζυγαριάς ένα βαράκι 2, μένει $3x = 12$, και αν μοιράσουμε σε τρία ίσα μέρη, $x = 4$.

★ Οι δύο «νόμοι» των εξισώσεων

1. Μπορούμε να **προσθέσουμε** ή να **αφαιρέσουμε** τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη. Στην πράξη: ένας όρος **μεταφέρεται** στο άλλο μέλος **με αλλαγμένο πρόσημο**.
2. Μπορούμε να **πολλαπλασιάσουμε** ή να **διαιρέσουμε** και τα δύο μέλη με τον ίδιο αριθμό **διάφορο του μηδενός**.

Τα βήματα της επίλυσης

≡ Επίλυση εξίσωσης 1ου βαθμού

- 1 Απαλοιφή παρονομαστών:** πολλαπλασιάζω **όλους** τους όρους και των δύο μελών με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
- 2 Απαλοιφή παρενθέσεων:** με την επιμεριστική ιδιότητα (προσοχή στο «-»).
- 3 Χωρίζω γνωστούς από αγνώστους:** τους όρους με x στο πρώτο μέλος, τους αριθμούς στο δεύτερο (αλλάζοντας πρόσημο όταν «περνούν απέναντι»).
- 4 Αναγωγή όμοιων όρων:** καταλήγω στη μορφή $ax = b$.
- 5 Διαιρώ** με τον συντελεστή του αγνώστου (αν $a \neq 0$).
- 6 Επαλήθευση** (προαιρετική, αλλά πολύ χρήσιμη!).

✎ Παράδειγμα 1 · Απλή εξίσωση με παρενθέσεις

Να λυθεί η εξίσωση $4(x - 3) - 2(x + 1) = 3x - 20$.

ΛΥΣΗ

$$4x - 12 - 2x - 2 = 3x - 20$$

$$4x - 2x - 3x = -20 + 12 + 2$$

$$-x = -6 \iff x = 6.$$

Επαλήθευση: $4(3) - 2(7) = 12 - 14 = -2$ και $3 \cdot 6 - 20 = -2 \checkmark$.

✎ Παράδειγμα 2 · Εξίσωση με κλάσματα

Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x-1}{3} - \frac{x+2}{4} = \frac{x}{6} - 1$.

ΛΥΣΗ

Ε.Κ.Π.(3, 4, 6) = 12. Πολλαπλασιάζουμε **κάθε όρο** με 12:

$$12 \cdot \frac{x-1}{3} - 12 \cdot \frac{x+2}{4} = 12 \cdot \frac{x}{6} - 12 \cdot 1$$

$$4(x-1) - 3(x+2) = 2x - 12$$

$$4x - 4 - 3x - 6 = 2x - 12$$

$$4x - 3x - 2x = -12 + 4 + 6$$

$$-x = -2 \iff x = 2.$$

✗ Συχνό λάθος · Απαλοιφή παρονομαστών

✗ Πολλαπλασιάζω με το Ε.Κ.Π. μόνο τα κλάσματα και ξεχνάω τους «σκέτους» όρους: στο παραπάνω γράφω $\dots = 2x - 1$.

✓ Κάθε όρος, και ο -1 , πολλαπλασιάζεται με το 12: -12 .

✗ $-\frac{x+2}{4} \cdot 12 = -3x + 6$ ✓ $-3(x+2) = -3x - 6$. Ο αριθμητής μπαίνει **σε παρένθεση!**

Η εξίσωση $ax = b$: διερεύνηση

Κάθε εξίσωση πρώτου βαθμού, μετά τα βήματα 1-4, παίρνει τη μορφή $ax = b$. Τρία πράγματα μπορεί να συμβούν:

Αν $a \neq 0$ **Μία μοναδική λύση:**

$$x = \frac{b}{a}$$

Π.χ. $3x = 12 \Rightarrow x = 4$.**Αν $a = 0$ και $b \neq 0$** Γίνεται $0x = b$: **καμία λύση**.Η εξίσωση λέγεται **αδύνατη**.Π.χ. $0x = 5$.**Αν $a = 0$ και $b = 0$** Γίνεται $0x = 0$: **κάθε αριθμός** είναι λύση.Η εξίσωση λέγεται **ταυτότητα** (ή αόριστη).**✏ Παράδειγμα 3 · Αδύνατη και ταυτότητα**

Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $2(x+3) - x = x+4$ β) $3(x-1) + 2 = 3x-1$.

ΛΥΣΗα) $2x + 6 - x = x + 4 \iff 2x - x - x = 4 - 6 \iff 0x = -2$. **Αδύνατη**.β) $3x - 3 + 2 = 3x - 1 \iff 3x - 3x = -1 + 1 \iff 0x = 0$. **Ταυτότητα**: αληθεύει για κάθε x .**✗ Συχνό λάθος · «Διαιρώ με το μηδέν»**

✗ $0x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{0}$ ή $x = 0$.

✓ Όταν ο συντελεστής του x είναι 0, **δεν** διαιρούμε. Εξετάζουμε μόνο αν το δεύτερο μέλος είναι μηδέν (ταυτότητα) ή όχι (αδύνατη).

► Εξισώσεις με παράμετρο

Μερικές φορές οι συντελεστές περιέχουν ένα γράμμα, π.χ. λ , που λέγεται **παράμετρος**. Τότε η λύση εξαρτάται από την τιμή του λ και πρέπει να κάνουμε **διερεύνηση**.

✎ Παράδειγμα 4 · Διερεύνηση εξίσωσης με παράμετρο

Να λυθεί η εξίσωση $(\lambda - 2)x = \lambda^2 - 4$ για τις διάφορες τιμές του λ .

ΛΥΣΗ

Ο συντελεστής του x είναι $\lambda - 2$.

- **Αν $\lambda \neq 2$:** διαιρούμε με $\lambda - 2$:

$$x = \frac{\lambda^2 - 4}{\lambda - 2} = \frac{(\lambda - 2)(\lambda + 2)}{\lambda - 2} = \lambda + 2.$$

- **Αν $\lambda = 2$:** η εξίσωση γίνεται $0x = 0$, άρα είναι **ταυτότητα**.

Π.χ. για $\lambda = 5$ η λύση είναι $x = 7$.

► Εξισώσεις που ανάγονται σε 1ου βαθμού**✎ Παράδειγμα 5 · Με ταυτότητες**

Να λυθεί η εξίσωση $(x + 3)^2 - (x - 1)(x + 1) = 2(x + 9)$.

ΛΥΣΗ

Οι όροι x^2 θα «φύγουν»:

$$x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 1) = 2x + 18$$

$$x^2 + 6x + 9 - x^2 + 1 = 2x + 18$$

$$6x - 2x = 18 - 10 \iff 4x = 8 \iff x = 2.$$

✎ Παράδειγμα 6 · Εξίσωση με απόλυτη τιμή

Να λυθεί η εξίσωση $|2x - 1| = 5$.

ΛΥΣΗ

Ένας αριθμός έχει απόλυτη τιμή 5 όταν είναι 5 ή -5 :

$$2x - 1 = 5 \iff x = 3 \quad \text{ή} \quad 2x - 1 = -5 \iff x = -2.$$

Η εξίσωση $|x| = \alpha$ έχει λύσεις $x = \pm \alpha$ αν $\alpha > 0$, μόνο τη $x = 0$ αν $\alpha = 0$ και είναι **αδύνατη** αν $\alpha < 0$.

Επίλυση τύπων

Οι τύποι της Φυσικής και της Γεωμετρίας είναι κι αυτοί εξισώσεις. Μπορούμε να «λύσουμε» έναν τύπο ως προς οποιαδήποτε μεταβλητή.

Παράδειγμα 7 · Επίλυση τύπου

Το εμβαδόν τραπεζίου είναι $E = \frac{(B + \beta)v}{2}$. Να λυθεί ως προς β .

ΛΥΣΗ

$$2E = (B + \beta)v \iff \frac{2E}{v} = B + \beta \iff \beta = \frac{2E}{v} - B.$$

Προβλήματα**≡ Επίλυση προβλήματος με εξίσωση**

- 1 Διαβάζω** προσεκτικά και καταλαβαίνω τι ζητείται.
- 2 Ονομάζω** x τον άγνωστο (γράφω τι ακριβώς παριστάνει).
- 3 Εκφράζω** τα υπόλοιπα ποσά με τη βοήθεια του x .
- 4 Στήνω** την εξίσωση από τα δεδομένα.
- 5 Λύνω** την εξίσωση.
- 6 Ελέγχω** αν η λύση είναι **αποδεκτή** (π.χ. άνθρωποι, μήκη $\rightarrow$ θετικοί, ακέραιοι) και απαντώ με λόγια.

Παράδειγμα 8 · Πρόβλημα ηλικιών

Ο πατέρας είναι σήμερα 4 φορές μεγαλύτερος από τον γιο του. Σε 16 χρόνια θα είναι διπλάσιος. Πόσων ετών είναι σήμερα ο καθένας;

ΛΥΣΗ

	Σήμερα	Σε 16 χρόνια
Γιος	x	$x + 16$
Πατέρας	$4x$	$4x + 16$

$$4x + 16 = 2(x + 16) \iff 4x + 16 = 2x + 32 \iff 2x = 16 \iff x = 8.$$

Ο γιος είναι **8** ετών και ο πατέρας **32**. (Έλεγχος: σε 16 χρόνια 24 και 48, διπλάσιο ✓.)

Παράδειγμα 9 · Πρόβλημα με ποσοστά

Ένα κινητό, μετά από έκπτωση 20%, πωλείται 360 €. Ποια ήταν η αρχική τιμή;

ΛΥΣΗ

Έστω x η αρχική τιμή. Μετά την έκπτωση πληρώνουμε το 80% της τιμής:

$$0,8x = 360 \iff x = \frac{360}{0,8} = 450.$$

Η αρχική τιμή ήταν **450 €**.

Παράδειγμα 10 · Γεωμετρικό πρόβλημα

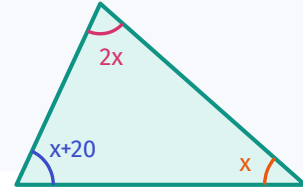
Σε ένα τρίγωνο η μία γωνία είναι διπλάσια της δεύτερης και η τρίτη είναι κατά 20° μεγαλύτερη από τη δεύτερη. Να βρεθούν οι γωνίες.

ΛΥΣΗ

Αν x η δεύτερη γωνία, οι άλλες είναι $2x$ και $x + 20$. Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι 180° :

$$x + 2x + x + 20 = 180 \iff 4x = 160 \iff x = 40.$$

Οι γωνίες είναι 40° , 80° και 60° .

**Συνέχισε στο mathgreece.com**

Θέλεις να δεις αυτό το μάθημα σε βίντεο, με επιπλέον λυμένες ασκήσεις και κουίζ αυτοαξιολόγησης; Μπες στο **mathgreece.com** — θα βρεις ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

Σύνοψη μαθήματος

- Βήματα: παρονομαστές → παρενθέσεις → χωρισμός → αναγωγή → διαίρεση.
- $ax = b$: αν $a \neq 0$ μοναδική λύση $x = \frac{b}{a}$. αν $0x = b \neq 0$ αδύνατη. αν $0x = 0$ ταυτότητα.
- $|x| = a$: $x = \pm a$ για $a > 0$, αδύνατη για $a < 0$.
- Στα προβλήματα: ονομάζω τον άγνωστο, στήνω εξίσωση, ελέγχω αν η λύση είναι αποδεκτή.

Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να λύσεις τις εξισώσεις: α) $5x - 7 = 2x + 8$ β) $3(x - 2) = x + 4$ γ) $7 - 2(x + 1) = 3 - (x - 4)$ ★★ ★
- 2 Να λύσεις: α) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$ β) $\frac{2x - 1}{5} - \frac{x + 3}{2} = -2$. ★★ ★
- 3 Να λύσεις: $\frac{x + 1}{4} - \frac{x - 2}{6} = 1 - \frac{x}{12}$. ★★ ★
- 4 Να εξετάσεις αν οι εξισώσεις είναι αδύνατες ή ταυτότητες: α) $4(x - 1) - 2x = 2(x - 2)$ β) $3x - (x + 5) = 2(x + 1)$. ★★ ★
- 5 Να λύσεις: $(x - 2)^2 - (x + 3)(x - 3) = 1$. ★★ ★

- 6 Να λύσεις: α) $|x - 4| = 3$ β) $|3x + 1| = 0$ γ) $|x| + 5 = 2$. ★ ★ ★
- 7 Να λύσεις την εξίσωση $(\mu + 1)x = \mu^2 - 1$ για τις διάφορες τιμές του μ . ★ ★ ★
- 8 Να λύσεις τον τύπο $v = v_0 + at$ ως προς t ($a \neq 0$) και τον τύπο $\Pi = 2(\alpha + \beta)$ ως προς β . ★ ★ ★
- 9 Τρεις διαδοχικοί ακέραιοι έχουν άθροισμα 123. Ποιοι είναι; ★ ★ ★
- 10 Ένα ορθογώνιο έχει μήκος κατά 6 cm μεγαλύτερο από το πλάτος του και περίμετρο 52 cm. Να βρεις τις διαστάσεις και το εμβαδόν του. ★ ★ ★
- 11 Ένας ποδηλάτης ξεκινά από μια πόλη με ταχύτητα 15 km/h. Μία ώρα αργότερα ξεκινά από το ίδιο σημείο, προς την ίδια κατεύθυνση, ένα αυτοκίνητο με 60 km/h. Μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν; ★ ★ ★

2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι είναι **εξίσωση δευτέρου βαθμού** και ποια είναι η **γενική μορφή** της,
- να λύνεις εξισώσεις 2ου βαθμού με **παραγοντοποίηση** και την ιδιότητα $\alpha \cdot \beta = 0$,
- τον **τύπο** επίλυσης με τη **διακρίνουσα** $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$,
- να **παραγοντοποιείς** ένα τριώνυμο με τη βοήθεια των ριζών του.

📖 Ορισμός · Εξίσωση δευτέρου βαθμού

Εξίσωση **δευτέρου βαθμού** με άγνωστο x λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0.$$

Οι αριθμοί α, β, γ λέγονται **συντελεστές** (ο γ λέγεται και **σταθερός όρος**).

Παραδείγματα: $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ($\alpha = 2, \beta = -5, \gamma = 3$), $x^2 - 16 = 0$ ($\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -16$), $-x^2 + 7x = 0$ ($\alpha = -1, \beta = 7, \gamma = 0$).

⚠️ Ο συντελεστής α δεν μπορεί να είναι μηδέν

Αν $\alpha = 0$, ο όρος x^2 «εξαφανίζεται» και η εξίσωση γίνεται πρώτου βαθμού. Οι β και γ όμως **μπορούν** να είναι 0 — τότε η εξίσωση λέγεται **ελλιπής**.

A. Επίλυση με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Όλη η μέθοδος στηρίζεται σε μια απλή αλλά πανίσχυρη ιδιότητα:

★ Η ιδιότητα του μηδενικού γινομένου

$$\alpha \cdot \beta = 0 \iff \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Ένα γινόμενο είναι μηδέν **αν και μόνο αν** ένας τουλάχιστον παράγοντας είναι μηδέν.

☰ Επίλυση με παραγοντοποίηση

- 1 Μεταφέρω **όλους** τους όρους στο **πρώτο μέλος**, ώστε στο δεύτερο να μείνει **0**.
- 2 **Παραγοντοποιώ** το πρώτο μέλος.
- 3 Εξισώνω **κάθε παράγοντα** με το μηδέν και λύνω.

► Ελλιπής μορφή $ax^2 + bx = 0$ ($\gamma = 0$)

✎ Παράδειγμα 1 · Κοινός παράγοντας

Να λυθούν: α) $x^2 - 5x = 0$ β) $3x^2 = 12x$.

ΛΥΣΗ

$$\alpha) x(x - 5) = 0 \iff x = 0 \text{ ή } x - 5 = 0 \iff x = 0 \text{ ή } x = 5.$$

$$\beta) 3x^2 - 12x = 0 \iff 3x(x - 4) = 0 \iff x = 0 \text{ ή } x = 4.$$

✖ Συχνό λάθος · «Διαιρώ με το x » — και χάνω μια λύση!

$$\times \quad 3x^2 = 12x \Rightarrow (\text{διαιρώ με } x) \quad 3x = 12 \Rightarrow x = 4.$$

✓ Με τη διαίρεση **χάθηκε η λύση $x = 0$!** Δεν διαιρούμε ποτέ με παράσταση που περιέχει τον άγνωστο. Βγάζουμε **κοινό παράγοντα**.

► Ελλιπής μορφή $ax^2 + \gamma = 0$ ($\beta = 0$)

✎ Παράδειγμα 2 · Διαφορά τετραγώνων

Να λυθούν: α) $x^2 - 49 = 0$ β) $4x^2 - 9 = 0$ γ) $x^2 + 25 = 0$ δ) $x^2 = 7$.

ΛΥΣΗ

$$\alpha) (x - 7)(x + 7) = 0 \iff x = 7 \text{ ή } x = -7. \text{ Γράφουμε σύντομα } x = \pm 7.$$

$$\beta) (2x - 3)(2x + 3) = 0 \iff x = \frac{3}{2} \text{ ή } x = -\frac{3}{2}.$$

$$\gamma) x^2 = -25: \text{ το τετράγωνο ενός αριθμού δεν μπορεί να είναι αρνητικό. } \mathbf{Αδύνατη.}$$

$$\delta) x^2 = 7 \iff x = \sqrt{7} \text{ ή } x = -\sqrt{7}.$$

★ Η εξίσωση $x^2 = \alpha$

- Αν $\alpha > 0$: δύο λύσεις, $x = \sqrt{\alpha}$ ή $x = -\sqrt{\alpha}$.
- Αν $\alpha = 0$: μία λύση, $x = 0$.
- Αν $\alpha < 0$: **αδύνατη**.

✖ Συχνό λάθος · Ξεχνάμε την αρνητική ρίζα

$$\times \quad x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \quad \checkmark \quad x^2 = 16 \iff x = 4 \text{ ή } x = -4, \text{ γιατί και } (-4)^2 = 16.$$

► Πλήρης εξίσωση που παραγοντοποιείται

✎ Παράδειγμα 3 · Με ταυτότητες και τριώνυμο

Να λυθούν: α) $x^2 - 6x + 9 = 0$ β) $x^2 + x - 12 = 0$ γ) $(x - 2)^2 = 9$ δ) $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$.

ΛΥΣΗ

α) $(x - 3)^2 = 0 \iff x - 3 = 0 \iff x = 3$. Λέμε ότι είναι **διπλή ρίζα**.

β) Δύο αριθμοί με γινόμενο -12 και άθροισμα 1 : 4 και -3 . $(x + 4)(x - 3) = 0 \iff x = -4$ ή $x = 3$.

γ) $x - 2 = 3$ ή $x - 2 = -3 \iff x = 5$ ή $x = -1$.

δ) Η εξίσωση είναι 3ου βαθμού, αλλά παραγοντοποιείται: $x(x^2 - 4x - 5) = 0 \iff x(x - 5)(x + 1) = 0 \iff x = 0$ ή $x = 5$ ή $x = -1$.

B. Επίλυση με τη βοήθεια τύπου

Δεν παραγοντοποιείται «με το μάτι» κάθε τριώνυμο. Για παράδειγμα, πώς λύνεται η $x^2 + 4x - 1 = 0$; Χρειαζόμαστε μια μέθοδο που δουλεύει **πάντα**.

► Η ιδέα: συμπλήρωση τετραγώνου

✎ Παράδειγμα 4 · Συμπλήρωση τετραγώνου

Να λυθεί η εξίσωση $x^2 + 4x - 1 = 0$.

ΛΥΣΗ

Θυμόμαστε ότι $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$. Προσθέτουμε και αφαιρούμε 4:

$$x^2 + 4x + 4 - 4 - 1 = 0 \iff (x + 2)^2 = 5 \iff x + 2 = \pm\sqrt{5} \iff x = -2 \pm \sqrt{5}.$$

Αν κάνουμε την ίδια διαδικασία στη γενική εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, καταλήγουμε στη σχέση

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}.$$

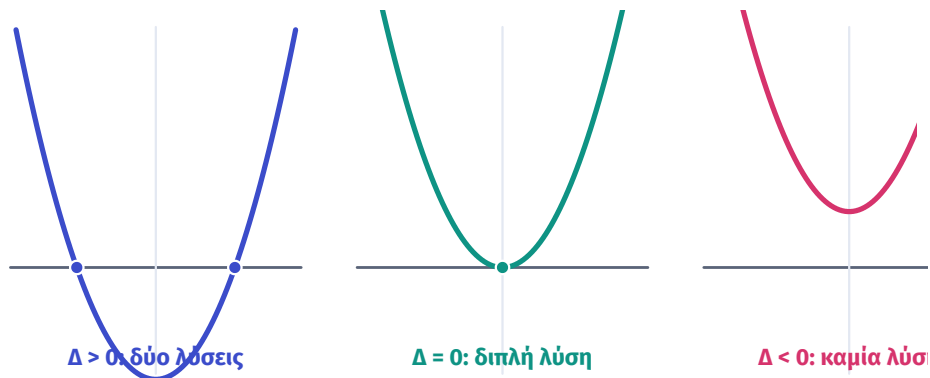
Το πλήθος των λύσεων εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμού $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, που λέγεται **διακρίνουσα**.

★ Ο τύπος των λύσεων

Για την εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$) υπολογίζουμε τη **διακρίνουσα**

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$$

- Αν $\Delta > 0$: **δύο άνισες** λύσεις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
- Αν $\Delta = 0$: **μία διπλή** λύση $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.
- Αν $\Delta < 0$: **καμία** λύση (η εξίσωση είναι **αδύνατη**).



Γεωμετρική εικόνα: οι λύσεις είναι τα σημεία όπου η παραβολή $y = ax^2 + bx + \gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$

≡ Επίλυση με τον τύπο

- 1 Φέρνω την εξίσωση στη μορφή $ax^2 + bx + \gamma = 0$.
- 2 Γράφω τα α, β, γ με τα πρόσημά τους.
- 3 Υπολογίζω τη διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.
- 4 Ανάλογα με το πρόσημο της Δ εφαρμόζω τον τύπο ή γράφω «αδύνατη».

✎ Παράδειγμα 5 · $\Delta > 0$

Να λυθεί η εξίσωση $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

ΛΥΣΗ

$$\alpha = 2, \beta = -5, \gamma = -3.$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49 > 0, \quad \sqrt{\Delta} = 7.$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm 7}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 7}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{12}{4} = 3, \quad x_2 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

✎ Παράδειγμα 6 · $\Delta = 0$ και $\Delta < 0$

Να λυθούν: α) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ β) $x^2 - 3x + 5 = 0$.

ΛΥΣΗ

α) $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$. Διπλή λύση: $x = -\frac{-12}{2 \cdot 9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$. (Πράγματι $9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2$.)

β) $\Delta = 9 - 20 = -11 < 0$. Η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

✎ Παράδειγμα 7 · Με άρρητες λύσεις

Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 2x - 4 = 0$.

ΛΥΣΗ

$$\Delta = 4 + 16 = 20, \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{5})}{2} = 1 \pm \sqrt{5}.$$

✗ Συχνό λάθος · Τα πρόσημα στον τύπο

✗ Για $x^2 - 6x + 5 = 0$: $\Delta = -6^2 - 20 = -56$.

✓ $\beta = -6$, άρα $\beta^2 = (-6)^2 = 36$ και $\Delta = 36 - 20 = 16$. Βάζε **πάντα** το β σε παρένθεση!

✗ $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ με $\beta = -6$: $x = \frac{-6 \pm 4}{2}$. ✓ $x = \frac{-(-6) \pm 4}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$, δηλαδή 5 ή 1.

✓ Πότε τύπος και πότε παραγοντοποίηση;

Στις **ελλειπείς** εξισώσεις ($\beta = 0$ ή $\gamma = 0$) η παραγοντοποίηση είναι πάντα πιο γρήγορη. Στις **πλήρεις**, αν δεν «βλέπεις» αμέσως παραγοντοποίηση, χρησιμοποίησε **τον τύπο** — δουλεύει πάντα!

► Παραγοντοποίηση τριωνύμου με τη βοήθεια των ριζών

★ Παραγοντοποίηση του $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$

- Αν $\Delta > 0$ και x_1, x_2 οι ρίζες: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$.
- Αν $\Delta = 0$ και x_0 η διπλή ρίζα: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_0)^2$.
- Αν $\Delta < 0$: το τριώνυμο **δεν** παραγοντοποιείται.

✎ Παράδειγμα 8 · Παραγοντοποίηση και απλοποίηση

Να απλοποιηθεί το κλάσμα $\frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 9}$.

ΛΥΣΗ

Από το προηγούμενο παράδειγμα, οι ρίζες του αριθμητή είναι 3 και $-\frac{1}{2}$, άρα

$$2x^2 - 5x - 3 = 2(x - 3)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 3)(2x + 1).$$

$$\frac{(x - 3)(2x + 1)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{2x + 1}{x + 3}, \quad x \neq \pm 3.$$

II Από τη Βαβυλώνα στον αλ-Χουαρίζμι

Προβλήματα που οδηγούν σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού λύνονταν ήδη στη Βαβυλώνα πριν από 4000 χρόνια, με «συνταγές» γραμμένες σε πήλινες πινακίδες. Ο Πέρσης μαθηματικός **αλ-Χουαρίζμι** (9ος αιώνας) έλυνε τέτοιες εξισώσεις συμπληρώνοντας **κυριολεκτικά** τετράγωνα σε σχήματα. Από το όνομά του προέρχεται η λέξη **αλγόριθμος**, και από τον τίτλο του βιβλίου του η λέξη **Άλγεβρα**!

✓ Για τον φιλομαθή: άθροισμα και γινόμενο ριζών

Αν η $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει ρίζες x_1, x_2 , τότε $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ (τύποι του **Vieta**). Στο $2x^2 - 5x - 3 = 0$: $3 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} = -\frac{-5}{2}$ ✓ και $3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} = \frac{-3}{2}$ ✓. Είναι ένας εξαιρετικός τρόπος **ελέγχου** των λύσεων!

**Συνέχισε στο mathgreece.com**

Για περισσότερη εξάσκηση: στο **mathgreece.com** θα βρεις βίντεο, κουίζ, παιχνίδια γνώσεων και επιπλέον φυλλάδια ασκήσεων — **όλα δωρεάν**.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

☰ Σύνοψη μαθήματος

- Μορφή: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$. Όλα στο πρώτο μέλος, 0 στο δεύτερο.
- **Παραγοντοποίηση** + « $\alpha\beta = 0 \iff \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$ ». **Ποτέ** διαίρεση με x .
- $x^2 = \alpha$: $x = \pm\sqrt{\alpha}$ ($\alpha > 0$), $x = 0$ ($\alpha = 0$), αδύνατη ($\alpha < 0$).
- $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$: $\Delta > 0 \rightarrow x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, $\Delta = 0 \rightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, $\Delta < 0 \rightarrow$ αδύνατη.
- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$.

🎯 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να λύσεις: α) $x^2 - 8x = 0$ β) $5x^2 + 15x = 0$ γ) $x^2 = \frac{x}{2}$. ★★ ★
- 2 Να λύσεις: α) $x^2 - 100 = 0$ β) $9x^2 = 1$ γ) $2x^2 + 18 = 0$ δ) $3x^2 - 15 = 0$. ★★ ★
- 3 Να λύσεις με παραγοντοποίηση: α) $x^2 + 10x + 25 = 0$ β) $x^2 - 7x + 12 = 0$ γ) $(2x - 1)^2 = 16$. ★★ ★
- 4 Να λύσεις με τον τύπο: α) $x^2 - 5x + 6 = 0$ β) $3x^2 + x - 2 = 0$ γ) $x^2 + 2x + 3 = 0$ δ) $4x^2 + 4x + 1 = 0$. ★★ ★
- 5 Να λύσεις: α) $x^2 - 4x + 1 = 0$ β) $-x^2 + 6x - 7 = 0$. ★★ ★

- 6 Να λύσεις: α) $(x+1)(x-3)=5$ β) $x(x+2)=3(x+2)$. ★★☆☆
- 7 Να παραγοντοποιήσεις τα τριώνυμα: α) $2x^2+3x-2$ β) $3x^2-10x+3$ γ) x^2-2x-1 . ★★☆☆
- 8 Να λύσεις την εξίσωση $x^3-2x^2-9x+18=0$. ★★★
- 9 Για ποια τιμή του λ η εξίσωση $x^2-6x+\lambda=0$ έχει διπλή ρίζα; Ποια είναι αυτή; ★★★
- 10 Να βρεις τον κ αν η εξίσωση $x^2+\kappa x-10=0$ έχει ρίζα το 2, και μετά να βρεις την άλλη ρίζα. ★★★

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο · ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ > ΜΑΘΗΜΑ 2.3

2.3

Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

🕒 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- να **μεταφράζεις** ένα πρόβλημα σε εξίσωση δευτέρου βαθμού,
- να λύνεις προβλήματα **αριθμών, γεωμετρίας, κίνησης** και **καθημερινής ζωής**,
- να **ελέγχεις** ποιες λύσεις είναι αποδεκτές με βάση το νόημα του προβλήματος.

Η μέθοδος

Τα προβλήματα αυτού του μαθήματος λύνονται με την ίδια λογική που έμαθες στο μάθημα 2.1. Η διαφορά είναι ότι τώρα η εξίσωση που προκύπτει είναι **δευτέρου βαθμού** και συνήθως έχει **δύο** λύσεις. Το νόημα του προβλήματος θα μας πει ποια (ή ποιες) είναι αποδεκτή.

☰ Πέντε βήματα για κάθε πρόβλημα

- 1 Κατανόηση:** διαβάζω προσεκτικά, κάνω **σχήμα** ή **πίνακα** αν βοηθά.
- 2 Επιλογή αγνώστου:** «Έστω $x \dots$ » — γράφω ακριβώς τι παριστάνει και σε ποια μονάδα.
- 3 Εξίσωση:** εκφράζω όλα τα ποσά με το x και «μεταφράζω» τη σχέση που δίνεται.
- 4 Επίλυση:** λύνω την εξίσωση (παραγοντοποίηση ή τύπος).
- 5 Έλεγχος – απάντηση:** απορρίπτω τις λύσεις που **δεν έχουν νόημα** (αρνητικά μήκη, μη ακέραιοι άνθρωποι κ.λπ.), επαληθεύω και απαντώ με πλήρη πρόταση.

⚠ **Η πιο σημαντική ερώτηση: «Είναι αποδεκτή;»**

Ένα μήκος, ένα εμβαδόν, ένας χρόνος, μια ηλικία ή ένα πλήθος ατόμων **δεν** μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός. Το πλήθος ατόμων ή αντικειμένων πρέπει επιπλέον να είναι **φυσικός** αριθμός. Μια λύση της εξίσωσης δεν είναι αυτόματα λύση του **προβλήματος!**

✓ Χρήσιμες «μεταφράσεις»

Στα ελληνικά	Στα μαθηματικά
δύο διαδοχικοί ακέραιοι	x και $x + 1$
δύο διαδοχικοί άρτιοι (ή περιττοί)	x και $x + 2$
το τετράγωνο ενός αριθμού	x^2
ο αντίστροφος ενός αριθμού	$\frac{1}{x}$
το γινόμενο τους είναι ...	$x(x + 1) = \dots$
κατά 3 μεγαλύτερος	$x + 3$

Προβλήματα με αριθμούς

✎ Παράδειγμα 1 · Διαδοχικοί αριθμοί

Το γινόμενο δύο διαδοχικών θετικών ακεραίων είναι 156. Ποιοι είναι οι αριθμοί;

ΛΥΣΗ

Έστω x ο μικρότερος, οπότε ο επόμενος είναι $x + 1$ (x θετικός ακέραιος).

$$x(x + 1) = 156 \iff x^2 + x - 156 = 0.$$

$$\Delta = 1 + 624 = 625, \sqrt{\Delta} = 25:$$

$$x = \frac{-1 \pm 25}{2} \Rightarrow x = 12 \quad \text{ή} \quad x = -13.$$

Η $x = -13$ απορρίπτεται (θέλουμε θετικούς). Οι αριθμοί είναι **12 και 13**. (Έλεγχος: $12 \cdot 13 = 156 \checkmark$.)

✎ Παράδειγμα 2 · Αριθμός και αντίστροφος

Το άθροισμα ενός αριθμού και του αντίστροφού του είναι $\frac{10}{3}$. Ποιος είναι ο αριθμός;

ΛΥΣΗ

Έστω $x \neq 0$ ο αριθμός. $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$. Πολλαπλασιάζουμε με $3x$:

$$3x^2 + 3 = 10x \iff 3x^2 - 10x + 3 = 0.$$

$$\Delta = 100 - 36 = 64, x = \frac{10 \pm 8}{6}, \text{ δηλαδή } x = 3 \text{ ή } x = \frac{1}{3}. \text{ Και οι δύο λύσεις είναι αποδεκτές: } 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \checkmark.$$

Γεωμετρικά προβλήματα

Παράδειγμα 3 · Ορθογώνιο με γνωστό εμβαδόν

Ένα ορθογώνιο έχει μήκος κατά 4 m μεγαλύτερο από το πλάτος του και εμβαδόν 96 m^2 . Να βρεθούν οι διαστάσεις του.

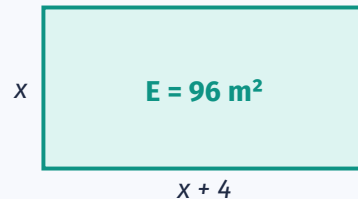
ΛΥΣΗ

Έστω $x \text{ m}$ το πλάτος ($x > 0$). Το μήκος είναι $x + 4$.

$$x(x + 4) = 96 \iff x^2 + 4x - 96 = 0.$$

Δύο αριθμοί με γινόμενο -96 και άθροισμα 4: 12 και -8 . Άρα $(x + 12)(x - 8) = 0$, δηλαδή $x = 8$ ή $x = -12$ (απορρίπτεται).

Οι διαστάσεις είναι **8 m και 12 m**.



Παράδειγμα 4 · Πυθαγόρειο θεώρημα

Οι πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι τρεις διαδοχικοί άρτιοι αριθμοί. Να βρεθούν.

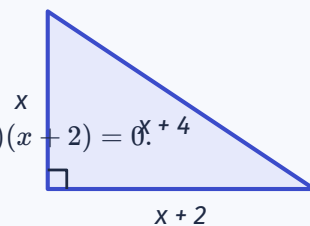
ΛΥΣΗ

Έστω $x, x + 2, x + 4$ οι πλευρές. Η μεγαλύτερη, $x + 4$, είναι η υποτείνουσα:

$$x^2 + (x + 2)^2 = (x + 4)^2$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = x^2 + 8x + 16 \iff x^2 - 4x - 12 = 0 \iff (x - 6)(x + 2) = 0.$$

Η $x = -2$ απορρίπτεται. Για $x = 6$ οι πλευρές είναι **6, 8, 10**. (Έλεγχος: $36 + 64 = 100 \checkmark$.)



Παράδειγμα 5 · Πλαίσιο γύρω από φωτογραφία

Μια φωτογραφία διαστάσεων $20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ τοποθετείται σε κορνίζα σταθερού πλάτους $x \text{ cm}$. Το συνολικό εμβαδόν (φωτογραφία + κορνίζα) είναι 1200 cm^2 . Πόσο είναι το πλάτος της κορνίζας;

ΛΥΣΗ

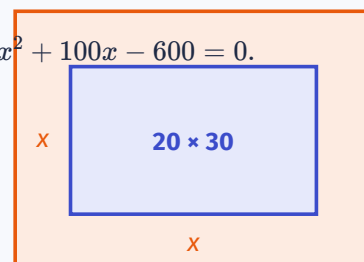
Οι εξωτερικές διαστάσεις είναι $20 + 2x$ και $30 + 2x$:

$$(20 + 2x)(30 + 2x) = 1200 \iff 600 + 100x + 4x^2 = 1200 \iff 4x^2 + 100x - 600 = 0.$$

Διαιρούμε με 4: $x^2 + 25x - 150 = 0$. $\Delta = 625 + 600 = 1225$, $\sqrt{\Delta} = 35$:

$$x = \frac{-25 \pm 35}{2} \Rightarrow x = 5 \text{ ή } x = -30 \text{ (απορρίπτεται)}.$$

Η κορνίζα έχει πλάτος **5 cm**.



Προβλήματα κίνησης και καθημερινής ζωής

✎ Παράδειγμα 6 · Ελεύθερη πτώση

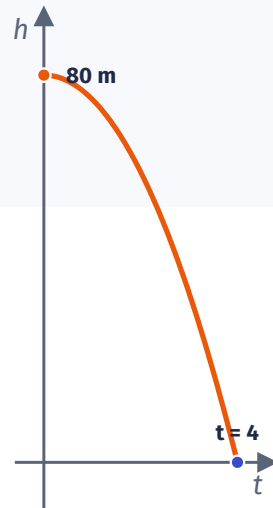
Ένα σώμα αφήνεται από ύψος 80 m. Το ύψος του (σε m) μετά από t δευτερόλεπτα δίνεται από τον τύπο $h = 80 - 5t^2$. Πότε θα φτάσει στο έδαφος;

ΛΥΣΗ

Στο έδαφος είναι $h = 0$:

$$80 - 5t^2 = 0 \iff t^2 = 16 \iff t = 4 \text{ ή } t = -4.$$

Ο χρόνος δεν μπορεί να είναι αρνητικός, άρα το σώμα φτάνει στο έδαφος μετά από **4 δευτερόλεπτα**.



✎ Παράδειγμα 7 · Μοιρασιά δώρου

Μια παρέα φίλων αγοράζει ένα δώρο 240 € και μοιράζει ισόποσα το κόστος. Αν η παρέα είχε 3 άτομα περισσότερα, ο καθένας θα πλήρωνε 4 € λιγότερα. Πόσοι είναι οι φίλοι;

ΛΥΣΗ

Έστω x οι φίλοι (x θετικός ακέραιος). Ο καθένας πληρώνει $\frac{240}{x}$ €. Με $x + 3$ φίλους θα πλήρωνε $\frac{240}{x + 3}$ €.

$$\frac{240}{x} - \frac{240}{x + 3} = 4.$$

Πολλαπλασιάζουμε με $x(x + 3)$:

$$240(x + 3) - 240x = 4x(x + 3) \iff 720 = 4x^2 + 12x \iff x^2 + 3x - 180 = 0.$$

$$\Delta = 9 + 720 = 729, \sqrt{\Delta} = 27, \text{ άρα } x = \frac{-3 \pm 27}{2}: x = 12 \text{ ή } x = -15 \text{ (απορρίπτεται).}$$

Οι φίλοι είναι **12**. (Έλεγχος: $240 : 12 = 20$ € και $240 : 15 = 16$ €, διαφορά 4 € ✓.)

✓ Όταν η λύση δεν είναι ακέραια

Αν σε ένα πρόβλημα «πλήθους» (άτομα, ομάδες, πλευρές) καμία λύση της εξίσωσης δεν είναι θετικός ακέραιος, τότε το πρόβλημα **δεν έχει λύση** με αυτά τα δεδομένα. Και αυτό είναι μια σωστή, πλήρης απάντηση!

✖ Συχνό λάθος · Ξεχνάμε τον έλεγχο

✖ «Οι πλευρές είναι 8 ή -12 .»✓ «Η λύση -12 απορρίπτεται, γιατί το μήκος είναι θετικό. Άρα η πλευρά είναι 8.»Σε κάθε πρόβλημα, γράφε **ρητά** ποια λύση απορρίπτεται και **γιατί**.

✎ Παράδειγμα 8 · Ποσοστιαία μεταβολή δύο ετών

Η τιμή ενός προϊόντος αυξήθηκε δύο συνεχόμενα χρόνια κατά το ίδιο ποσοστό $x\%$ και από 200 € έγινε 242 €. Ποιο ήταν το ποσοστό;

ΛΥΣΗ

Κάθε χρόνο η τιμή πολλαπλασιάζεται με $1 + \frac{x}{100}$. Θέτουμε $\omega = 1 + \frac{x}{100}$:

$$200\omega^2 = 242 \iff \omega^2 = 1,21 \iff \omega = 1,1 \text{ (ή } \omega = -1,1, \text{ απορρίπτεται).}$$

Άρα $1 + \frac{x}{100} = 1,1 \iff x = 10$. Η αύξηση ήταν **10% κάθε χρόνο**.

Συνέχισε στο **mathgreece.com**

Για περισσότερη εξάσκηση: στο **mathgreece.com** θα βρεις βίντεο, κουίζ, παιχνίδια γνώσεων και επιπλέον φυλλάδια ασκήσεων — **όλα δωρεάν**.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

☰ Σύνοψη μαθήματος

- Πέντε βήματα: **κατανόηση** → **άγνωστος** → **εξίσωση** → **επίλυση** → **έλεγχος**.
- Πίνακες και σχήματα βοηθούν στη «μετάφραση».
- Απορρίπτω λύσεις που δεν έχουν νόημα (αρνητικά μήκη/χρόνοι, μη ακέραια πλήθη) και **γράφω γιατί**.
- Αν καμία λύση δεν είναι αποδεκτή, το πρόβλημα είναι **αδύνατο**.

🎯 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να βρεις θετικό αριθμό που το τετράγωνό του είναι κατά 30 μεγαλύτερο από τον ίδιο τον αριθμό. ★★☆☆
- 2 Το άθροισμα των τετραγώνων δύο διαδοχικών περιττών θετικών αριθμών είναι 130. Ποιοι είναι; ★★★☆
- 3 Ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο έχουν το ίδιο εμβαδόν. Το ορθογώνιο έχει μήκος κατά 9 cm μεγαλύτερο και πλάτος κατά 4 cm μικρότερο από την πλευρά του τετραγώνου. Να βρεις την πλευρά του τετραγώνου. ★★★☆

- 4 Η υποτείνουσα ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι 13 cm και η μία κάθετη κατά 7 cm μεγαλύτερη από την άλλη. Να βρεις τις κάθετες πλευρές και το εμβαδόν. ★★☆☆
- 5 Ένα ορθογώνιο οικόπεδο έχει περίμετρο 70 m και εμβαδόν 300 m². Να βρεις τις διαστάσεις του. ★★☆☆
- 6 Ένα κυρτό πολύγωνο με ν πλευρές έχει $\frac{\nu(\nu-3)}{2}$ διαγωνίους. Πόσες πλευρές έχει ένα πολύγωνο με 35 διαγωνίους; ★★☆☆
- 7 Σε ένα τουρνουά κάθε ομάδα παίζει μία φορά με κάθε άλλη. Έγιναν συνολικά 45 αγώνες. Πόσες ομάδες συμμετείχαν; ★★★
- 8 Μια μπάλα πετιέται κατακόρυφα προς τα πάνω και το ύψος της (σε m) μετά από t s είναι $h = 20t - 5t^2$. Πότε βρίσκεται σε ύψος 15 m; Πότε επιστρέφει στο έδαφος; ★★★
- 9 Ένα κομμάτι χαρτόνι σχήματος τετραγώνου κόβεται στις γωνίες του με τετράγωνα πλευράς 3 cm και διπλώνεται ώστε να γίνει ανοιχτό κουτί όγκου 300 cm³. Πόση ήταν η πλευρά του χαρτονιού; ★★★

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2Ο · ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ > ΜΑΘΗΜΑ 2.4

2.4 Κλασματικές εξισώσεις

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι είναι **κλασματική εξίσωση** (εξίσωση με τον άγνωστο στον παρονομαστή),
- να βρίσκεις τους **περιορισμούς** πριν λύσεις,
- να κάνεις **απαλοιφή παρονομαστών** με το Ε.Κ.Π.,
- να **ελέγχεις** τις λύσεις και να **απορρίπτεις** όσες παραβιάζουν τους περιορισμούς.

Τι είναι κλασματική εξίσωση

📖 Ορισμός · Κλασματική εξίσωση

Κλασματική λέγεται μια εξίσωση που έχει τον **άγνωστο σε παρονομαστή**.

Για παράδειγμα, οι $\frac{3}{x} = 6$, $\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x} = 2$ και $\frac{5}{x^2-1} = \frac{2}{x+1}$ είναι κλασματικές. Αντίθετα, η $\frac{x}{3} + \frac{x-1}{2} = 4$ **δεν** είναι κλασματική: οι παρονομαστές της είναι αριθμοί.

Επειδή **δεν** επιτρέπεται να μηδενιστεί κάποιος παρονομαστής, κάθε κλασματική εξίσωση έρχεται μαζί με **περιορισμούς** για τον άγνωστο, όπως ακριβώς οι ρητές παραστάσεις (μάθημα 1.9).

Η μέθοδος επίλυσης

☰ Επίλυση κλασματικής εξίσωσης

- 1 **Παραγοντοποιώ** τους παρονομαστές.
- 2 Γράφω τους **περιορισμούς**: κάθε παράγοντας παρονομαστή $\neq 0$.
- 3 Βρίσκω το **Ε.Κ.Π.** των παρονομαστών.
- 4 **Πολλαπλασιάζω** κάθε όρο και των δύο μελών με το Ε.Κ.Π. και απλοποιώ — οι παρονομαστές «φεύγουν».
- 5 Λύνω την εξίσωση που προκύπτει (1ου ή 2ου βαθμού).
- 6 **Ελέγχω** κάθε λύση με τους περιορισμούς: όποια τους παραβιάζει **απορρίπτεται**.



Η «ροή» της επίλυσης: οι περιορισμοί γράφονται στην αρχή και ελέγχονται στο τέλος

 Παράδειγμα 1 · Απλή κλασματική εξίσωση

Να λυθεί η εξίσωση $\frac{4}{x} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2x}$.

ΛΥΣΗ

Περιορισμός: $x \neq 0$. **Ε.Κ.Π.** = $2x$. Πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο με $2x$:

$$2x \cdot \frac{4}{x} - 2x \cdot \frac{1}{2} = 2x \cdot \frac{3}{2x} \iff 8 - x = 3 \iff x = 5.$$

Η $x = 5$ ικανοποιεί τον περιορισμό ($5 \neq 0$), άρα είναι **δεκτή**.

 Παράδειγμα 2 · Με πολυωνυμικούς παρονομαστές

Να λυθεί η εξίσωση $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{10}{x^2-1}$.

ΛΥΣΗ

Παραγοντοποίηση: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. **Περιορισμοί:** $x \neq 1$ και $x \neq -1$.

Ε.Κ.Π. = $(x-1)(x+1)$. Πολλαπλασιάζουμε:

$$2(x+1) + 3(x-1) = 10 \iff 2x+2+3x-3=10 \iff 5x=11 \iff x=\frac{11}{5}.$$

Η λύση είναι δεκτή.

 Παράδειγμα 3 · Λύση που απορρίπτεται

Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x}{x-3} - \frac{3}{x-3} = x-2$.

ΛΥΣΗ

Περιορισμός: $x \neq 3$. Πολλαπλασιάζουμε με $x-3$:

$$x-3 = (x-2)(x-3) \iff x-3 = x^2-5x+6 \iff x^2-6x+9=0 \iff (x-3)^2=0.$$

Η μόνη λύση είναι $x=3$, που όμως **απορρίπτεται** λόγω του περιορισμού. Άρα η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

 Γιατί εμφανίζονται «ψεύτικες» λύσεις;

Όταν πολλαπλασιάζουμε με το Ε.Κ.Π., πολλαπλασιάζουμε με μια παράσταση που **μπορεί να είναι μηδέν**. Αυτό δεν είναι πάντα «ασφαλές» και μπορεί να «εμφανίσει» λύσεις που η αρχική εξίσωση δεν έχει. Γι' αυτό ο **έλεγχος** στο τέλος είναι **υποχρεωτικός**, όχι προαιρετικός!

 Παράδειγμα 4 · Που καταλήγει σε δευτεροβάθμια

Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x+2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x^2-2x}$.

ΛΥΣΗ

Παραγοντοποίηση: $x^2 - 2x = x(x - 2)$. **Περιορισμοί:** $x \neq 0, x \neq 2$. **Ε.Κ.Π.** $= x(x - 2)$.

$$(x + 2)(x - 2) + 4x = 8 \iff x^2 - 4 + 4x - 8 = 0 \iff x^2 + 4x - 12 = 0 \iff (x + 6)(x - 2) = 0.$$

Λύσεις της δευτεροβάθμιας: $x = -6$ ή $x = 2$.

- $x = 2$: **απορρίπτεται** (παραβιάζει τον περιορισμό $x \neq 2$).
- $x = -6$: **δεκτή**.

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = -6$.

✗ Συχνό λάθος · Ξεχνάμε να πολλαπλασιάσουμε κάποιον όρο

✗ Στο $\frac{3}{x} + 1 = \frac{5}{x}$ πολλαπλασιάζω με x και γράφω $3 + 1 = 5$.

✓ Και ο όρος 1 πολλαπλασιάζεται: $3 + x = 5 \iff x = 2$.

✗ Συχνό λάθος · Κάνω «χιαστί» σε άθροισμα

✗ $\frac{2}{x} + \frac{1}{3} = \frac{1}{x} \Rightarrow$ «χιαστί» $2 \cdot 3 + \dots$

✓ Το «χιαστί» ($\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \alpha\delta = \beta\gamma$) επιτρέπεται **μόνο** όταν κάθε μέλος είναι **ένα μόνο κλάσμα**. Σε κάθε άλλη περίπτωση: **Ε.Κ.Π.**

✍ Παράδειγμα 5 · Ισότητα δύο κλασμάτων («χιαστί»)

Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-3}{x-4}$.

ΛΥΣΗ

Περιορισμοί: $x \neq 2, x \neq 4$. Κάθε μέλος είναι ένα κλάσμα, οπότε:

$$(x+1)(x-4) = (x-3)(x-2) \iff x^2 - 3x - 4 = x^2 - 5x + 6 \iff 2x = 10 \iff x = 5.$$

Δεκτή.

Προβλήματα με κλασματικές εξισώσεις

✍ Παράδειγμα 6 · Πρόβλημα κοινής εργασίας

Ένας κηπουρός κουρεύει ένα γκαζόν σε 6 ώρες, ενώ ο βοηθός του σε 12 ώρες. Σε πόσο χρόνο θα το κουρέψουν αν δουλέψουν μαζί;

ΛΥΣΗ

Σε **μία ώρα** ο κηπουρός κάνει $\frac{1}{6}$ της δουλειάς και ο βοηθός $\frac{1}{12}$. Αν μαζί χρειάζονται x ώρες, σε μία ώρα κάνουν $\frac{1}{x}$ της δουλειάς:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

Ε.Κ.Π. = $12x$: $2x + x = 12 \iff x = 4$. Μαζί θα το κουρέψουν σε **4 ώρες**.

κηπουρός: 2/12 βοηθός: 1/12 μένουν 9/12 → 3 ώρες ακόμη



Σε μία ώρα: $1/6 + 1/12 = 3/12 = 1/4$ της δουλειάς

Παράδειγμα 7 · Πρόβλημα κίνησης

Ένα σκάφος διανύει 24 km με το ρεύμα και 24 km αντίθετα στο ρεύμα σε συνολικά 5 ώρες. Η ταχύτητα του ρεύματος είναι 2 km/h. Ποια είναι η ταχύτητα του σκάφους σε ακίνητο νερό;

ΛΥΣΗ

Έστω v km/h η ταχύτητα του σκάφους ($v > 2$). Με το ρεύμα κινείται με $v + 2$, αντίθετα με $v - 2$. Ο χρόνος είναι απόσταση : ταχύτητα:

$$\frac{24}{v+2} + \frac{24}{v-2} = 5.$$

Ε.Κ.Π. = $(v+2)(v-2)$:

$$24(v-2) + 24(v+2) = 5(v^2-4) \iff 48v = 5v^2 - 20 \iff 5v^2 - 48v - 20 = 0.$$

$$\Delta = 2304 + 400 = 2704, \sqrt{\Delta} = 52, v = \frac{48 \pm 52}{10}: v = 10 \text{ ή } v = -0,4 \text{ (απορρίπτεται)}.$$

Η ταχύτητα είναι **10 km/h**.

Συνέχισε στο mathgreece.com



Θέλεις να εμπεδώσεις καλύτερα τη θεωρία; Δες τα σχετικά βίντεο στο **mathgreece.com** και στο κανάλι **MATHGREECE** στο YouTube — ένα ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

Σύνοψη μαθήματος

- Κλασματική = άγνωστος στον παρονομαστή.
- Παραγοντοποίηση → περιορισμοί → Ε.Κ.Π. → απαλοιφή → επίλυση → έλεγχος.
- Κάθε όρος (και οι «σκέτοι») πολλαπλασιάζεται με το Ε.Κ.Π.
- Λύσεις που μηδενίζουν παρονομαστή **απορρίπτονται**: αν απορριφθούν όλες, η εξίσωση είναι **αδύνατη**.
- «Χιαστί» μόνο όταν κάθε μέλος είναι **ένα** κλάσμα.

Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να λύσεις: α) $\frac{6}{x} = 2$ β) $\frac{5}{x} - 1 = \frac{3}{x}$ γ) $\frac{x+4}{x} = 3$. ★ ★ ★
- 2 Να λύσεις: α) $\frac{3}{x-2} = \frac{2}{x+1}$ β) $\frac{x}{x+3} = \frac{2}{5}$. ★ ★ ★
- 3 Να λύσεις: $\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$. ★ ★ ★
- 4 Να λύσεις: $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{1}{x^2-x}$. ★ ★ ★
- 5 Να λύσεις: $x + \frac{6}{x} = 5$. ★ ★ ★
- 6 Να λύσεις: $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{8}{x^2-1}$. ★ ★ ★
- 7 Να λύσεις: $\frac{3}{x+2} - \frac{1}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x}$. ★ ★ ★
- 8 Να λύσεις: $\frac{2x}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{8}{x^2-4} + 2$. ★ ★ ★
- 9 Ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι κατά 3 μικρότερος από τον παρονομαστή. Αν προσθέσουμε 2 και στους δύο όρους, το κλάσμα γίνεται $\frac{3}{4}$. Ποιο είναι το κλάσμα; ★ ★ ★
- 10 Μια βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 3 ώρες και μια δεύτερη σε x ώρες. Ανοιχτές μαζί τη γεμίζουν σε 2 ώρες. Να βρεις το x . ★ ★ ★
- 11 Ένας ποδηλάτης διανύει 60 km. Αν πήγαινε κατά 5 km/h πιο γρήγορα, θα έφτανε 1 ώρα νωρίτερα. Ποια ήταν η ταχύτητά του; ★ ★ ★

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο · ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ > ΜΑΘΗΜΑ 2.5

2.5

Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- πώς **συγκρίνουμε** δύο πραγματικούς αριθμούς ($\alpha > \beta \iff \alpha - \beta > 0$),
- τις **ιδιότητες της διάταξης** — και τότε **αλλάζει η φορά** μιας ανισότητας,
- να λύνεις **ανισώσεις πρώτου βαθμού** και να παριστάνεις τις λύσεις στον άξονα,
- να βρίσκεις τις **κοινές λύσεις** δύο ανισώσεων.

Α. Διάταξη πραγματικών αριθμών

Στον άξονα των πραγματικών αριθμών, από δύο αριθμούς **μεγαλύτερος** είναι αυτός που βρίσκεται **δεξιότερα**.



Ο β βρίσκεται δεξιότερα από τον α , άρα $\beta > \alpha$

☰ Ορισμός · Σύγκριση αριθμών

$$\alpha > \beta \iff \alpha - \beta > 0$$

$$\alpha < \beta \iff \alpha - \beta < 0$$

$$\alpha = \beta \iff \alpha - \beta = 0$$

Για να συγκρίνουμε δύο αριθμούς (ή παραστάσεις), εξετάζουμε το **πρόσημο της διαφοράς** τους.

Ο συμβολισμός $\alpha \geq \beta$ σημαίνει « $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$ » και διαβάζεται « α μεγαλύτερος ή ίσος του β ».

✎ Παράδειγμα 1 · Σύγκριση με τη διαφορά

α) Να συγκριθούν οι αριθμοί $\frac{5}{7}$ και $\frac{7}{10}$. β) Να αποδειχθεί ότι $x^2 + 9 \geq 6x$ για κάθε x .

ΛΥΣΗ

α) $\frac{5}{7} - \frac{7}{10} = \frac{50 - 49}{70} = \frac{1}{70} > 0$, άρα $\frac{5}{7} > \frac{7}{10}$.

β) $x^2 + 9 - 6x = (x - 3)^2 \geq 0$, γιατί κάθε τετράγωνο είναι μη αρνητικό. Άρα $x^2 + 9 \geq 6x$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 3$.

★ Χρήσιμες βασικές ανισότητες

- Για κάθε α : $\alpha^2 \geq 0$ (το « $\geq$ » ισχύει μόνο για $\alpha = 0$).
- Το άθροισμα θετικών είναι θετικό· το γινόμενο ομόσημων είναι θετικό, ετερόσημων αρνητικό.

B. Ιδιότητες της διάταξης

★ Ιδιότητα 1: Προσθαφαίρεση

Αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη, η ανισότητα διατηρεί τη φορά της:

$$\alpha > \beta \iff \alpha + \gamma > \beta + \gamma \iff \alpha - \gamma > \beta - \gamma.$$

★ Ιδιότητα 2: Πολλαπλασιασμός – διαίρεση

- Με **θετικό** αριθμό η φορά **διατηρείται**: αν $\gamma > 0$, $\alpha > \beta \iff \alpha\gamma > \beta\gamma \iff \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.
- Με **αρνητικό** αριθμό η φορά **αντιστρέφεται**: αν $\gamma < 0$, $\alpha > \beta \iff \alpha\gamma < \beta\gamma \iff \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.



Γιατί αλλάζει η φορά: πολλαπλασιάζοντας με -1 ο άξονας «καθρεφτίζεται»

✗ Συχνό λάθος · Το πιο συχνό λάθος στις ανισώσεις!

$$\times \quad -2x > 6 \Rightarrow x > -3$$

$$\checkmark \quad -2x > 6 \Rightarrow x < \frac{6}{-2} \Rightarrow x < -3$$

Διαιρώντας με **αρνητικό** αριθμό, **γυρνάμε τη φορά**. Έλεγχος με $x = -4$: $-2(-4) = 8 > 6$ ✓, ενώ με $x = 0$: $0 > 6$ ✗.

★ Ιδιότητα 3: Μεταβατική

$$\alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$$

★ **Ιδιότητα 4: Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός ανισοτήτων κατά μέλη**

- Ανισότητες της ίδιας φοράς μπορούν να προστεθούν κατά μέλη: $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$.
- Αν όλοι οι όροι είναι θετικοί, μπορούν και να πολλαπλασιαστούν: $\alpha > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0 \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\delta$.
- Για θετικούς α, β : $\alpha > \beta \iff \alpha^2 > \beta^2$.

⚠ **Δεν αφαιρούμε και δεν διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη!**

Από $5 > 2$ και $4 > 0$ δεν προκύπτει $5 - 4 > 2 - 0$ (δηλαδή $1 > 2$, λάθος!). Ανισότητες **μόνο προστίθενται** κατά μέλη (ή πολλαπλασιάζονται όταν όλα είναι θετικά).

✎ **Παράδειγμα 2 · Εκτίμηση παράστασης**

Αν $2 < x < 5$ και $-3 < y < -1$, να βρεθούν μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις $x + y$, $3x - 1$ και $x - y$.

ΛΥΣΗ

- $x + y$: προσθέτουμε κατά μέλη: $2 + (-3) < x + y < 5 + (-1)$, δηλαδή $-1 < x + y < 4$.
- $3x - 1$: $6 < 3x < 15 \Rightarrow 5 < 3x - 1 < 14$.
- $x - y$: **δεν αφαιρούμε!** Γράφουμε $x - y = x + (-y)$. Από $-3 < y < -1$, πολλαπλασιάζοντας με -1 : $1 < -y < 3$. Προσθέτουμε: $3 < x - y < 8$.

Γ. Ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο

Μια **ανίσωση** είναι μια ανισότητα με άγνωστο. Οι λύσεις της είναι συνήθως **άπειρες**, π.χ. η $x > 3$ αληθεύει για όλους τους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 3. Γι' αυτό τις παριστάνουμε **γραφικά** στον άξονα.



$x > 2$ (το 2 δεν είναι λύση: κενός κύκλος)



$x \leq 1$ (το 1 είναι λύση: γεμάτος κύκλος)

≡ Επίλυση ανίσωσης 1ου βαθμού

Ακριβώς τα ίδια βήματα με την εξίσωση (παρονομαστές → παρενθέσεις → χωρισμός → αναγωγή), με **μία** διαφορά:

όταν **πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε με αρνητικό αριθμό, αλλάζουμε τη φορά** της ανίσωσης.

Τέλος παριστάνουμε τις λύσεις στον άξονα.

Παράδειγμα 3 · Ανίσωση με παρενθέσεις

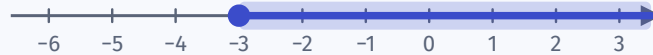
Να λυθεί η ανίσωση $3(x - 2) - 5 \leq 2(4x + 1) + 2$ και να παρασταθούν οι λύσεις στον άξονα.

ΛΥΣΗ

$$3x - 6 - 5 \leq 8x + 2 + 2 \iff 3x - 8x \leq 4 + 11 \iff -5x \leq 15.$$

Διαιρούμε με $-5 < 0$ **αλλάζοντας τη φορά**:

$$x \geq -3.$$

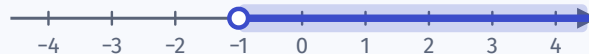
**Παράδειγμα 4 · Ανίσωση με κλάσματα**

Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x+1}{2} - \frac{x-2}{3} > 1$.

ΛΥΣΗ

Ε.Κ.Π. = $6 > 0$, άρα η φορά μένει ίδια:

$$3(x+1) - 2(x-2) > 6 \iff 3x + 3 - 2x + 4 > 6 \iff x > -1.$$

**Παράδειγμα 5 · Αδύνατη ή αληθής για κάθε x**

Να λυθούν: α) $2(x+1) > 2x+5$ β) $3x - (x-4) \geq 2(x+1)$.

ΛΥΣΗ

α) $2x + 2 > 2x + 5 \iff 0x > 3$: δεν υπάρχει αριθμός που επί 0 να δίνει κάτι μεγαλύτερο του 3.

Αδύνατη.

β) $2x + 4 \geq 2x + 2 \iff 0x \geq -2$: ισχύει **για κάθε x**.

► Κοινές λύσεις ανισώσεων

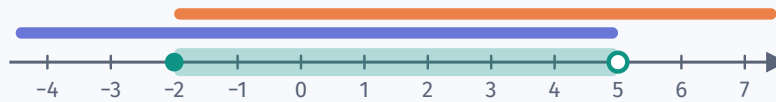
Συχνά ζητούνται οι αριθμοί που ικανοποιούν **ταυτόχρονα** δύο ανισώσεις. Λύνουμε την καθεμία χωριστά και βρίσκουμε στον άξονα το **κοινό τμήμα** των λύσεων.

Παράδειγμα 6 · Κοινές λύσεις

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων $2x - 3 < 7$ και $5 - x \leq 2x + 11$.

ΛΥΣΗ

- $2x - 3 < 7 \iff 2x < 10 \iff x < 5$.
- $5 - x \leq 2x + 11 \iff -3x \leq 6 \iff x \geq -2$.



Οι κοινές λύσεις: $-2 \leq x < 5$

Κοινές λύσεις: $-2 \leq x < 5$.

Παράδειγμα 7 · Διπλή ανίσωση

Να λυθεί η ανίσωση $-1 < \frac{2x+3}{5} \leq 3$ και να βρεθούν οι **ακέραιες** λύσεις της.

ΛΥΣΗ

Πολλαπλασιάζουμε **και τα τρία μέλη** με 5: $-5 < 2x + 3 \leq 15$.

Αφαιρούμε 3: $-8 < 2x \leq 12$. Διαιρούμε με 2: $-4 < x \leq 6$.

Ακέραιες λύσεις: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Παράδειγμα 8 · Πρόβλημα με ανίσωση

Ένα κινητό τηλέφωνο κοστίζει 15 € τον μήνα πάγιο συν 0,10 € το λεπτό ομιλίας. Ένα άλλο πρόγραμμα κοστίζει 25 € τον μήνα με απεριόριστη ομιλία. Πόσα λεπτά τον μήνα πρέπει να μιλάμε ώστε να συμφέρει το δεύτερο πρόγραμμα;

ΛΥΣΗ

Αν x τα λεπτά, το πρώτο κοστίζει $15 + 0,1x$. Θέλουμε:

$$15 + 0,1x > 25 \iff 0,1x > 10 \iff x > 100.$$

Το δεύτερο πρόγραμμα συμφέρει όταν μιλάμε **περισσότερα από 100 λεπτά** τον μήνα.

Συνέχισε στο mathgreece.com



Θέλεις να δεις αυτό το μάθημα σε **βίντεο**, με επιπλέον λυμένες ασκήσεις και κοιütz αυτοαξιολόγησης; Μπες στο **mathgreece.com** — θα βρεις ένα πλήρες και ολοκληρωμένο **δωρεάν φροντιστήριο**.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

Σύνοψη μαθήματος

- $\alpha > \beta \iff \alpha - \beta > 0$. Για σύγκριση εξετάζω το πρόσημο της διαφοράς.
- Προσθαφαίρεση: φορά **ίδια**. Πολλαπλασιασμός/διαίρεση με **θετικό**: ίδια· με **αρνητικό**: **αντίθετη**.
- Ανισότητες ίδιας φοράς **προστίθενται**· **δεν** αφαιρούνται.
- Λύσεις στον άξονα: **κενός** κύκλος για $<, >$ · **γεμάτος** για $\leq, \geq$.
- Κοινές λύσεις: το κοινό τμήμα στον άξονα.

Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να συγκρίνεις: α) $\frac{3}{4}$ και $\frac{5}{7}$ β) $-\frac{2}{3}$ και $-\frac{3}{4}$ γ) $2\sqrt{3}$ και $3\sqrt{2}$. ★★
- 2 Να αποδείξεις ότι για κάθε α : α) $\alpha^2 + 1 \geq 2\alpha$ β) $\alpha^2 + 4\alpha + 5 > 0$. ★★★
- 3 Αν $1 < x < 3$ και $-2 < y < 4$, να βρεις μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται: α) $x + y$ β) $2x - 3y$ γ) $-x$. ★★★
- 4 Να λύσεις και να παραστήσεις στον άξονα: α) $3x - 4 > 8$ β) $5 - 2x \geq 11$ γ) $4(x + 1) < x - 5$. ★★
- 5 Να λύσεις: α) $\frac{x}{3} - \frac{x-1}{2} \leq 1$ β) $\frac{2x-1}{4} - \frac{x+2}{3} > \frac{x}{6}$. ★★★
- 6 Να λύσεις: $(x+2)^2 - (x-1)(x+1) \leq 3x+1$. ★★★
- 7 Να βρεις τις κοινές λύσεις των $3x+1 > x-5$ και $2(x-1) \leq x+3$. ★★★
- 8 Να βρεις τις ακέραιες λύσεις της $-3 \leq 2x-1 < 5$. ★★★
- 9 Για ποιες τιμές του x η παράσταση $A = \frac{4-x}{2}$ είναι μεγαλύτερη από την $B = \frac{x+1}{3}$ και ταυτόχρονα A θετική; ★★★
- 10 Οι βαθμοί ενός μαθητή σε τρία τεστ είναι 14, 17 και 15. Τι βαθμό πρέπει να πάρει στο τέταρτο τεστ ώστε ο μέσος όρος να είναι τουλάχιστον 16; (Μέγιστος βαθμός 20.) ★★★
- 11 Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι x , $x+3$ και 10. Για ποιες τιμές του x υπάρχει το τρίγωνο; (Κάθε πλευρά πρέπει να είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο.) ★★★

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο · ΕΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ > ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ



Επανάληψη 2ου Κεφαλαίου

Όλο το κεφάλαιο με μια ματιά

Εξισώσεις 1ου βαθμού

- Βήματα: παρονομαστές → παρενθέσεις → χωρισμός → αναγωγή → διαίρεση
- $\alpha x = \beta$: $\alpha \neq 0$ μία λύση· $0x = \beta \neq 0$ αδύνατη· $0x = 0$ ταυτότητα
- $|x| = \alpha > 0 \iff x = \pm \alpha$

Εξισώσεις 2ου βαθμού

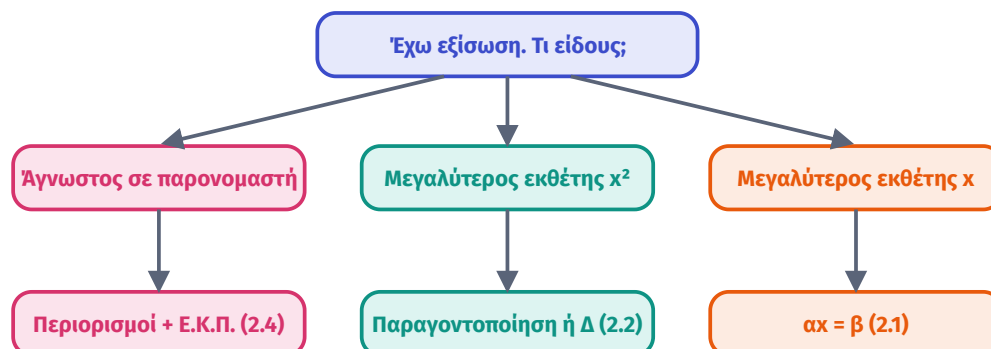
- $\alpha\beta = 0 \iff \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$
- $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- $\Delta > 0$: 2 λύσεις, $\Delta = 0$: διπλή, $\Delta < 0$: αδύνατη
- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$

Κλασματικές εξισώσεις

- Περιορισμοί **πριν** λύσω
- Πολλαπλασιάζω με το Ε.Κ.Π. **κάθε** όρο
- Απορρίπτω λύσεις που μηδενίζουν παρονομαστή

Ανισώσεις

- Με αρνητικό αριθμό: **αλλάζει η φορά**
- $<, >$: κενός κύκλος· $\leq, \geq$: γεμάτος
- Κοινές λύσεις: κοινό τμήμα στον άξονα



Δέντρο απόφασης: ποια μέθοδο χρησιμοποιώ;

Τα πιο συχνά λάθη του κεφαλαίου

✗ Συχνό λάθος · Έλεγξε τον εαυτό σου

✗ $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ ✓ $x = \pm 3$

✗ $x^2 = 5x \Rightarrow x = 5$ (διαίρεση με x) ✓ $x(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 5$

✗ $\Delta = -4^2 - \dots$ για $\beta = -4$ ✓ $\Delta = (-4)^2 - \dots = 16 - \dots$

✗ Κρατάω τη λύση $x = 2$ ενώ ο περιορισμός ήταν $x \neq 2$ ✓ Την απορρίπτω

✗ $-3x < 9 \Rightarrow x < -3$ ✓ $x > -3$

✗ Απάντηση «πλευρά -5 cm» ✓ Απορρίπτω τις μη αποδεκτές λύσεις

Συνέχισε στο mathgreece.com

Θέλεις να εμπεδώσεις καλύτερα τη θεωρία; Δες τα σχετικά βίντεο στο mathgreece.com και στο κανάλι **MATHGREECE** στο YouTube — ένα ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

🎯 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

1 Να λύσεις: $\frac{3x-1}{4} - \frac{x+1}{6} = \frac{x}{3}$. ★★☆☆

2 Να λύσεις: α) $2x^2 - 50 = 0$ β) $x^2 + 3x = 0$ γ) $x^2 - x - 6 = 0$ δ) $2x^2 - 3x + 4 = 0$. ★★★☆

3 Να λύσεις: $(x-1)^2 + (x+2)^2 = 17$. ★★★☆

4 Να λύσεις: $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}$. ★★★☆

5 Να λύσεις τις ανισώσεις και να βρεις τις κοινές λύσεις: $\frac{x-1}{2} \leq x+1$ και $3-2x > x-6$. ★★★☆

6 Να παραγοντοποιήσεις το $3x^2 - 7x + 2$ και να απλοποιήσεις το κλάσμα $\frac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 - 4}$. ★★★★★

7 Ένα ορθογώνιο έχει διαγώνιο 10 cm και περίμετρο 28 cm. Να βρεις τις διαστάσεις του. ★★★★★

8 Να βρεις για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $x^2 - 4x + \lambda - 1 = 0$ έχει δύο άνισες λύσεις. ★★★★★



9

Η τιμή εισιτηρίου μιας εκδρομής ήταν x €. Μια ομάδα πλήρωσε συνολικά 600 €. Αν το εισιτήριο ήταν 5 € φθηνότερο, θα πήγαιναν με τα ίδια χρήματα 6 άτομα περισσότερα. Πόσο κόστιζε το εισιτήριο;

Κεφάλαιο 3ο

Συστήματα γραμμικών εξισώσεων



Πώς βρίσκουμε δύο αγνώστους ταυτόχρονα; Θα δούμε ότι κάθε **γραμμική εξίσωση** παριστάνεται με μια **ευθεία** και ότι η λύση ενός **συστήματος** είναι το σημείο τομής δύο ευθειών. Θα μάθουμε τη **γραφική** επίλυση και τις δύο **αλγεβρικές** μεθόδους: την **αντικατάσταση** και τους **αντίθετους συντελεστές**.

- 3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης
- 3.2 Γραμμικό σύστημα και γραφική επίλυσή του
- 3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος
- ★ Επανάληψη κεφαλαίου

Για κάθε μάθημα αυτού του κεφαλαίου θα βρεις **βιντεομαθήματα, σημειώσεις, κουίζ και επιπλέον ασκήσεις** στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι είναι **γραμμική εξίσωση** με δύο αγνώστους $ax + by = \gamma$,
- ότι οι λύσεις της είναι **ζεύγη** αριθμών (x, y) και είναι **άπειρες**,
- ότι η γραφική της παράσταση είναι **ευθεία**,
- να σχεδιάζεις γρήγορα την ευθεία με τα **σημεία τομής με τους άξονες**,
- τις ειδικές περιπτώσεις: **οριζόντια** ($y = \kappa$) και **κατακόρυφη** ($x = \kappa$) ευθεία.

Η γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους

Ας υποθέσουμε ότι σε ένα κυλικείο ένα κουλούρι κοστίζει 1 € και ένας χυμός 2 €. Με πόσους τρόπους μπορεί κάποιος να ξοδέψει ακριβώς 8 €; Αν x τα κουλούρια και y οι χυμοί:

$$x + 2y = 8.$$

Αυτή είναι μια εξίσωση με **δύο** αγνώστους. Το ζεύγος $(2, 3)$ είναι λύση, γιατί $2 + 2 \cdot 3 = 8$. Το ίδιο και τα $(0, 4)$, $(4, 2)$, $(6, 1)$, $(8, 0)$.

📖 Ορισμός · Γραμμική εξίσωση

Κάθε εξίσωση της μορφής

$$ax + by = \gamma,$$

όπου α, β, γ αριθμοί και οι α, β **δεν είναι και οι δύο μηδέν**, λέγεται **γραμμική εξίσωση** με δύο αγνώστους. **Λύση** της είναι κάθε **ζεύγος** (x_0, y_0) που την επαληθεύει.

⚠️ Η σειρά στο ζεύγος μετράει!

Το ζεύγος $(x, y) = (2, 3)$ σημαίνει $x = 2$ και $y = 3$. Το $(3, 2)$ είναι **διαφορετικό** ζεύγος: για την $x + 2y = 8$ δίνει $3 + 4 = 7 \neq 8$, άρα **δεν** είναι λύση.

✏️ Παράδειγμα 1 · Έλεγχος λύσης και εύρεση λύσεων

Δίνεται η εξίσωση $3x - y = 5$. α) Είναι λύση τα ζεύγη $(2, 1)$ και $(1, 2)$; β) Να βρεθούν τρεις λύσεις της.

ΛΥΣΗ

α) $(2, 1)$: $3 \cdot 2 - 1 = 5$ ✓, είναι λύση. $(1, 2)$: $3 - 2 = 1 \neq 5$, δεν είναι.

β) Λύνουμε ως προς y : $y = 3x - 5$. Δίνουμε **όποια τιμή θέλουμε** στο x και βρίσκουμε το y :

x	0	1	3
$y = 3x - 5$	-5	-2	4

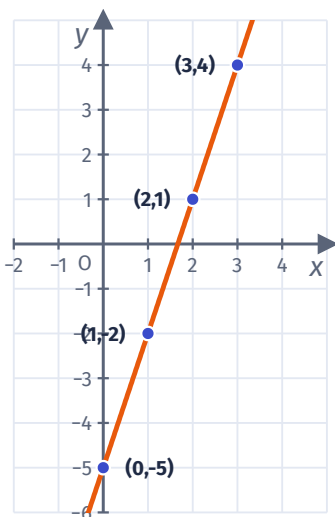
Λύσεις: $(0, -5)$, $(1, -2)$, $(3, 4)$. Επειδή μπορούμε να διαλέξουμε **άπειρες** τιμές για το x , η εξίσωση έχει **άπειρες** λύσεις.

Η γραφική παράσταση είναι ευθεία

Αν παραστήσουμε κάθε λύση (x, y) ως σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, όλα τα σημεία βρίσκονται **πάνω σε μια ευθεία**.

★ Γραφική παράσταση γραμμικής εξίσωσης

Η γραφική παράσταση της εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$ είναι **ευθεία**. Κάθε σημείο της ευθείας είναι λύση και κάθε λύση είναι σημείο της ευθείας. Για να τη σχεδιάσουμε αρκούν **δύο σημεία**.



Η ευθεία $3x - y = 5$ περνάει από όλα τα σημεία-λύσεις

✓ Ο γρηγορότερος τρόπος σχεδίασης

Βρίσκουμε τα σημεία όπου η ευθεία **τέμνει τους άξονες**:

- **Με τον άξονα y' :** βάζουμε $x = 0$ και βρίσκουμε y .
- **Με τον άξονα x' :** βάζουμε $y = 0$ και βρίσκουμε x .

Ενώνουμε τα δύο σημεία — τελειώσαμε!

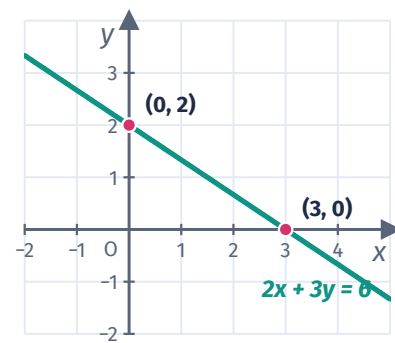
✏ Παράδειγμα 2 · Σχεδίαση με τα σημεία τομής με τους άξονες

Να σχεδιαστεί η ευθεία $2x + 3y = 6$.

ΛΥΣΗ

- Για $x = 0$: $3y = 6 \iff y = 2$. Σημείο $(0, 2)$.
- Για $y = 0$: $2x = 6 \iff x = 3$. Σημείο $(3, 0)$.

Η ευθεία που περνάει από τα $(0, 2)$ και $(3, 0)$ είναι η γραφική παράσταση.



✎ Παράδειγμα 3 · Σημείο πάνω σε ευθεία

Να βρεθεί ο αριθμός κ ώστε το σημείο $A(2, \kappa)$ να ανήκει στην ευθεία $5x - 2y = 4$.

ΛΥΣΗ

Ένα σημείο ανήκει στην ευθεία όταν οι συντεταγμένες του **επαληθεύουν** την εξίσωση:

$$5 \cdot 2 - 2\kappa = 4 \iff -2\kappa = -6 \iff \kappa = 3.$$

► Η μορφή $y = \lambda x + \beta$

Αν $\beta \neq 0$, μπορούμε να λύσουμε την $\alpha x + \beta y = \gamma$ ως προς y και να τη γράψουμε στη μορφή $y = \lambda x + \kappa$ που γνωρίζεις από τη Β' Γυμνασίου. Ο αριθμός λ είναι η **κλίση** της ευθείας, ενώ ο κ είναι η **τεταγμένη** του σημείου τομής με τον άξονα $y'y$.

Για παράδειγμα: $2x + 3y = 6 \iff 3y = -2x + 6 \iff y = -\frac{2}{3}x + 2$. Κλίση $-\frac{2}{3}$, τέμνει τον $y'y$ στο 2.

Ειδικές περιπτώσεις

Αν $\alpha = 0$: οριζόντια ευθεία

Η εξίσωση γίνεται $\beta y = \gamma$, δηλαδή $y = \frac{\gamma}{\beta}$. Π.χ.

$$0x + 2y = 6 \iff y = 3.$$

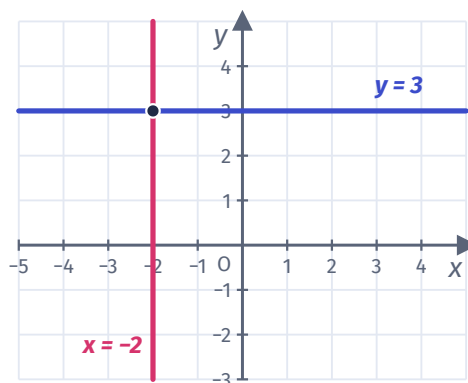
Όλα τα σημεία έχουν **τεταγμένη 3**, όποιο κι αν είναι το x : η ευθεία είναι **παράλληλη στον $x'x$** .

Αν $\beta = 0$: κατακόρυφη ευθεία

Η εξίσωση γίνεται $\alpha x = \gamma$, δηλαδή $x = \frac{\gamma}{\alpha}$. Π.χ.

$$4x + 0y = -8 \iff x = -2.$$

Όλα τα σημεία έχουν **τετμημένη -2**: η ευθεία είναι **παράλληλη στον $y'y$** .



Οι ευθείες $y = 3$ (οριζόντια) και $x = -2$ (κατακόρυφη)

⚠ Οι ίδιοι οι άξονες

Ο άξονας x' έχει εξίσωση $y = 0$ και ο άξονας y' έχει εξίσωση $x = 0$.

✗ Συχνό λάθος · Μπερδεύουμε τις $x = \kappa$ και $y = \kappa$

✗ «Η $x = 4$ είναι οριζόντια ευθεία.»

✓ Η $x = 4$ είναι **κατακόρυφη**: όλα τα σημεία της έχουν $x = 4$, π.χ. $(4, 0)$, $(4, 1)$, $(4, -3)$, που βρίσκονται το ένα πάνω από το άλλο.

✍ Παράδειγμα 4 · Εξίσωση με παράμετρο

Για ποια τιμή του λ η εξίσωση $(\lambda - 3)x + 2y = 5$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα x' ;

ΛΥΣΗ

Για να είναι οριζόντια πρέπει ο συντελεστής του x να είναι μηδέν: $\lambda - 3 = 0 \iff \lambda = 3$. Τότε $2y = 5 \iff y = \frac{5}{2}$.

✍ Παράδειγμα 5 · Εφαρμογή: πρόβλημα με άπειρες λύσεις

Σε ένα πάρκινγκ υπάρχουν αυτοκίνητα και μηχανές, με συνολικά 40 ρόδες. Να γραφτεί μια εξίσωση που συνδέει τα αυτοκίνητα x και τις μηχανές y και να βρεθούν όλες οι δυνατές λύσεις με $x \geq 6$.

ΛΥΣΗ

$4x + 2y = 40 \iff 2x + y = 20 \iff y = 20 - 2x$. Οι x, y πρέπει να είναι φυσικοί:

x	6	7	8	9	10
y	8	6	4	2	0

Εδώ, λόγω του νοήματος, από τις άπειρες λύσεις της εξίσωσης κρατάμε μόνο τις «φυσικές».

**Συνέχισε στο mathgreece.com**

Για περισσότερη εξάσκηση: στο **mathgreece.com** θα βρεις βίντεο, κουίζ, παιχνίδια γνώσεων και επιπλέον φυλλάδια ασκήσεων — **όλα δωρεάν**.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

Σύνοψη μαθήματος

- Γραμμική εξίσωση: $\alpha x + \beta y = \gamma$ (α, β όχι και οι δύο 0). Λύσεις: **άπειρα ζεύγη** (x, y) .
- Γραφική παράσταση: **ευθεία**. Σχεδίαση: σημεία τομής με άξονες ($x = 0$ και $y = 0$).
- $A(x_0, y_0)$ ανήκει στην ευθεία $\iff$ οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση.
- $y = \kappa$: **οριζόντια** · $x = \kappa$: **κατακόρυφη**.

Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Ποια από τα ζεύγη $(1, 1)$, $(4, 0)$, $(0, -2)$, $(2, -1)$ είναι λύσεις της εξίσωσης $x - 2y = 4$; ★ ★ ★
- 2 Να βρεις τέσσερις λύσεις της εξίσωσης $2x + y = 7$ και να τις παραστήσεις στο επίπεδο. ★ ★ ★
- 3 Να σχεδιάσεις τις ευθείες: α) $x + y = 4$ β) $3x - 2y = 6$ γ) $x - 3y = 0$. ★ ★ ★
- 4 Να σχεδιάσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες $y = -1$, $x = 3$ και $x + y = 2$. Τι σχήμα σχηματίζουν; ★ ★ ★
- 5 Να βρεις τον κ ώστε η ευθεία $\kappa x + 3y = 12$ να διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$. ★ ★ ★
- 6 Να γράψεις τις εξισώσεις $4x - 2y = 6$ και $x + 5y = 0$ στη μορφή $y = \lambda x + \kappa$ και να βρεις την κλίση της καθεμιάς. ★ ★ ★
- 7 Να βρεις τα σημεία τομής της ευθείας $5x - 4y = 20$ με τους άξονες και το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει με αυτούς. ★ ★ ★
- 8 Για ποιες τιμές του μ η εξίσωση $(\mu^2 - 4)x + (\mu - 2)y = 3$ α) παριστάνει κατακόρυφη ευθεία, β) δεν παριστάνει ευθεία; ★ ★ ★
- 9 Ένα θέατρο πουλάει εισιτήρια των 10 € και των 15 €. Μια βραδιά οι εισπράξεις ήταν 300 €. Να γράψεις τη σχετική γραμμική εξίσωση και να βρεις όλους τους δυνατούς συνδυασμούς εισιτηρίων. ★ ★ ★

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο · ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ > ΜΑΘΗΜΑ 3.2

3.2

Γραμμικό σύστημα και γραφική επίλυσή του

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι είναι **γραμμικό σύστημα** δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους,
- τι σημαίνει **λύση** του συστήματος,
- να λύνεις ένα σύστημα **γραφικά**, βρίσκοντας το **σημείο τομής** δύο ευθειών,
- τις τρεις περιπτώσεις: **μία λύση, αδύνατο, αόριστο** (άπειρες λύσεις).

Η έννοια του γραμμικού συστήματος

Στο κυλικείο του προηγούμενου μαθήματος, η Μαρία ξόδεψε 8 € αγοράζοντας κουλούρια (1 € το ένα) και χυμούς (2 € ο ένας). Αν μάθουμε επιπλέον ότι αγόρασε **συνολικά 5** προϊόντα, τότε:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Ψάχνουμε ένα ζεύγος (x, y) που να επαληθεύει **ταυτόχρονα** και τις δύο εξισώσεις. Με δοκιμές βρίσκουμε το $(2, 3)$: $2 + 6 = 8 \checkmark$ και $2 + 3 = 5 \checkmark$.

☒ Ορισμός · Γραμμικό σύστημα 2×2

Δύο γραμμικές εξισώσεις με τους ίδιους δύο αγνώστους, για τις οποίες ζητάμε τις **κοινές** λύσεις, αποτελούν ένα **γραμμικό σύστημα** δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

Λύση του συστήματος είναι κάθε ζεύγος (x_0, y_0) που επαληθεύει **και τις δύο** εξισώσεις. **Επίλυση** είναι η εύρεση όλων των λύσεων.

✎ Παράδειγμα 1 · Έλεγχος λύσης συστήματος

Είναι το ζεύγος $(3, -1)$ λύση του συστήματος $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$;

ΛΥΣΗ

1η εξίσωση: $2 \cdot 3 + (-1) = 5 \checkmark$. 2η εξίσωση: $3 - 3(-1) = 6 \checkmark$. Επαληθεύει **και τις δύο**, άρα **είναι** λύση.

⚠ Και τις δύο!

Αν ένα ζεύγος επαληθεύει μόνο τη μία εξίσωση, **δεν** είναι λύση του συστήματος. Π.χ. το $(5, 0)$ επαληθεύει την $2x + y = 10$ αλλά όχι την $x - y = 1$.

Γραφική επίλυση

Κάθε εξίσωση του συστήματος παριστάνεται με μια **ευθεία**. Ένα σημείο που ανήκει **και στις δύο** ευθείες είναι το **σημείο τομής** τους. Άρα:

★ Γραφική επίλυση

Η λύση του συστήματος είναι οι **συντεταγμένες του σημείου τομής** των δύο ευθειών.

☰ Βήματα γραφικής επίλυσης

- 1 Σχεδιάζω την **πρώτη** ευθεία (βρίσκω δύο σημεία της).
- 2 Σχεδιάζω τη **δεύτερη** ευθεία στο **ίδιο** σύστημα αξόνων.
- 3 Βρίσκω το **σημείο τομής** και διαβάζω τις συντεταγμένες του.
- 4 **Επαληθεύω** στις δύο εξισώσεις (το σχήμα μπορεί να μην είναι απόλυτα ακριβές).

✏ Παράδειγμα 2 · Γραφική επίλυση

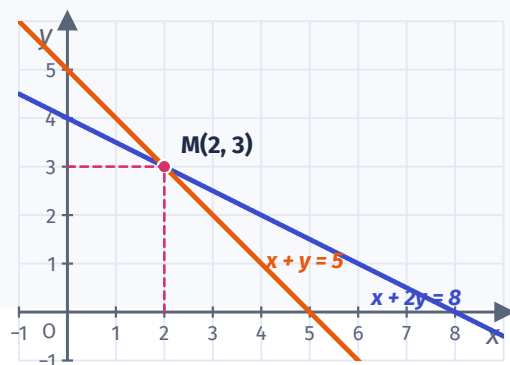
Να λυθεί γραφικά το σύστημα $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x + y = 5 \end{cases}$.

ΛΥΣΗ

- Ευθεία $\varepsilon_1: x + 2y = 8$. Σημεία $(0, 4)$ και $(8, 0)$.
- Ευθεία $\varepsilon_2: x + y = 5$. Σημεία $(0, 5)$ και $(5, 0)$.

Οι ευθείες τέμνονται στο $M(2, 3)$. **Επαλήθευση:** $2 + 6 = 8 \checkmark$, $2 + 3 = 5 \checkmark$.

Το σύστημα έχει **μοναδική λύση** $(x, y) = (2, 3)$: η Μαρία αγόρασε **2 κουλούρια** και **3 χυμούς**.

**Οι τρεις περιπτώσεις**

Δύο ευθείες στο επίπεδο μπορεί να **τέμνονται**, να είναι **παράλληλες** ή να **ταυτίζονται**. Ανάλογα, ένα σύστημα μπορεί να έχει:



Τεμνόμενες – Παράλληλες – Ταυτιζόμενες ευθείες

Τεμνόμενες ευθείες

Ένα κοινό σημείο.

Το σύστημα έχει **μοναδική λύση**.**Παράλληλες ευθείες**

Κανένα κοινό σημείο.

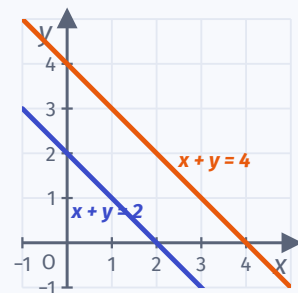
Το σύστημα είναι **αδύνατο** (δεν έχει λύση).**Ταυτιζόμενες ευθείες**

Όλα τα σημεία κοινά.

Το σύστημα είναι **αόριστο** (έχει **άπειρες** λύσεις).**Παράδειγμα 3 · Αδύνατο σύστημα**Να λυθεί γραφικά το σύστημα $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$.**ΛΥΣΗ**

Η δεύτερη εξίσωση, αν διαιρεθεί με 2, γίνεται $x + y = 4$. Οι ευθείες $x + y = 2$ και $x + y = 4$ είναι **παράλληλες** (έχουν την ίδια κλίση -1 αλλά τέμνουν τον y' σε διαφορετικά σημεία, 2 και 4).

Δεν έχουν κοινό σημείο, άρα το σύστημα είναι **αδύνατο**. Είναι και λογικό: δύο αριθμοί δεν μπορούν να έχουν άθροισμα ταυτόχρονα 2 και 4!

**Παράδειγμα 4 · Αόριστο σύστημα**Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases}$.**ΛΥΣΗ**

Αν διαιρέσουμε τη 2η εξίσωση με 3 προκύπτει $x - 2y = 1$, δηλαδή **η ίδια** με την πρώτη. Οι ευθείες **ταυτίζονται**, άρα το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**: όλα τα ζεύγη της μορφής $(1 + 2y, y)$, π.χ. $(1, 0)$, $(3, 1)$, $(5, 2)$, $(-1, -1)$.

✓ Πώς καταλαβαίνω την περίπτωση χωρίς σχήμα

Γράψε και τις δύο εξισώσεις στη μορφή $y = \lambda x + \kappa$:

- διαφορετικές κλίσεις $\rightarrow$ τέμνονται $\rightarrow$ μία λύση,
- ίδια κλίση, διαφορετικό $\kappa \rightarrow$ παράλληλες $\rightarrow$ αδύνατο,
- ίδια κλίση και ίδιο $\kappa \rightarrow$ ταυτίζονται $\rightarrow$ αόριστο.

✗ Συχνό λάθος · «Αδύνατο» σημαίνει ότι δεν το έλυσα

✗ «Το σύστημα είναι αδύνατο γιατί δεν βρήκα το σημείο τομής στο σχήμα.»

✓ Αδύνατο είναι **μόνο** όταν οι ευθείες είναι **παράλληλες**. Αν τέμνονται έξω από το «παράθυρο» του σχήματος, απλώς πρέπει να μεγαλώσουμε το σχήμα — ή να λύσουμε αλγεβρικά (επόμενο μάθημα).

⚠ Τα όρια της γραφικής μεθόδου

Η γραφική επίλυση είναι **εποπτική** αλλά όχι πάντα **ακριβής**. Αν η λύση είναι π.χ. $\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{9}\right)$, δύσκολα θα τη «διαβάσουμε» σωστά από το σχήμα. Γι' αυτό χρειαζόμαστε και τις **αλγεβρικές** μεθόδους του επόμενου μαθήματος.

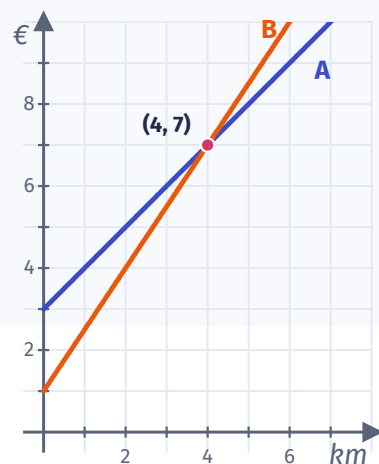
✏ Παράδειγμα 5 · Ερμηνεία προβλήματος με σχήμα

Δύο εταιρείες ταξί χρεώνουν: η Α 3 € σταθερά και 1 € ανά km, η Β 1 € σταθερά και 1,5 € ανά km. Να βρεθεί γραφικά για ποια απόσταση οι χρεώσεις είναι ίσες.

ΛΥΣΗ

Αν x τα km και y η χρέωση: Α: $y = 3 + x$, Β: $y = 1 + 1,5x$.

Οι ευθείες τέμνονται στο $(4, 7)$: για **4 km** και οι δύο χρεώνουν **7 €**. Από το σχήμα φαίνεται επιπλέον ότι για μικρές αποστάσεις συμφέρει η Β (η ευθεία της είναι χαμηλότερα), ενώ για μεγαλύτερες από 4 km συμφέρει η Α.



Συνέχισε στο mathgreece.com



Θέλεις να εμπεδώσεις καλύτερα τη θεωρία; Δες τα σχετικά βίντεο στο mathgreece.com και στο κανάλι **MATHGREECE** στο YouTube — ένα ολοκληρωμένο **δωρεάν φροντιστήριο**.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

 Σύνοψη μαθήματος

- Λύση συστήματος: ζεύγος που επαληθεύει **και τις δύο** εξισώσεις.
- Γραφικά: λύση = **σημείο τομής** των δύο ευθειών.
- Τεμνόμενες → **μία λύση**· παράλληλες → **αδύνατο**· ταυτιζόμενες → **αόριστο**.
- Η γραφική μέθοδος δίνει εικόνα αλλά όχι πάντα ακρίβεια· **επαληθεύουμε** πάντα.

 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

★ ★ ★

- 1 Να εξετάσεις ποιο από τα ζεύγη $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$ είναι λύση του συστήματος $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$.

★ ★ ★

- 2 Να λύσεις γραφικά το σύστημα $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$.

★ ★ ★

- 3 Να λύσεις γραφικά το σύστημα $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$.

★ ★ ★

- 4 Χωρίς να σχεδιάσεις, να βρεις αν τα παρακάτω συστήματα έχουν μία λύση, καμία ή άπειρες: α) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + 6y = 5 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

★ ★ ★

- 5 Να λύσεις γραφικά το σύστημα $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$. Τι παρατηρείς;

★ ★ ★

- 6 Για ποια τιμή του κ το σύστημα $\begin{cases} y = \kappa x + 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$ είναι αδύνατο;

★ ★ ★

- 7 Να σχεδιάσεις τις ευθείες $x + y = 4$, $x - y = 0$ και $y = 0$ και να βρεις το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν.

★ ★ ★

- 8 Ένα γυμναστήριο χρεώνει 20 € εγγραφή και 5 € ανά επίσκεψη, ενώ ένα δεύτερο 40 € εγγραφή και 3 € ανά επίσκεψη. Να βρεις γραφικά μετά από πόσες επισκέψεις το δεύτερο γίνεται πιο συμφέρον.

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο · ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ > ΜΑΘΗΜΑ 3.3

3.3

Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τη μέθοδο της **αντικατάστασης**,
- τη μέθοδο των **αντίθετων συντελεστών**,
- να αναγνωρίζεις αλγεβρικά πότε ένα σύστημα είναι **αδύνατο** ή **αόριστο**,
- να λύνεις **προβλήματα** με συστήματα.

Η γραφική μέθοδος μάς έδωσε την «εικόνα» του συστήματος. Τώρα θα μάθουμε δύο **αλγεβρικές** μεθόδους, που δίνουν **ακριβή** λύση σε κάθε περίπτωση. Η κεντρική ιδέα και στις δύο είναι η ίδια: **απαλείφουμε τον έναν άγνωστο**, ώστε να μείνει μια εξίσωση με **έναν** άγνωστο, που ξέρουμε να λύνουμε.

Μέθοδος της αντικατάστασης

☰ Μέθοδος της αντικατάστασης

- 1 **Λύνω** μία από τις εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο (προτιμώ αυτόν που έχει συντελεστή 1 ή -1).
- 2 **Αντικαθιστώ** την έκφραση που βρήκα στην **άλλη** εξίσωση.
- 3 Λύνω την εξίσωση με **έναν** άγνωστο που προκύπτει.
- 4 Βρίσκω τον **άλλο** άγνωστο από τη σχέση του βήματος 1.
- 5 Γράφω τη λύση ως ζεύγος και **επαληθεύω**.

✏ Παράδειγμα 1 · Αντικατάσταση

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Βήμα 1. Από την 1η (ο y έχει συντελεστή 1): $y = 11 - 3x$.

Βήμα 2. Αντικαθιστούμε στη 2η:

$$2x - 3(11 - 3x) = 0.$$

Βήμα 3. $2x - 33 + 9x = 0 \iff 11x = 33 \iff x = 3$.

Βήμα 4. $y = 11 - 3 \cdot 3 = 2$.

Βήμα 5. Λύση $(x, y) = (3, 2)$. Επαλήθευση: $9 + 2 = 11 \checkmark, 6 - 6 = 0 \checkmark$.

✗ Συχνό λάθος · Αντικατάσταση στην ίδια εξίσωση

✗ Λύνω την 1η ως προς y και αντικαθιστώ **ξανά στην 1η**: προκύπτει $0 = 0$ και «δεν βγαίνει τίποτα».

✓ Αντικαθιστώ πάντα στην **άλλη** εξίσωση.

✗ Συχνό λάθος · Ξεχνάμε την παρένθεση

✗ $2x - 3 \cdot 11 - 3x = 0$ ✓ $2x - 3(11 - 3x) = 2x - 33 + 9x$

Η έκφραση που αντικαθιστούμε μπαίνει **πάντα σε παρένθεση**.

Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών**≡ Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών**

- 1 Διαλέγω τον άγνωστο που θα απαλείψω.
- 2 Πολλαπλασιάζω τις εξισώσεις με κατάλληλους αριθμούς, ώστε οι συντελεστές αυτού του αγνώστου να γίνουν **αντίθετοι**.
- 3 Προσθέτω κατά μέλη: ο άγνωστος «φεύγει».
- 4 Λύνω την εξίσωση με τον άλλο άγνωστο.
- 5 Αντικαθιστώ σε μία από τις αρχικές για να βρω τον πρώτο. **Επαληθεύω**.

✍ Παράδειγμα 2 · Αντίθετοι συντελεστές – απλή περίπτωση

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Οι συντελεστές του y είναι **ήδη αντίθετοι** (2 και -2). Προσθέτουμε κατά μέλη:

$$(x + 3x) + (2y - 2y) = 8 + 4 \iff 4x = 12 \iff x = 3.$$

Από την 1η: $3 + 2y = 8 \iff y = \frac{5}{2}$. Λύση: $\left(3, \frac{5}{2}\right)$.

✍ Παράδειγμα 3 · Αντίθετοι συντελεστές με πολλαπλασιασμό

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Απαλείφουμε το y : το Ε.Κ.Π. των 3 και 2 είναι 6. Πολλαπλασιάζουμε την 1η με 2 και τη 2η με 3:

$$\begin{cases} 8x + 6y = 10 \\ 9x - 6y = 24 \end{cases}$$

Προσθέτουμε: $17x = 34 \iff x = 2$.

Από την 1η αρχική: $8 + 3y = 5 \iff y = -1$. Λύση: $(2, -1)$. Επαλήθευση: $6 + 2 = 8 \checkmark$.

$8x$	~~$+ 6y$~~	$= 10$
$9x$	~~$- 6y$~~	$= 24$
$17x$	0	$= 34$

Η ιδέα της απαλοιφής: προσθέτοντας κατά μέλη, οι αντίθετοι όροι «εξαφανίζονται»

✓ Ποια μέθοδο να διαλέξω;

- Αν κάποιος άγνωστος έχει συντελεστή 1 ή $-1 \rightarrow$ **αντικατάσταση**.
- Αν οι συντελεστές είναι «μεγάλοι» ή ήδη αντίθετοι/ίσοι $\rightarrow$ **αντίθετοι συντελεστές**.
- Αν οι εξισώσεις έχουν **κλάσματα ή παρενθέσεις**, πρώτα τις «καθαρίζουμε» και τις φέρνουμε στη μορφή $ax + by = \gamma$.

✎ Παράδειγμα 4 · Σύστημα με κλάσματα

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4 \\ \frac{x-1}{3} - \frac{y}{2} = -1 \end{cases}$.

ΛΥΣΗ

Απαλείφουμε παρονομαστές: 1η επί 6, 2η επί 6:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 24 \\ 2(x-1) - 3y = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 2y = 24 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

1η επί 3, 2η επί 2: $9x + 6y = 72$ και $4x - 6y = -8$. Προσθέτουμε: $13x = 64 \iff x = \frac{64}{13}$.

Από $3x + 2y = 24$: $2y = 24 - \frac{192}{13} = \frac{120}{13} \iff y = \frac{60}{13}$.

Λύση $\left(\frac{64}{13}, \frac{60}{13}\right)$ – τέτοια λύση δύσκολα θα τη βρίσκαμε γραφικά!

Αδύνατα και αόριστα συστήματα, αλγεβρικά

Όταν, κατά την επίλυση, **φεύγουν και οι δύο άγνωστοι**, καταλήγουμε σε ισότητα χωρίς άγνωστο:

Καταλήγω σε ψευδή ισότητα

π.χ. $0 = 7 \rightarrow$ το σύστημα είναι **αδύνατο**
(παράλληλες ευθείες).

Καταλήγω σε αληθή ισότητα

π.χ. $0 = 0 \rightarrow$ το σύστημα είναι **αόριστο**
(ταυτιζόμενες ευθείες, άπειρες λύσεις).

Παράδειγμα 5 · Αλγεβρική αναγνώριση

Να λυθούν: α) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = 1 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$.

ΛΥΣΗ

α) 1η επί 2 και πρόσθεση: $(4x - 2y) + (-4x + 2y) = 6 + 1 \iff 0 = 7$. **Αδύνατο**.

β) 1η επί -2 και πρόσθεση: $0 = 0$. **Αόριστο**, με λύσεις τα ζεύγη $(2 - 3y, y)$ για κάθε y .

Προβλήματα με συστήματα

Όταν ένα πρόβλημα έχει **δύο** άγνωστες ποσότητες, συχνά είναι πιο εύκολο να ονομάσουμε x και y και να στήσουμε **δύο** εξισώσεις, μία για κάθε πληροφορία.

Παράδειγμα 6 · Πρόβλημα με εισιτήρια

Σε μια παράσταση κόπηκαν 250 εισιτήρια, κανονικά προς 12 € και μειωμένα προς 8 €. Οι εισπράξεις ήταν 2600 €. Πόσα κανονικά και πόσα μειωμένα εισιτήρια κόπηκαν;

ΛΥΣΗ

Έστω x τα κανονικά και y τα μειωμένα.

$$\begin{cases} x + y = 250 & (\text{πλήθος}) \\ 12x + 8y = 2600 & (\text{χρήματα}) \end{cases}$$

Από την 1η: $y = 250 - x$. Αντικαθιστούμε: $12x + 8(250 - x) = 2600 \iff 4x = 600 \iff x = 150$,
άρα $y = 100$.

Κόπηκαν **150 κανονικά** και **100 μειωμένα** εισιτήρια.

Παράδειγμα 7 · Πρόβλημα με ψηφία

Ένας διψήφιος αριθμός έχει άθροισμα ψηφίων 11. Αν αντιστρέψουμε τα ψηφία του, ο αριθμός μεγαλώνει κατά 27. Ποιος είναι ο αριθμός;

ΛΥΣΗ

Έστω x το ψηφίο των δεκάδων και y των μονάδων. Ο αριθμός είναι $10x + y$ και ο αντίστροφος $10y + x$.

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ (10y + x) - (10x + y) = 27 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 11 \\ -9x + 9y = 27 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 11 \\ -x + y = 3 \end{cases}$$

Προσθέτουμε: $2y = 14 \iff y = 7$ και $x = 4$. Ο αριθμός είναι **47** (πράγματι $74 - 47 = 27 \checkmark$).

✎ Παράδειγμα 8 · Πρόβλημα μιγμάτων

Θέλουμε να φτιάξουμε 10 kg καφέ που να κοστίζει 13 €/kg, αναμιγνύοντας μια ποικιλία των 10 €/kg και μια των 15 €/kg. Πόσα κιλά παίρνουμε από την καθεμιά;

ΛΥΣΗ

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 10x + 15y = 13 \cdot 10 = 130 \end{cases}$$

Από την 1η $x = 10 - y$: $100 - 10y + 15y = 130 \iff 5y = 30 \iff y = 6, x = 4$.

Παίρνουμε **4 kg** των 10 € και **6 kg** των 15 €.

Συνέχισε στο mathgreece.com



Κόλλησες κάπου; Στο mathgreece.com υπάρχει ολόκληρο το μάθημα με βιντεομαθήματα, σημειώσεις και ασκήσεις — ένα πλήρες **δωρεάν φροντιστήριο** μαθηματικών.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

☰ Σύνοψη μαθήματος

- **Αντικατάσταση:** λύνω τη μία ως προς έναν άγνωστο → αντικαθιστώ στην **άλλη**.
- **Αντίθετοι συντελεστές:** πολλαπλασιάζω ώστε ένας άγνωστος να έχει αντίθετους συντελεστές → προσθέτω.
- Καταλήγω σε $0 = \alpha \neq 0 \rightarrow$ **αδύνατο**· σε $0 = 0 \rightarrow$ **αόριστο**.
- Πάντα **επαλήθευση** και στις δύο εξισώσεις.

🎯 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

★ ★ ★

1 Να λύσεις με αντικατάσταση: α) $\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 9 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$

★ ★ ★

2 Να λύσεις με αντίθετους συντελεστές: α) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 5x - 3y = 9 \end{cases}$

★ ★ ★

3 Να λύσεις: $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 9 \end{cases}$

★★★

4 Να λύσεις:
$$\begin{cases} 2(x-1) + y = 5 \\ 3x - (y+4) = 1 \end{cases}$$

★★★

5 Να λύσεις:
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 3 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

★★★

6 Να εξετάσεις αν τα συστήματα είναι αδύνατα ή αόριστα: α) $\begin{cases} 3x - 6y = 9 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 10 \end{cases}$

★★★

7 Δύο αριθμοί έχουν άθροισμα 42 και διαφορά 8. Ποιοι είναι;

★★★

8 Σε ένα αγρόκτημα υπάρχουν κότες και κουνέλια, συνολικά 35 κεφάλια και 94 πόδια. Πόσα είναι τα ζώα κάθε είδους;

★★★

9 Να βρεις τα α, β ώστε η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ να διέρχεται από τα σημεία A(1, 5) και B(3, 9).

★★★

10 Αν ο αριθμητής ενός κλάσματος αυξηθεί κατά 2, το κλάσμα γίνεται $\frac{1}{2}$. Αν ο παρονομαστής μειωθεί κατά 1, γίνεται $\frac{1}{3}$. Ποιο είναι το κλάσμα;

★★★

11 Ένα σκάφος διανύει 36 km με το ρεύμα σε 2 ώρες και την ίδια απόσταση αντίθετα στο ρεύμα σε 3 ώρες. Να βρεις την ταχύτητα του σκάφους σε ακίνητο νερό και την ταχύτητα του ρεύματος.

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο · ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ > ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ



Επανάληψη 3ου Κεφαλαίου

Όλο το κεφάλαιο με μια ματιά

Γραμμική εξίσωση

- $\alpha x + \beta y = \gamma$: άπειρες λύσεις-ζεύγη
- Γραφική παράσταση: **ευθεία**
- Σημεία τομής: $x = 0 \rightarrow y'y$, $y = 0 \rightarrow x'x$
- $y = \kappa$ οριζόντια, $x = \kappa$ κατακόρυφη

Σύστημα 2×2

- Λύση: κοινό σημείο των δύο ευθειών
- Τέμνονται: 1 λύση· παράλληλες: αδύνατο· ταυτίζονται: αόριστο
- Αλγεβρικά: **αντικατάσταση** ή **αντίθετοι συντελεστές**
- $0 = \alpha \neq 0$ αδύνατο, $0 = 0$ αόριστο

τεμνόμενες

 $x = \dots, y = \dots$

παράλληλες

 $0 = 5$ (ψευδής)

ταυτιζόμενες

 $0 = 0$ (αληθής)

Οι τρεις «φυσιογνωμίες» ενός συστήματος και η αλγεβρική τους «υπογραφή»

✗ Συχνό λάθος · Συχνά λάθη του κεφαλαίου

- ✗ Γράφω τη λύση ως (y, x) αντί για (x, y) ✓ Πρώτα το x , μετά το y
- ✗ Αντικαθιστώ στην ίδια εξίσωση ✓ Αντικαθιστώ στην **άλλη**
- ✗ Η $x = 2$ είναι οριζόντια ✓ Είναι **κατακόρυφη**
- ✗ Βρίσκω x και ξεχνάω να βρω το y ✓ Η λύση είναι **ζεύγος**

Συνέχισε στο **mathgreece.com**

Θέλεις να εμπεδώσεις καλύτερα τη θεωρία; Δες τα σχετικά βίντεο στο **mathgreece.com** και στο κανάλι **MATHGREECE** στο YouTube — ένα ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

★ ★ ★

- 1 Να σχεδιάσεις την ευθεία $3x + 4y = 12$ και να βρεις το μήκος του τμήματος που ορίζουν τα σημεία τομής της με τους άξονες.

★ ★ ★

- 2 Να λύσεις γραφικά και αλγεβρικά το σύστημα $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$.

★ ★ ★

- 3 Να λύσεις: $\begin{cases} 7x - 3y = 1 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$.

★ ★ ★

- 4 Να λύσεις: $\begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{x-y}{3} + 2 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$.

★ ★ ★

- 5 Για ποια τιμή του λ το σύστημα $\begin{cases} 2x + \lambda y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις;

★ ★ ★

- 6 Σε ένα κατάστημα, 3 τετράδια και 2 στυλό κοστίζουν 8 €, ενώ 2 τετράδια και 5 στυλό κοστίζουν 9 €. Πόσο κοστίζει το καθένα;

★ ★ ★

- 7 Οι γωνίες $\hat{x}$ και $\hat{y}$ είναι παραπληρωματικές και η μία είναι κατά 40° μεγαλύτερη από το τριπλάσιο της άλλης. Να τις βρεις.

★ ★ ★

- 8 Να βρεις τα α, β ώστε το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = 7 \\ \beta x - \alpha y = -4 \end{cases}$ να έχει λύση το $(1, 2)$.

Κεφάλαιο 4ο

Συναρτήσεις

Γνωρίζουμε μια νέα, πολύ σημαντική καμπύλη: την **παραβολή**. Μελετάμε πρώτα τη συνάρτηση $y = ax^2$ και τις ιδιότητές της (κορυφή, άξονας συμμετρίας, μέγιστο – ελάχιστο) και μετά τη γενική μορφή $y = ax^2 + bx + \gamma$, τα σημεία τομής της με τους άξονες και τη σύνδεσή της με τις εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

- 4.1 Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a \neq 0$
- 4.2 Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$
- ★ Επανάληψη κεφαλαίου

Για κάθε μάθημα αυτού του κεφαλαίου θα βρεις **βιντεομαθήματα, σημειώσεις, κουίζ και επιπλέον ασκήσεις** στο mathgreece.com — ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο · ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ > ΜΑΘΗΜΑ 4.1

4.1 Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a \neq 0$

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- να κατασκευάζεις **πίνακα τιμών** και να σχεδιάζεις τη συνάρτηση $y = ax^2$,
- τι είναι η **παραβολή**, η **κορυφή** και ο **άξονας συμμετρίας** της,
- πώς το **πρόσημο** και το **μέγεθος** του a επηρεάζουν τη μορφή της,
- τότε η συνάρτηση έχει **ελάχιστο** και τότε **μέγιστο**.

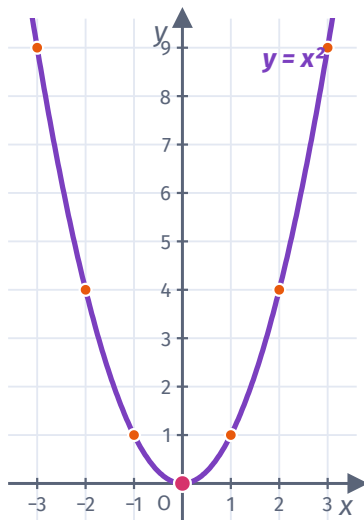
Θυμόμαστε: τι είναι συνάρτηση

Μια **συνάρτηση** είναι ένας «κανόνας» που σε **κάθε** τιμή του x αντιστοιχίζει **μία μόνο** τιμή του y . Στη Β' Γυμνασίου γνώρισες τις συναρτήσεις $y = ax$ και $y = ax + b$, που έχουν γραφική παράσταση **ευθεία**. Τώρα γνωρίζουμε μια συνάρτηση με εντελώς διαφορετική, **καμπύλη** γραφική παράσταση.

Η συνάρτηση $y = x^2$

Ας φτιάξουμε έναν πίνακα τιμών:

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9



Η παραβολή $y = x^2$

Ενώνοντας τα σημεία με μια **ομαλή καμπύλη** (όχι με ευθύγραμμα τμήματα!) παίρνουμε το σχήμα αριστερά. Η καμπύλη αυτή λέγεται **παραβολή**.

Παρατηρούμε:

- Είναι $y = x^2 \geq 0$: η καμπύλη βρίσκεται **πάνω** από τον άξονα $x'x$ (τον αγγίζει μόνο στο O).
- Αντίθετοι αριθμοί δίνουν **ίδιο** y : $(-2)^2 = 2^2 = 4$. Άρα η καμπύλη είναι **συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$** .
- Η **μικρότερη** τιμή του y είναι 0, για $x = 0$.

Η συνάρτηση $y = ax^2$, $a \neq 0$

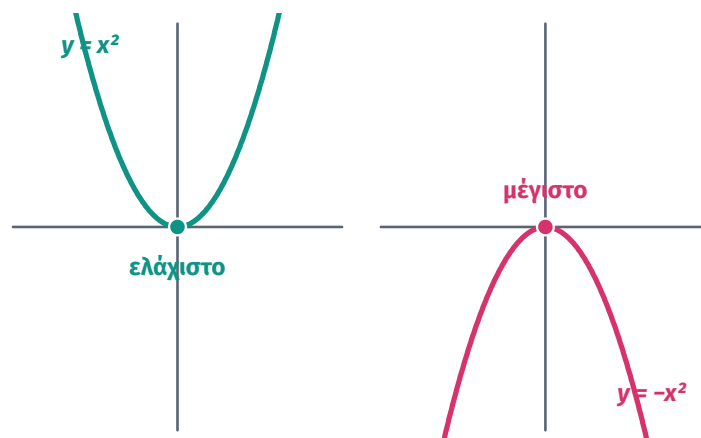
★ Ιδιότητες της $y = ax^2$

Η γραφική παράσταση της $y = ax^2$ ($a \neq 0$) είναι **παραβολή** με:

- **κορυφή** την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$,
- **άξονα συμμετρίας** τον άξονα $y'y$.

Αν $a > 0$: η παραβολή είναι «ανοιχτή προς τα πάνω», βρίσκεται πάνω από τον $x'x$ και η συνάρτηση έχει **ελάχιστη** τιμή $y = 0$ για $x = 0$.

Αν $a < 0$: η παραβολή είναι «ανοιχτή προς τα κάτω», βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ και η συνάρτηση έχει **μέγιστη** τιμή $y = 0$ για $x = 0$.

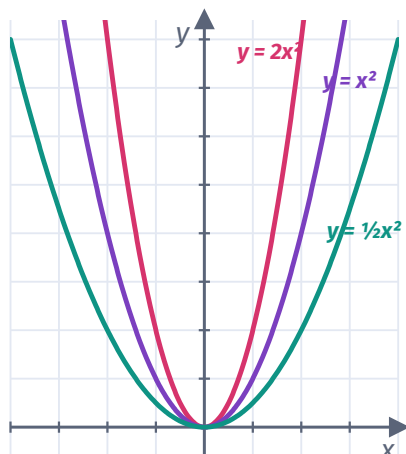


Αριστερά $a > 0$ (ελάχιστο), δεξιά $a < 0$ (μέγιστο)

✓ Χαμόγελο ή λύπη;

Ένας εύκολος τρόπος να θυμάσαι: $a > 0 \rightarrow$ «**χαμόγελο**» ☺ (ανοιχτή προς τα πάνω), $a < 0 \rightarrow$ «**λύπη**» ☹ (ανοιχτή προς τα κάτω).

► Πώς επηρεάζει το μέγεθος του a



Για $x = 2$: $y = 2 \cdot 4 = 8$, $y = 4$, $y = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

Για το ίδιο x , μεγαλύτερο $|a|$ δίνει μεγαλύτερο $|y|$. Άρα:

- όσο **μεγαλύτερο** το $|a|$, τόσο **στενότερη** η παραβολή (πλησιάζει τον $y'y$),
- όσο **μικρότερο** το $|a|$, τόσο **ανοιχτότερη** (πλησιάζει τον $x'x$).

Οι παραβολές $y = ax^2$ και $y = -ax^2$ είναι **συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$** .

Όσο μεγαλώνει το $|a|$, τόσο πιο «κλειστή» γίνεται η παραβολή

✗ Συχνό λάθος · Η παραβολή δεν είναι «γωνία»

✗ Ενώνω τα σημεία του πίνακα με ευθύγραμμα τμήματα και η κορυφή γίνεται «μύτη» (σχήμα V).

✓ Η παραβολή είναι **ομαλή καμπύλη**, «στρογγυλεμένη» στην κορυφή. Αν χρειάζεται, υπολογίζω και ενδιάμεσα σημεία, π.χ. για $x = \pm \frac{1}{2}$.

✗ Συχνό λάθος · Το πρόσημο του x^2

✗ Για $y = x^2$ και $x = -3$: $y = -9$.

✓ $y = (-3)^2 = 9$. Στη $y = ax^2$ το πρόσημο του y εξαρτάται **μόνο από το a** , όχι από το x .

Εφαρμογές

✍ Παράδειγμα 1 · Εύρεση του a από σημείο

Η παραβολή $y = ax^2$ διέρχεται από το σημείο $A(2, -12)$. α) Να βρεθεί ο a . β) Να εξεταστεί αν διέρχεται από το $B(-1, -3)$. γ) Έχει μέγιστο ή ελάχιστο;

ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες του A επαληθεύουν την εξίσωση: $-12 = a \cdot 2^2 \iff a = -3$. Άρα $y = -3x^2$.

β) Για $x = -1$: $y = -3(-1)^2 = -3$. Ναι, το B ανήκει στην παραβολή.

γ) $a = -3 < 0$: η συνάρτηση έχει **μέγιστο** $y = 0$ για $x = 0$.

✍ Παράδειγμα 2 · Συμμετρικά σημεία

Το σημείο $M(3, 4,5)$ ανήκει στην παραβολή $y = ax^2$. Να βρεθεί ο a και ένα ακόμη σημείο της με $y = 4,5$.

ΛΥΣΗ

$4,5 = 9a \iff a = \frac{1}{2}$. Λόγω συμμετρίας ως προς τον y' , και το $M'(-3, 4,5)$ ανήκει στην παραβολή.

✍ Παράδειγμα 3 · Τομή παραβολής και ευθείας

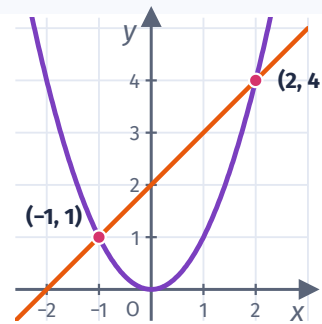
Να βρεθούν τα κοινά σημεία της παραβολής $y = x^2$ και της ευθείας $y = x + 2$.

ΛΥΣΗ

Στα κοινά σημεία τα y είναι ίσα:

$$x^2 = x + 2 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff (x - 2)(x + 1) = 0.$$

Για $x = 2$: $y = 4$. Για $x = -1$: $y = 1$. Κοινά σημεία: $(2, 4)$ και $(-1, 1)$.



✎ Παράδειγμα 4 · Εφαρμογή από τη Φυσική

Η απόσταση που διανύει ένα σώμα σε ελεύθερη πτώση δίνεται (περίπου) από τον τύπο $s = 5t^2$ (s σε m, t σε s). α) Πόσο πέφτει σε 3 s; β) Σε πόσο χρόνο πέφτει 125 m; γ) Αν διπλασιαστεί ο χρόνος, τι γίνεται η απόσταση;

ΛΥΣΗ

α) $s = 5 \cdot 9 = 45$ m. β) $5t^2 = 125 \iff t^2 = 25 \iff t = 5$ s ($t > 0$).

γ) $5(2t)^2 = 4 \cdot 5t^2$: η απόσταση **τετραπλασιάζεται**. Αυτό είναι χαρακτηριστικό της $y = \alpha x^2$: όταν το x γίνεται κ φορές μεγαλύτερο, το y γίνεται κ^2 φορές μεγαλύτερο.

✎ Παράδειγμα 5 · Εμβαδόν κύκλου

Το εμβαδόν κύκλου ακτίνας ρ είναι $E = \pi\rho^2$. Είναι συνάρτηση της μορφής $y = \alpha x^2$; Τι γραφική παράσταση έχει;

ΛΥΣΗ

Ναι, με $x = \rho$, $y = E$ και $\alpha = \pi > 0$. Επειδή όμως η ακτίνα είναι θετική, η γραφική παράσταση είναι **μόνο το δεξί μισό** της παραβολής ($\rho > 0$).

Συνέχισε στο mathgreece.com



Κόλλησες κάπου; Στο mathgreece.com υπάρχει ολόκληρο το μάθημα με βιντεομαθήματα, σημειώσεις και ασκήσεις — ένα πλήρες **δωρεάν φροντιστήριο** μαθηματικών.

mathgreece.com
δωρεάν φροντιστήριο

☰ Σύνοψη μαθήματος

- $y = \alpha x^2$ ($\alpha \neq 0$): **παραβολή** με κορυφή $O(0, 0)$ και άξονα συμμετρίας τον y'/y .
- $\alpha > 0$: ανοιχτή προς τα πάνω, **ελάχιστο** 0 στο $x = 0$. $\alpha < 0$: προς τα κάτω, **μέγιστο** 0.
- Μεγάλο $|\alpha| \rightarrow$ στενή· μικρό $|\alpha| \rightarrow$ ανοιχτή. $y = \alpha x^2$ και $y = -\alpha x^2$ συμμετρικές ως προς x'/x .
- Σημείο ανήκει $\iff$ επαληθεύει την εξίσωση. Τομή με ευθεία: εξισώνω τα y .

Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να συμπληρώσεις τον πίνακα τιμών της $y = -2x^2$ για $x = -2, -1, 0, 1, 2$ και να τη σχεδιάσεις. ★★☆☆
- 2 Ποιες από τις συναρτήσεις $y = 3x^2, y = -\frac{1}{4}x^2, y = 0,5x^2, y = -x^2$ έχουν μέγιστο και ποιες ελάχιστο; Ποια είναι η πιο «ανοιχτή» παραβολή; ★★☆☆
- 3 Η παραβολή $y = ax^2$ διέρχεται από το $(-3, 18)$. Να βρεις τον a και να εξετάσεις αν διέρχεται από τα $(1, 2)$ και $(2, -8)$. ★★★
- 4 Να βρεις τα κοινά σημεία της παραβολής $y = 2x^2$ με την ευθεία $y = 8$. ★★★
- 5 Να βρεις τα κοινά σημεία της παραβολής $y = -x^2$ με την ευθεία $y = 2x - 3$. ★★★
- 6 Να δείξεις ότι η ευθεία $y = 4x - 4$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την παραβολή $y = x^2$. (Λέμε ότι **εφάπτεται**.) ★★★
- 7 Ένα τετράγωνο έχει πλευρά x cm. Να εκφράσεις το εμβαδόν του E ως συνάρτηση του x , να σχεδιάσεις τη γραφική παράσταση και να βρεις την πλευρά όταν $E = 20$ cm². ★★★
- 8 Το σημείο $A(\kappa, \kappa + 2)$ ανήκει στην παραβολή $y = x^2$. Να βρεις τον κ . ★★★

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο · ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ > ΜΑΘΗΜΑ 4.2

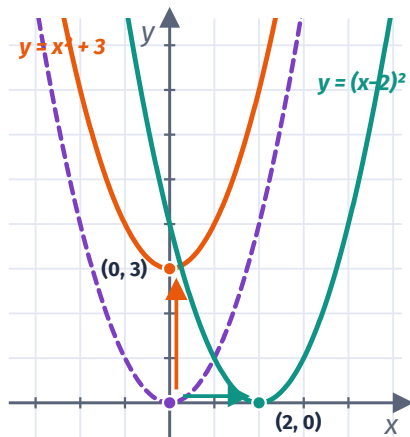
4.2 Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- ότι η γραφική παράσταση της $y = ax^2 + bx + \gamma$ είναι **παραβολή**, ίδια με της $y = ax^2$ αλλά **μετατοπισμένη**,
- να βρίσκεις την **κορυφή** $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ και τον **άξονα συμμετρίας**,
- να βρίσκεις τα **σημεία τομής με τους άξονες** και να σχεδιάζεις την παραβολή,
- να βρίσκεις **μέγιστο ή ελάχιστο** και να λύνεις προβλήματα «βελτιστοποίησης».

Από την $y = ax^2$ στην $y = ax^2 + bx + \gamma$

Ας συγκρίνουμε τις συναρτήσεις $y = x^2$, $y = x^2 + 3$ και $y = (x - 2)^2$.



Μετατοπίσεις της $y = x^2$

- Η $y = x^2 + 3$ είναι η $y = x^2$ **ανεβασμένη** κατά 3 μονάδες: κορυφή $(0, 3)$.
- Η $y = (x - 2)^2$ είναι η $y = x^2$ **μετατοπισμένη δεξιά** κατά 2: κορυφή $(2, 0)$.

Γενικά, η $y = a(x - p)^2 + q$ είναι η παραβολή $y = ax^2$ μετατοπισμένη ώστε η κορυφή να έρθει στο σημείο (p, q) . Το **σχήμα** της (άνοιγμα, φορά) **δεν αλλάζει** — εξαρτάται μόνο από το a .

Με **συμπλήρωση τετραγώνου** κάθε $y = ax^2 + bx + \gamma$ γράφεται στη μορφή $y = a(x - p)^2 + q$. Για παράδειγμα:

$$y = x^2 - 4x + 1 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 1 = (x - 2)^2 - 3.$$

Άρα η $y = x^2 - 4x + 1$ είναι η $y = x^2$ με κορυφή στο $(2, -3)$.

Η κορυφή και ο άξονας συμμετρίας

★ Η παραβολή $y = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$

Η γραφική παράσταση είναι **παραβολή** «ίδια» με την $y = ax^2$, με:

$$\text{κορυφή } K \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha} \right), \quad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma,$$

και **άξονα συμμετρίας** την κατακόρυφη ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

- Αν $\alpha > 0$: η συνάρτηση έχει **ελάχιστο** $-\frac{\Delta}{4\alpha}$ για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.
- Αν $\alpha < 0$: η συνάρτηση έχει **μέγιστο** $-\frac{\Delta}{4\alpha}$ για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

✓ Πιο εύκολα για το y της κορυφής

Δεν χρειάζεται να θυμάσαι το $-\frac{\Delta}{4\alpha}$. Βρίσκεις πρώτα το $x_K = -\frac{\beta}{2\alpha}$ και μετά το **αντικαθιστάς** στη συνάρτηση: $y_K = ax_K^2 + bx_K + \gamma$.

Σημεία τομής με τους άξονες

Με τον άξονα $y'y$

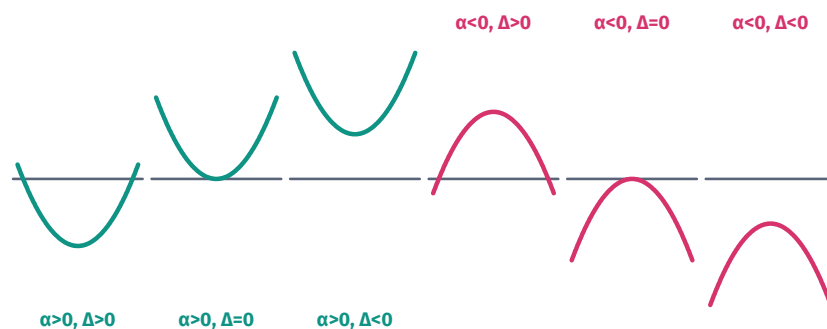
Βάζουμε $x = 0$: $y = \gamma$.

Η παραβολή τέμνει **πάντα** τον $y'y$ στο σημείο $(0, \gamma)$.

Με τον άξονα $x'x$

Βάζουμε $y = 0$: λύνουμε την $ax^2 + bx + \gamma = 0$.

- $\Delta > 0$: **δύο** σημεία τομής.
- $\Delta = 0$: η παραβολή **εφάπτεται** στον $x'x$ (στην κορυφή).
- $\Delta < 0$: **κανένα** κοινό σημείο.



Οι έξι δυνατές θέσεις της παραβολής ως προς τον άξονα $x'x$

≡ Σχεδίαση της παραβολής $y = ax^2 + bx + \gamma$

- 1 Φορά:** από το πρόσημο του a .
- 2 Κορυφή:** $x_K = -\frac{\beta}{2\alpha}$, y_K με αντικατάσταση. Ο άξονας συμμετρίας είναι $x = x_K$.
- 3 Τομή με $y'y$:** το $(0, \gamma)$ – και το **συμμετρικό** του ως προς τον άξονα.
- 4 Τομή με $x'x$:** οι ρίζες της $ax^2 + bx + \gamma = 0$ (αν υπάρχουν).
- 5** Αν χρειάζεται, **μερικά ακόμη σημεία** από πίνακα τιμών. Σχεδιάζω ομαλή καμπύλη.

✎ Παράδειγμα 1 · Πλήρης μελέτη και σχεδίαση

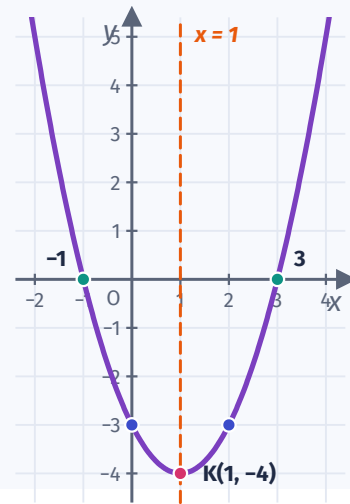
Να μελετηθεί και να σχεδιαστεί η συνάρτηση $y = x^2 - 2x - 3$.

ΛΥΣΗ

- 1.** $\alpha = 1 > 0$: ανοιχτή προς τα **πάνω**.
- 2. Κορυφή:** $x_K = -\frac{-2}{2} = 1$, $y_K = 1 - 2 - 3 = -4$. Άρα $K(1, -4)$, άξονας $x = 1$.
- 3. Τομή με $y'y$:** $(0, -3)$. Συμμετρικό ως προς $x = 1$: $(2, -3)$.
- 4. Τομή με $x'x$:** $x^2 - 2x - 3 = 0 \iff (x - 3)(x + 1) = 0$: σημεία $(3, 0)$ και $(-1, 0)$.

Ελάχιστο: $y = -4$ για $x = 1$.

Παρατηρούμε ότι οι ρίζες -1 και 3 είναι **συμμετρικές** ως προς τον άξονα: το 1 είναι ακριβώς στη μέση τους!



✎ Παράδειγμα 2 · Παραβολή με μέγιστο

Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της $y = -2x^2 + 8x - 5$ και τα σημεία τομής με τον άξονα $y'y$.

ΛΥΣΗ

$\alpha = -2 < 0$, άρα έχει **μέγιστο**. $x_K = -\frac{8}{2(-2)} = 2$, $y_K = -2 \cdot 4 + 16 - 5 = 3$.

Μέγιστη τιμή 3 για $x = 2$. Τομή με $y'y$: $(0, -5)$.

⊗ Συχνό λάθος · Το πρόσημο στο $-\beta/(2\alpha)$

✗ Για $y = x^2 + 6x + 5$: $x_K = \frac{6}{2} = 3$.

✓ $x_K = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{6}{2} = -3$. Και για $y = x^2 - 6x + 5$: $x_K = -\frac{-6}{2} = +3$.

✗ Συχνό λάθος · Μέγιστο ή ελάχιστο;

✗ «Η $y = -x^2 + 4x$ έχει ελάχιστο στην κορυφή.»✓ Αφού $a = -1 < 0$, η παραβολή «κοιτάει» προς τα κάτω και η κορυφή είναι το **ψηλότερο** σημείο: **μέγιστο**.

Σύνδεση με τις εξισώσεις 2ου βαθμού

Οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ είναι οι **τετμημένες** των σημείων όπου η παραβολή $y = ax^2 + bx + \gamma$ τέμνει τον x' . Έτσι η διακρίνουσα αποκτά **γεωμετρική σημασία**: μας λέει **πόσες φορές** η παραβολή «συναντά» τον άξονα.

✍ Παράδειγμα 3 · Εύρεση παραβολής από στοιχεία

Η παραβολή $y = x^2 + \beta x + \gamma$ έχει κορυφή το σημείο $K(-1, 4)$. Να βρεθούν τα β, γ .

ΛΥΣΗ

$$x_K = -\frac{\beta}{2} = -1 \iff \beta = 2. \text{ Τότε } y_K = (-1)^2 + 2(-1) + \gamma = 4 \iff -1 + \gamma = 4 \iff \gamma = 5.$$

Άρα $y = x^2 + 2x + 5$. (Επειδή $\Delta = 4 - 20 < 0$, δεν τέμνει τον x' — λογικό, αφού η κορυφή είναι πάνω από τον άξονα και η παραβολή ανοίγει προς τα πάνω.)

Προβλήματα μεγίστου – ελαχίστου

✍ Παράδειγμα 4 · Μέγιστο εμβαδόν

Με 40 m συρματοπλέγμα θέλουμε να περιφράξουμε ορθογώνιο κήπο. Ποιες διαστάσεις δίνουν το **μεγαλύτερο** εμβαδόν;

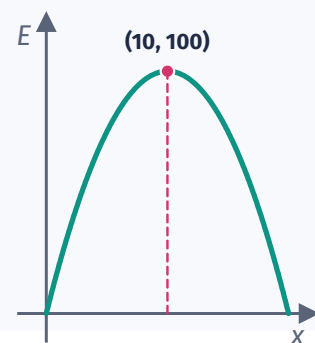
ΛΥΣΗ

Αν x m το μήκος, η περίμετρος δίνει πλάτος $20 - x$. Το εμβαδόν είναι

$$E = x(20 - x) = -x^2 + 20x, \quad 0 < x < 20.$$

Είναι παραβολή με $a = -1 < 0$, άρα έχει **μέγιστο** στην κορυφή: $x_K = -\frac{20}{-2} = 10$, $E_{\max} = 10 \cdot 10 = 100 \text{ m}^2$.

Το μεγαλύτερο εμβαδόν το δίνει το **τετράγωνο** 10×10 !



 Παράδειγμα 5 · Μέγιστο ύψος

Μια μπάλα κλωσιέται και το ύψος της δίνεται από τη συνάρτηση $h = -5t^2 + 20t + 1$ (h σε m, t σε s). Ποιο είναι το μέγιστο ύψος και πότε το φτάνει;

ΛΥΣΗ

$$t_K = -\frac{20}{2(-5)} = 2 \text{ s}, \quad h_{\max} = -20 + 40 + 1 = 21 \text{ m}.$$

Συνέχισε στο mathgreece.com

Κόλλησες κάπου; Στο **mathgreece.com** υπάρχει ολόκληρο το μάθημα με βιντεομαθήματα, σημειώσεις και ασκήσεις — ένα πλήρες **δωρεάν φροντιστήριο** μαθηματικών.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

 Σύνοψη μαθήματος

- $y = ax^2 + bx + \gamma$: **παραβολή** ίδια με την $y = ax^2$, μετατοπισμένη.
- Κορυφή: $x_K = -\frac{\beta}{2\alpha}$, $y_K = -\frac{\Delta}{4\alpha}$ (ή με αντικατάσταση). Άξονας: $x = x_K$.
- $\alpha > 0$: ελάχιστο στην κορυφή· $\alpha < 0$: μέγιστο.
- Τομή με y' : $(0, \gamma)$. Τομή με x' : ρίζες της $ax^2 + bx + \gamma = 0$ (πλήθος από το Δ).

 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να βρεις την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας των παραβολών: α) $y = x^2 - 6x + 5$ β) $y = -x^2 + 4x$ γ) $y = 2x^2 + 4x - 1$. ★ ★ ★
- 2 Να βρεις τα σημεία τομής με τους άξονες της $y = x^2 + x - 6$. ★ ★ ★
- 3 Να μελετήσεις και να σχεδιάσεις τη συνάρτηση $y = -x^2 + 2x + 3$. ★ ★ ★
- 4 Να βρεις αν οι παραβολές τέμνουν, εφάπτονται ή δεν συναντούν τον x' : α) $y = x^2 - 4x + 4$ β) $y = 2x^2 + x + 3$ γ) $y = -x^2 + 5x - 4$. ★ ★ ★
- 5 Να γράψεις την $y = x^2 + 8x + 10$ στη μορφή $y = (x - p)^2 + q$ και να βρεις την κορυφή. ★ ★ ★
- 6 Η παραβολή $y = ax^2 + 4x + \gamma$ διέρχεται από τα σημεία $(0, 1)$ και $(1, 3)$. Να βρεις τα α, γ και την κορυφή. ★ ★ ★
- 7 Να βρεις δύο αριθμούς με άθροισμα 14 που έχουν το μεγαλύτερο δυνατό γινόμενο. ★ ★ ★



- 8 Ένας αγρότης έχει 60 m φράχτη και θέλει να περιφράξει ορθογώνιο χωράφι που η μία του πλευρά είναι ένα ποτάμι (εκεί δεν χρειάζεται φράχτη). Ποιες διαστάσεις δίνουν μέγιστο εμβαδόν;



- 9 Ένα θέατρο έχει 200 θέσεις και πουλάει όλα τα εισιτήρια στα 10 €. Για κάθε 1 € αύξηση της τιμής, πουλάει 10 εισιτήρια λιγότερα. Ποια τιμή μεγιστοποιεί τις εισπράξεις;

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο · ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ > ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ



Επανάληψη 4ου Κεφαλαίου

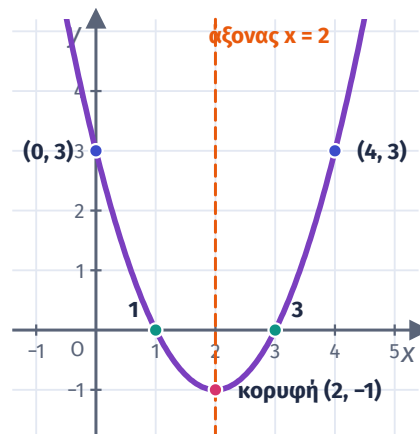
Όλο το κεφάλαιο με μια ματιά

☰ Η $y = ax^2$

- Παραβολή με κορυφή $O(0, 0)$, άξονας $y'y$
- $a > 0$: ☹ ελάχιστο $0 \cdot a < 0$: ☺ μέγιστο 0
- Μεγάλο $|a| \rightarrow$ στενή παραβολή

☰ Η $y = ax^2 + bx + \gamma$

- Κορυφή $K \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$, άξονας $x = -\frac{b}{2a}$
- Τομή $y'y$: $(0, \gamma)$ · τομή $x'x$: ρίζες (Δ)
- Μέγιστο/ελάχιστο στην κορυφή

Μια παραβολή «με όλα τα στοιχεία της»: $y = x^2 - 4x + 3$

✗ Συχνό λάθος · Συχνά λάθη του κεφαλαίου

✗ Ενώνω τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα ✓ Ομαλή καμπύλη

✗ $x_K = \frac{b}{2a}$ ✓ $x_K = -\frac{b}{2a}$ ✗ «Με $a < 0$ έχει ελάχιστο» ✓ Με $a < 0$ έχει **μέγιστο**✗ Η τομή με τον $y'y$ βρίσκεται λύνοντας $y = 0$ ✓ Βάζω $x = 0$ Συνέχισε στο mathgreece.com

Θέλεις να εμπεδώσεις καλύτερα τη θεωρία; Δες τα σχετικά βίντεο στο mathgreece.com και στο κανάλι **MATHGREECE** στο YouTube — ένα ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να βρεις τον α ώστε η παραβολή $y = \alpha x^2$ να διέρχεται από το $(2, 2)$, και να σχεδιάσεις τη γραφική της παράσταση. ★★ ★
- 2 Να μελετήσεις και να σχεδιάσεις την $y = x^2 + 4x + 3$. ★★ ★
- 3 Να βρεις τα κοινά σημεία των παραβολών $y = x^2$ και $y = -x^2 + 8$. ★★ ★
- 4 Για ποια τιμή του κ η παραβολή $y = x^2 - 6x + \kappa$ εφάπτεται στον άξονα $x'x$; ★★ ★
- 5 Η παραβολή $y = -x^2 + \beta x + \gamma$ έχει κορυφή $(2, 5)$. Να βρεις τα β, γ και τα σημεία τομής με τον $x'x$. ★★ ★
- 6 Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές με άθροισμα 12 cm. Ποιες είναι οι κάθετες πλευρές όταν το εμβαδόν γίνεται μέγιστο; ★★ ★

Κεφάλαιο 5ο Πιθανότητες



Μπορούμε να «μετρήσουμε» την τύχη; Ξεκινάμε από τα **σύνολα** και τις πράξεις τους (με διαγράμματα Venn), ορίζουμε τον **δειγματικό χώρο** και τα **ενδεχόμενα** ενός πειράματος τύχης και καταλήγουμε στον **κλασικό ορισμό της πιθανότητας** και στους βασικούς κανόνες λογισμού.

- 5.1 Σύνολα
- 5.2 Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα
- 5.3 Η έννοια της πιθανότητας
- ★ Επανάληψη κεφαλαίου

Για κάθε μάθημα αυτού του κεφαλαίου θα βρεις **βιντεομαθήματα, σημειώσεις, κουίζ και επιπλέον ασκήσεις** στο **mathgreece.com** — ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο · ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ > ΜΑΘΗΜΑ 5.1

5.1 Σύνολα

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι είναι **σύνολο** και πώς το γράφουμε (με **αναγραφή** και με **περιγραφή**),
- τα σύμβολα $\in, \notin, \subseteq, \emptyset$,
- τι είναι **βασικό σύνολο** και **διάγραμμα Venn**,
- τις πράξεις **ένωση**, **τομή** και **συμπλήρωμα**.

Η έννοια του συνόλου

📖 Ορισμός · Σύνολο

Σύνολο λέγεται μια συλλογή αντικειμένων που είναι **καλά ορισμένα** και **διακεκριμένα** μεταξύ τους. Τα αντικείμενα λέγονται **στοιχεία** του συνόλου.

- «Καλά ορισμένα» σημαίνει ότι για κάθε αντικείμενο μπορούμε να πούμε **με βεβαιότητα** αν ανήκει ή όχι στο σύνολο. Η «συλλογή των ψηλών μαθητών της τάξης» **δεν** είναι σύνολο (πόσο ψηλός είναι ο «ψηλός»);. Η «συλλογή των μαθητών με ύψος πάνω από 1,70 m» είναι.
- «Διακεκριμένα» σημαίνει ότι κάθε στοιχείο γράφεται **μία φορά**.

Τα σύνολα τα συμβολίζουμε με **κεφαλαία** γράμματα: $A, B, \Omega, \dots$

Συμβολισμός «ανήκει»

$x \in A$: το x **ανήκει** στο A (είναι στοιχείο του).

$x \notin A$: το x **δεν ανήκει** στο A .

Παράδειγμα

Αν $A = \{2, 4, 6, 8\}$:

$4 \in A, \quad 5 \notin A, \quad 10 \notin A.$

► Αναγραφή και περιγραφή

Ένα σύνολο μπορούμε να το γράψουμε με δύο τρόπους:

- **Με αναγραφή**: γράφουμε **όλα** τα στοιχεία του μέσα σε άγκιστρα. Π.χ. $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
- **Με περιγραφή**: γράφουμε την **ιδιότητα** που έχουν τα στοιχεία του. Π.χ. $A = \{x \mid x \text{ περιττός φυσικός μικρότερος του } 10\}$. Η κάθετη γραμμή $\mid$ διαβάζεται «τέτοια ώστε».

✏ Παράδειγμα 1 · Από περιγραφή σε αναγραφή

Να γραφούν με αναγραφή τα σύνολα: α) $B = \{x \mid x \text{ διαιρέτης του } 12\}$ β) $\Gamma = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 3\}$ γ) $\Delta = \{x \mid x^2 = 9\}$.

ΛΥΣΗ

α) $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. β) $\Gamma = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (το 3 δεν περιέχεται). γ) $\Delta = \{-3, 3\}$.

⚠ Η σειρά δεν μετράει, οι επαναλήψεις δεν επιτρέπονται

$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$: η σειρά των στοιχείων δεν παίζει ρόλο. Και το σύνολο των γραμμάτων της λέξης «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» είναι $\{Μ, Α, Θ, Η, Τ, Ι, Κ\}$ – κάθε γράμμα **μία** φορά.

► Ίσα σύνολα, υποσύνολο, κενό σύνολο

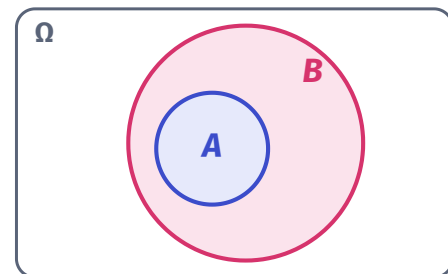
📖 Ορισμός · Υποσύνολο

Το A λέγεται **υποσύνολο** του B , και γράφουμε $A \subseteq B$, όταν **κάθε** στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B . Δύο σύνολα είναι **ίσα** ($A = B$) όταν έχουν **ακριβώς τα ίδια** στοιχεία, δηλαδή $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Π.χ. $\{2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, ενώ το $\{2, 5\}$ **δεν** είναι υποσύνολο του $\{1, 2, 3, 4\}$, γιατί $5 \notin \{1, 2, 3, 4\}$.

Κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του: $A \subseteq A$.

Το σύνολο που **δεν έχει κανένα στοιχείο** λέγεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται $\emptyset$ ή $\{\}$. Είναι υποσύνολο **κάθε** συνόλου.



$A \subseteq B$: το A βρίσκεται ολόκληρο «μέσα» στο B

✗ Συχνό λάθος · $\in$ ή $\subseteq$;

✗ $2 \subseteq \{1, 2, 3\}$ ✗ $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$

✓ $2 \in \{1, 2, 3\}$ (στοιχείο) ✓ $\{2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ (σύνολο)

Το $\in$ συνδέει **στοιχείο με σύνολο**, το $\subseteq$ συνδέει **σύνολο με σύνολο**.

✗ Συχνό λάθος · Το κενό σύνολο

✗ $\emptyset = \{0\}$ ✓ Το $\{0\}$ έχει **ένα** στοιχείο (τον αριθμό 0), ενώ το $\emptyset$ δεν έχει κανένα.

Βασικό σύνολο και διαγράμματα Venn

Όταν μελετάμε σύνολα, συνήθως όλα είναι υποσύνολα ενός «μεγάλου» συνόλου, που λέγεται **βασικό σύνολο** και συμβολίζεται Ω . Για παράδειγμα, αν μιλάμε για τους μαθητές ενός σχολείου, βασικό σύνολο είναι όλοι οι μαθητές του σχολείου.

Τα σύνολα τα παριστάνουμε εποπτικά με **διαγράμματα Venn**: το Ω με ένα ορθογώνιο και τα υποσύνολά του με κλειστές καμπύλες (συνήθως κύκλους) μέσα σε αυτό.

Πράξεις με σύνολα

Ένωση $A \cup B$

Τα στοιχεία που ανήκουν **σε ένα τουλάχιστον** από τα A, B .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

Τομή $A \cap B$

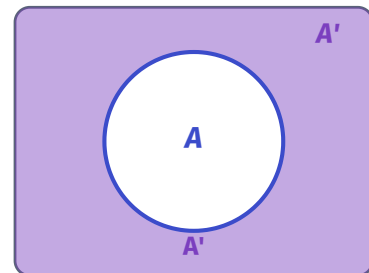
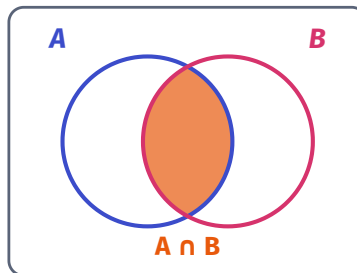
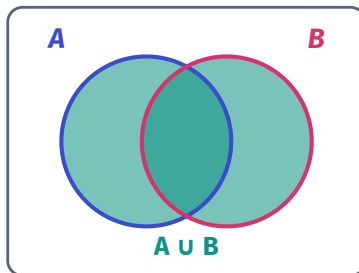
Τα στοιχεία που ανήκουν **και στα δύο**.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$$

Συμπλήρωμα A'

Τα στοιχεία του Ω που **δεν** ανήκουν στο A .

$$A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$



Ένωση (αριστερά), τομή (κέντρο), συμπλήρωμα (δεξιά) — η χρωματισμένη περιοχή

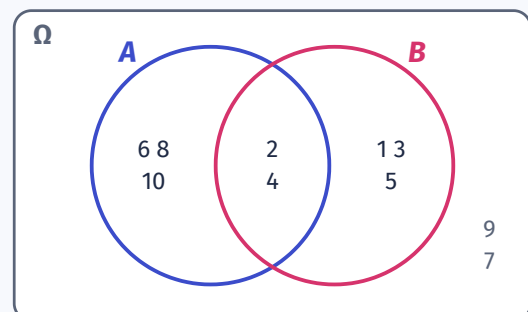
✎ Παράδειγμα 2 · Πράξεις με σύνολα

Δίνονται $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ (οι άρτιοι) και $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Να βρεθούν: $A \cup B$, $A \cap B$, A' , B' και να γίνει διάγραμμα Venn.

ΛΥΣΗ

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$ (όλα όσα είναι σε **ένα τουλάχιστον**).
- $A \cap B = \{2, 4\}$ (όσα είναι **και στα δύο**).
- $A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (οι περιττοί).
- $B' = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

Στο διάγραμμα, κάθε στοιχείο του Ω μπαίνει σε **μία μόνο** περιοχή. Τα 7 και 9 βρίσκονται **έξω** από τα A και B .



✓ Χρήσιμες παρατηρήσεις

- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.
- $A \cup A' = \Omega$ και $A \cap A' = \emptyset$.
- $(A')' = A$, $\Omega' = \emptyset$, $\emptyset' = \Omega$.
- Αν $A \cap B = \emptyset$, τα σύνολα λέγονται **ξένα μεταξύ τους** (δεν έχουν κοινά στοιχεία).

✗ **Συχνό λάθος · Στην ένωση γράφω δύο φορές τα κοινά**

✗ $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 2, 3, 4\}$

✓ $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ — κάθε στοιχείο **μία** φορά.

✍ **Παράδειγμα 3 · Πρόβλημα με διάγραμμα Venn**

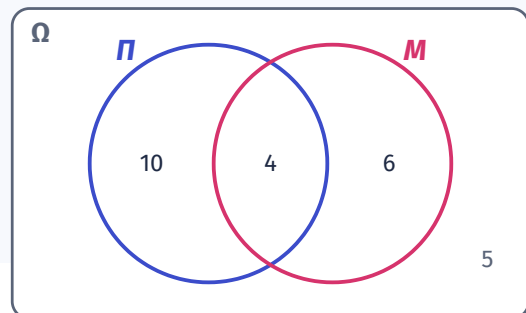
Σε μια τάξη 25 μαθητών, 14 παίζουν ποδόσφαιρο, 10 μπάσκετ και 4 παίζουν και τα δύο. Πόσοι μαθητές δεν παίζουν κανένα από τα δύο αθλήματα;

ΛΥΣΗ

Ξεκινάμε **από την τομή**: 4 μαθητές παίζουν και τα δύο.

- Μόνο ποδόσφαιρο: $14 - 4 = 10$.
- Μόνο μπάσκετ: $10 - 4 = 6$.
- Ένα τουλάχιστον άθλημα: $10 + 4 + 6 = 20$.

Άρα **κανένα** άθλημα δεν παίζουν $25 - 20 = 5$ μαθητές.



⚠ **Γιατί δεν κάνουμε απλώς $14 + 10$;**

Αν προσθέσουμε $14 + 10 = 24$, οι 4 μαθητές που παίζουν και τα δύο μετρήθηκαν **δύο φορές**. Το σωστό πλήθος της ένωσης είναι $14 + 10 - 4 = 20$.

Συνέχισε στο mathgreece.com



Κόλλησες κάπου; Στο mathgreece.com υπάρχει ολόκληρο το μάθημα με βιντεομαθήματα, σημειώσεις και ασκήσεις — ένα πλήρες **δωρεάν φροντιστήριο** μαθηματικών.

mathgreece.com
δωρεάν φροντιστήριο

☰ **Σύνοψη μαθήματος**

- Σύνολο: καλά ορισμένα, διακεκριμένα στοιχεία. Αναγραφή $\{ \dots \}$ ή περιγραφή $\{ x \mid \dots \}$.
- $\in$: στοιχείο-σύνολο · $\subseteq$: σύνολο-σύνολο. $\emptyset$: κενό, υποσύνολο κάθε συνόλου.
- $A \cup B$: σε **ένα τουλάχιστον** · $A \cap B$: **και στα δύο** · A' : **όχι** στο A .
- Σε προβλήματα με Venn ξεκινάμε **από την τομή**.

Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να γράψεις με αναγραφή: α) τα γράμματα της λέξης «ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ» β) $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$ γ) $\{x \mid x \text{ πρώτος αριθμός μικρότερος του } 20\}$. ★ ★ ★
- 2 Να γράψεις με περιγραφή τα σύνολα: α) $\{5, 10, 15, 20, \dots\}$ β) $\{-1, 0, 1\}$. ★ ★ ★
- 3 Αν $A = \{1, 3, 5\}$, να συμπληρώσεις με $\in, \notin, \subseteq$ ή $\not\subseteq$: α) $3 \square A$ β) $\{3\} \square A$ γ) $\{1, 2\} \square A$ δ) $\emptyset \square A$ ε) $4 \square A$. ★ ★ ★
- 4 Να γράψεις όλα τα υποσύνολα του $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Πόσα είναι; ★ ★ ★
- 5 Δίνονται $\Omega = \{1, 2, \dots, 12\}$, $A = \{x \mid x \text{ διαιρέτης του } 12\}$ και $B = \{x \mid x \text{ πολλαπλάσιο του } 3\}$. Να βρεις $A \cup B$, $A \cap B$, A' , $(A \cup B)'$ και να κάνεις διάγραμμα Venn. ★ ★ ★
- 6 Αν $A \subseteq B$, να βρεις τα $A \cup B$ και $A \cap B$. Να το εξηγήσεις με διάγραμμα Venn. ★ ★ ★
- 7 Σε μια έρευνα σε 40 μαθητές, 22 διαβάζουν βιβλία, 18 βλέπουν σειρές και 7 κάνουν και τα δύο. Πόσοι: α) κάνουν μόνο ένα από τα δύο; β) δεν κάνουν κανένα; ★ ★ ★
- 8 Να σκιαγραφήσεις σε διάγραμμα Venn τα σύνολα: α) $A \cap B'$ β) $A' \cap B'$. Τι εκφράζει με λόγια το καθένα; ★ ★ ★

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5Ο · ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ > ΜΑΘΗΜΑ 5.2

5.2

Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι είναι **πείραμα τύχης** και **δειγματικός χώρος**,
- να βρίσκεις τον δειγματικό χώρο με **δεντροδιάγραμμα** και **πίνακα διπλής εισόδου**,
- τι είναι **ενδεχόμενο**, πότε **πραγματοποιείται**, τι είναι **βέβαιο** και **αδύνατο** ενδεχόμενο,
- τις πράξεις με ενδεχόμενα και τα **ασυμβίβαστα** ενδεχόμενα.

Πείραμα τύχης και δειγματικός χώρος

📖 Ορισμός · Πείραμα τύχης

Πείραμα τύχης λέγεται ένα πείραμα που, όσες φορές κι αν το επαναλάβουμε κάτω από τις ίδιες συνθήκες, **δεν μπορούμε να προβλέψουμε** με βεβαιότητα το αποτέλεσμά του, αν και γνωρίζουμε **όλα τα δυνατά αποτελέσματα**.

Παραδείγματα: η ρίψη ενός ζαριού, το στρίψιμο ενός νομίσματος, η επιλογή μιας κάρτας από μια τράπουλα. Αντίθετα, το «ζεσταίνω νερό στους 100°C στο επίπεδο της θάλασσας» **δεν** είναι πείραμα τύχης: ξέρουμε ότι θα βράσει!

📖 Ορισμός · Δειγματικός χώρος

Το σύνολο **όλων** των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης λέγεται **δειγματικός χώρος** και συμβολίζεται με Ω .

Ένα νόμισμα

K = κορόνα, Γ = γράμματα
 $\Omega = \{K, \Gamma\}$

Ένα ζάρι

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Τροχός με 4 χρώματα

$\Omega =$
 $\{\text{κόκκινο, μπλε, πράσινο, κίτρινο}\}$

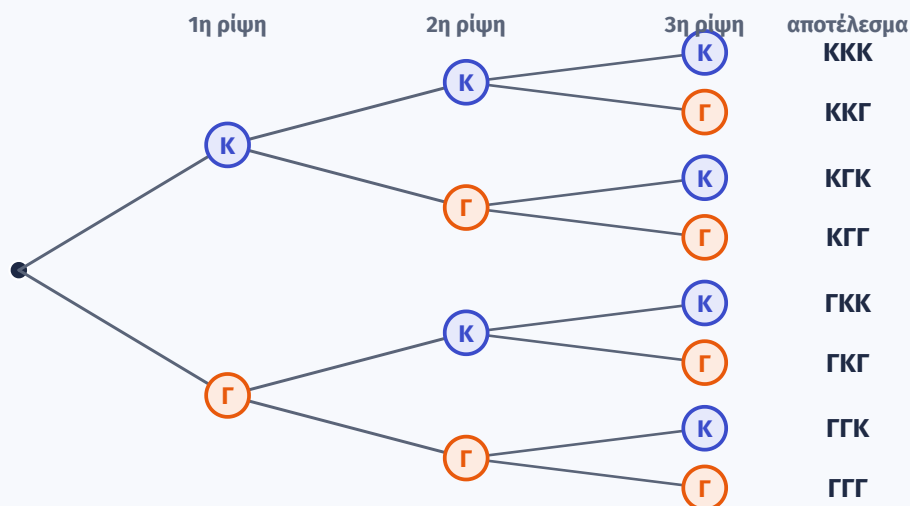
► Δεντροδιάγραμμα

Όταν το πείραμα γίνεται σε **στάδια** (π.χ. ρίχνουμε δύο φορές ένα νόμισμα), βρίσκουμε τον δειγματικό χώρο με ένα **δεντροδιάγραμμα**: από κάθε αποτέλεσμα του πρώτου σταδίου «φυτρώνουν» κλαδιά για όλα τα αποτελέσματα του επόμενου.

✏ Παράδειγμα 1 · Τρεις ρίψεις νομίσματος

Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος.

ΛΥΣΗ



Δεντροδιάγραμμα για τρεις ρίψεις νομίσματος

Διαβάζουμε κάθε «διαδρομή» από τη ρίζα ως την άκρη:

$$\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}.$$

Έχει $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ στοιχεία.

✓ Πόσα στοιχεία έχει ο Ω ;

Αν το πρώτο στάδιο έχει μ αποτελέσματα και το δεύτερο ν , τότε το πείραμα έχει $\mu \cdot \nu$ αποτελέσματα (πολλαπλασιαστική αρχή). Για δύο ζάρια: $6 \cdot 6 = 36$.

► Πίνακας διπλής εισόδου

Όταν το πείραμα έχει **δύο** στάδια με πολλά αποτελέσματα, πιο βολικός είναι ένας **πίνακας**.

✎ Παράδειγμα 2 · Δύο ζάρια

Ρίχνουμε δύο ζάρια (ένα κόκκινο και ένα μπλε). Να γραφτεί ο δειγματικός χώρος.

ΛΥΣΗ

κόκκινο \ μπλε	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ο δειγματικός χώρος έχει 36 στοιχεία-ζεύγη. Το $(2, 5)$ και το $(5, 2)$ είναι **διαφορετικά** αποτελέσματα (στο πρώτο το κόκκινο ζάρι φέρνει 2, στο δεύτερο 5).

Ενδεχόμενα

Ορισμός · Ενδεχόμενο

Ενδεχόμενο λέγεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω .

Ένα ενδεχόμενο **πραγματοποιείται** όταν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι **στοιχείο του**.

Στη ρίψη ζαριού, το ενδεχόμενο «φέρνω άρτιο» είναι το $A = \{2, 4, 6\}$. Αν φέρω 4, το A πραγματοποιήθηκε· αν φέρω 3, όχι.

Απλό ενδεχόμενο

Έχει **ένα** στοιχείο.

Π.χ. «φέρνω 6»: $\{6\}$.

Βέβαιο ενδεχόμενο

Είναι ολόκληρος ο Ω :

πραγματοποιείται **πάντα**.

Π.χ. «φέρνω αριθμό από 1 έως 6».

Αδύνατο ενδεχόμενο

Είναι το $\emptyset$: **δεν**

πραγματοποιείται ποτέ.

Π.χ. «φέρνω 7».

► Πράξεις με ενδεχόμενα

Τα ενδεχόμενα είναι σύνολα, οπότε κάνουμε μαζί τους τις πράξεις του προηγούμενου μαθήματος. Το σημαντικό είναι να «μεταφράζουμε» σωστά:

Σύμβολο	Διαβάζεται	Πραγματοποιείται όταν...
$A \cup B$	« A ή B »	πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B
$A \cap B$	« A και B »	πραγματοποιούνται και τα δύο ταυτόχρονα
A'	« όχι A »	δεν πραγματοποιείται το A

Ορισμός · Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα A, B λέγονται **ασυμβίβαστα** (ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα**) όταν **δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα**, δηλαδή $A \cap B = \emptyset$.

✎ Παράδειγμα 3 · Ενδεχόμενα στο ζάρι

Ρίχνουμε ένα ζάρι. Έστω A : «άρτιος», B : «μεγαλύτερος του 3», Γ : «το 1 ή το 3». Να βρεθούν τα $A \cup B$, $A \cap B$, A' , $B \cap \Gamma$ και να εξεταστεί ποια είναι ασυμβίβαστα.

ΛΥΣΗ

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $\Gamma = \{1, 3\}$.

- $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$: «άρτιος ή μεγαλύτερος του 3».
- $A \cap B = \{4, 6\}$: «άρτιος και μεγαλύτερος του 3».

- $A' = \{1, 3, 5\}$: «περιττός».
- $B \cap \Gamma = \emptyset$: τα B και Γ είναι **ασυμβίβαστα**. Επίσης $A \cap \Gamma = \emptyset$, άρα και τα A, Γ είναι ασυμβίβαστα. Τα A, B **δεν** είναι (έχουν κοινά στοιχεία).

Παράδειγμα 4 · Ενδεχόμενα με δύο ζάρια

Ρίχνουμε δύο ζάρια. Να βρεθούν τα ενδεχόμενα A: «το άθροισμα είναι 7», B: «φέρνουμε διπλές» και να εξεταστεί αν είναι ασυμβίβαστα.

ΛΥΣΗ

$A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$ — 6 στοιχεία (η «διαγώνιος» του πίνακα από κάτω αριστερά προς πάνω δεξιά).

$B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ — η κύρια διαγώνιος.

Μια «διπλή» έχει άθροισμα άρτιο (2κ), οπότε δεν μπορεί να δώσει 7: $A \cap B = \emptyset$, τα ενδεχόμενα είναι **ασυμβίβαστα**.

Συχνό λάθος · «Ή» στην καθημερινή γλώσσα και στα μαθηματικά

✗ Το «A ή B» σημαίνει «μόνο το ένα από τα δύο».

✓ Στα μαθηματικά, το «A ή B» ($A \cup B$) πραγματοποιείται και όταν πραγματοποιούνται **και τα δύο**. Είναι «ένα τουλάχιστον».

Συχνό λάθος · Συμπλήρωμα του «τουλάχιστον»

✗ Το αντίθετο του «τουλάχιστον μία κορόνα» είναι «το πολύ μία κορόνα».

✓ Το αντίθετο του «τουλάχιστον μία κορόνα» είναι «**καμία** κορόνα» (δηλαδή όλα γράμματα).

Συνέχισε στο mathgreece.com



Κόλλησες κάπου; Στο mathgreece.com υπάρχει ολόκληρο το μάθημα με βιντεομαθήματα, σημειώσεις και ασκήσεις — ένα πλήρες **δωρεάν** φροντιστήριο μαθηματικών.

mathgreece.com
δωρεάν φροντιστήριο

Σύνοψη μαθήματος

- Πείραμα τύχης: γνωστά τα δυνατά αποτελέσματα, άγνωστο το συγκεκριμένο.
- Δειγματικός χώρος Ω : όλα τα αποτελέσματα. Βρίσκεται με **δεντροδιάγραμμα** ή **πίνακα**.
- Ενδεχόμενο: υποσύνολο του Ω . Βέβαιο: Ω . αδύνατο: $\emptyset$.
- $A \cup B$: «ένα τουλάχιστον»· $A \cap B$: «και τα δύο»· A' : «όχι A». Ασυμβίβαστα: $A \cap B = \emptyset$.

Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να γράψεις τον δειγματικό χώρο των πειραμάτων: α) επιλέγουμε τυχαία ένα γράμμα της λέξης «ΖΑΡΙ» β) ρίχνουμε ένα νόμισμα και ένα ζάρι. ★ ★ ★
- 2 Μια οικογένεια έχει τρία παιδιά. Με δεντροδιάγραμμα να γράψεις τον δειγματικό χώρο για το φύλο τους (A = αγόρι, K = κορίτσι) και τα ενδεχόμενα: E_1 : «ακριβώς δύο κορίτσια», E_2 : «τουλάχιστον ένα αγόρι». ★ ★ ★
- 3 Ρίχνουμε δύο ζάρια. Να γράψεις τα ενδεχόμενα: α) «άθροισμα 10» β) «άθροισμα μικρότερο του 4» γ) «το γινόμενο είναι 12». ★ ★ ★
- 4 Ένα κουτί έχει μια άσπρη (A), μια μαύρη (M) και μια κόκκινη (K) μπάλα. Παίρνουμε δύο μπάλες τη μία μετά την άλλη **χωρίς επανατοποθέτηση**. Να βρεις τον δειγματικό χώρο. ★ ★ ★
- 5 Στη ρίψη ενός ζαριού, έστω $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{3, 5\}$. Να περιγράψεις με λόγια και να βρεις τα: $A \cup B$, $A \cap B$, A' , $A' \cap B'$. ★ ★ ★
- 6 Ρίχνουμε ένα νόμισμα μέχρι να φέρουμε κορόνα, αλλά **το πολύ τρεις φορές**. Να βρεις τον δειγματικό χώρο. ★ ★ ★
- 7 Να εξετάσεις αν είναι ασυμβίβαστα τα ενδεχόμενα (στη ρίψη δύο ζαριών): A : «άθροισμα 12» και B : «ένα τουλάχιστον ζάρι φέρνει 5». ★ ★ ★

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο · ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ > ΜΑΘΗΜΑ 5.3

5.3 Η έννοια της πιθανότητας

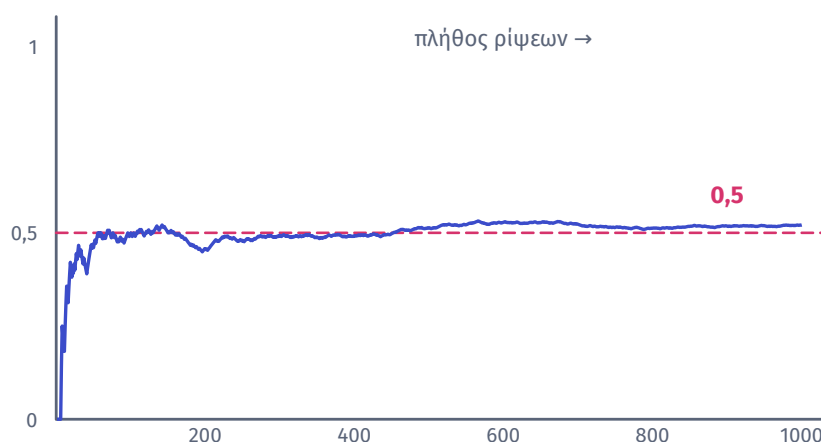
☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι είναι **σχετική συχνότητα** και πώς «σταθεροποιείται»,
- τον **κλασικό ορισμό της πιθανότητας** $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$ για **ισοπίθανα** αποτελέσματα,
- τις βασικές **ιδιότητες**: $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(A') = 1 - P(A)$, **προσθετικός νόμος**,
- να υπολογίζεις πιθανότητες σε προβλήματα με ζάρια, νομίσματα, κάρτες και κληρώσεις.

Από τη συχνότητα στην πιθανότητα

Ρίχνουμε ένα νόμισμα πολλές φορές και καταγράφουμε πόσες φορές φέρνουμε κορόνα. Η **σχετική συχνότητα** της κορόνας είναι

$$f = \frac{\text{πλήθος εμφανίσεων της κορόνας}}{\text{πλήθος ρίψεων}}.$$



Σχετική συχνότητα της κορόνας σε 1000 ρίψεις: «σταθεροποιείται» κοντά στο 0,5

Στην αρχή η σχετική συχνότητα «χοροπηδάει», όμως όσο αυξάνεται το πλήθος των ρίψεων, **σταθεροποιείται** γύρω από τον αριθμό 0,5. Αυτός ο αριθμός είναι η **πιθανότητα** να φέρουμε κορόνα. Το φαινόμενο αυτό λέγεται **στατιστική ομαλότητα** ή **νόμος των μεγάλων αριθμών**.

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Όταν όλα τα αποτελέσματα ενός πειράματος έχουν **την ίδια δυνατότητα** να εμφανιστούν (ένα «τίμιο» ζάρι, ένα «αμερόληπτο» νόμισμα), λέμε ότι είναι **ισοπίθανα**.

★ Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Αν τα αποτελέσματα του πειράματος είναι **ισοπίθανα**, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A είναι

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}$$

όπου $N(A)$ το πλήθος των στοιχείων του A και $N(\Omega)$ το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

≡ Υπολογισμός πιθανότητας

- 1 Γράφω τον **δειγματικό χώρο** Ω και μετρώ τα στοιχεία του, $N(\Omega)$.
- 2 Γράφω το **ενδεχόμενο** A (τις «ευνοϊκές» περιπτώσεις) και μετρώ, $N(A)$.
- 3 Διαιρώ: $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$ και **απλοποιώ** το κλάσμα.
- 4 Ελέγχω ότι το αποτέλεσμα είναι μεταξύ 0 και 1!

✎ Παράδειγμα 1 · Ζάρι

Ρίχνουμε ένα ζάρι. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρουμε: α) 5 β) άρτιο γ) αριθμό μικρότερο του 3 δ) 7 ε) αριθμό μικρότερο του 7.

ΛΥΣΗ

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, N(\Omega) = 6.$$

$$\alpha) \{5\}: P = \frac{1}{6}. \quad \beta) \{2, 4, 6\}: P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \quad \gamma) \{1, 2\}: P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$\delta) \emptyset \text{ (αδύνατο)}: P = 0. \quad \epsilon) \Omega \text{ (βέβαιο)}: P = \frac{6}{6} = 1.$$

★ Βασικές ιδιότητες

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1.$$

Η πιθανότητα μετριέται και σε **ποσοστό**: $P = \frac{1}{4} = 25\%$.



Η «κλίμακα» της πιθανότητας

✗ Συχνό λάθος · Πιθανότητα μεγαλύτερη του 1

✗ «Βρήκα $P(A) = \frac{8}{6}$.»✓ Αδύνατον! Πάντα $0 \leq P(A) \leq 1$, γιατί $N(A) \leq N(\Omega)$. Αν βρεις κάτι τέτοιο, κάπου έκανες λάθος στο μέτρημα (π.χ. γράψε ανάποδα το κλάσμα).

✎ Παράδειγμα 2 · Δύο ζάρια

Ρίχνουμε δύο ζάρια. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα να είναι: α) 7 β) 11 γ) μεγαλύτερο ή ίσο του 10 ;

ΛΥΣΗ

$N(\Omega) = 36$. Στον πίνακα χρωματίζονται με ροζ τα ζεύγη με άθροισμα 7 και με πράσινο όσα έχουν άθροισμα ≥ 10 :

1ο \ 2ο	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

α) 6 ζεύγη: $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Είναι το **πιο πιθανό** άθροισμα!

β) (5, 6) και (6, 5): $P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

γ) (4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6): $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

✗ Συχνό λάθος · Το (2,5) και το (5,2)

✗ Στη ρίψη δύο ζαριών, «άθροισμα 3» έχει ένα μόνο ευνοϊκό αποτέλεσμα, το $\{1, 2\}$, άρα $P = \frac{1}{21}$.✓ Τα ζάρια είναι **δύο διαφορετικά** αντικείμενα: (1, 2) και (2, 1) είναι **δύο** ισοπίθανα αποτελέσματα από τα 36. Άρα $P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων

★ Συμπληρωματικό ενδεχόμενο

$$P(A') = 1 - P(A)$$

✓ Η «πίσω πόρτα»

Όταν ζητείται η πιθανότητα του «**τουλάχιστον ένα**», συχνά είναι πολύ πιο εύκολο να βρεις την πιθανότητα του αντίθετου («**κανένα**») και να την αφαιρέσεις από το 1.

✎ Παράδειγμα 3 · Τουλάχιστον μία κορόνα

Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε τουλάχιστον μία κορόνα;

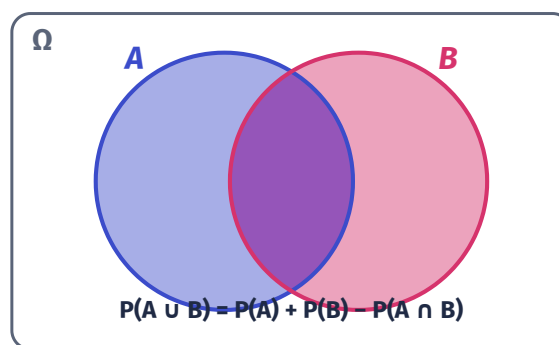
ΛΥΣΗ

Από το δέντροδιάγραμμα του προηγούμενου μαθήματος $N(\Omega) = 8$. Το αντίθετο ενδεχόμενο είναι «**καμία κορόνα**» = $\{ΓΓΓ\}$, με πιθανότητα $\frac{1}{8}$. Άρα

$$P(\text{τουλάχιστον μία } K) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

★ Προσθετικός νόμος

- Αν τα A, B είναι **ασυμβίβαστα** ($A \cap B = \emptyset$): $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- **Γενικά**, για οποιαδήποτε A, B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.



Γιατί αφαιρούμε την τομή: στο $P(A)+P(B)$ η τομή μετρίεται δύο φορές

✎ Παράδειγμα 4 · Κάρτες

Από 20 κάρτες αριθμημένες 1 έως 20 επιλέγουμε τυχαία μία. Έστω A : «πολλαπλάσιο του 3» και B : «πολλαπλάσιο του 5». Να βρεθούν $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ και η πιθανότητα να **μην** είναι πολλαπλάσιο ούτε του 3 ούτε του 5.

ΛΥΣΗ

$$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}, B = \{5, 10, 15, 20\}, A \cap B = \{15\}.$$

$$P(A) = \frac{6}{20}, \quad P(B) = \frac{4}{20}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{20}.$$

$$P(A \cup B) = \frac{6}{20} + \frac{4}{20} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}.$$

Ούτε του 3 ούτε του 5: είναι το $(A \cup B)'$, με πιθανότητα $1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20} = 55\%$.

Παράδειγμα 5 · Κλήρωση σε τάξη

Σε μια τάξη υπάρχουν 12 αγόρια και 13 κορίτσια. 8 αγόρια και 9 κορίτσια μαθαίνουν αγγλικά και γαλλικά, οι υπόλοιποι μόνο αγγλικά. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Ποια η πιθανότητα να είναι κορίτσι **ή** να μαθαίνει μόνο αγγλικά;

ΛΥΣΗ

Οργανώνουμε τα δεδομένα σε πίνακα:

	Αγγλ. + Γαλλ.	Μόνο αγγλικά	Σύνολο
Αγόρια	8	4	12
Κορίτσια	9	4	13
Σύνολο	17	8	25

$$P(K) = \frac{13}{25}, \quad P(M) = \frac{8}{25}, \quad P(K \cap M) = \frac{4}{25}.$$

$$P(K \cup M) = \frac{13 + 8 - 4}{25} = \frac{17}{25} = 68\%.$$

⚠ Πότε ΔΕΝ ισχύει ο κλασικός ορισμός

Ο τύπος $\frac{N(A)}{N(\Omega)}$ ισχύει **μόνο** όταν τα αποτελέσματα είναι **ισοπίθανα**. Για παράδειγμα, «αύριο θα βρέξει ή δεν θα βρέξει» έχει δύο αποτελέσματα, αλλά η πιθανότητα να βρέξει **δεν** είναι $\frac{1}{2}$! Ούτε ένα «πειραγμένο» ζάρι έχει πιθανότητα $\frac{1}{6}$ για κάθε έδρα.

📖 Από τα ζάρια στην επιστήμη

Η θεωρία των πιθανοτήτων γεννήθηκε τον 17ο αιώνα, όταν ο **Blaise Pascal** και ο **Pierre de Fermat** αλληλογραφούσαν για να λύσουν προβλήματα τυχερών παιχνιδιών που τους έθετε ένας φίλος τους. Σήμερα οι πιθανότητες χρησιμοποιούνται στη μετεωρολογία, την ιατρική, τις ασφάλειες, την τεχνητή νοημοσύνη και σχεδόν σε κάθε επιστήμη.

Συνέχισε στο mathgreece.com



Θέλεις να δεις αυτό το μάθημα σε βίντεο, με επιπλέον λυμένες ασκήσεις και κουίζ αυτοαξιολόγησης; Μπες στο **mathgreece.com** — θα βρεις ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

mathgreece.com
δωρεάν φροντιστήριο

Σύνοψη μαθήματος

- Ισοπίθανα αποτελέσματα: $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$.
- $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, $P(A') = 1 - P(A)$.
- Ασυμβίβαστα: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Γενικά: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- «Τουλάχιστον ένα» → συχνά μέσω του συμπληρωματικού «κανένα».

Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

★ ★ ★

- 1 Ένα κουτί έχει 5 κόκκινες, 3 μπλε και 2 πράσινες μπάλες. Παίρνουμε τυχαία μία. Να βρεις την πιθανότητα να είναι: α) κόκκινη β) όχι μπλε γ) κίτρινη.

★ ★ ★

- 2 Επιλέγουμε τυχαία ένα γράμμα της λέξης «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» (10 γράμματα). Ποια η πιθανότητα να είναι το Α; Να είναι φωνήεν;

★ ★ ★

- 3 Ρίχνουμε δύο ζάρια. Να βρεις την πιθανότητα: α) να φέρουμε διπλές β) το άθροισμα να είναι 5 γ) το άθροισμα να είναι άρτιος.

★ ★ ★

- 4 Μια οικογένεια έχει τρία παιδιά. Θεωρώντας ισοπίθανα αγόρι και κορίτσι, να βρεις την πιθανότητα: α) να είναι όλα κορίτσια β) να υπάρχει τουλάχιστον ένα αγόρι γ) να είναι ακριβώς δύο αγόρια.

★ ★ ★

- 5 Αν $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ και $P(A \cap B) = 0,2$, να βρεις τα $P(A \cup B)$, $P(A')$ και $P((A \cup B)')$.

★ ★ ★

- 6 Τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα με $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$. Να βρεις την $P(B)$.

★ ★ ★

- 7 Σε ένα σχολείο 60% των μαθητών παίζουν ένα όργανο, 45% κάνουν κάποιο άθλημα και 20% κάνουν και τα δύο. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Ποια η πιθανότητα να μην κάνει τίποτα από τα δύο;

★ ★ ★

- 8 Από τους διψήφιους αριθμούς 10, 11, ..., 99 επιλέγουμε τυχαία έναν. Ποια η πιθανότητα: α) να έχει ίδια ψηφία β) να διαιρείται με το 5 γ) να είναι μεγαλύτερος του 80 ή να τελειώνει σε 0;

★ ★ ★

- 9 Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Ποια η πιθανότητα το δεύτερο αποτέλεσμα να είναι μεγαλύτερο από το πρώτο;

Α' ΜΕΡΟΣ · ΑΛΓΕΒΡΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο · ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ > ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ



Επανάληψη 5ου Κεφαλαίου

Όλο το κεφάλαιο με μια ματιά

Σύνολα

- $\in$ στοιχείο-σύνολο, $\subseteq$ σύνολο-σύνολο
- $A \cup B$: ένα τουλάχιστον $\cdot A \cap B$: και τα δύο $\cdot A'$: όχι A
- $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$

Πιθανότητες

- Ω : δεντροδιάγραμμα ή πίνακας
- $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$ (ισοπίθανα)
- $P(A') = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

«Α ή Β»

 $A \cup B$

«Α και Β»

 $A \cap B$

«όχι Α»

 A'

«ούτε Α ούτε Β»

 $(A \cup B)'$

Λεξικό: από τα ελληνικά στη γλώσσα των συνόλων

✕ Συχνό λάθος · Συχνά λάθη του κεφαλαίου

$$\times P(A) = \frac{N(\Omega)}{N(A)} \quad \checkmark P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} - \text{πάντα} \leq 1$$

✕ Στα δύο ζάρια μετρώ το (1, 2) και το (2, 1) μία φορά $\checkmark$ Είναι δύο διαφορετικά αποτελέσματα

✕ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ πάντα $\checkmark$ Μόνο για **ασυμβίβαστα**

✕ Αντίθετο του «τουλάχιστον ένα» = «το πολύ ένα» $\checkmark$ = «κανένα»

Συνέχισε στο **mathgreece.com**

Θέλεις να εμπεδώσεις καλύτερα τη θεωρία; Δες τα σχετικά βίντεο στο **mathgreece.com** και στο κανάλι **MATHGREECE** στο YouTube — ένα ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Δίνονται $\Omega = \{1, 2, \dots, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Να βρεις $A \cup B$, $A \cap B$, A' , B' και να κάνεις διάγραμμα Venn. ★★ ★
- 2 Ρίχνουμε ένα νόμισμα και ένα ζάρι. Να βρεις την πιθανότητα να φέρουμε κορόνα και άρτιο αριθμό. ★★ ★
- 3 Σε μια κληρωτίδα υπάρχουν 50 λαχνοί, από τους οποίους κερδίζουν οι 5. Αγοράζουμε έναν. Ποια η πιθανότητα να κερδίσουμε; Να χάσουμε; ★★ ★
- 4 Ρίχνουμε δύο ζάρια. Ποια η πιθανότητα το γινόμενο των ενδείξεων να είναι άρτιος; ★★ ★
- 5 Σε 30 μαθητές, 18 έχουν σκύλο, 12 γάτα και 5 και τα δύο. Επιλέγουμε τυχαία έναν. Ποια η πιθανότητα: α) να έχει ένα τουλάχιστον από τα δύο ζώα; β) να έχει μόνο σκύλο; ★★ ★
- 6 Επιλέγουμε τυχαία έναν αριθμό από το 1 έως το 100. Ποια η πιθανότητα να είναι τέλειο τετράγωνο ή πολλαπλάσιο του 10; ★★ ★

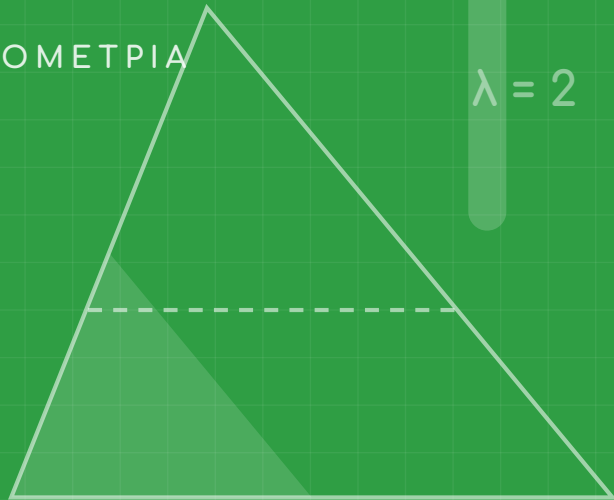
Β' ΜΕΡΟΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Κεφάλαιο 1ο Γεωμετρία

Κεφάλαιο 2ο Τριγωνομετρία

Κεφάλαιο 1ο Γεωμετρία



Το κεφάλαιο της Γεωμετρίας είναι αφιερωμένο στη σύγκριση σχημάτων. Μαθαίνουμε πότε δύο τρίγωνα είναι **ίσα** (κριτήρια ισότητας), τι είναι ο **λόγος τμημάτων**, το περίφημο **Θεώρημα του Θαλή**, την **ομοιοθεσία** και την **ομοιότητα** σχημάτων, και τέλος πώς συνδέεται ο λόγος ομοιότητας με τον **λόγο των εμβαδών**.

- 1.1 Ισότητα τριγώνων
- 1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων
- 1.3 Θεώρημα του Θαλή
- 1.4 Ομοιοθεσία
- 1.5 Ομοιότητα
- 1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων
- ★ Επανάληψη κεφαλαίου

Για κάθε μάθημα αυτού του κεφαλαίου θα βρεις **βιντεομαθήματα**, **σημειώσεις**, **κουίζ** και **επιπλέον ασκήσεις** στο mathgreece.com — ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

Β' ΜΕΡΟΣ · ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο · ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ > ΜΑΘΗΜΑ 1.1

1.1 Ισότητα τριγώνων

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

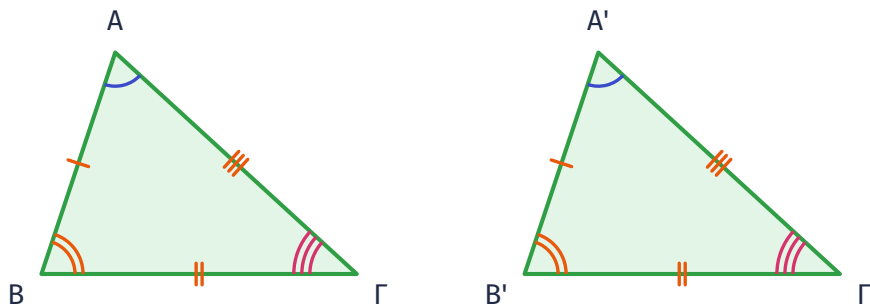
- ποια είναι τα **κύρια στοιχεία** ενός τριγώνου και τι σημαίνει **ίσα τρίγωνα**,
- τα τρία **κριτήρια ισότητας** τριγώνων: Π-Γ-Π, Γ-Π-Γ, Π-Π-Π,
- τα **κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων**,
- να γράφεις σωστά μια **γεωμετρική απόδειξη**,
- σημαντικές **συνέπειες**: ισοσκελές τρίγωνο, μεσοκάθετος, διχοτόμος.

Ίσα τρίγωνα

Κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει έξι **κύρια στοιχεία**: τις τρεις **πλευρές** $\alpha = B\Gamma$, $\beta = \Gamma A$, $\gamma = AB$ και τις τρεις **γωνίες** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$. Η πλευρά α βρίσκεται **απέναντι** από τη γωνία $\hat{A}$, η β απέναντι από τη $\hat{B}$ και η γ απέναντι από τη $\hat{\Gamma}$.

☰ Ορισμός · Ίσα τρίγωνα

Δύο τρίγωνα λέγονται **ίσα** όταν, αν τοποθετήσουμε το ένα πάνω στο άλλο, **ταυτίζονται**. Τότε έχουν **ίσες τις πλευρές τους μία προς μία** και **ίσες τις αντίστοιχες γωνίες**.



Δύο ίσα τρίγωνα: ίσες πλευρές (ίδια σημάδια) και ίσες αντίστοιχες γωνίες (ίδια τόξα)

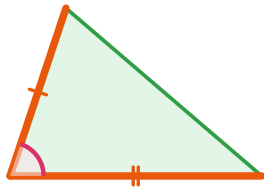
Γράφουμε $AB\Gamma = A'B'\Gamma'$. Στα ίσα τρίγωνα, **απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες** και αντίστροφα. Αυτό μας βοηθά να βρίσκουμε τα «αντίστοιχα» στοιχεία.

✔ Η σειρά των γραμμάτων

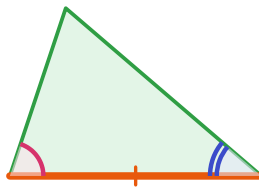
Όταν γράφουμε $AB\Gamma = \Delta EZ$, εννοούμε ότι η κορυφή A αντιστοιχεί στη Δ , η B στην E και η Γ στη Z . Άρα $AB = \Delta E$, $B\Gamma = EZ$, $\Gamma A = Z\Delta$ και $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$. Γράφε **πάντα** τις κορυφές με τη σωστή αντιστοιχία!

Τα κριτήρια ισότητας τριγώνων

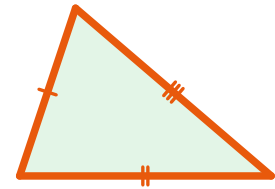
Για να αποδείξουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα, **δεν** χρειάζεται να ελέγξουμε και τα έξι στοιχεία. Αρκούν **τρία** κατάλληλα:



1ο κριτήριο: Π-Γ-Π



2ο κριτήριο: Γ-Π-Γ



3ο κριτήριο: Π-Π-Π

★ Τα τρία κριτήρια

1ο (Π-Γ-Π): Αν δύο τρίγωνα έχουν **δύο πλευρές ίσες μία προς μία** και την **περιεχόμενη** σε αυτές **γωνία ίση**, τότε είναι ίσα.

2ο (Γ-Π-Γ): Αν δύο τρίγωνα έχουν **μία πλευρά ίση** και τις **προσκειμένες** σε αυτήν **γωνίες ίσες μία προς μία**, τότε είναι ίσα.

3ο (Π-Π-Π): Αν δύο τρίγωνα έχουν **τις πλευρές τους ίσες μία προς μία**, τότε είναι ίσα.

⚠ «Περιεχόμενη» και «προσκειμένες»

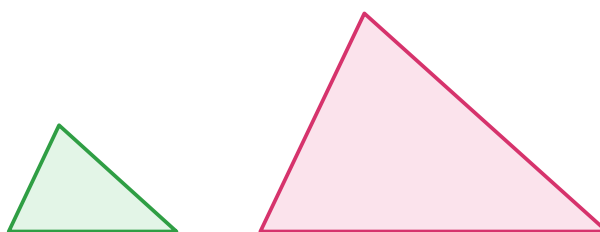
- **Περιεχόμενη** γωνία δύο πλευρών είναι αυτή που σχηματίζουν **οι ίδιες** οι πλευρές (η γωνία ανάμεσά τους). Στο $\triangle AB\Gamma$ η περιεχόμενη των BA , $B\Gamma$ είναι η $\hat{B}$.
- **Προσκειμένες** γωνίες μιας πλευράς είναι οι δύο γωνίες στα **άκρα** της. Της $B\Gamma$ είναι οι $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

✗ Συχνό λάθος · Δεν υπάρχει κριτήριο Π-Π-Γ ούτε Γ-Γ-Γ

✗ «Τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και μια γωνία ίση (όχι την περιεχόμενη), άρα είναι ίσα.»

✓ Αν η ίση γωνία **δεν** είναι η περιεχόμενη, τα τρίγωνα **μπορεί να μην είναι ίσα**.

✗ «Έχουν τις τρεις γωνίες ίσες, άρα είναι ίσα.» ✓ Μπορεί το ένα να είναι **μεγέθυνση** του άλλου! (Θα δούμε στην ομοιότητα ότι τότε είναι **όμοια**, όχι ίσα.)



Ίδιες γωνίες, διαφορετικό μέγεθος: τα τρίγωνα **ΔΕΝ** είναι ίσα

Πώς γράφουμε μια απόδειξη

≡ Απόδειξη ισότητας τριγώνων

- 1 Κάνω **σχήμα** και σημειώνω τα **δεδομένα** (με σημαδάκια).
- 2 Ονομάζω τα **δύο τρίγωνα** που θέλω να συγκρίνω.
- 3 Γράφω **τρία ζεύγη** ίσων στοιχείων, δίπλα σε καθένα την **αιτιολόγηση** (υπόθεση, κοινή πλευρά, κατακορυφήν γωνίες κ.λπ.).
- 4 Αναφέρω **ποιο κριτήριο** εφαρμόζω.
- 5 Γράφω το **συμπέρασμα**: ποια άλλα στοιχεία είναι ίσα (απέναντι από ίσες πλευρές, ίσες γωνίες κ.λπ.).

✎ Παράδειγμα 1 · Κοινή πλευρά

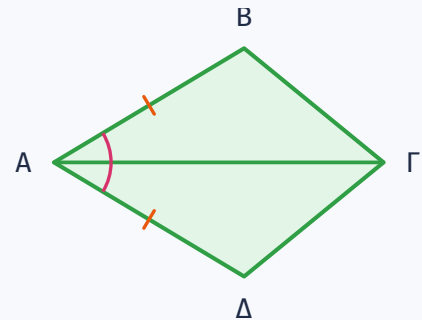
Στο σχήμα είναι $AB = AD$ και η AG διχοτομεί τη γωνία $\hat{A}$. Να αποδειχθεί ότι $GB = GD$.

ΛΥΣΗ

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABG και ADG . Έχουν:

- $AB = AD$ (υπόθεση),
- AG **κοινή** πλευρά,
- $\hat{BAG} = \hat{DAG}$ (η AG διχοτόμος).

Η γωνία είναι **περιεχόμενη** των πλευρών, άρα από το κριτήριο **Π-Γ-Π** τα τρίγωνα είναι ίσα. Συνεπώς και οι τρίτες πλευρές τους είναι ίσες: $GB = GD$.



✎ Παράδειγμα 2 · Κατακορυφήν γωνίες

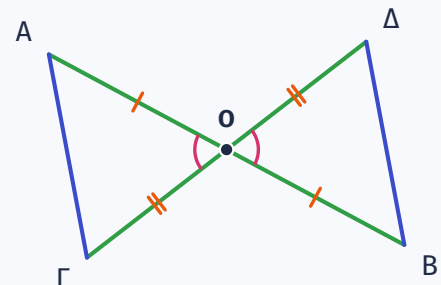
Τα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο O , που είναι μέσο **και των δύο**. Να αποδειχθεί ότι $A\Gamma = B\Delta$ και $A\Gamma \parallel B\Delta$.

ΛΥΣΗ

Στα τρίγωνα $AO\Gamma$ και $BO\Delta$:

- $OA = OB$ (O μέσο του AB),
- $OG = OD$ (O μέσο του $\Gamma\Delta$),
- $\hat{AOG} = \hat{BOD}$ (**κατακορυφήν**).

Από **Π-Γ-Π** τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $A\Gamma = B\Delta$. Επίσης $\hat{OAG} = \hat{OBD}$ (απέναντι από τις ίσες πλευρές OG, OD). Αυτές είναι **εντός εναλλάξ** γωνίες των $A\Gamma, B\Delta$ με τέμνουσα AB , άρα $A\Gamma \parallel B\Delta$.

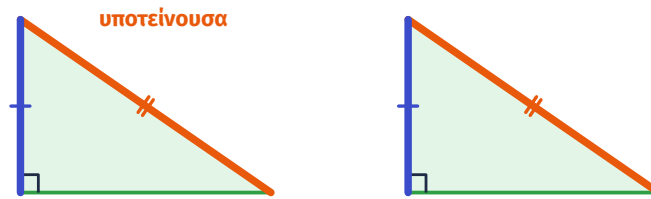


Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

Στα ορθογώνια τρίγωνα η ορθή γωνία είναι ήδη «δεδομένη» ίση, οπότε χρειαζόμαστε **λιγότερα** στοιχεία:

★ Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν...

1. ... τις **δύο κάθετες** πλευρές ίσες μία προς μία,
2. ... μια **κάθετη** πλευρά και την **προσκειμένη οξεία γωνία** ίσες,
3. ... την **υποτείνουσα** και μια **οξεία γωνία** ίσες,
4. ... την **υποτείνουσα** και μια **κάθετη** πλευρά ίσες.



Το 4ο κριτήριο (υποτείνουσα και κάθετη) ισχύει μόνο στα ορθογώνια τρίγωνα

Σημαντικές συνέπειες

► Το ισοσκελές τρίγωνο

★ Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

Σε κάθε **ισοσκελές** τρίγωνο ($AB = AG$):

- οι **γωνίες της βάσης** είναι ίσες: $\hat{B} = \hat{\Gamma}$,
- η **διάμεσος** AM προς τη βάση είναι και **ύψος** και **διχοτόμος**.

Αντίστροφα: αν ένα τρίγωνο έχει **δύο γωνίες ίσες**, είναι **ισοσκελές**.

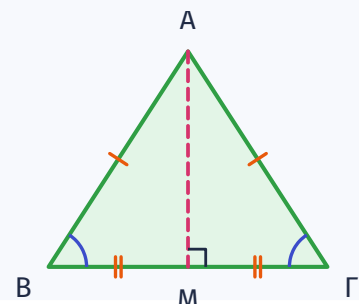
✎ Παράδειγμα 3 · Απόδειξη ιδιότητας ισοσκελούς

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$) φέρνουμε τη διάμεσο AM . Να αποδειχθεί ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $AM \perp B\Gamma$.

ΛΥΣΗ

Τα τρίγωνα ABM και AGM έχουν $AB = AG$ (υπόθεση), $BM = MG$ (M μέσο), AM κοινή. Από **Π-Π-Π** είναι ίσα. Άρα:

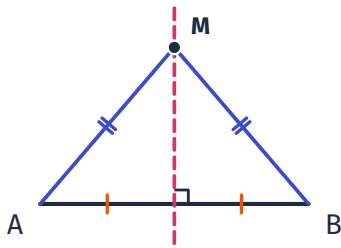
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$,
- $\hat{AMB} = \hat{AMG}$. Αυτές είναι **εφεξής** και έχουν άθροισμα 180° , οπότε η καθεμία είναι 90° : $AM \perp B\Gamma$.
- Επίσης $\hat{BAM} = \hat{GAM}$: η AM είναι και διχοτόμος.



► Μεσοκάθετος και διχοτόμος

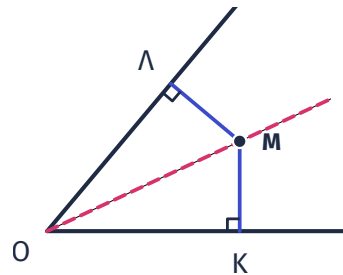
★ Μεσοκάθετος τμήματος

Κάθε σημείο της **μεσοκαθέτου** ενός τμήματος AB **ισαπέχει** από τα άκρα του: $MA = MB$. Και αντίστροφα: κάθε σημείο που ισαπέχει από τα A , B βρίσκεται στη μεσοκάθετο.

Μεσοκάθετος: $MA = MB$

★ Διχοτόμος γωνίας

Κάθε σημείο της **διχοτόμου** μιας γωνίας **ισαπέχει** από τις πλευρές της. Και αντίστροφα: κάθε σημείο (στο εσωτερικό της γωνίας) που ισαπέχει από τις πλευρές της βρίσκεται στη διχοτόμο.

Διχοτόμος: $MK = ML$

✎ Παράδειγμα 4 · Εφαρμογή στο παραλληλόγραμμο

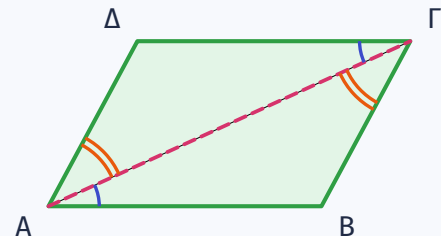
Να αποδειχθεί ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.

ΛΥΣΗ

Φέρνουμε τη διαγώνιο $ΑΓ$. Στα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΓΔΑ$:

- $ΑΓ$ κοινή,
- $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{A}$ (εντός εναλλάξ, $AB \parallel \Delta\Gamma$),
- $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{A} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma}$ (εντός εναλλάξ, $B\Gamma \parallel A\Delta$).

Από **Γ-Π-Γ** είναι ίσα, άρα $AB = \Gamma\Delta$ και $B\Gamma = \Delta A$.

Συνέχισε στο mathgreece.com

Θέλεις να εμπεδώσεις καλύτερα τη θεωρία; Δες τα σχετικά βίντεο στο mathgreece.com και στο κανάλι **MATHGREECE** στο YouTube — ένα ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

☰ Σύνοψη μαθήματος

- Ίσα τρίγωνα: ίσες πλευρές και ίσες αντίστοιχες γωνίες· απέναντι από ίσες πλευρές, ίσες γωνίες.
- Κριτήρια: **Π-Γ-Π** (περιεχόμενη γωνία), **Γ-Π-Γ** (προσκείμενες γωνίες), **Π-Π-Π**.
- Ορθογώνια: δύο κάθετες· κάθετη + προσκείμενη οξεία· υποτεινούσα + οξεία· υποτεινούσα + κάθετη.
- Δεν υπάρχουν κριτήρια **Γ-Γ-Γ** και **Π-Π-Γ** (μη περιεχόμενη).
- Ισοσκελές: ίσες γωνίες βάσης· διάμεσος = ύψος = διχοτόμος.

 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι $AB = \Delta E = 5 \text{ cm}$, $A\Gamma = \Delta Z = 7 \text{ cm}$ και $\hat{A} = \hat{\Delta} = 40^\circ$. Είναι ίσα; Ποια άλλα στοιχεία τους είναι ίσα; ★★ ★
- 2 Τα τρίγωνα $K\Lambda M$ και $P\Sigma T$ έχουν $K\Lambda = P\Sigma$, $\hat{K} = \hat{P} = 60^\circ$ και $\hat{\Lambda} = \hat{\Sigma} = 70^\circ$. Είναι ίσα; Ποιο κριτήριο εφαρμόζεται; ★★ ★
- 3 Στο σχήμα, $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$ (τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$). Να αποδείξεις ότι $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. ★★ ★
- 4 Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) παίρνουμε σημεία Δ και E στη βάση $B\Gamma$ ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξεις ότι $A\Delta = AE$. ★★ ★
- 5 Από το μέσο M της βάσης $B\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ φέρνουμε $MK \perp AB$ και $M\Lambda \perp A\Gamma$. Να αποδείξεις ότι $MK = M\Lambda$. ★★ ★
- 6 Να αποδείξεις ότι σε ισόπλευρο τρίγωνο όλες οι γωνίες είναι ίσες με 60° . ★★ ★
- 7 Οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και $B\Delta$ ενός τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ διχοτομούνται στο O . Να αποδείξεις ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. ★★ ★
- 8 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η διάμεσος AM προεκτείνεται κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Να αποδείξεις ότι $\Gamma\Delta = AB$ και $\Gamma\Delta \parallel AB$. ★★ ★

Β' ΜΕΡΟΣ · ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο · ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ > ΜΑΘΗΜΑ 1.2

1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

🎯 Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι είναι ο **λόγος** δύο ευθυγράμμων τμημάτων,
- ότι ο λόγος **δεν εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης**,
- πότε τμήματα λέγονται **ανάλογα** και ποιες είναι οι **ιδιότητες των αναλογιών**,
- να βρίσκεις το σημείο που **διαίρει ένα τμήμα σε δοσμένο λόγο**.

Ο λόγος δύο τμημάτων

Ας πάρουμε δύο τμήματα, $AB = 6 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 2 \text{ cm}$. Παρατηρούμε ότι το AB «χωράει» **τρεις φορές** το $\Gamma\Delta$: $AB = 3 \cdot \Gamma\Delta$. Λέμε ότι ο **λόγος** του AB προς το $\Gamma\Delta$ είναι 3.



Το AB είναι τριπλάσιο του $\Gamma\Delta$: $AB/\Gamma\Delta = 3$

☰ Ορισμός · Λόγος τμημάτων

Λόγος του τμήματος AB προς το τμήμα $\Gamma\Delta$ λέγεται ο αριθμός λ για τον οποίο ισχύει $AB = \lambda \cdot \Gamma\Delta$. Γράφουμε

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \lambda.$$

Αν τα μήκη των τμημάτων μετρηθούν με την **ίδια μονάδα**, ο λόγος τους ισούται με τον **λόγο των μηκών** τους.

⚠️ Ίδια μονάδα μέτρησης!

Για να βρούμε τον λόγο, τα μήκη πρέπει να είναι εκφρασμένα στην **ίδια μονάδα**. Αν $AB = 1,2 \text{ m}$ και $\Gamma\Delta = 40 \text{ cm}$, τότε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{120 \text{ cm}}{40 \text{ cm}} = 3$, και **όχι** $\frac{1,2}{40}$. Ο λόγος είναι **καθαρός αριθμός** (χωρίς μονάδα) και **δεν εξαρτάται** από τη μονάδα που διαλέξαμε.

✎ Παράδειγμα 1 · Υπολογισμός λόγων

Ένα τμήμα AB χωρίζεται από ένα σημείο M σε δύο τμήματα $AM = 4 \text{ cm}$ και $MB = 6 \text{ cm}$. Να βρεθούν οι λόγοι $\frac{AM}{MB}$, $\frac{MB}{AM}$, $\frac{AM}{AB}$ και $\frac{AB}{MB}$.

ΛΥΣΗ

$$AB = 4 + 6 = 10 \text{ cm.}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \frac{MB}{AM} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \quad \frac{AM}{AB} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \quad \frac{AB}{MB} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

✖ Συχνό λάθος · Η σειρά στον λόγο

✖ «Ο λόγος του AM προς το MB είναι $\frac{6}{4}$.»

✓ «Του AM προς το MB » σημαίνει $\frac{AM}{MB}$: ο πρώτος όρος πάει στον αριθμητή. Άρα $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

✔ Ο λόγος στην καθημερινή ζωή: η κλίμακα

Η **κλίμακα** ενός χάρτη είναι ένας λόγος. Κλίμακα $1 : 50\,000$ σημαίνει ότι 1 cm στον χάρτη αντιστοιχεί σε $50\,000 \text{ cm} = 500 \text{ m}$ στην πραγματικότητα. Δηλαδή $\frac{\text{απόσταση στον χάρτη}}{\text{πραγματική απόσταση}} = \frac{1}{50\,000}$.

✎ Παράδειγμα 2 · Κλίμακα χάρτη

Σε χάρτη κλίμακας $1 : 200\,000$ η απόσταση δύο πόλεων είναι $7,5 \text{ cm}$. Ποια είναι η πραγματική απόσταση;

ΛΥΣΗ

$$7,5 \cdot 200\,000 = 1\,500\,000 \text{ cm} = 15\,000 \text{ m} = 15 \text{ km.}$$

Ανάλογα τμήματα

Ξ Ορισμός · Ανάλογα τμήματα

Τα τμήματα α, γ λέγονται **ανάλογα** προς τα τμήματα β, δ όταν

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Η ισότητα αυτή λέγεται **αναλογία**. Οι α και δ λέγονται **άκροι όροι** και οι β, γ **μέσοι όροι**.

★ Ιδιότητες των αναλογιών

Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ (με όλους τους όρους $\neq 0$), τότε:

1. «Χιαστί»: $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$ (γινόμενο άκρων = γινόμενο μέσων).

2. Εναλλαγή μέσων ή άκρων: $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ και $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$.

3. Αντιστροφή: $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$.

4. Πρόσθεση – αφαίρεση παρονομαστή: $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\delta}$ και $\frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\gamma - \delta}{\delta}$.

5. Ίσοι λόγοι: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$.

✎ Παράδειγμα 3 · Χρήση ιδιοτήτων

Αν $\frac{x}{4} = \frac{9}{x}$ και $x > 0$, να βρεθεί ο x . Επίσης, αν $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{5}$ και $AB = 24$ cm, να βρεθούν τα AM, MB .

ΛΥΣΗ

α) Χιαστί: $x^2 = 36$, άρα $x = 6$. (Ο x λέγεται **μέσος ανάλογος** των 4 και 9.)

β) Από την ιδιότητα 4: $\frac{AM + MB}{MB} = \frac{3 + 5}{5} \iff \frac{24}{MB} = \frac{8}{5} \iff MB = 15$ cm και $AM = 24 - 15 = 9$ cm.

Β' ΤΡΟΠΟΣ: «ΜΕΡΙΔΙΑ»

Ο λόγος 3 : 5 σημαίνει ότι χωρίζουμε το AB σε $3 + 5 = 8$ ίσα «μερίδια» των $24 : 8 = 3$ cm. Τότε $AM = 3 \cdot 3 = 9$ cm και $MB = 5 \cdot 3 = 15$ cm.

Διαίρεση τμήματος σε δοσμένο λόγο

Ξ Ορισμός · Εσωτερική διαίρεση

Λέμε ότι ένα σημείο M του τμήματος AB **διαιρεί το AB εσωτερικά σε λόγο λ** όταν $\frac{MA}{MB} = \lambda$.



Το M διαιρεί το AB σε λόγο 2/3: «2 μερίδια» προς «3 μερίδια»

Αν μας δίνεται ο λόγος $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$, χωρίζουμε το AB σε $\mu + \nu$ ίσα μέρη και παίρνουμε το M μετά τα πρώτα μ μέρη. Έτσι $MA = \frac{\mu}{\mu + \nu} \cdot AB$. Για κάθε θετικό λόγο υπάρχει **ένα μόνο** τέτοιο σημείο του τμήματος. (Στο επόμενο μάθημα θα δούμε πώς το κατασκευάζουμε με κανόνα και διαβήτη, με το θεώρημα του Θαλή.)

✏ Παράδειγμα 4 · Σημείο σε δοσμένο λόγο

Τμήμα AB = 14 cm. Να βρεθεί σημείο M του AB ώστε $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{4}$. Ποιος είναι ο λόγος $\frac{MA}{AB}$;

ΛΥΣΗ

$3 + 4 = 7$ μερίδια των $14 : 7 = 2$ cm: $MA = 6$ cm, $MB = 8$ cm. Και $\frac{MA}{AB} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$.

✏ Παράδειγμα 5 · Το μέσο ενός τμήματος

Σε ποιον λόγο διαιρεί το τμήμα AB το μέσο του; Και σε ποιον λόγο το διαιρεί το σημείο P αν $PA = 3 \cdot PB$;

ΛΥΣΗ

Για το μέσο M: $MA = MB$, άρα $\frac{MA}{MB} = 1$. Για το P: $\frac{PA}{PB} = 3$.

▮ Ο λόγος και οι αρχαίοι Έλληνες

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι **κάθε** δύο τμήματα έχουν λόγο ίσο με κλάσμα ακεραίων. Όταν ανακάλυψαν ότι η διαγώνιος του τετραγώνου και η πλευρά του **δεν** έχουν τέτοιο λόγο (ο λόγος τους είναι $\sqrt{2}$, άρρητος!), η ανακάλυψη αυτή τους συγκλόνισε. Ο **Εύδοξος** ανέπτυξε αργότερα μια θεωρία λόγων που λειτουργούσε για όλα τα μεγέθη — και την καταγράφει ο Ευκλείδης στο 5ο βιβλίο των «Στοιχείων».

Συνέχισε στο mathgreece.com



Κόλλησες κάπου; Στο mathgreece.com υπάρχει ολόκληρο το μάθημα με βιντεομαθήματα, σημειώσεις και ασκήσεις — ένα πλήρες **δωρεάν** φροντιστήριο μαθηματικών.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

Σύνοψη μαθήματος

- $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \lambda \iff AB = \lambda \cdot \Gamma\Delta$. Ίδια μονάδα· ο λόγος είναι καθαρός αριθμός.
- Αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$: χιαστί $\alpha\delta = \beta\gamma$, εναλλαγή, αντιστροφή, $\frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$, $\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$.
- Μ διαιρεί το AB σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$: $MA = \frac{\mu}{\mu + \nu} AB$, $MB = \frac{\nu}{\mu + \nu} AB$.

Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να βρεις τον λόγο $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$ αν: α) $AB = 15 \text{ cm}$, $\Gamma\Delta = 10 \text{ cm}$ β) $AB = 0,6 \text{ m}$, $\Gamma\Delta = 24 \text{ cm}$ γ) $AB = 2 \text{ km}$, $\Gamma\Delta = 800 \text{ m}$. ★ ★ ★
- 2 Σε χάρτη κλίμακας $1 : 25\,000$, πόσα cm αντιστοιχούν σε πραγματική απόσταση 3 km; ★ ★ ★
- 3 Να βρεις τον x στις αναλογίες: α) $\frac{x}{6} = \frac{5}{3}$ β) $\frac{4}{x} = \frac{x}{25}$ ($x > 0$) γ) $\frac{x+1}{x} = \frac{7}{5}$. ★ ★ ★
- 4 Σημείο M τμήματος $AB = 20 \text{ cm}$ το διαιρεί σε λόγο $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$. Να βρεις τα MA, MB και τον λόγο $\frac{MB}{AB}$. ★ ★ ★
- 5 Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{5}$, να βρεις τους λόγους $\frac{\alpha + \beta}{\beta}$, $\frac{\beta - \alpha}{\alpha}$ και $\frac{3\alpha + \beta}{2\beta}$. ★ ★ ★
- 6 Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ανάλογες των αριθμών 3, 4, 5 και η περιμέτρός του είναι 48 cm. Να βρεις τις πλευρές. Τι είδους τρίγωνο είναι; ★ ★ ★
- 7 Σε ευθεία παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ με $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{2}{5}$ και $AG = 21 \text{ cm}$. Αν M το μέσο του AG, να βρεις το μήκος BM. ★ ★ ★
- 8 Να αποδείξεις ότι αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} = \frac{\alpha}{\beta}$. ★ ★ ★

Β' ΜΕΡΟΣ · ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 · ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ > ΜΑΘΗΜΑ 1.3

1.3 Θεώρημα του Θαλή

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τη διατύπωση του **Θεωρήματος του Θαλή**,
- την εφαρμογή του **σε τρίγωνο** (παράλληλη προς μια πλευρά),
- να **υπολογίζεις άγνωστα μήκη** με αναλογίες,
- να **χωρίζεις ένα τμήμα σε ίσα μέρη** ή σε δοσμένο λόγο με κανόνα και διαβήτη.

Η πρόταση που μέτρησε μια πυραμίδα

Λέγεται ότι ο **Θαλής ο Μιλήσιος** (6ος αιώνας π.Χ.) μέτρησε το ύψος της μεγάλης πυραμίδας της Αιγύπτου συγκρίνοντας τη σκιά της με τη σκιά ενός ραβδιού. Η ιδέα του βασίζεται σε ένα από τα πιο όμορφα θεωρήματα της Γεωμετρίας.

► Μια πρώτη παρατήρηση

★ Ίσα τμήματα σε παράλληλες

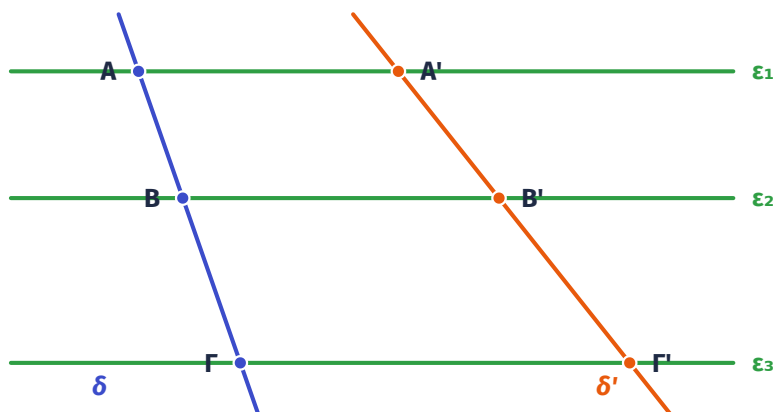
Αν **παράλληλες** ευθείες ορίζουν **ίσα τμήματα** σε μια ευθεία, τότε ορίζουν **ίσα τμήματα** και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Το Θεώρημα του Θαλή

★ Θεώρημα του Θαλή

Αν **τρεις (ή περισσότερες) παράλληλες ευθείες** τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία ευθεία είναι **ανάλογα** προς τα αντίστοιχα τμήματα της άλλης:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BG}{B'G'} = \frac{AG}{A'G'}.$$



Οι παράλληλες $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ «κόβουν» ανάλογα τμήματα στις δύο τέμνουσες

⚠ Οι παράλληλες είναι η προϋπόθεση!

Το θεώρημα ισχύει **μόνο** όταν οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ είναι **παράλληλες**. Οι δύο τέμνουσες δ, δ' **δεν** χρειάζεται να είναι παράλληλες μεταξύ τους.

✏ Παράδειγμα 1 · Υπολογισμός με το θεώρημα του Θαλή

Στο παραπάνω σχήμα είναι $AB = 4$, $B\Gamma = 6$ και $A'B' = 5$. Να βρεθούν τα $B'\Gamma'$ και $A'\Gamma'$.

ΛΥΣΗ

Από το θεώρημα του Θαλή:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \iff \frac{4}{5} = \frac{6}{B'\Gamma'} \iff B'\Gamma' = \frac{30}{4} = 7,5.$$

Και $A'\Gamma' = A'B' + B'\Gamma' = 5 + 7,5 = 12,5$.

✓ Μια πιο βολική μορφή

Από τις ιδιότητες των αναλογιών, το θεώρημα γράφεται και ως $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$: ο λόγος **των κομματιών της μιας ευθείας** ισούται με τον λόγο **των αντίστοιχων κομματιών της άλλης**. Συχνά αυτή η μορφή είναι η πιο εύχρηστη.

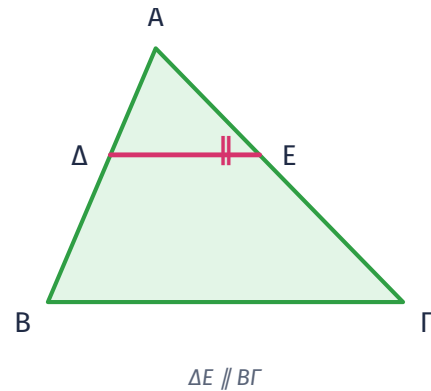
Το θεώρημα του Θαλή σε τρίγωνο

Αν σε ένα τρίγωνο φέρουμε ευθεία **παράλληλη προς μία πλευρά**, μαζί με την πλευρά αυτή και την παράλληλη από την απέναντι κορυφή έχουμε τρεις παράλληλες. Προκύπτει ένα πολύ χρήσιμο πόρισμα:

★ Παράλληλη προς πλευρά τριγώνου

Αν $\Delta E \parallel B\Gamma$ σε τρίγωνο $AB\Gamma$ (με Δ στην AB και E στην $A\Gamma$), τότε:

$$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma} \quad \text{και} \quad \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma}.$$



★ Το αντίστροφο

Αν μια ευθεία τέμνει δύο πλευρές τριγώνου και τις χωρίζει σε **ανάλογα** τμήματα ($\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$), τότε είναι **παράλληλη** προς την τρίτη πλευρά.

✍ Παράδειγμα 2 · Άγνωστο τμήμα σε τρίγωνο

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$ με $A\Delta = 3$, $\Delta B = 5$ και $A\Gamma = 12$. Να βρεθούν τα AE και $E\Gamma$.

ΛΥΣΗ

$$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma} \iff \frac{3}{5} = \frac{AE}{12} \iff AE = \frac{36}{5} = 7,2.$$

Άρα $E\Gamma = 12 - 7,2 = 4,8$. (Έλεγχος: $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{3}{5}$ και $\frac{AE}{E\Gamma} = \frac{7,2}{4,8} = \frac{3}{2} \checkmark$.)

✗ Συχνό λάθος · Λάθος αντιστοίχιση τμημάτων

$$\times \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{E\Gamma}{AE} \quad \checkmark \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$$

Το «πάνω κομμάτι» της μιας πλευράς αντιστοιχεί στο «πάνω κομμάτι» της άλλης. Βοηθά να γράφεις τα τμήματα **με την ίδια σειρά** (από την κορυφή A προς τη βάση).

✗ Συχνό λάθος · Το θεώρημα του Θαλή ΔΕΝ δίνει το ΔΕ

$$\times \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{\Delta E}{B\Gamma}$$

✓ Το θεώρημα του Θαλή συνδέει τμήματα **πάνω στις τέμνουσες** (AB και $A\Gamma$). Για το ΔE ισχύει $\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB}$ — αυτό θα το αποδείξουμε με την **ομοιότητα** (μάθημα 1.5).

✎ Παράδειγμα 3 · Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ τα M, N είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι $MN \parallel B\Gamma$.

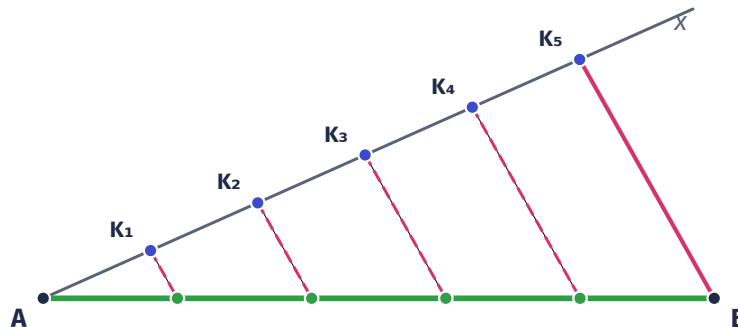
ΛΥΣΗ

Είναι $\frac{AM}{MB} = 1$ και $\frac{AN}{NT} = 1$, άρα $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NT}$. Από το **αντίστροφο** του θεωρήματος, $MN \parallel B\Gamma$.
(Επιπλέον ισχύει $MN = \frac{B\Gamma}{2}$.)

Κατασκευές με το θεώρημα του Θαλή

≡ Χωρισμός τμήματος AB σε n ίσα μέρη

- 1 Από το A φέρνουμε μια **βοηθητική ημιευθεία** Ax (σε τυχαία κλίση).
- 2 Με τον διαβήτη παίρνουμε πάνω της n **ίσα διαδοχικά** τμήματα: $AK_1 = K_1K_2 = \dots$
- 3 Ενώνουμε το **τελευταίο** σημείο K_n με το B .
- 4 Από τα υπόλοιπα σημεία $K_1, K_2, \dots$ φέρνουμε **παράλληλες** προς την K_nB . Αυτές χωρίζουν το AB σε n **ίσα μέρη**.



Χωρισμός του τμήματος AB σε 5 ίσα μέρη

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να χωρίσουμε ένα τμήμα σε **δοσμένο λόγο** $\frac{\mu}{\nu}$: παίρνουμε στην ημιευθεία $\mu + \nu$ ίσα τμήματα και φέρνουμε **μία** παράλληλη από το σημείο K_μ .

► Τέταρτη αναλόγος

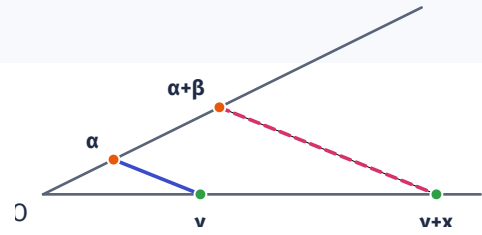
✎ Παράδειγμα 4 · Κατασκευή τέταρτης αναλόγου

Δίνονται τμήματα με μήκη $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 4$. Να κατασκευαστεί τμήμα x ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$ και να υπολογιστεί.

ΛΥΣΗ

Σε δύο ημιευθείες με κοινή αρχή O παίρνουμε στη μία $OA = \alpha, AB = \beta$ και στην άλλη $OG = \gamma$. Φέρνουμε την AG και από το B παράλληλη προς αυτήν, που τέμνει τη δεύτερη ημιευθεία στο Δ . Από τον Θαλή $\frac{OA}{AB} = \frac{OG}{\Gamma\Delta}$, άρα το $\Gamma\Delta$ είναι το ζητούμενο x .

Αριθμητικά: $\frac{2}{3} = \frac{4}{x} \iff x = 6$.



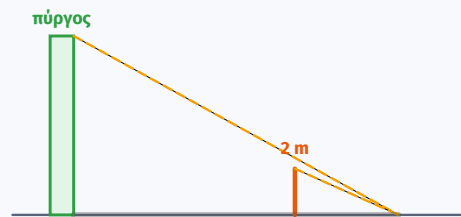
✎ Παράδειγμα 5 · Η μέθοδος του Θαλή για την πυραμίδα

Ένα ραβδί ύψους 2 m ρίχνει σκιά 3 m, την ίδια στιγμή που ένας πύργος ρίχνει σκιά 45 m. Πόσο ψηλός είναι ο πύργος;

ΛΥΣΗ

Οι ακτίνες του ήλιου είναι **παράλληλες**, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα «αντικείμενο – σκιά – ακτίνα» είναι ανάλογα:

$$\frac{h}{45} = \frac{2}{3} \iff h = 30 \text{ m.}$$



Συνέχισε στο mathgreece.com



Κόλλησες κάπου; Στο mathgreece.com υπάρχει ολόκληρο το μάθημα με βιντεομαθήματα, σημειώσεις και ασκήσεις — ένα πλήρες **δωρεάν φροντιστήριο** μαθηματικών.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

☰ Σύνοψη μαθήματος

- **Θεώρημα του Θαλή:** παράλληλες ευθείες ορίζουν **ανάλογα τμήματα** σε δύο τέμνουσες.
- Σε τρίγωνο: $\Delta E \parallel B\Gamma \Rightarrow \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{A E}{E\Gamma}$ και $\frac{A\Delta}{A B} = \frac{A E}{A\Gamma}$. Ισχύει και το **αντίστροφο**.
- Το θεώρημα αφορά τμήματα **πάνω στις τέμνουσες**, όχι τα παράλληλα τμήματα.
- Κατασκευές: χωρισμός σε ν ίσα μέρη, σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, τέταρτη ανάλογος.

🎯 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Τρεις παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο ευθείες δ και δ' στα A, B, Γ και A', B', Γ'. Αν $AB = 6$, $B\Gamma = 9$ και $B'\Gamma' = 12$, να βρεις το A'B'. ★★
- 2 Σε τρίγωνο ABΓ είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$ ($\Delta \in AB$, $E \in A\Gamma$), $A\Delta = 4$, $\Delta B = 6$, $A E = 5$. Να βρεις το EΓ. ★★
- 3 Σε τρίγωνο ABΓ είναι $AB = 15$, $A\Gamma = 10$ και $\Delta E \parallel B\Gamma$ με $A\Delta = 6$. Να βρεις τα A E και EΓ. ★★

- 4 Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AD = 3$, $DB = 4,5$, $AE = 4$, $EG = 6$ ($D \in AB$, $E \in AG$). Είναι $DE \parallel B\Gamma$; ★★ ★
- 5 Να χωρίσεις (με κανόνα και διαβήτη) ένα τμήμα $AB = 7 \text{ cm}$ σε 3 ίσα μέρη. Να περιγράψεις τα βήματα. ★★ ★
- 6 Ένας στύλος ύψους $1,5 \text{ m}$ ρίχνει σκιά 2 m . Την ίδια ώρα ένα δέντρο ρίχνει σκιά 10 m . Πόσο ψηλό είναι το δέντρο; ★★ ★
- 7 Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) μια ευθεία παράλληλη προς τις βάσεις τέμνει τις μη παράλληλες πλευρές AD και $B\Gamma$ στα E και Z . Αν $AE = 2$, $E\Delta = 3$ και $B\Gamma = 10$, να βρεις τα BZ και $Z\Gamma$. ★★ ★
- 8 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε από το μέσο M της AB παράλληλη προς τη $B\Gamma$, που τέμνει την AG στο N . Να αποδείξεις ότι το N είναι μέσο της AG . ★★ ★

1.4 Ομοιοθεσία

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τι είναι **ομοιοθεσία** με **κέντρο** O και **λόγο** $\lambda > 0$,
- να κατασκευάζεις το **ομοιόθετο** ενός σημείου, ενός τμήματος και ενός πολυγώνου,
- τις **ιδιότητες** των ομοιόθετων σχημάτων (παράλληλες πλευρές, πλευρές λ φορές, ίσες γωνίες),
- τότε έχουμε **μεγέθυνση** και τότε **σμίκρυνση**.

Η ιδέα: ένας «προβολέας» σχημάτων

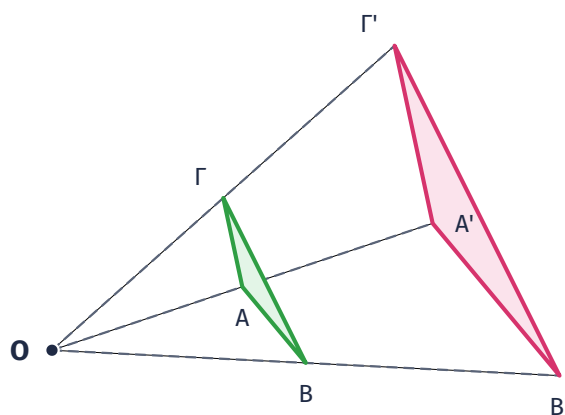
Φαντάσου έναν προβολέα σε ένα σημείο O που φωτίζει ένα σχήμα και το «ρίχνει» σε μεγαλύτερο ή μικρότερο μέγεθος. Το σχήμα που προκύπτει έχει **την ίδια μορφή** με το αρχικό, αλλά διαφορετικό μέγεθος. Αυτή η διαδικασία λέγεται **ομοιοθεσία**.

☒ Ορισμός · Ομοιόθετο σημείου

Δίνονται ένα σημείο O (**κέντρο**) και ένας θετικός αριθμός λ (**λόγος**). **Ομοιόθετο** ενός σημείου A λέγεται το σημείο A' της ημιευθείας OA για το οποίο

$$OA' = \lambda \cdot OA \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{OA'}{OA} = \lambda.$$

Το ομοιόθετο του κέντρου O είναι το ίδιο το O .



Ομοιοθεσία με κέντρο O και λόγο $\lambda = 2$: κάθε σημείο «απομακρύνεται» διπλάσια από το O

★ Μεγέθυνση ή σμίκρυνση;

- Αν $\lambda > 1$: το ομοιόθετο σχήμα είναι **μεγέθυνση** του αρχικού (τα σημεία απομακρύνονται από το O).
- Αν $0 < \lambda < 1$: είναι **σμίκρυνση** (τα σημεία πλησιάζουν το O).
- Αν $\lambda = 1$: κάθε σημείο μένει **στη θέση του**.

Κατασκευή ομοιόθετου σχήματος

≡ Κατασκευή του ομοιόθετου ενός πολυγώνου

- 1 Ενώνω το κέντρο O με **κάθε κορυφή** και προεκτείνω (ημιευθείες).
- 2 Σε κάθε ημιευθεία παίρνω το σημείο A' με $OA' = \lambda \cdot OA$ (μετρώ με κανόνα ή διαβήτη).
- 3 Ενώνω τα νέα σημεία **με την ίδια σειρά**.

✓ Σε τετραγωνισμένο χαρτί

Αν το κέντρο και οι κορυφές βρίσκονται σε κόμβους του τετραγωνισμένου χαρτιού, μετράμε «πόσα κουτάκια δεξιά και πάνω» είναι η κορυφή από το O και τα πολλαπλασιάζουμε με λ . Π.χ. αν η A είναι 3 δεξιά και 1 πάνω από το O , με $\lambda = 2$ η A' είναι 6 δεξιά και 2 πάνω.

✎ Παράδειγμα 1 · Ομοιοθεσία σε τετραγωνισμένο χαρτί

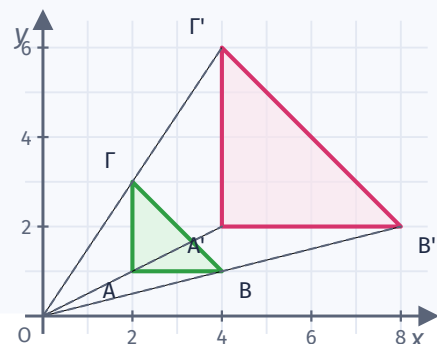
Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(2, 1)$, $B(4, 1)$, $\Gamma(2, 3)$. Να βρεθεί το ομοιόθετό του με κέντρο $O(0, 0)$ και λόγο $\lambda = 2$ και να συγκριθούν οι πλευρές.

ΛΥΣΗ

Πολλαπλασιάζουμε τις συντεταγμένες με 2: $A'(4, 2)$, $B'(8, 2)$, $\Gamma'(4, 6)$.

- $AB = 2$ και $A'B' = 4$: διπλάσια.
- $A\Gamma = 2$ και $A'\Gamma' = 4$: διπλάσια.
- $A'B' \parallel AB$ (οριζόντιες) και $A'\Gamma' \parallel A\Gamma$ (κατακόρυφες).

Οι γωνίες έμειναν **ίδιες** (π.χ. $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$).



Ιδιότητες της ομοιοθεσίας

★ Ιδιότητες ομοιόθετων σχημάτων (λόγος λ)

1. Το ομοιόθετο ενός **ευθύγραμμου τμήματος** AB είναι ευθύγραμμο τμήμα $A'B'$ **παράλληλο** προς το AB (ή στην ίδια ευθεία) και $A'B' = \lambda \cdot AB$.
2. Το ομοιόθετο μιας **γωνίας** είναι γωνία **ίση** με αυτήν.
3. Το ομοιόθετο ενός **πολυγώνου** είναι πολύγωνο με **πλευρές παράλληλες και λ φορές** τις αντίστοιχες πλευρές του αρχικού και **ίσες αντίστοιχες γωνίες**.
4. Το ομοιόθετο ενός **κύκλου** (K, ρ) είναι κύκλος $(K', \lambda\rho)$, όπου K' το ομοιόθετο του κέντρου K .

⚠ Γιατί ισχύει η ιδιότητα 1;

Στο τρίγωνο $OA'B'$ είναι $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{1}{\lambda}$. Από το **αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή**, $AB \parallel A'B'$.
Βλέπεις πώς «δένουν» τα μαθήματα;

✏ Παράδειγμα 2 · Σμίκρυνση

Ένα τετράγωνο έχει πλευρά 6 cm. Να βρεθεί η πλευρά, η περίμετρος και το εμβαδόν του ομοιόθετού του με λόγο $\lambda = \frac{1}{3}$.

ΛΥΣΗ

Πλευρά: $\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$ cm. Περίμετρος: 8 cm (αντί για 24, δηλαδή επίσης $\frac{1}{3}$). Εμβαδόν: 4 cm² (αντί για 36, δηλαδή $\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ — θα το δούμε στο μάθημα 1.6!).

✖ Συχνό λάθος · Το ομοιόθετο βρίσκεται στην ημιευθεία OA

✖ Παίρνω το A' σε οποιαδήποτε θέση με $OA' = \lambda \cdot OA$ (π.χ. σε άλλη κατεύθυνση).

✓ Το A' βρίσκεται **πάνω στην ημιευθεία OA** , προς την **ίδια** κατεύθυνση με το A (για $\lambda > 0$).

✖ Συχνό λάθος · Ο λόγος μετριέται από το κέντρο

✖ Για $\lambda = 3$ παίρνω $AA' = 3 \cdot OA$.

✓ Πρέπει $OA' = 3 \cdot OA$, οπότε $AA' = OA' - OA = 2 \cdot OA$. Μετράμε **πάντα από το κέντρο O** .

 Παράδειγμα 3 · Εύρεση κέντρου και λόγου

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ομοιόθετα. Πώς βρίσκουμε το κέντρο και τον λόγο της ομοιοθεσίας;

ΛΥΣΗ

Οι ευθείες AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$ περνούν **όλες** από το κέντρο O . Άρα το κέντρο είναι το **σημείο τομής** δύο από αυτές. Ο λόγος είναι $\lambda = \frac{A'B'}{AB}$ (ή $\frac{OA'}{OA}$).

 Ομοιοθεσία στην καθημερινή ζωή

Η **φωτογραφική μεγέθυνση**, ο **προβολέας** στην τάξη, οι **σκιές** από μια λάμπα, η **μεγέθυνση/σμίκρυνση** ενός σχεδίου στον υπολογιστή (όταν κρατάμε τις αναλογίες) είναι όλα παραδείγματα ομοιοθεσίας.

Συνέχισε στο mathgreece.com

Θέλεις να εμπεδώσεις καλύτερα τη θεωρία; Δες τα σχετικά βίντεο στο **mathgreece.com** και στο κανάλι **MATHGREECE** στο YouTube — ένα ολοκληρωμένο **δωρεάν φροντιστήριο**.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

 Σύνοψη μαθήματος

- Ομοιόθετο του A (κέντρο O , λόγος $\lambda > 0$): σημείο A' της ημιευθείας OA με $OA' = \lambda \cdot OA$.
- $\lambda > 1$ μεγέθυνση, $0 < \lambda < 1$ σμίκρυνση.
- Ομοιόθετα σχήματα: πλευρές **παράλληλες** και **λ φορές**, γωνίες **ίσες**.
- Οι ευθείες που ενώνουν αντίστοιχα σημεία περνούν από το κέντρο.

 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- Δίνεται τμήμα $OA = 3$ cm. Να βρεις το OA' όταν ο λόγος ομοιοθεσίας (κέντρο O) είναι: α) $\lambda = 2$   
β) $\lambda = \frac{1}{3}$ γ) $\lambda = 1,5$.
- Ένα τρίγωνο έχει πλευρές 4, 5, 6 cm. Ποιες είναι οι πλευρές του ομοιόθετού του με λόγο $\lambda = 2,5$; Ποια η περίμετρός του;   
- Σε σύστημα αξόνων να σχεδιάσεις το τετράπλευρο $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $\Gamma(3, 2)$, $\Delta(1, 2)$ και το ομοιόθετό του με κέντρο $O(0, 0)$ και λόγο 3. Να γράψεις τις συντεταγμένες των νέων κορυφών.   
- Το ομοιόθετο ενός κύκλου ακτίνας 5 cm έχει ακτίνα 2 cm. Ποιος είναι ο λόγος της ομοιοθεσίας; Είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση;   

- 5 Τα τμήματα AB και $A'B'$ είναι ομοιόθετα με κέντρο O . Αν $OA = 4$, $AA' = 6$ (το A ανάμεσα στα O , A') και $AB = 3$, να βρεις τον λόγο και το $A'B'$. ★★☆☆
- 6 Να εξηγήσεις γιατί δύο ομοιόθετα τετράγωνα έχουν τις διαγώνιές τους σε λόγο λ και γιατί κάθε ομοιόθετο τετραγώνου είναι πάλι τετράγωνο. ★★★

Β' ΜΕΡΟΣ · ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο · ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ > ΜΑΘΗΜΑ 1.5

1.5 Ομοιότητα

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- πότε δύο πολύγωνα λέγονται **όμοια** και τι είναι ο **λόγος ομοιότητας**,
- το **κριτήριο ομοιότητας τριγώνων** (δύο γωνίες ίσες),
- να γράφεις σωστά την **αναλογία των πλευρών** όμοιων τριγώνων,
- να υπολογίζεις **άγνωστα μήκη** και να λύνεις **πρακτικά προβλήματα**.

Α. Όμοια πολύγωνα

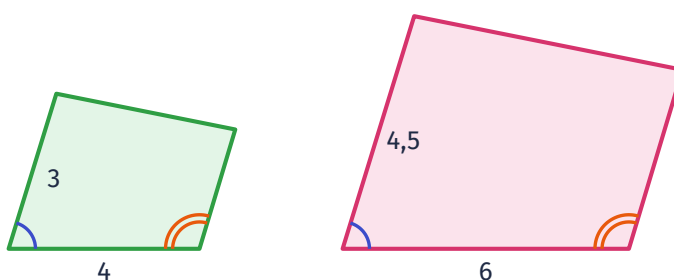
Δύο σχήματα είναι **όμοια** όταν έχουν **την ίδια μορφή**, ενώ μπορεί να έχουν διαφορετικό μέγεθος ή θέση. Για παράδειγμα, μια φωτογραφία και η μεγέθυνσή της, ένα αυτοκίνητο και η μακέτα του, μια χώρα και ο χάρτης της.

☰ Ορισμός · Όμοια πολύγωνα

Δύο πολύγωνα λέγονται **όμοια** όταν το ένα είναι **μεγέθυνση ή σμίκρυνση** του άλλου, δηλαδή όταν:

- έχουν τις **γωνίες τους ίσες** μία προς μία, και
- έχουν τις **αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες**.

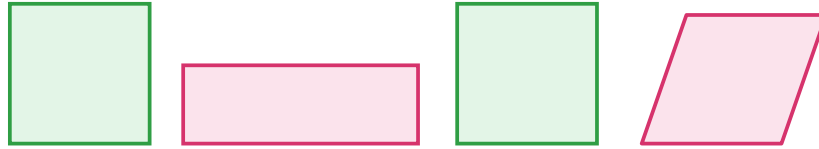
Ο σταθερός λόγος λ των αντίστοιχων πλευρών λέγεται **λόγος ομοιότητας**.



Δύο όμοια τετράπλευρα με λόγο ομοιότητας $\lambda = 1,5$

⚠ Χρειάζονται ΚΑΙ οι δύο συνθήκες!

- Ένα τετράγωνο και ένας ρόμβος (με πλευρά ίδια) έχουν **ανάλογες πλευρές** αλλά **όχι ίσες γωνίες**: **δεν** είναι όμοια.
- Ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο 1×3 έχουν **ίσες γωνίες** (όλες 90°) αλλά **όχι ανάλογες πλευρές**: **δεν** είναι όμοια.



Ίσες γωνίες δεν αρκούν (αριστερά) — ανάλογες πλευρές δεν αρκούν (δεξιά)

Όλοι οι **κύκλοι** είναι όμοιοι μεταξύ τους· το ίδιο όλα τα **τετράγωνα** και όλα τα **ισόπλευρα τρίγωνα**. Τα **ομοιόθετα** σχήματα του προηγούμενου μαθήματος είναι πάντα όμοια.

✎ Παράδειγμα 1 · Όμοια ορθογώνια

Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις 8 cm και 5 cm. Ένα όμοιό του έχει μεγαλύτερη πλευρά 12 cm. Να βρεθούν ο λόγος ομοιότητας και η άλλη πλευρά.

ΛΥΣΗ

Οι μεγάλες πλευρές αντιστοιχούν: $\lambda = \frac{12}{8} = 1,5$. Η μικρή πλευρά είναι $1,5 \cdot 5 = 7,5$ cm.

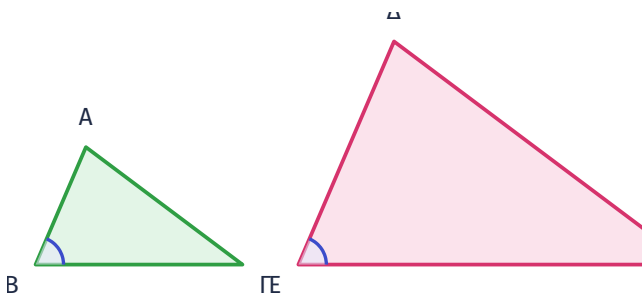
B. Όμοια τρίγωνα

Για τα τρίγωνα τα πράγματα είναι πολύ πιο απλά: **δεν** χρειάζεται να ελέγξουμε όλες τις γωνίες και όλες τις πλευρές.

★ Κριτήριο ομοιότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν **δύο γωνίες ίσες** μία προς μία, τότε είναι **όμοια**.

(Η τρίτη γωνία είναι τότε αυτόματα ίση, αφού το άθροισμα των γωνιών είναι 180° .)



Δύο γωνίες ίσες $\Rightarrow$ όμοια τρίγωνα

★ Αναλογία πλευρών

Αν $AB\Gamma \sim \Delta EZ$ με $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$, τότε

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{\Gamma A}{Z\Delta} = \lambda.$$

Απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται **ανάλογες** (ομόλογες) πλευρές.

≡ Πώς γράφω σωστά την αναλογία

- 1 Βρίσκω τις **ίσες γωνίες** και γράφω τα τρίγωνα με **αντίστοιχη σειρά κορυφών** ($AB\Gamma \sim \Delta EZ$ σημαίνει $A \leftrightarrow \Delta, B \leftrightarrow E, \Gamma \leftrightarrow Z$).
- 2 «Διαβάζω» τις πλευρές από τη σειρά: $AB \leftrightarrow \Delta E, B\Gamma \leftrightarrow EZ, \Gamma A \leftrightarrow Z\Delta$.
- 3 Γράφω την αναλογία $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{\Gamma A}{Z\Delta}$ και κρατάω τους λόγους που χρειάζομαι.

✗ Συχνό λάθος · Λάθος ζευγάριμα πλευρών

✗ Αντιστοιχίζω την **πιο μεγάλη** πλευρά του ενός με μια **τυχαία** πλευρά του άλλου, ή γράφω $\frac{AB}{EZ}$ επειδή «έτσι βγαίνει στο σχήμα».

✓ Ομόλογες πλευρές είναι αυτές που βρίσκονται **απέναντι από ίσες γωνίες**. Η μεγαλύτερη πλευρά του ενός αντιστοιχεί πάντα στη μεγαλύτερη του άλλου.

✎ Παράδειγμα 2 · Το «τρίγωνο μέσα στο τρίγωνο»

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$ με Δ στην AB , E στην AG . Αν $A\Delta = 4$, $\Delta B = 2$ και $B\Gamma = 9$, να βρεθεί το ΔE .

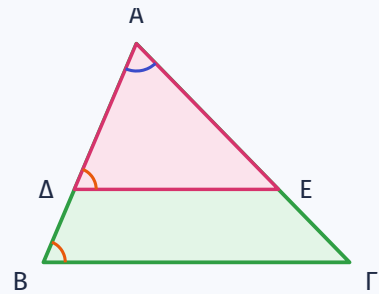
ΛΥΣΗ

Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ έχουν:

- $\hat{A}$ **κοινή**,
- $\hat{A}\Delta E = \hat{A}B\Gamma$ (εντός εκτός και επί τα αυτά, αφού $\Delta E \parallel B\Gamma$).

Άρα $A\Delta E \sim AB\Gamma$ και

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta E}{B\Gamma} \iff \frac{4}{6} = \frac{\Delta E}{9} \iff \Delta E = 6.$$



★ Χρήσιμο αποτέλεσμα

Κάθε ευθεία **παράλληλη** προς μια πλευρά τριγώνου σχηματίζει με τις άλλες δύο πλευρές ένα τρίγωνο **όμοιο** με το αρχικό.

✎ Παράδειγμα 3 · Ορθογώνιο τρίγωνο και ύψος

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρνουμε το ύψος $A\Delta$. Να αποδειχθεί ότι $AB\Gamma \sim \Delta BA$ και ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$.

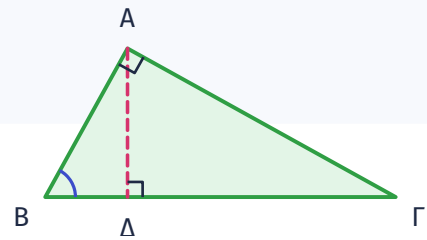
ΛΥΣΗ

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔBA έχουν:

- $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Delta}A = 90^\circ$,
- $\hat{B}$ **κοινή**.

Άρα είναι όμοια, με αντιστοιχία $A \leftrightarrow \Delta, B \leftrightarrow B, \Gamma \leftrightarrow \Lambda$:

$$\frac{AB}{\Delta B} = \frac{B\Gamma}{BA} \iff AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta.$$



II Το όργανο του Θαλή... και του Ερατοσθένη

Με τα όμοια τρίγωνα οι αρχαίοι Έλληνες μέτρησαν αποστάσεις που δεν μπορούσαν να «φτάσουν»: ύψη πυραμίδων, αποστάσεις πλοίων στη θάλασσα — ο **Ερατοσθένης** μέτρησε ακόμη και την περιφέρεια της Γης, με σφάλμα μόλις λίγων τοις εκατό!

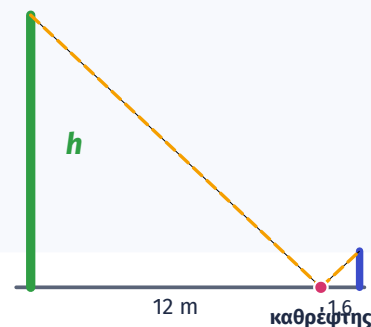
✏ Παράδειγμα 4 · Μέτρηση ύψους με καθρέφτη

Ένας μαθητής τοποθετεί έναν καθρέφτη στο έδαφος σε απόσταση 12 m από ένα δέντρο. Απομακρύνεται 1,6 m από τον καθρέφτη και βλέπει σε αυτόν την κορυφή του δέντρου. Τα μάτια του βρίσκονται σε ύψος 1,5 m. Πόσο ψηλό είναι το δέντρο;

ΛΥΣΗ

Η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης. Τα δύο ορθογώνια τρίγωνα (δέντρο – καθρέφτης και μαθητής – καθρέφτης) έχουν μια ορθή γωνία και μια οξεία ίση, άρα είναι **όμοια**:

$$\frac{h}{1,5} = \frac{12}{1,6} \iff h = \frac{12 \cdot 1,5}{1,6} = 11,25 \text{ m.}$$



✓ Για τον φιλομαθή: άλλα δύο κριτήρια

Δύο τρίγωνα είναι επίσης όμοια αν έχουν: α) **μία γωνία ίση** και τις πλευρές που την περιέχουν **ανάλογες**, ή β) **και τις τρεις πλευρές ανάλογες**. Θα τα συναντήσεις στη Γεωμετρία του Λυκείου.

Συνέχισε στο mathgreece.com



Θέλεις να εμπεδώσεις καλύτερα τη θεωρία; Δες τα σχετικά βίντεο στο mathgreece.com και στο κανάλι **MATHGREECE** στο YouTube — ένα ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

Σύνοψη μαθήματος

- Όμοια πολύγωνα: **ίσες γωνίες και ανάλογες πλευρές**. λ = λόγος ομοιότητας.
- Τρίγωνα: **δύο γωνίες ίσες** $\Rightarrow$ όμοια.
- Ομόλογες πλευρές: απέναντι από **ίσες γωνίες**. Σειρά κορυφών: $AB\Gamma \sim \Delta EZ$.
- Παράλληλη σε πλευρά τριγώνου $\Rightarrow$ όμοιο τρίγωνο $\Rightarrow \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{\Delta E}{B\Gamma}$.

Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $K\Lambda M$ έχουν $\hat{A} = 50^\circ$, $\hat{B} = 70^\circ$, $\hat{K} = 50^\circ$, $\hat{M} = 60^\circ$. Είναι όμοια; Ποιες πλευρές είναι ομόλογες; ★★
- 2 Δύο όμοια τρίγωνα έχουν λόγο ομοιότητας $\frac{3}{2}$. Το μικρό έχει πλευρές 4, 6, 8 cm. Να βρεις τις πλευρές και την περίμετρο του μεγάλου. ★★
- 3 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$, $A\Delta = 3$, $AB = 9$, $\Delta E = 4$. Να βρεις τη $B\Gamma$. ★★★
- 4 Τα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται στο O και $AB \parallel \Gamma\Delta$. Αν $OA = 6$, $OG = 9$ και $AB = 4$, να βρεις το $\Gamma\Delta$. ★★★
- 5 Ένα κτίριο ρίχνει σκιά 18 m, ενώ ένας άνθρωπος ύψους 1,8 m ρίχνει την ίδια ώρα σκιά 2,4 m. Να βρεις το ύψος του κτιρίου. ★★★
- 6 Η μακέτα ενός σπιτιού είναι κατασκευασμένη σε κλίμακα 1 : 50. Αν το ύψος της μακέτας είναι 16 cm, πόσο ψηλό είναι το σπίτι; ★★★
- 7 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με ύψος $A\Delta$ είναι $B\Delta = 4$ και $\Delta\Gamma = 9$. Να βρεις τα AB , $A\Gamma$ και $A\Delta$. ★★★
- 8 Να αποδείξεις ότι δύο ισοσκελή τρίγωνα με ίσες τις γωνίες της κορυφής τους είναι όμοια. ★★★

Β' ΜΕΡΟΣ · ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο · ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ > ΜΑΘΗΜΑ 1.6

1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων

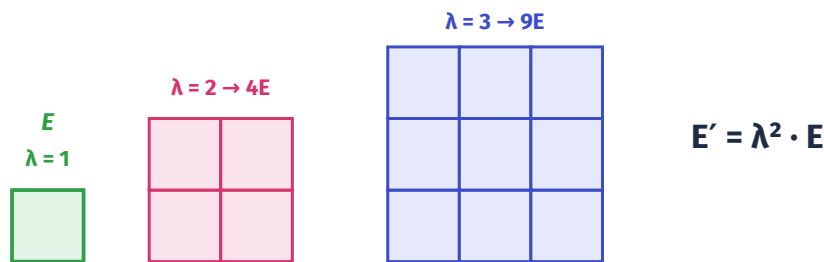
☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- ότι ο **λόγος των εμβαδών** δύο όμοιων σχημάτων ισούται με το **τετράγωνο του λόγου ομοιότητας**:

$$\frac{E'}{E} = \lambda^2,$$
- ότι οι **περίμετροι** είναι σε λόγο λ ,
- να λύνεις προβλήματα με χάρτες, μακέτες και μεγεθύνσεις,
- (για τον φιλομαθή) ότι οι **όγκοι** όμοιων στερεών είναι σε λόγο λ^3 .

Ένα απρόσμενο αποτέλεσμα

Αν διπλασιάσουμε την πλευρά ενός τετραγώνου, το εμβαδόν του **διπλασιάζεται**; Ας το δούμε στο σχήμα:



Με διπλάσια πλευρά χωράνε 4 αρχικά τετράγωνα· με τριπλάσια, 9

Όχι! Με διπλάσια πλευρά το εμβαδόν γίνεται **τετραπλάσιο** ($2^2 = 4$), με τριπλάσια γίνεται **εννεαπλάσιο** ($3^2 = 9$). Το ίδιο ισχύει για **κάθε** ζεύγος όμοιων σχημάτων.

★ Λόγος εμβαδών όμοιων σχημάτων

Αν δύο σχήματα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ , τότε:

$$\frac{\text{περίμετρος}'}{\text{περίμετρος}} = \lambda \qquad \frac{E'}{E} = \lambda^2.$$

Ο λόγος των εμβαδών ισούται με το **τετράγωνο** του λόγου ομοιότητας.

Γιατί ισχύει για τρίγωνα; Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια με λόγο λ , τότε και τα **ύψη** τους είναι σε λόγο λ . Έτσι:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{1}{2} \beta' v'}{\frac{1}{2} \beta v} = \frac{\beta'}{\beta} \cdot \frac{v'}{v} = \lambda \cdot \lambda = \lambda^2.$$

Και αφού κάθε πολύγωνο χωρίζεται σε τρίγωνα, το αποτέλεσμα ισχύει για όλα τα πολύγωνα.

✗ Συχνό λάθος · Ο λόγος εμβαδών ΔΕΝ είναι λ

✗ «Η φωτογραφία μεγεθύνθηκε τρεις φορές, άρα χρειάζεται τρεις φορές περισσότερο χαρτί.»

✓ Οι διαστάσεις τριπλασιάζονται, άρα το εμβαδόν γίνεται $3^2 = 9$ φορές μεγαλύτερο.

✗ Συχνό λάθος · Ανάποδα: από εμβαδά σε λόγο

✗ «Τα εμβαδά είναι σε λόγο 16, άρα $\lambda = 16$.»

✓ Αν $\frac{E'}{E} = 16$, τότε $\lambda^2 = 16$, οπότε $\lambda = \sqrt{16} = 4$. Από εμβαδά σε πλευρές περνάμε με **τετραγωνική ρίζα**.

✍ Παράδειγμα 1 · Από λόγο ομοιότητας σε εμβαδόν

Δύο όμοια τρίγωνα έχουν λόγο ομοιότητας $\frac{5}{2}$. Αν το εμβαδόν του μικρού είναι 12 cm^2 , να βρεθεί το εμβαδόν του μεγάλου.

ΛΥΣΗ

$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \iff E' = 12 \cdot \frac{25}{4} = 75 \text{ cm}^2.$$

✍ Παράδειγμα 2 · Από εμβαδά σε πλευρές

Δύο όμοια πολύγωνα έχουν εμβαδά 50 cm^2 και 18 cm^2 . Μια πλευρά του μεγάλου είναι 10 cm . Να βρεθεί η ομόλογη πλευρά του μικρού.

ΛΥΣΗ

$$\lambda^2 = \frac{18}{50} = \frac{9}{25} \iff \lambda = \frac{3}{5}.$$

Η πλευρά του μικρού είναι $\frac{3}{5} \cdot 10 = 6 \text{ cm}$.

✍ Παράδειγμα 3 · Χάρτης

Σε χάρτη κλίμακας $1 : 100\,000$ μια λίμνη καλύπτει έκταση 3 cm^2 . Ποια είναι η πραγματική έκτασή της σε km^2 ;

ΛΥΣΗ

Ο λόγος ομοιότητας (πραγματικότητα : χάρτης) είναι $100\,000$, άρα ο λόγος εμβαδών είναι $100\,000^2 = 10^{10}$.

$$3 \text{ cm}^2 \cdot 10^{10} = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2.$$

Επειδή $1 \text{ km} = 10^5 \text{ cm}$, είναι $1 \text{ km}^2 = 10^{10} \text{ cm}^2$. Άρα η λίμνη έχει έκταση **3 km^2** .

Β' ΤΡΟΠΟΣ: ΠΡΩΤΑ ΤΑ ΜΗΚΗ

1 cm στον χάρτη είναι 1 km στην πραγματικότητα. Άρα 1 cm^2 του χάρτη αντιστοιχεί σε 1 km^2 , και τα 3 cm^2 σε 3 km^2 .

✎ Παράδειγμα 4 · Το τρίγωνο των μέσων

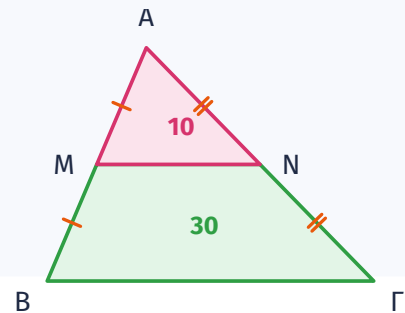
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ εμβαδού 40 cm^2 , τα M και N είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου AMN και του τραπέζιου $MN\Gamma B$.

ΛΥΣΗ

Είναι $MN \parallel B\Gamma$, άρα $AMN \sim AB\Gamma$ με λόγο $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$. Επομένως

$$\frac{(AMN)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \iff (AMN) = 10 \text{ cm}^2.$$

Το τραπέζιο έχει εμβαδόν $40 - 10 = 30 \text{ cm}^2$, τριπλάσιο του μικρού τριγώνου!



✓ Συμβολισμός εμβαδού

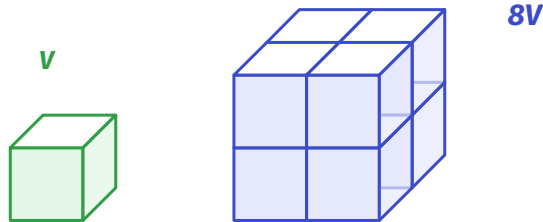
Το εμβαδόν ενός πολυγώνου $AB\Gamma$ συχνά συμβολίζεται με παρένθεση: $(AB\Gamma)$.

Για τον φιλομαθή: ο λόγος όγκων

★ Όγκοι όμοιων στερεών

Αν δύο στερεά είναι όμοια με λόγο λ , τότε ο λόγος των **όγκων** τους είναι λ^3 :

$$\frac{V'}{V} = \lambda^3.$$



Ένας κύβος με διπλάσια ακμή «χωράει» $2^3 = 8$ αρχικούς κύβους

Γι' αυτό ένα μοντέλο σε κλίμακα $1 : 10$ ζυγίζει **χιλίες** φορές λιγότερο από το πραγματικό αντικείμενο (αν είναι από το ίδιο υλικό)!

 Παράδειγμα 5 · Όμοια κουτιά

Δύο όμοια κουτιά έχουν ύψη 10 cm και 15 cm. Αν το μικρό χωράει 400 cm³, πόσο χωράει το μεγάλο; Πόσο περισσότερο χαρτόνι χρειάζεται;

ΛΥΣΗ

$\lambda = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$. Όγκος: $400 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 400 \cdot \frac{27}{8} = 1350 \text{ cm}^3$. Χαρτόνι (επιφάνεια): $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25$ φορές περισσότερο.

**Συνέχισε στο mathgreece.com**

Για περισσότερη εξάσκηση: στο **mathgreece.com** θα βρεις βίντεο, κουίζ, παιχνίδια γνώσεων και επιπλέον φυλλάδια ασκήσεων — **όλα δωρεάν**.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

 Σύνοψη μαθήματος

- Όμοια σχήματα με λόγο λ : **μήκη** (πλευρές, ύψη, περίμετροι) σε λόγο λ , **εμβαδά** σε λόγο λ^2 , **όγκοι** σε λόγο λ^3 .
- Από εμβαδά σε λόγο ομοιότητας: $\lambda = \sqrt{\frac{E'}{E}}$.
- Χάρτης κλίμακας 1 : κ : τα εμβαδά πολλαπλασιάζονται με κ^2 .

 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

★ ★ ★

- 1** Δύο όμοια τρίγωνα έχουν λόγο ομοιότητας 3. Αν το μικρό έχει περίμετρο 12 cm και εμβαδόν 6 cm², να βρεις την περίμετρο και το εμβαδόν του μεγάλου.

★ ★ ★

- 2** Τα εμβαδά δύο όμοιων πολυγώνων είναι 36 cm² και 81 cm². Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας;

★ ★ ★

- 3** Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν 20 cm². Ένα δεύτερο τετράγωνο έχει πλευρά 2,5 φορές μεγαλύτερη. Να βρεις το εμβαδόν του.

★ ★ ★

- 4** Σε τρίγωνο ΑΒΓ εμβαδού 54 cm² φέρνουμε ΔΕ ∥ ΒΓ με $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{3}$. Να βρεις το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ και του τραπεζίου ΔΕΓΒ.

★ ★ ★

- 5** Σε χάρτη κλίμακας 1 : 50 000 ένα οικοπέδο έχει εμβαδόν 2 cm². Ποιο είναι το πραγματικό εμβαδόν σε στρέμματα; (1 στρέμμα = 1000 m²)

★ ★ ★

- 6** Μια πίτσα διαμέτρου 30 cm κοστίζει 10 €. Μια πίτσα διαμέτρου 40 cm κοστίζει 16 €. Ποια συμφέρει περισσότερο (θεωρώντας ίδιο πάχος);



- 7 Πόσες φορές πρέπει να μεγαλώσουμε τις διαστάσεις ενός σχήματος ώστε το εμβαδόν του να διπλασιαστεί;



- 8 Ένα άγαλμα ύψους 2 m ζυγίζει 800 kg. Ένα όμοιο αντίγραφο από το ίδιο υλικό έχει ύψος 50 cm. Πόσο ζυγίζει;

Β' ΜΕΡΟΣ · ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο · ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ > ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ



Επανάληψη 1ου Κεφαλαίου

Όλο το κεφάλαιο με μια ματιά

☰ Ισότητα τριγώνων

- Κριτήρια: Π-Γ-Π, Γ-Π-Γ, Π-Π-Π
- Ορθογώνια: 2 κάθετες · κάθετη+οξεία · υποτείνουσα+οξεία · υποτείνουσα+κάθετη
- Ισοσκελές: ίσες γωνίες βάσης, διάμεσος = ύψος = διχοτόμος

☰ Λόγοι – Θαλής – Ομοιοθεσία

- $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \lambda$ (ίδια μονάδα)
- Θαλής: παράλληλες $\rightarrow$ ανάλογα τμήματα
- Ομοιοθεσία: $OA' = \lambda \cdot OA$, πλευρές $\parallel$ και λ φορές

☰ Ομοιότητα

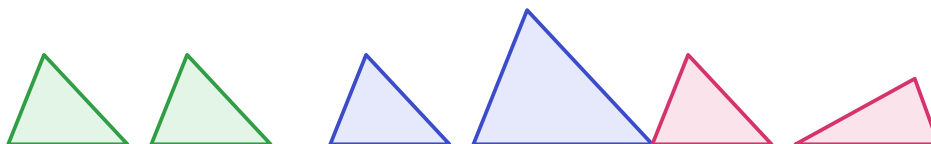
- Πολύγωνα: ίσες γωνίες **και** ανάλογες πλευρές
- Τρίγωνα: **δύο γωνίες ίσες** αρκούν
- Ομόλογες πλευρές: απέναντι από ίσες γωνίες

☰ Εμβαδά – Όγκοι

- Μήκη: λ · Εμβαδά: λ^2 · Όγκοι: λ^3
- $\lambda = \sqrt{\frac{E'}{E}}$

ίσα ($\lambda = 1$)όμοια ($\lambda = 1,5$)

ούτε ίσα ούτε όμοια



Ίσα, όμοια ή τίποτα από τα δύο;

✗ Συχνό λάθος · Συχνά λάθη του κεφαλαίου

✗ «Γ-Γ-Γ $\Rightarrow$ ίσα τρίγωνα» ✓ Γ-Γ-Γ $\Rightarrow$ **όμοια** (όχι κατ' ανάγκη ίσα)✗ Π-Π-Γ με μη περιεχόμενη γωνία ✓ Η γωνία πρέπει να είναι **περιεχόμενη**✗ $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{\Delta E}{B\Gamma}$ ✓ $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta E}{B\Gamma}$ (ομοιότητα)✗ Λόγος εμβαδών = λ ✓ = λ^2

Συνέχισε στο mathgreece.com

Θέλεις να εμπεδώσεις καλύτερα τη θεωρία; Δες τα σχετικά βίντεο στο **mathgreece.com** και στο κανάλι **MATHGREECE** στο YouTube — ένα ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

mathgreece.com
δωρεάν φροντιστήριο

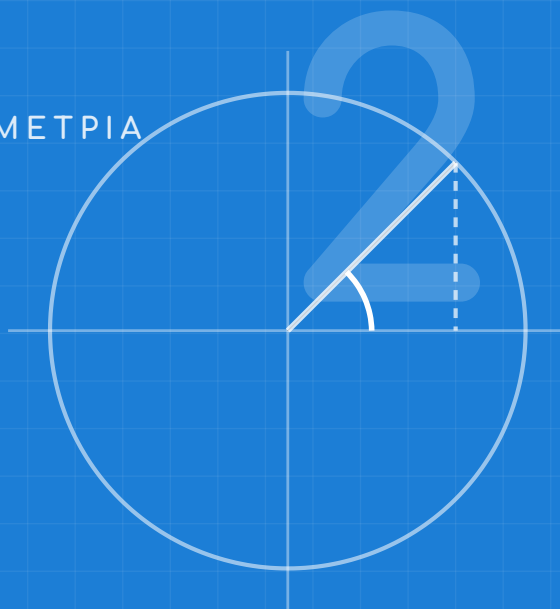
**Ασκήσεις για λύση**

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ φέρνουμε τις διαμέσους BM και ΓN (M μέσο της $A\Gamma$, N μέσο της AB). Να αποδείξεις ότι $BM = \Gamma N$. ★★
- 2 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 12$, $A\Gamma = 8$ και $B\Gamma = 15$ φέρνουμε $\Delta E \parallel B\Gamma$ με $A\Delta = 9$. Να βρεις τα AE και ΔE . ★★
- 3 Ένα σχέδιο σε κλίμακα $1 : 200$ δείχνει ένα δωμάτιο με διαστάσεις $2,5 \text{ cm}$ και 2 cm . Να βρεις τις πραγματικές διαστάσεις και το εμβαδόν του δωματίου. ★★
- 4 Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) οι διαγώνιοι τέμνονται στο O . Αν $AB = 6$, $\Gamma\Delta = 10$ και $(AOB) = 9$, να βρεις το $(\Gamma O\Delta)$. ★★★
- 5 Τρεις παράλληλοι δρόμοι τέμνουν δύο λεωφόρους. Στη μία λεωφόρο τα τμήματα ανάμεσα στους δρόμους είναι 300 m και 450 m . Στην άλλη, το συνολικό μήκος ανάμεσα στον 1ο και τον 3ο δρόμο είναι 1000 m . Να βρεις τα δύο τμήματα της δεύτερης λεωφόρου. ★★★
- 6 Ένα ορθογώνιο A έχει διαστάσεις 6×4 . Ένα ορθογώνιο B όμοιο με το A έχει εμβαδόν 54 . Να βρεις τις διαστάσεις του B . ★★★

Κεφάλαιο 2ο

Τριγωνομετρία



$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

Η Τριγωνομετρία «μεγαλώνει»: ορίζουμε **ημίτονο**, **συνημίτονο** και **εφαπτομένη** για γωνίες από 0° έως 180° μέσω του καρτεσιανού επιπέδου, γνωρίζουμε τις **παραπληρωματικές γωνίες**, τις βασικές **τριγωνομετρικές ταυτότητες** και τους δύο σπουδαίους νόμους για κάθε τρίγωνο: τον **νόμο των ημιτόνων** και τον **νόμο των συνημιτόνων**.

- 2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$
- 2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών
- 2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας
- 2.4 Νόμος των ημιτόνων – Νόμος των συνημιτόνων
- ★ Επανάληψη κεφαλαίου

Για κάθε μάθημα αυτού του κεφαλαίου θα βρεις **βιντεομαθήματα**, **σημειώσεις**, **κουίζ** και **επιπλέον ασκήσεις** στο mathgreece.com — ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

Β' ΜΕΡΟΣ · ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2Ο · ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ > ΜΑΘΗΜΑ 2.1

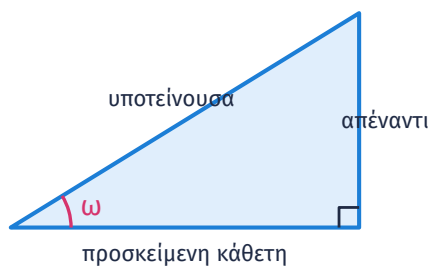
2.1

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- να θυμηθείς το **ημίτονο**, το **συνημίτονο** και την **εφαπτομένη** οξείας γωνίας από το ορθογώνιο τρίγωνο,
- τον **νέο ορισμό** τους με τη βοήθεια ενός **σημείου** $M(x, y)$ στο καρτεσιανό επίπεδο, που δουλεύει για **κάθε** γωνία από 0° έως 180° ,
- τα **πρόσημα** των τριγωνομετρικών αριθμών και τις τιμές τους για $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$,
- τον **τριγωνομετρικό κύκλο** και τον πίνακα των «βασικών» γωνιών $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$.

Θυμόμαστε: οξεία γωνία σε ορθογώνιο τρίγωνο

Ορθογώνιο τρίγωνο με οξεία γωνία ω

★ Ορισμοί στο ορθογώνιο τρίγωνο

$$\begin{aligned}\eta\mu \omega &= \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} \\ \sigma\upsilon\nu \omega &= \frac{\text{προσκειμένη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} \\ \epsilon\varphi \omega &= \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκειμένη κάθετη}}\end{aligned}$$

Ο ορισμός αυτός όμως έχει ένα μεγάλο «μειονέκτημα»: ισχύει μόνο για **οξείες** γωνίες, γιατί ένα ορθογώνιο τρίγωνο δεν μπορεί να έχει αμβλεία γωνία! Τι γίνεται με μια γωνία 120° ; Χρειαζόμαστε έναν **γενικότερο** ορισμό.

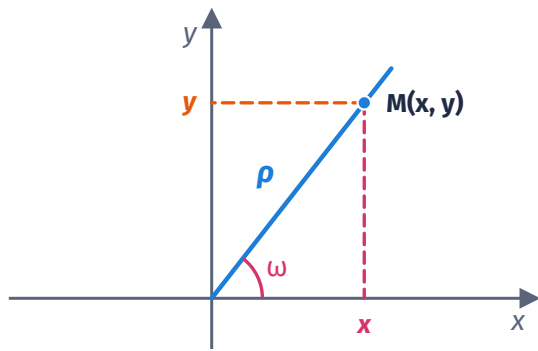
Ο νέος ορισμός με το καρτεσιανό επίπεδο

Τοποθετούμε τη γωνία ω στο καρτεσιανό επίπεδο έτσι ώστε:

- η **κορυφή** της να είναι η αρχή O των αξόνων,
- η **μία πλευρά** της να είναι ο **θετικός ημιάξονας** Ox ,
- η **άλλη πλευρά** της να βρίσκεται **πάνω** από τον άξονα $x'x$ (αφού $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$).

Πάνω στη δεύτερη πλευρά παίρνουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $M(x, y)$, διαφορετικό από το O , με απόσταση από την αρχή

$$\rho = OM = \sqrt{x^2 + y^2} > 0.$$



Η γωνία ω σε κανονική θέση και το σημείο $M(x, y)$ της τελικής πλευράς

Ορισμός · Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω , $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

$$\eta\mu \omega = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu \omega = \frac{x}{\rho}, \quad \epsilon\varphi \omega = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

Οι αριθμοί αυτοί **δεν εξαρτώνται** από το σημείο M που διαλέξαμε, αλλά μόνο από τη γωνία ω (λόγω ομοιότητας τριγώνων).

⚠ Ο νέος ορισμός συμφωνεί με τον παλιό

Για οξεία γωνία, το x είναι η **προσκειμένη** κάθετη, το y η **απέναντι** και το ρ η **υποτείνουσα** του ορθογώνιου τριγώνου που σχηματίζεται. Άρα για οξείες γωνίες παίρνουμε **τα ίδια ακριβώς** αποτελέσματα με πριν.

✏ Παράδειγμα 1 · Τριγωνομετρικοί αριθμοί από σημείο

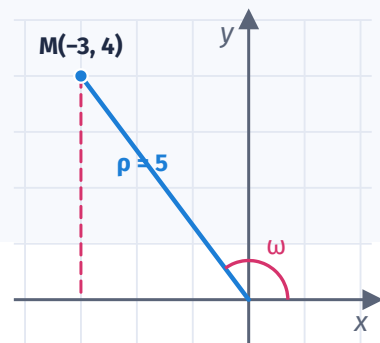
Η τελική πλευρά μιας γωνίας ω διέρχεται από το σημείο $M(-3, 4)$. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της ω . Είναι η ω οξεία ή αμβλεία;

ΛΥΣΗ

$$\rho = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

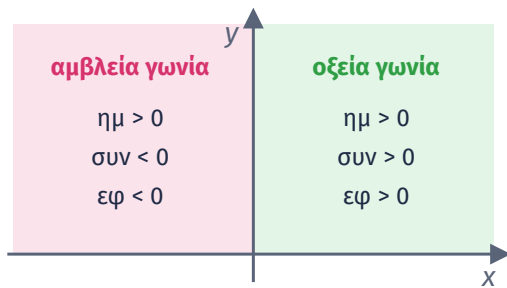
$$\eta\mu \omega = \frac{4}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu \omega = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}, \quad \epsilon\varphi \omega = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}.$$

Το M έχει $x < 0$, δηλαδή βρίσκεται στο **2ο τεταρτημόριο**: η ω είναι **αμβλεία**.



Πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών

Επειδή η τελική πλευρά βρίσκεται **πάνω** από τον x' , πάντα $y \geq 0$. Το ρ είναι θετικό. Άρα το πρόσημο εξαρτάται μόνο από το x :



Πρόσημα στο 1ο και στο 2ο τεταρτημόριο

★ Πρόσημα

- Το ημίτονο είναι πάντα θετικό (ή μηδέν): $\eta\mu \omega \geq 0$.
- Για οξεία γωνία: $\sigma\upsilon\nu \omega > 0$ και $\epsilon\varphi \omega > 0$.
- Για αμβλεία γωνία: $\sigma\upsilon\nu \omega < 0$ και $\epsilon\varphi \omega < 0$.

✗ Συχνό λάθος · «Όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι θετικοί»

✗ $\sigma\upsilon\nu 120^\circ = 0,5$

✓ Η 120° είναι αμβλεία, άρα το συνημίτονό της είναι αρνητικό: $\sigma\upsilon\nu 120^\circ = -0,5$.

Οι γωνίες 0° , 90° και 180°

Για τις «ειδικές» γωνίες διαλέγουμε σημείο σε απόσταση $\rho = 1$ από το O :

$\omega = 0^\circ$

$M(1, 0)$

$\eta\mu 0^\circ = 0$, $\sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1$,

$\epsilon\varphi 0^\circ = 0$

$\omega = 90^\circ$

$M(0, 1)$

$\eta\mu 90^\circ = 1$, $\sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0$, η

$\epsilon\varphi 90^\circ$ δεν ορίζεται ($x = 0$)

$\omega = 180^\circ$

$M(-1, 0)$

$\eta\mu 180^\circ = 0$, $\sigma\upsilon\nu 180^\circ = -1$,

$\epsilon\varphi 180^\circ = 0$

Ο τριγωνομετρικός κύκλος

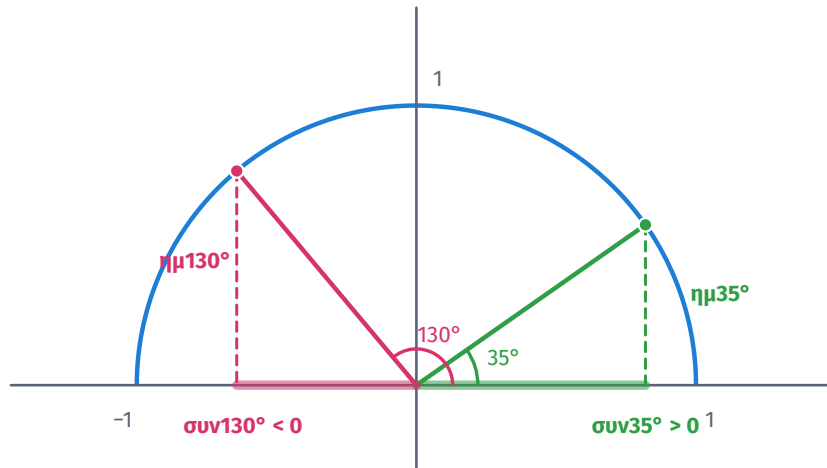
Αν διαλέγουμε πάντα το σημείο M ώστε $\rho = 1$, τότε $\eta\mu \omega = y$ και $\sigma\upsilon\nu \omega = x$. Δηλαδή:

★ Τριγωνομετρικός κύκλος

Στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα 1, αν η τελική πλευρά της γωνίας ω τον τέμνει στο M , τότε

$$M = (\sigma\upsilon\nu \omega, \eta\mu \omega).$$

Το **συνημίτονο** είναι η **τετμημένη** και το **ημίτονο** η **τεταγμένη** του M .



Ο τριγωνομετρικός κύκλος: συνω στον οριζόντιο άξονα, ημω στον κατακόρυφο

Από το σχήμα φαίνεται αμέσως ότι:

$$0 \leq \eta\mu\omega \leq 1 \quad \text{και} \quad -1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1.$$

✗ Συχνό λάθος · Ημίτονο μεγαλύτερο του 1

✗ «Βρήκα $\eta\mu\omega = \frac{5}{3}$.»

✓ Αδύνατον! Το ημίτονο και το συνημίτονο είναι πάντα μεταξύ -1 και 1 (γιατί $|x| \leq \rho$ και $y \leq \rho$). Η εφραπτομένη όμως μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή.

Ο πίνακας των βασικών γωνιών

Από το ισόπλευρο τρίγωνο (για $30^\circ, 60^\circ$) και το ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο (για 45°) βρίσκουμε:

ω	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\eta\mu\omega$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\sigma\upsilon\nu\omega$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\epsilon\phi\omega$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0

✓ Ένα «κόλπο» για τον πίνακα

Γράψε τα ημίτονα των $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ως $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$. Τα συνημίτονα είναι τα ίδια ανάποδα!

✍ Παράδειγμα 2 · Γωνία από τριγωνομετρικό αριθμό

Να βρεθεί η γωνία ω ($0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$) αν: α) $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{2}$ β) $\epsilon\phi\omega = 1$ γ) $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$.

ΛΥΣΗ

α) Από τον πίνακα $\omega = 60^\circ$ (το συνημίτονο **ξεχωρίζει** τη γωνία: σε κάθε τιμή του αντιστοιχεί μία μόνο γωνία από 0° έως 180°).

β) $\omega = 45^\circ$. γ) $\omega = 90^\circ$.

⚠ Το ημίτονο δεν «ξεχωρίζει» τη γωνία

Η εξίσωση $\eta\mu \omega = \frac{1}{2}$ έχει **δύο** λύσεις στο $[0^\circ, 180^\circ]$: $\omega = 30^\circ$ και $\omega = 150^\circ$ (θα το δούμε στο επόμενο μάθημα). Στον κύκλο φαίνεται καθαρά: σε ύψος $y = \frac{1}{2}$ υπάρχουν δύο σημεία!

✎ Παράδειγμα 3 · Υπολογισμός παράστασης

Να υπολογιστεί η παράσταση $A = 2\eta\mu 30^\circ + \sigma\upsilon\nu 180^\circ - \epsilon\varphi 45^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 60^\circ$.

ΛΥΣΗ

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} + (-1) - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - 1 - 1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}.$$

(Ο συμβολισμός $\sigma\upsilon\nu^2 60^\circ$ σημαίνει $(\sigma\upsilon\nu 60^\circ)^2$.)

Συνέχισε στο mathgreece.com



Θέλεις να δεις αυτό το μάθημα σε **βίντεο**, με επιπλέον λυμένες ασκήσεις και κουίζ αυτοαξιολόγησης; Μπες στο **mathgreece.com** — θα βρεις ένα πλήρες και ολοκληρωμένο **δωρεάν φροντιστήριο**.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

☰ Σύνοψη μαθήματος

- Σημείο $M(x, y)$ στην τελική πλευρά, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$: $\eta\mu \omega = \frac{y}{\rho}$, $\sigma\upsilon\nu \omega = \frac{x}{\rho}$, $\epsilon\varphi \omega = \frac{y}{x}$.
- Τριγωνομετρικός κύκλος: $M = (\sigma\upsilon\nu \omega, \eta\mu \omega)$.
- $0 \leq \eta\mu \omega \leq 1$, $-1 \leq \sigma\upsilon\nu \omega \leq 1$. Αμβλεία: $\sigma\upsilon\nu < 0$, $\epsilon\varphi < 0$.
- $\eta\mu 90^\circ = 1$, $\sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0$, $\epsilon\varphi 90^\circ$ δεν ορίζεται· $\sigma\upsilon\nu 180^\circ = -1$.

🎯 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1** Η τελική πλευρά γωνίας ω διέρχεται από το $M(3, 4)$. Να βρεις $\eta\mu \omega$, $\sigma\upsilon\nu \omega$, $\epsilon\varphi \omega$. ★★

- 2** Η τελική πλευρά γωνίας ω διέρχεται από το $M(-5, 12)$. Να βρεις τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της. Τι γωνία είναι; ★★

★ ★ ★

3 Να βρεις το πρόσημο των: α) $\sin 100^\circ$ β) $\eta\mu 170^\circ$ γ) $\epsilon\varphi 95^\circ$ δ) $\epsilon\varphi 40^\circ$.

★ ★ ★

4 Να υπολογίσεις: $B = \eta\mu 90^\circ - 3\sin 0^\circ + 2\eta\mu^2 45^\circ - \epsilon\varphi^2 60^\circ$.

★ ★ ★

5 Ποιες από τις ισότητες είναι αδύνατες; α) $\eta\mu \omega = 0,8$ β) $\sin \omega = -1,2$ γ) $\epsilon\varphi \omega = 5$ δ) $\eta\mu \omega = -0,3$ (με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$).

★ ★ ★

6 Η τελική πλευρά γωνίας ω διέρχεται από το σημείο $M(-2, 2)$. Να βρεις τους τριγωνομετρικούς αριθμούς και τη γωνία ω .

★ ★ ★

7 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\sin A < 0$. Τι είδους τρίγωνο είναι; Μπορεί να είναι και $\sin B < 0$;

Β' ΜΕΡΟΣ · ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2Ο · ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ > ΜΑΘΗΜΑ 2.2

2.2

Τριγωνομετρικοί αριθμοί
παραπληρωματικών γωνιών

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

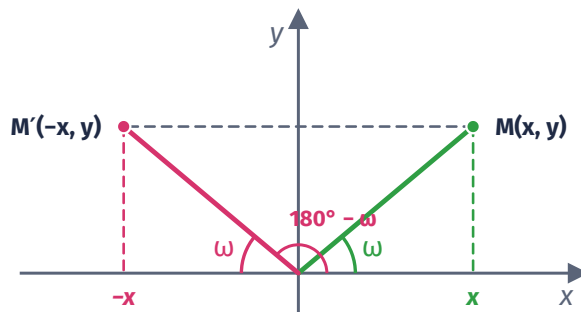
- τι είναι **παραπληρωματικές** γωνίες,
- τις σχέσεις $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu \omega$, $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu \omega$, $\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi \omega$,
- να βρίσκεις τριγωνομετρικούς αριθμούς **αμβλειών** γωνιών από τους αριθμούς **οξειών**,
- να λύνεις απλές τριγωνομετρικές εξισώσεις στο διάστημα $0^\circ - 180^\circ$.

Παραπληρωματικές γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται **παραπληρωματικές** όταν έχουν άθροισμα 180° . Π.χ. οι 30° και 150° , οι 72° και 108° . Η παραπληρωματική της ω είναι η $180^\circ - \omega$.

► Η σύγκριση στο επίπεδο

Παίρνουμε τη γωνία ω με σημείο $M(x, y)$ στην τελική πλευρά της. Το **συμμετρικό** του M ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το $M'(-x, y)$ και βρίσκεται στην τελική πλευρά της γωνίας $180^\circ - \omega$.



Τα σημεία $M(x, y)$ και $M'(-x, y)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$

Τα M και M' έχουν **ίδιο** y , **αντίθετο** x και **ίδια** απόσταση ρ από το O . Άρα:

★ Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

$$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu \omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu \omega$$

$$\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi \omega \quad (\omega \neq 90^\circ)$$

Παραπληρωματικές γωνίες έχουν **ίσα ημίτονα** και **αντίθετα συνημίτονα** και **εφαπτομένες**.

✓ Βοήθημα μνήμης

«Το ημίτονο μένει ίδιο, τα άλλα αλλάζουν πρόσημο». Είναι λογικό: η αμβλεία γωνία έχει θετικό ημίτονο αλλά αρνητικό συνημίτονο και εφαπτομένη, όπως είδαμε στο προηγούμενο μάθημα.

Υπολογισμοί για αμβλείες γωνίες

≡ Πώς βρίσκω τριγωνομετρικό αριθμό αμβλείας γωνίας

- 1 Γράφω την αμβλεία γωνία ως $180^\circ - \omega$ με ω **οξεία** (π.χ. $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$).
- 2 Εφαρμόζω τον κατάλληλο κανόνα (ημίτονο ίδιο, συν και εφ αντίθετα).
- 3 Βρίσκω την τιμή της οξείας γωνίας από τον πίνακα (ή από τον πίνακα τιμών / κομπιουτεράκι).

✎ Παράδειγμα 1 · Οι «βασικές» αμβλείες γωνίες

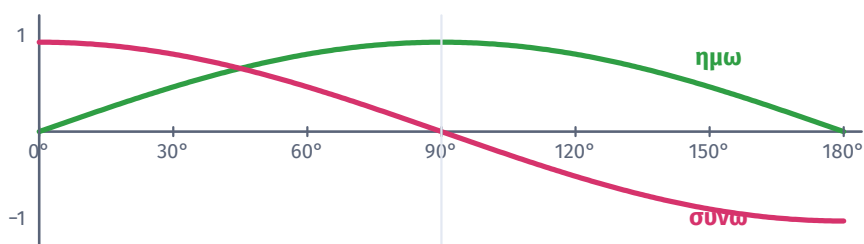
Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των 120° , 135° και 150° .

ΛΥΣΗ

- $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$: $\eta\mu 120^\circ = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 120^\circ = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ = -\frac{1}{2}$, $\epsilon\varphi 120^\circ = -\epsilon\varphi 60^\circ = -\sqrt{3}$.
- $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$: $\eta\mu 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\epsilon\varphi 135^\circ = -1$.
- $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$: $\eta\mu 150^\circ = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\epsilon\varphi 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Συμπληρώνουμε έτσι τον πίνακα του προηγούμενου μαθήματος:

ω	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\eta\mu \omega$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sigma\upsilon\nu \omega$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\epsilon\varphi \omega$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



Παρατήρησε τη συμμετρία: το ημίτονο «ανεβαίνει» ως τις 90° και «κατεβαίνει» συμμετρικά

✗ Συχνό λάθος · Λάθος «μετάφραση» αμβλείας γωνίας

$$\times \text{ ημ } 150^\circ = -\text{ημ } 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

✓ ημ $150^\circ = \text{ημ } 30^\circ = \frac{1}{2}$ — το ημίτονο **δεν αλλάζει**. Αλλάζουν πρόσημο **μόνο** το συνημίτονο και η εφαπτομένη.

✗ συν $120^\circ = \text{συν } (90^\circ + 30^\circ) = -\text{συν } 30^\circ$ ✓ Στη Γ' Γυμνασίου γράφουμε την αμβλεία ως $180^\circ - \omega$: συν $120^\circ = -\text{συν } 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

✎ Παράδειγμα 2 · Με τον πίνακα τιμών

Αν ημ $25^\circ \approx 0,423$, συν $25^\circ \approx 0,906$ και εφ $25^\circ \approx 0,466$, να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της 155° .

ΛΥΣΗ

$$155^\circ = 180^\circ - 25^\circ:$$

$$\text{ημ } 155^\circ \approx 0,423, \quad \text{συν } 155^\circ \approx -0,906, \quad \text{εφ } 155^\circ \approx -0,466.$$

Απλές τριγωνομετρικές εξισώσεις

★ Εύρεση γωνίας από τριγωνομετρικό αριθμό ($0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$)

- Αν ημ $\omega = \alpha$ με $0 < \alpha < 1$: **δύο** λύσεις, μια **οξεία** ω_1 και η **παραπληρωματική** της $180^\circ - \omega_1$.
- Αν συν $\omega = \alpha$ με $-1 \leq \alpha \leq 1$: **μία** λύση (οξεία αν $\alpha > 0$, αμβλεία αν $\alpha < 0$).
- Αν εφ $\omega = \alpha$: **μία** λύση (οξεία αν $\alpha > 0$, αμβλεία αν $\alpha < 0$).

✎ Παράδειγμα 3 · Εξισώσεις

Να βρεθεί η γωνία ω ($0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$) αν: α) ημ $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ β) συν $\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ γ) εφ $\omega = -\sqrt{3}$ δ) ημ $\omega = 1$.

ΛΥΣΗ

α) ημ $45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα $\omega = 45^\circ$ ή $\omega = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

β) Αρνητικό συνημίτονο → αμβλεία. Αφού συν $30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, είναι $\omega = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

γ) Αρνητική εφαπτομένη → αμβλεία. εφ $60^\circ = \sqrt{3}$, άρα $\omega = 120^\circ$.

δ) $\omega = 90^\circ$ (μία λύση).

✖ Συχνό λάθος · Χάνουμε τη δεύτερη λύση του ημιτόνου

$$\times \quad \eta\mu \omega = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega = 30^\circ$$

$$\checkmark \quad \eta\mu \omega = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega = 30^\circ \text{ ή } \omega = 150^\circ. \text{ Σε τρίγωνο χρειάζεται προσοχή: μπορεί να ισχύουν και οι δύο!}$$

✎ Παράδειγμα 4 · Εφαρμογή σε τρίγωνο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδειχθεί ότι $\eta\mu (B + \Gamma) = \eta\mu A$ και $\sigma\upsilon\nu (B + \Gamma) = -\sigma\upsilon\nu A$.

ΛΥΣΗ

Αφού $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$, είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A}$: οι γωνίες $\hat{B} + \hat{\Gamma}$ και $\hat{A}$ είναι παραπληρωματικές.
Άρα

$$\eta\mu (B + \Gamma) = \eta\mu (180^\circ - A) = \eta\mu A, \quad \sigma\upsilon\nu (B + \Gamma) = -\sigma\upsilon\nu A.$$

Συνέχισε στο mathgreece.com

Για περισσότερη εξάσκηση: στο mathgreece.com θα βρεις βίντεο, κουίζ, παιχνίδια γνώσεων και επιπλέον φυλλάδια ασκήσεων — όλα δωρεάν.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

☰ Σύνοψη μαθήματος

- $\eta\mu (180^\circ - \omega) = \eta\mu \omega$, $\sigma\upsilon\nu (180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu \omega$, $\epsilon\phi (180^\circ - \omega) = -\epsilon\phi \omega$.
- Αμβλεία = 180° - οξεία → χρησιμοποιώ τον πίνακα της οξείας.
- $\eta\mu \omega = \alpha \in (0, 1)$: δύο λύσεις (ω και $180^\circ - \omega$)· $\sigma\upsilon\nu$ και $\epsilon\phi$: μία.
- Σε τρίγωνο: $\eta\mu (B + \Gamma) = \eta\mu A$, $\sigma\upsilon\nu (B + \Gamma) = -\sigma\upsilon\nu A$.

🎯 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να βρεις: α) $\eta\mu 135^\circ$ β) $\sigma\upsilon\nu 150^\circ$ γ) $\epsilon\phi 120^\circ$ δ) $\sigma\upsilon\nu 135^\circ$. ★★☆☆
- 2 Αν $\eta\mu 40^\circ \approx 0,643$ και $\sigma\upsilon\nu 40^\circ \approx 0,766$, να βρεις $\eta\mu 140^\circ$ και $\sigma\upsilon\nu 140^\circ$. ★★☆☆
- 3 Να υπολογίσεις: $A = \eta\mu 150^\circ + \sigma\upsilon\nu 120^\circ + \epsilon\phi 135^\circ \cdot \epsilon\phi 45^\circ$. ★★★☆
- 4 Να βρεις τη γωνία ω ($0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$): α) $\sigma\upsilon\nu \omega = -\frac{1}{2}$ β) $\eta\mu \omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$ γ) $\epsilon\phi \omega = -1$ δ) $\eta\mu \omega = 0$. ★★★☆
- 5 Να αποδείξεις ότι $\eta\mu 20^\circ - \eta\mu 160^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ + \sigma\upsilon\nu 160^\circ = 0$. ★★★☆

- 6 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\sin(B + \Gamma) = \frac{1}{2}$. Να βρεις τη γωνία $\hat{A}$. ★ ★ ★
- 7 Να αποδείξεις ότι για κάθε γωνία ω ($0^\circ < \omega < 180^\circ, \omega \neq 90^\circ$): $\varepsilon\varphi \omega \cdot \varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) \leq 0$. ★ ★ ★

Β' ΜΕΡΟΣ · ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2Ο · ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ > ΜΑΘΗΜΑ 2.3

2.3

Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τις δύο **βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες**: $\epsilon\varphi \omega = \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega}$ και $\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$,
- να βρίσκεις **όλους** τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας όταν γνωρίζεις **έναν**,
- να **αποδεικνύεις** απλές τριγωνομετρικές ταυτότητες και να **απλοποιείς** παραστάσεις.

Οι δύο βασικές σχέσεις

Θυμόμαστε ότι, αν $M(x, y)$ είναι σημείο της τελικής πλευράς της γωνίας ω και $\rho = OM$, τότε $\eta\mu \omega = \frac{y}{\rho}$, $\sigma\upsilon\nu \omega = \frac{x}{\rho}$, $\epsilon\varphi \omega = \frac{y}{x}$.

► 1η σχέση: η εφαπτομένη ως πηλίκο

$$\frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega} = \frac{y/\rho}{x/\rho} = \frac{y}{x} = \epsilon\varphi \omega.$$

★ 1η βασική ταυτότητα

$$\epsilon\varphi \omega = \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega} \quad (\sigma\upsilon\nu \omega \neq 0, \text{ δηλαδή } \omega \neq 90^\circ)$$

► 2η σχέση: η «τριγωνομετρική Πυθαγόρεια»

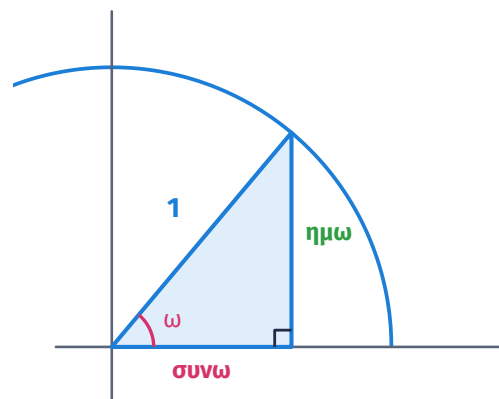
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζει το M με τους άξονες: $x^2 + y^2 = \rho^2$.
Διαιρούμε με ρ^2 :

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} = 1 \iff \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = 1.$$

★ 2η βασική ταυτότητα

$$\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$$

για **κάθε** γωνία ω . Σημείωση: $\eta\mu^2 \omega$ σημαίνει $(\eta\mu \omega)^2$.

Στον τριγωνομετρικό κύκλο: $\sigma\upsilon\nu^2 \omega + \eta\mu^2 \omega = 1^2$ (Πυθαγόρειο)

✗ Συχνό λάθος · Συμβολισμοί που μπερδεύουν

$$\times \eta\mu^2 \omega = \eta\mu(\omega^2) \quad \checkmark \eta\mu^2 \omega = (\eta\mu \omega)^2$$

$$\times \eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1 \Rightarrow \eta\mu \omega + \sigma\upsilon\nu \omega = 1 \quad \checkmark \text{ Η ρίζα δεν «σπάει»! Π.χ. για } \omega = 45^\circ: \eta\mu \omega + \sigma\upsilon\nu \omega = \sqrt{2} \neq 1.$$

✓ Χρήσιμες μορφές της 2ης σχέσης

$$\eta\mu^2 \omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 \omega, \quad \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1 - \eta\mu^2 \omega.$$

Εύρεση τριγωνομετρικών αριθμών από έναν γνωστό

≡ Από έναν τριγωνομετρικό αριθμό στους άλλους

- 1 Από την $\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$ βρίσκω τον **άλλο** από $\eta\mu/\sigma\upsilon\nu$ (θα πάρω τετράγωνο).
- 2 Παίρνω τετραγωνική ρίζα και **αποφασίζω το πρόσημο** από το είδος της γωνίας: - το $\eta\mu \omega$ είναι **πάντα θετικό** ($0^\circ < \omega < 180^\circ$), - το $\sigma\upsilon\nu \omega$ είναι **θετικό** για οξεία, **αρνητικό** για αμβλεία.
- 3 Βρίσκω την εφαπτομένη από το πηλίκο $\epsilon\phi \omega = \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega}$.

✎ Παράδειγμα 1 · Γνωστό ημίτονο, αμβλεία γωνία

Αν $\eta\mu \omega = \frac{3}{5}$ και $\eta \omega$ είναι **αμβλεία**, να βρεθούν $\sigma\upsilon\nu \omega$ και $\epsilon\phi \omega$.

ΛΥΣΗ

$$\sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1 - \eta\mu^2 \omega = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu \omega = \pm \frac{4}{5}.$$

Η γωνία είναι αμβλεία, άρα $\sigma\upsilon\nu \omega < 0$: $\sigma\upsilon\nu \omega = -\frac{4}{5}$.

$$\epsilon\phi \omega = \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega} = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}.$$

✎ Παράδειγμα 2 · Γνωστό συνημίτονο

Αν $\sigma\upsilon\nu \omega = \frac{5}{13}$ ($0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$), να βρεθούν $\eta\mu \omega$ και $\epsilon\phi \omega$.

ΛΥΣΗ

$$\eta\mu^2 \omega = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}. \text{ Αφού } \eta\mu \omega \geq 0: \eta\mu \omega = \frac{12}{13}. \text{ Τότε } \epsilon\phi \omega = \frac{12/13}{5/13} = \frac{12}{5}.$$

(Εδώ δεν χρειάστηκε να ξέρουμε αν η γωνία είναι οξεία: το ημίτονο είναι **πάντα** θετικό στο $0^\circ-180^\circ$, και το πρόσημο του συνημιτόνου μάς το έδωσαν.)

✗ Συχνό λάθος · Το ξεχασμένο πρόσημο

✗ Αν $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$ με ω αμβλεία: $\sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$.

✓ Η ρίζα δίνει δύο τιμές $\pm \frac{4}{5}$. επειδή η ω είναι αμβλεία, κρατάμε το **αρνητικό**: $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$.

✎ Παράδειγμα 3 · Γνωστή εφαπτομένη

Αν $\epsilon\phi\omega = 2$ και η ω είναι οξεία, να βρεθούν $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\omega$.

ΛΥΣΗ

Από $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = 2$ έχουμε $\eta\mu\omega = 2\sigma\upsilon\nu\omega$. Αντικαθιστούμε στη 2η σχέση:

$$(2\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \iff 5\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \iff \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{5}.$$

Η γωνία είναι οξεία: $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ και $\eta\mu\omega = 2\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Β' ΤΡΟΠΟΣ: ΜΕ ΣΗΜΕΙΟ

Αφού $\epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} = 2$, παίρνουμε το σημείο $M(1, 2)$: $\rho = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, οπότε $\eta\mu\omega = \frac{2}{\sqrt{5}}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{\sqrt{5}}$ — ίδιο αποτέλεσμα!

Αποδείξεις ταυτοτήτων και απλοποιήσεις

≡ Απόδειξη τριγωνομετρικής ταυτότητας

- Ξεκινάω από το **πιο σύνθετο** μέλος.
- Χρησιμοποιώ: $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$, $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ και τις **αλγεβρικές ταυτότητες** της Α' μέρους.
- Συχνά βοηθά να γράψω τα πάντα με **$\eta\mu$** και **$\sigma\upsilon\nu$** .

✎ Παράδειγμα 4 · Απόδειξη ταυτότητας

Να αποδειχθεί ότι: α) $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1 + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega$ β) $(1 - \sigma\upsilon\nu\omega)(1 + \sigma\upsilon\nu\omega) = \eta\mu^2\omega$.

ΛΥΣΗ

α) Αλγεβρική ταυτότητα και 2η βασική σχέση:

$$(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = \eta\mu^2\omega + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega.$$

β) Διαφορά τετραγώνων: $(1 - \sin \omega)(1 + \sin \omega) = 1 - \sin^2 \omega = \eta\mu^2 \omega$.

Παράδειγμα 5 · Απλοποίηση παράστασης

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \epsilon\phi \omega \cdot \sin \omega + \frac{\eta\mu^3 \omega + \eta\mu \omega \sin^2 \omega}{\eta\mu \omega}$, για $0^\circ < \omega < 180^\circ, \omega \neq 90^\circ$.

ΛΥΣΗ

$$\epsilon\phi \omega \cdot \sin \omega = \frac{\eta\mu \omega}{\sin \omega} \cdot \sin \omega = \eta\mu \omega.$$

Στο κλάσμα βγάζουμε κοινό παράγοντα: $\frac{\eta\mu \omega(\eta\mu^2 \omega + \sin^2 \omega)}{\eta\mu \omega} = 1$.

Άρα $A = \eta\mu \omega + 1$.

Παράδειγμα 6 · Αριθμητική επαλήθευση

Να επαληθευτεί η $\eta\mu^2 \omega + \sin^2 \omega = 1$ για $\omega = 120^\circ$.

ΛΥΣΗ

$$\eta\mu 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 120^\circ = -\frac{1}{2}: \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \checkmark.$$



Συνέχισε στο mathgreece.com

Για περισσότερη εξάσκηση: στο **mathgreece.com** θα βρεις βίντεο, κουίζ, παιχνίδια γνώσεων και επιπλέον φυλλάδια ασκήσεων — **όλα δωρεάν**.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

Σύνοψη μαθήματος

- $\epsilon\phi \omega = \frac{\eta\mu \omega}{\sin \omega}$ ($\omega \neq 90^\circ$), $\eta\mu^2 \omega + \sin^2 \omega = 1$.
- Από έναν αριθμό στους άλλους: 2η σχέση $\rightarrow$ ρίζα $\rightarrow$ **πρόσημο** ($\eta\mu$ πάντα +, $\sin$ + στην οξεία, - στην αμβλεία) $\rightarrow$ $\epsilon\phi$.
- Στις αποδείξεις: όλα σε $\eta\mu$, $\sin$ και χρήση αλγεβρικών ταυτοτήτων.

Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

★ ★ ★

★ ★ ★

★★★

3 Αν $\sin \omega = -\frac{3}{5}$, να βρεις $\eta\mu \omega$ και $\epsilon\varphi \omega$. Τι γωνία είναι η ω ;

★★★

4 Αν $\epsilon\varphi \omega = -\frac{3}{4}$, να βρεις $\eta\mu \omega$ και $\sin \omega$.

★★★

5 Να αποδείξεις ότι $\eta\mu^4 \omega - \sin^4 \omega = \eta\mu^2 \omega - \sin^2 \omega$.

★★★

6 Να αποδείξεις ότι $(\eta\mu \omega + \sin \omega)^2 + (\eta\mu \omega - \sin \omega)^2 = 2$.

★★★★

7 Να αποδείξεις ότι $1 + \epsilon\varphi^2 \omega = \frac{1}{\sin^2 \omega}$ ($\omega \neq 90^\circ$). Στη συνέχεια, αν $\epsilon\varphi \omega = 3$ και ω οξεία, να βρεις το $\sin \omega$.

★★★★

8 Να απλοποιήσεις: $B = \frac{\eta\mu \omega}{1 + \sin \omega} + \frac{1 + \sin \omega}{\eta\mu \omega}$ για $0^\circ < \omega < 180^\circ$.

Β' ΜΕΡΟΣ · ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ > ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο · ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ > ΜΑΘΗΜΑ 2.4

2.4

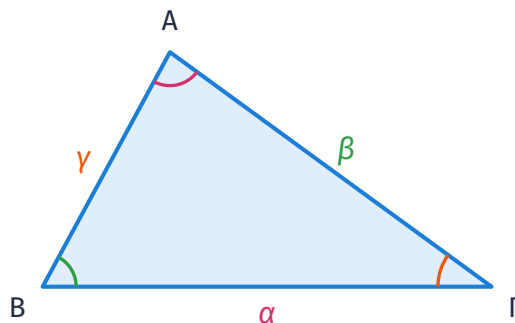
Νόμος των ημιτόνων – Νόμος των συνημιτόνων

☉ Σε αυτό το μάθημα θα μάθεις

- τον **νόμο των ημιτόνων** $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$,
- τον **νόμο των συνημιτόνων** $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A$,
- τότε χρησιμοποιούμε τον καθένα για να «λύσουμε» ένα τρίγωνο,
- τον τύπο εμβαδού $E = \frac{1}{2}\beta\gamma \eta\mu A$ και πώς ελέγχουμε αν μια γωνία είναι **οξεία, ορθή ή αμβλεία**.

Μέχρι τώρα η Τριγωνομετρία μάς βοηθούσε μόνο σε **ορθογώνια** τρίγωνα. Οι δύο νόμοι αυτού του μαθήματος ισχύουν σε **κάθε** τρίγωνο και μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε όλα τα στοιχεία του από τρία κατάλληλα δεδομένα. Αυτό λέγεται **επίλυση τριγώνου**.

Συμβολισμός: σε τρίγωνο ΑΒΓ γράφουμε $\alpha = ΒΓ$, $\beta = ΓΑ$, $\gamma = ΑΒ$ (κάθε πλευρά με το «μικρό» γράμμα της **απέναντι** κορυφής).



Ο συμβολισμός: η πλευρά α βρίσκεται απέναντι από τη γωνία Α κ.ο.κ.

Ο νόμος των ημιτόνων

★ Νόμος των ημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ:

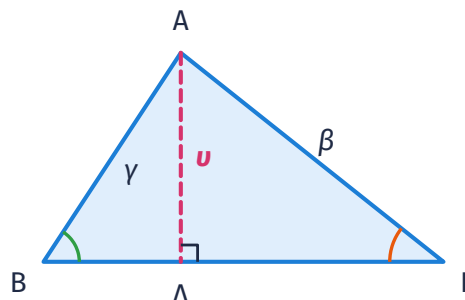
$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}.$$

Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι **ανάλογες** προς τα ημίτονα των **απέναντι** γωνιών.

Απόδειξη (για οξυγώνιο τρίγωνο). Φέρνουμε το ύψος $AD = v$. Από τα ορθογώνια τρίγωνα ADB και $AD\Gamma$:

$$v = \gamma \eta\mu B \quad \text{και} \quad v = \beta \eta\mu \Gamma.$$

Άρα $\gamma \eta\mu B = \beta \eta\mu \Gamma$, δηλαδή $\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$. Με τον ίδιο τρόπο (με άλλο ύψος) αποδεικνύεται και η ισότητα με το $\frac{\alpha}{\eta\mu A}$.



Το ύψος AD «μετριέται» με δύο τρόπους

✓ Πότε χρησιμοποιώ τον νόμο των ημιτόνων

Όταν γνωρίζω **μία πλευρά και την απέναντι γωνία της** (ένα «ζευγάρι»), και επιπλέον **μία ακόμη γωνία ή πλευρά**. Τυπικά:

- δύο γωνίες και μία πλευρά,
- δύο πλευρές και μια γωνία απέναντι από μία από αυτές.

✎ Παράδειγμα 1 · Δύο γωνίες και μία πλευρά

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = 45^\circ$, $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ και $\beta = A\Gamma = 8$. Να βρεθεί η πλευρά $\gamma = AB$.

ΛΥΣΗ

$$\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \iff \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\gamma}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \iff \gamma = \frac{8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{6} \approx 9,8.$$

Επίσης $\hat{A} = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$.

✎ Παράδειγμα 2 · Εύρεση γωνίας

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\alpha = 10$, $\beta = 10\sqrt{2}$ και $\hat{A} = 30^\circ$. Να βρεθεί η γωνία $\hat{B}$.

ΛΥΣΗ

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \iff \frac{10}{\frac{1}{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{\eta\mu B} \iff \eta\mu B = \frac{10\sqrt{2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα $\hat{B} = 45^\circ$ ή $\hat{B} = 135^\circ$. Ελέγχουμε: με $\hat{B} = 135^\circ$ το άθροισμα $\hat{A} + \hat{B} = 165^\circ < 180^\circ$, οπότε **και οι δύο** είναι δυνατές! Υπάρχουν **δύο** διαφορετικά τρίγωνα με αυτά τα δεδομένα.

⚠ Η «διφορούμενη» περίπτωση

Όταν βρίσκουμε γωνία από το **ημίτονό** της, παίρνουμε δύο υποψήφιες τιμές, ω και $180^\circ - \omega$. Κρατάμε όσες δίνουν άθροισμα γωνιών **μικρότερο από 180°** . Ένα χρήσιμο κριτήριο: **απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία**.

Ο νόμος των συνημιτόνων

★ Νόμος των συνημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A$$

$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha \cos B$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \Gamma$$

▮ Ένα «γενικευμένο» Πυθαγόρειο θεώρημα

Αν $\hat{A} = 90^\circ$, τότε $\cos A = 0$ και ο νόμος γίνεται $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$: **το Πυθαγόρειο θεώρημα!** Ο νόμος των συνημιτόνων είναι λοιπόν η γενίκευσή του για **κάθε** τρίγωνο. Μια γεωμετρική μορφή του υπάρχει ήδη στα «Στοιχεία» του **Ευκλείδη** (Βιβλίο II, προτάσεις 12–13).

✓ Πότε χρησιμοποιώ τον νόμο των συνημιτόνων

- Γνωρίζω **δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία** → βρίσκω την τρίτη πλευρά.
- Γνωρίζω **και τις τρεις πλευρές** → βρίσκω οποιαδήποτε γωνία, λύνοντας ως προς το συνημίτονο:

$$\cos A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}.$$

✎ Παράδειγμα 3 · Δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\beta = 5$, $\gamma = 8$ και $\hat{A} = 60^\circ$. Να βρεθεί η πλευρά α .

ΛΥΣΗ

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 89 - 40 = 49 \Rightarrow \alpha = 7.$$

✎ Παράδειγμα 4 · Τρεις πλευρές – είδος γωνίας

Ένα τρίγωνο έχει πλευρές $\alpha = 7$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$. Να βρεθεί η μεγαλύτερη γωνία του.

ΛΥΣΗ

Η μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά, την $\alpha = 7$:

$$\cos A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{9 + 25 - 49}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ.$$

Το τρίγωνο είναι **αμβλυγώνιο**.

★ Οξεία, ορθή ή αμβλεία;

Το πρόσημο του συν Α εξαρτάται από το πρόσημο του $\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$:

- $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \iff \hat{A}$ οξεία,
- $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \iff \hat{A}$ ορθή,
- $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \iff \hat{A}$ αμβλεία.

✗ Συχνό λάθος · Συχνά λάθη με τον νόμο των συνημιτόνων

✗ $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin A = 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2} = \dots$ και μετά ξεχνάω να πάρω ρίζα: « $\alpha = 49$ ».

✓ Βρίσκω $\alpha^2 = 49$, άρα $\alpha = \sqrt{49} = 7$.

✗ Για αμβλεία γωνία βάζω $\sin 120^\circ = \frac{1}{2}$. ✓ $\sin 120^\circ = -\frac{1}{2}$, οπότε ο όρος $-2\beta\gamma \sin A$ γίνεται θετικός: $+\beta\gamma$.

✎ Παράδειγμα 5 · Αμβλεία γωνία

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\beta = 3$, $\gamma = 5$ και $\hat{A} = 120^\circ$. Να βρεθεί η α .

ΛΥΣΗ

$$\alpha^2 = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 34 + 15 = 49 \Rightarrow \alpha = 7.$$

(Είναι το ίδιο τρίγωνο με το προηγούμενο παράδειγμα!)

Εμβαδόν τριγώνου με τριγωνομετρία

★ Εμβαδόν

$$E = \frac{1}{2} \beta \gamma \eta\mu A = \frac{1}{2} \gamma \alpha \eta\mu B = \frac{1}{2} \alpha \beta \eta\mu \Gamma$$

«Μισό γινόμενο δύο πλευρών επί το ημίτονο της **περιεχόμενης** γωνίας.»

Πράγματι, αν v το ύψος από το Γ προς την ΑΒ, τότε $v = \beta \eta\mu A$ και $E = \frac{1}{2} \gamma v = \frac{1}{2} \beta \gamma \eta\mu A$.

✎ Παράδειγμα 6 · Εμβαδόν

Να βρεθεί το εμβαδόν τριγώνου με $\beta = 6$, $\gamma = 10$ και $\hat{A} = 150^\circ$.

ΛΥΣΗ

$$E = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \eta\mu 150^\circ = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15.$$

Εφαρμογή: απόσταση απρόσιτων σημείων

✎ Παράδειγμα 7 · Απόσταση πάνω από λίμνη

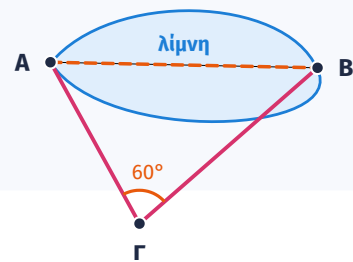
Θέλουμε να βρούμε την απόσταση δύο σημείων Α και Β στις απέναντι όχθες μιας λίμνης. Από ένα σημείο Γ μετράμε $\Gamma A = 300$ m, $\Gamma B = 500$ m και τη γωνία $\widehat{A\Gamma B} = 60^\circ$. Πόση είναι η απόσταση ΑΒ;

ΛΥΣΗ

Νόμος συνημιτόνων στο ΑΒΓ:

$$\begin{aligned} AB^2 &= 300^2 + 500^2 - 2 \cdot 300 \cdot 500 \cdot \text{συν } 60^\circ \\ &= 90\,000 + 250\,000 - 150\,000 = 190\,000. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } AB = \sqrt{190\,000} = 100\sqrt{19} \approx 436 \text{ m.}$$



☰ Ποιον νόμο να διαλέξω;

Δεδομένα	Νόμος
2 γωνίες + 1 πλευρά	ημιτόνων
2 πλευρές + γωνία απέναντι από μία τους	ημιτόνων (προσοχή: ίσως 2 λύσεις)
2 πλευρές + περιεχόμενη γωνία	συνημιτόνων
3 πλευρές	συνημιτόνων

Συνέχισε στο mathgreece.com



Θέλεις να εμπεδώσεις καλύτερα τη θεωρία; Δες τα σχετικά βίντεο στο mathgreece.com και στο κανάλι **MATHGREECE** στο YouTube — ένα ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

mathgreece.com
δωρεάν φροντιστήριο

☰ Σύνοψη μαθήματος

- **Νόμος ημιτόνων:** $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$ — όταν ξέρω ένα «ζευγάρι» πλευρά–απέναντι γωνία.
- **Νόμος συνημιτόνων:** $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \text{ συν } A$ — δύο πλευρές + περιεχόμενη ή τρεις πλευρές.
- $\text{συν } A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$: πρόσημο → οξεία / ορθή / αμβλεία.
- $E = \frac{1}{2}\beta\gamma \eta\mu A$.

 Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$ και $\alpha = 6$. Να βρεις τη β . ★ ★ ★
- 2 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\beta = 4$, $\gamma = 6$ και $\hat{A} = 60^\circ$. Να βρεις την α και το εμβαδόν. ★ ★ ★
- 3 Τρίγωνο έχει πλευρές 5, 7, 8. Να βρεις τη γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά 7. ★ ★ ★
- 4 Να εξετάσεις αν το τρίγωνο με πλευρές 6, 8, 11 είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο. ★ ★ ★
- 5 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\beta = 2$, $\gamma = 2\sqrt{3}$ και $\hat{A} = 150^\circ$. Να βρεις την α . ★ ★ ★
- 6 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = 60^\circ$, $\beta = \sqrt{6}$ και $\gamma = 2$. Να βρεις τη γωνία $\hat{\Gamma}$ και την $\hat{A}$. ★ ★ ★
- 7 Δύο πλοία φεύγουν ταυτόχρονα από ένα λιμάνι σε διευθύνσεις που σχηματίζουν γωνία 120° . Το ένα ταξιδεύει με 10 μίλια/ώρα και το άλλο με 15 μίλια/ώρα. Πόσο απέχουν μετά από 2 ώρες; ★ ★ ★
- 8 Ένα οικόπεδο σχήματος τριγώνου έχει δύο πλευρές 40 m και 50 m που σχηματίζουν γωνία 30° . Να βρεις το εμβαδόν του. ★ ★ ★



Επανάληψη 2ου Κεφαλαίου

Όλο το κεφάλαιο με μια ματιά

Ορισμοί – πρόσημα

- $M(x, y), \rho = \sqrt{x^2 + y^2}: \eta\mu \omega = \frac{y}{\rho}, \sigma\upsilon\nu \omega = \frac{x}{\rho}, \epsilon\varphi \omega = \frac{y}{x}$
- Κύκλος ακτίνας 1: $M = (\sigma\upsilon\nu \omega, \eta\mu \omega)$
- Αμβλεία: $\eta\mu > 0, \sigma\upsilon\nu < 0, \epsilon\varphi < 0$

Ταυτότητες

- $\eta\mu (180^\circ - \omega) = \eta\mu \omega$
- $\sigma\upsilon\nu (180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu \omega, \epsilon\varphi (180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi \omega$
- $\epsilon\varphi \omega = \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega}, \eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$

Νόμοι

- $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$
- $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sigma\upsilon\nu A$
- $E = \frac{1}{2}\beta\gamma \eta\mu A$

Η «χρυσή» λίστα τιμών

- $\eta\mu 30^\circ = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$
- $\eta\mu 45^\circ = \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\eta\mu 60^\circ = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\epsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \epsilon\varphi 45^\circ = 1, \epsilon\varphi 60^\circ = \sqrt{3}$

✗ Συχνό λάθος · Συχνά λάθη του κεφαλαίου

✗ $\sigma\upsilon\nu 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (αμβλεία)

✗ $\eta\mu \omega = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega = 30^\circ$ μόνο ✓ 30° ή 150°

✗ $\sigma\upsilon\nu \omega = \sqrt{1 - \eta\mu^2 \omega}$ πάντα ✓ $\pm$ για αμβλεία το αρνητικό

✗ Ξεχνάω τη ρίζα στον νόμο συνημιτόνων ✓ $\alpha^2 = \dots \Rightarrow \alpha = \sqrt{\dots}$

Συνέχισε στο mathgreece.com

Θέλεις να εμπεδώσεις καλύτερα τη θεωρία; Δες τα σχετικά βίντεο στο mathgreece.com και στο κανάλι **MATHGREECE** στο YouTube — ένα ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

mathgreece.com

δωρεάν φροντιστήριο

Ασκήσεις για λύση

Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

- 1 Να υπολογίσεις: $A = \eta\mu^2 120^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 150^\circ - \epsilon\phi 135^\circ$. ★ ★ ★
- 2 Αν $\sigma\upsilon\nu \omega = -\frac{12}{13}$, να βρεις $\eta\mu \omega$, $\epsilon\phi \omega$ και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της $180^\circ - \omega$. ★ ★ ★
- 3 Να αποδείξεις ότι $\frac{\eta\mu^2 \omega}{1 - \sigma\upsilon\nu \omega} = 1 + \sigma\upsilon\nu \omega$ ($\omega \neq 0^\circ$). ★ ★ ★
- 4 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\alpha = 13$, $\beta = 8$, $\gamma = 7$. Να βρεις τη γωνία $\hat{A}$ και το εμβαδόν. ★ ★ ★
- 5 Από ένα σημείο Γ στο έδαφος βλέπουμε δύο σπίτια A και B σε αποστάσεις $\Gamma A = 80$ m και $\Gamma B = 50$ m, με γωνία $\hat{A}\hat{\Gamma}B = 60^\circ$. Να βρεις την απόσταση AB . ★ ★ ★
- 6 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ και $\gamma = AB = 10$. Να βρεις τις πλευρές α και β . (Δίνεται $\eta\mu 75^\circ \approx 0,966$.) ★ ★ ★

Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών

Για γωνίες από 0° έως 90° (με ακρίβεια 4 δεκαδικών). Για αμβλεία γωνία ω χρησιμοποίησε την παραπληρωματική της $180^\circ - \omega$.

ω	ημω	συνω	εφω
0°	0,0000	1,0000	0,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175
2°	0,0349	0,9994	0,0349
3°	0,0523	0,9986	0,0524
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405
9°	0,1564	0,9877	0,1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763
11°	0,1908	0,9816	0,1944
12°	0,2079	0,9781	0,2126
13°	0,2250	0,9744	0,2309
14°	0,2419	0,9703	0,2493
15°	0,2588	0,9659	0,2679
16°	0,2756	0,9613	0,2867
17°	0,2924	0,9563	0,3057
18°	0,3090	0,9511	0,3249
19°	0,3256	0,9455	0,3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640
21°	0,3584	0,9336	0,3839
22°	0,3746	0,9272	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245
24°	0,4067	0,9135	0,4452
25°	0,4226	0,9063	0,4663
26°	0,4384	0,8988	0,4877
27°	0,4540	0,8910	0,5095
28°	0,4695	0,8829	0,5317
29°	0,4848	0,8746	0,5543
30°	0,5000	0,8660	0,5774
31°	0,5150	0,8572	0,6009
32°	0,5299	0,8480	0,6249
33°	0,5446	0,8387	0,6494
34°	0,5592	0,8290	0,6745
35°	0,5736	0,8192	0,7002
36°	0,5878	0,8090	0,7265
37°	0,6018	0,7986	0,7536
38°	0,6157	0,7880	0,7813
39°	0,6293	0,7771	0,8098
40°	0,6428	0,7660	0,8391
41°	0,6561	0,7547	0,8693
42°	0,6691	0,7431	0,9004
43°	0,6820	0,7314	0,9325
44°	0,6947	0,7193	0,9657
45°	0,7071	0,7071	1,0000

ω	ημω	συνω	εφω
46°	0,7193	0,6947	1,0355
47°	0,7314	0,6820	1,0724
48°	0,7431	0,6691	1,1106
49°	0,7547	0,6561	1,1504
50°	0,7660	0,6428	1,1918
51°	0,7771	0,6293	1,2349
52°	0,7880	0,6157	1,2799
53°	0,7986	0,6018	1,3270
54°	0,8090	0,5878	1,3764
55°	0,8192	0,5736	1,4281
56°	0,8290	0,5592	1,4826
57°	0,8387	0,5446	1,5399
58°	0,8480	0,5299	1,6003
59°	0,8572	0,5150	1,6643
60°	0,8660	0,5000	1,7321
61°	0,8746	0,4848	1,8040
62°	0,8829	0,4695	1,8807
63°	0,8910	0,4540	1,9626
64°	0,8988	0,4384	2,0503
65°	0,9063	0,4226	2,1445
66°	0,9135	0,4067	2,2460
67°	0,9205	0,3907	2,3559
68°	0,9272	0,3746	2,4751
69°	0,9336	0,3584	2,6051
70°	0,9397	0,3420	2,7475
71°	0,9455	0,3256	2,9042
72°	0,9511	0,3090	3,0777
73°	0,9563	0,2924	3,2709
74°	0,9613	0,2756	3,4874
75°	0,9659	0,2588	3,7321
76°	0,9703	0,2419	4,0108
77°	0,9744	0,2250	4,3315
78°	0,9781	0,2079	4,7046
79°	0,9816	0,1908	5,1446
80°	0,9848	0,1736	5,6713
81°	0,9877	0,1564	6,3138
82°	0,9903	0,1392	7,1154
83°	0,9925	0,1219	8,1443
84°	0,9945	0,1045	9,5144
85°	0,9962	0,0872	11,4301
86°	0,9976	0,0698	14,3007
87°	0,9986	0,0523	19,0811
88°	0,9994	0,0349	28,6363
89°	0,9998	0,0175	57,2900
90°	1,0000	0,0000	—

Λύσεις των ασκήσεων

Εδώ θα βρεις τις λύσεις όλων των ασκήσεων του βοηθήματος, οργανωμένες ανά μέρος, κεφάλαιο και μάθημα. Συμβουλή: προσπάθησε πρώτα μόνος σου — η λύση είναι για έλεγχο, όχι για αντιγραφή! Αναλυτικές βιντεολύσεις και επιπλέον ασκήσεις θα βρεις στο mathgreece.com.

Α' Μέρος · Κεφάλαιο 1ο · Αλγεβρικές παραστάσεις

Μάθημα 1.1 · Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

- 1 α) $\notin$ β) $\in$ γ) $\in$ (γιατί $\sqrt{16} = 4$) δ) $\notin$ (ο $\sqrt{7}$ είναι άρρητος) ε) $\in$ (γιατί $0,\bar{6} = \frac{2}{3}$).
- 2 α) $-8 + 15 + 6 - 9 = 4$. β) Τρία «μείον» → αρνητικό: -40 . γ) $-36 : (-4) = 9$ και $9 : (-3) = -3$.
- 3 $(2 - 6)^2 = (-4)^2 = 16$, $3 \cdot 16 = 48$, $48 : 8 = 6$. Άρα $A = 5 - 6 + 1 = 0$.
- 4 $\frac{3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{9}{12} - \frac{10}{12} = -\frac{1}{12}$. Τότε $-\frac{1}{12} \cdot \frac{12}{5} = -\frac{1}{5}$, άρα $B = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5} = -\frac{2}{5}$.
- 5 α) -16 β) 16 γ) -32 δ) $\frac{1}{9}$ ε) $(-2)^3 = -8$ στ) 1 .
- 6 α) 7^2 β) $\frac{5^6 \cdot 5}{5^4} = 5^3$ γ) $(4 \cdot 25)^5 = 100^5 = 10^{10}$ δ) $\frac{x^4}{x^6} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$.
- 7 Αριθμητής: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Παρονομαστής: $\frac{1}{8}$. Άρα $\Gamma = \frac{3}{4} : \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$.
- 8 α) 9 β) $0,3$ γ) $\frac{5}{8}$ δ) 6 ε) 11 στ) $\sqrt{100} = 10$ (όχι $6 + 8$!).
- 9 α) $3\sqrt{2}$ β) $7\sqrt{2}$ γ) $10\sqrt{2}$ δ) $3\sqrt{5}$ ε) $\sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$.
- 10 α) $2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ β) $4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ γ) $\sqrt{144} = 12$.
- 11 α) $\frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ β) $\frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$ γ) $\frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 12 $E = |3 - \sqrt{10}| - |\sqrt{10} - 4|$. Επειδή $3 = \sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16} = 4$, είναι $3 - \sqrt{10} < 0$ και $\sqrt{10} - 4 < 0$. Άρα $E = (\sqrt{10} - 3) - (4 - \sqrt{10}) = 2\sqrt{10} - 7$.
- 13 Πλευρά: $\alpha = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ cm. Διαγώνιος (Πυθαγόρειο): $\delta = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2} = \sqrt{144} = 12$ cm.

Μάθημα 1.2 · Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα

- 1 Μονώνυμα είναι τα α), γ) (γιατί $\frac{x^3}{5} = \frac{1}{5}x^3$) και ε). Τα β) (πρόσθεση), δ) (μεταβλητή στον παρονομαστή) και στ) (ρίζα μεταβλητής) δεν είναι.
- 2 $-7x^4y$: συντ. -7 , κ.μ. x^4y , βαθμός 5. $\frac{2}{3}\alpha\beta^2\gamma^3$: συντ. $\frac{2}{3}$, κ.μ. $\alpha\beta^2\gamma^3$, βαθμός 6. x : συντ. 1 , κ.μ. x , βαθμός 1. -12 : σταθερό μονώνυμο, βαθμός 0 (δεν έχει κύριο μέρος).
- 3 $A = (-2)^3 - 2(-2)^2(-1) + 3(-1)^2 = -8 + 8 + 3 = 3$.

- 4 Όμοια: $\nu - 1 = 4 \iff \nu = 5$. Αντίθετοι συντελεστές: $2\mu + 1 = 9 \iff \mu = 4$.
- 5 α) $-5x$ β) $-2x^2y$ γ) $4\alpha^2 + 2\alpha$.
- 6 $A = 3xy - 2x^2 + xy + x^2 - 5xy + x^2 = (3 + 1 - 5)xy + (-2 + 1 + 1)x^2 = -xy$.
- 7 α) $-8x^5$ β) $3\alpha^3\beta^3$ γ) $\frac{2}{3}x^3y$ δ) $-x^3$.
- 8 α) $9x^4y^6$ β) $-\frac{1}{8}\alpha^3\beta^6$ γ) $4x^2 \cdot (-x^6) = -4x^8$.
- 9 α) $-3xy$ β) $-4\alpha^2$ γ) $(-3x^2)^2 = 9x^4$, άρα $18x^6 : 9x^4 = 2x^2$.
- 10 Πρώτος όρος: $\frac{-8x^3y^6 \cdot x^2}{4x^3y^4} = -2x^2y^2$. Δεύτερος: $(3xy)^2 = 9x^2y^2$ και $9x^2y^2 : \frac{9}{2} = 2x^2y^2$. Άρα $B = -2x^2y^2 - 2x^2y^2 = -4x^2y^2$.
- 11 α) $(3x)^2 = 9x^2$ β) $6 \cdot 9x^2 = 54x^2$ γ) $(3x)^3 = 27x^3$. Με ακμή $6x$: $(6x)^3 = 216x^3 = 8 \cdot 27x^3$, δηλαδή ο όγκος γίνεται **8 φορές** μεγαλύτερος.

Μάθημα 1.3 · Πολυώνυμα – Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων

- 1 α) $3x^4 - x^2 - x + 5$, 4ου βαθμού. β) $x^3 + 7x - 2$, 3ου βαθμού. γ) $-x + 1$, 1ου βαθμού.
- 2 Ως προς x : 3. Ως προς y : 4. Ως προς x, y : οι όροι έχουν βαθμούς 5, 2, 4, 0, άρα 5.
- 3 $P(0) = 3, P(1) = 0, P(2) = 8 - 8 + 3 = 3, P(-1) = -1 + 4 + 3 = 6, P(-3) = -27 + 12 + 3 = -12$.
- 4 α) $x^2 - 4x - 1$ β) $3x^2 - 6x + 7$ γ) $-3x^2 + 6x - 7$ (αντίθετο του β) δ) $6x^2 - 15x + 9 - 2x^2 + 2x - 8 = 4x^2 - 13x + 1$.
- 5 Η αγκύλη: $x^3 - x^2 - 5$. Σύνολο: $x^3 - 2x + 1 - 3x^2 + 2x - x^3 + x^2 + 5 = -2x^2 + 6$.
- 6 $\alpha - 1 = 4 \Rightarrow \alpha = 5, \beta + 2 = 3 \Rightarrow \beta = 1, \gamma = -7$.
- 7 $K(x) = (2x^3 - x + 6) - (x^3 + x^2 - 3) = x^3 - x^2 - x + 9$.
- 8 $P(2) = 4 + 2\kappa - 6 = 2\kappa - 2 = 4 \Rightarrow \kappa = 3$. Τότε $P(x) = x^2 + 3x - 6$ και $P(-3) = 9 - 9 - 6 = -6$.
- 9 Περίμετρος ορθογωνίου: $2(3x + 2) + 2(x - 1) = 8x + 2$. Πλευρά τετραγώνου: $\frac{8x + 2}{4} = 2x + \frac{1}{2}$.

Μάθημα 1.4 · Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

- 1 α) $12x^2 - 8x$ β) $-x^4 + x^3 - 5x^2$ γ) $2\alpha^2\beta - 6\alpha\beta^2 + 2\alpha\beta$ δ) $-2x^3 + 3x$.
- 2 α) $x^2 + 6x + 5$ β) $x^2 - x - 12$ γ) $6x^2 - 7x + 2$ δ) $\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2$.
- 3 α) $x^3 - 2x^2 + 4x + 2x^2 - 4x + 8 = x^3 + 8$. β) $2x^3 + 2x^2 - 6x - x^2 - x + 3 = 2x^3 + x^2 - 7x + 3$.
- 4 $x^4 + x^3 + x^2 - x^3 - x^2 - x + x^2 + x + 1 = x^4 + x^2 + 1$.
- 5 $(x^2 + 3x - 4) - (x^2 - x - 6) = 4x + 2$.

- 6) $2(\alpha^2 - 2\alpha - 3) - 2\alpha^2 + \alpha + 3\alpha + 6 = 2\alpha^2 - 4\alpha - 6 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 6 = 0$. Η παράσταση είναι ίση με 0 για κάθε α !
- 7) $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$ και $(x^2 - 3x + 2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Για $x = 0$: αρχικό $(-1)(-2)(-3) = -6$ και αποτέλεσμα $-6 \checkmark$.
- 8) $(x+\kappa)(x-3) = x^2 + (\kappa-3)x - 3\kappa$. Πρέπει $\kappa-3 = 2$ και $-3\kappa = -15$, άρα $\kappa = 5$ (και οι δύο συνθήκες συμφωνούν).
- 9) $V = x(x+1)(x+2) = x(x^2 + 3x + 2) = x^3 + 3x^2 + 2x$. Για $x = 4$: $64 + 48 + 8 = 120 \text{ cm}^3$ (έλεγχος: $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 \checkmark$).

Μάθημα 1.5 · Αξιοσημείωτες ταυτότητες

- 1) α) $x^2 + 12x + 36$ β) $4\alpha^2 + 12\alpha + 9$ γ) $x^2 + 6xy + 9y^2$ δ) $\frac{x^2}{4} + x + 1$.
- 2) α) $x^2 - 18x + 81$ β) $16 - 24y + 9y^2$ γ) $4x^4 - 20x^2 + 25$ δ) $\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2$.
- 3) α) $x^2 - 64$ β) $25\alpha^2 - 1$ γ) $4x^2 - 9y^2$ δ) $7 - 4 = 3$.
- 4) α) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ β) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ γ) $8\alpha^3 + 12\alpha^2\beta + 6\alpha\beta^2 + \beta^3$.
- 5) α) $(100+1)^2 = 10201$ β) $(50-1)^2 = 2401$ γ) $100^2 - 3^2 = 9991$ δ) $(68-32)(68+32) = 36 \cdot 100 = 3600$.
- 6) $(4x^2 - 4x + 1) - (x^2 + 4x + 4) + 3x^2 - 3 = 6x^2 - 8x - 6$.
- 7) α) $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$ β) $(2\alpha-3)^2 = 4\alpha^2 - 12\alpha + 9$ γ) $\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$.
- 8) Πρώτο μέλος: $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$.
- 9) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta = 9 + 8 = 17$. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = 17 + 8 = 25$.
- 10) Ομαδοποιούμε: $(x+1)(x+4) = x^2 + 5x + 4$ και $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$. Θέτουμε $\omega = x^2 + 5x + 5$: το γινόμενο γίνεται $(\omega-1)(\omega+1) = \omega^2 - 1$, οπότε όλο το πρώτο μέλος είναι $\omega^2 - 1 + 1 = \omega^2 = (x^2 + 5x + 5)^2$.
- 11) $(x+2)^2 - (x-2)^2 = 8x$ (από τη γνωστή $(\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 = 4\alpha\beta$), άρα $\Pi = 0$. Για $x = 1000$: $1002^2 - 998^2 = 8 \cdot 1000 = 8000$.
- 12) Δεύτερο μέλος: $\alpha^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma\delta + \beta^2\delta^2 + \alpha^2\delta^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta + \beta^2\gamma^2 = \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 = \alpha^2(\gamma^2 + \delta^2) + \beta^2(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)$.

Μάθημα 1.6 · Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

- 1) α) $5(2x-3)$ β) $x(x-7)$ γ) $3\alpha^2\beta^2(2\alpha+3\beta)$ δ) $(y+1)(2x-5)$.
- 2) α) $(\alpha-2)(x-3)$ β) $(x-1)(x-1-3) = (x-1)(x-4)$ γ) $x(x+3)(4x-1)$.
- 3) α) $x(x+3) + y(x+3) = (x+3)(x+y)$ β) $\alpha^2(\alpha+1) - (\alpha+1) = (\alpha+1)(\alpha^2-1) = (\alpha+1)^2(\alpha-1)$ γ) $2x(y-3) - (y-3) = (y-3)(2x-1)$.

- 4) α) $(x-6)(x+6)$ β) $(7-2y)(7+2y)$ γ) $\left(5\alpha - \frac{1}{3}\right)\left(5\alpha + \frac{1}{3}\right)$ δ) $(2x+1-x)(2x+1+x) = (x+1)(3x+1)$.
- 5) α) $(x-3)^2$ β) $(3\alpha+5)^2$ γ) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.
- 6) α) $(x+4)(x+5)$ β) $(x-3)(x-7)$ γ) $(x+6)(x-2)$ δ) $(x-7)(x+4)$.
- 7) α) $(x+4)(x^2-4x+16)$ β) $(2-y)(4+2y+y^2)$ γ) $(\alpha\beta-1)(\alpha^2\beta^2+\alpha\beta+1)$.
- 8) α) $2(x-3)(x+3)$ β) $x(x-5)^2$ γ) $3(x^2+2x-8) = 3(x+4)(x-2)$ δ) $(x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$.
- 9) α) $(x-y)^2 - z^2 = (x-y-z)(x-y+z)$ β) $(\alpha-2\beta)(\alpha+2\beta) + (\alpha-2\beta) = (\alpha-2\beta)(\alpha+2\beta+1)$ γ) $x^2(x+2) - 9(x+2) = (x+2)(x-3)(x+3)$.
- 10) α) $26 \cdot 100 = 2600$ β) $45 \cdot 50 = 2250$ γ) Από $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ με $\alpha = 999, \beta = 1$: το κλάσμα ισούται με $999 + 1 = 1000$.
- 11) $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$: γινόμενο **τριών διαδοχικών** φυσικών. Ανάμεσά τους υπάρχει πάντα ένας άρτιος και ένα πολλαπλάσιο του 3, άρα το γινόμενο διαιρείται με $2 \cdot 3 = 6$.

Μάθημα 1.7 • Διάρθρωση πολυωνύμων

- 1) Πηλίκο $x+3$, υπόλοιπο 1: $x^2 + 5x + 7 = (x+2)(x+3) + 1$.
- 2) Πηλίκο $2x^2 - x + 3$, υπόλοιπο -2. (Έλεγχος: $P(1) = 2 - 3 + 4 - 5 = -2 \checkmark$.)
- 3) Με μηδενικούς όρους $x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1$: πηλίκο $x^3 - x^2 + x - 1$, υπόλοιπο 0. Είναι τέλεια.
- 4) Πηλίκο $3x^2 + 2x - \frac{5}{2}$, υπόλοιπο $-\frac{1}{2}$. Πράγματι $(2x-1)\left(3x^2 + 2x - \frac{5}{2}\right) - \frac{1}{2} = 6x^3 + x^2 - 7x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 6x^3 + x^2 - 7x + 2 \checkmark$.
- 5) Πηλίκο $x^2 + 3x + 2$, υπόλοιπο $-2x + 3$ (βαθμού $1 < 2$). Έλεγχος: $(x^2 - x + 1)(x^2 + 3x + 2) = x^4 + 2x^3 + 0x^2 + x + 2$ και $+(-2x + 3)$ δίνει $x^4 + 2x^3 - x + 5 \checkmark$.
- 6) $P(3) = 27 - 36 + 3 + 7 = 1$.
- 7) $P(-1) = -1 + \lambda + 2 + 4 = \lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -5$.
- 8) $P(2) = 8 - 12 - 8 + 12 = 0$, άρα ναι. $P(x) = x^2(x-3) - 4(x-3) = (x-3)(x-2)(x+2)$.
- 9) $\Delta(x) = (x^2 + x)(x-2) + 3x + 1 = x^3 - x^2 - 2x + 3x + 1 = x^3 - x^2 + x + 1$. Το υπόλοιπο έχει βαθμό 1, μικρότερο από τον βαθμό 2 του διαιρέτη.
- 10) $P(1) = 1 + \alpha + \beta - 6 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 5$. $P(2) = 8 + 4\alpha + 2\beta - 6 = 0 \Rightarrow 2\alpha + \beta = -1$. Αφαιρώντας: $\alpha = -6$ και $\beta = 11$.

Μάθημα 1.8 • Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων

- 1) α) $24 = 2^3 \cdot 3, 36 = 2^2 \cdot 3^2$: Ε.Κ.Π. = 72, Μ.Κ.Δ. = 12. β) Ε.Κ.Π. = 60, Μ.Κ.Δ. = 5.

- 2) α) Ε.Κ.Π. = $18x^2y^3$, Μ.Κ.Δ. = $3xy$. β) Ε.Κ.Π. = $60\alpha^3\beta^2$, Μ.Κ.Δ. = 2α .
- 3) $(x-3)(x+3)$ και $x(x+3)$. Μ.Κ.Δ. = $x+3$, Ε.Κ.Π. = $x(x-3)(x+3)$.
- 4) $2(x+1)$, $(x-1)(x+1)$, $(x+1)^2$. Μ.Κ.Δ. = $x+1$, Ε.Κ.Π. = $2(x-1)(x+1)^2$.
- 5) $\alpha(\alpha-\beta)$ και $(\beta-\alpha)(\beta+\alpha) = -(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$. Μ.Κ.Δ. = $\alpha-\beta$, Ε.Κ.Π. = $\alpha(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$.
- 6) $(x-2)(x-3)$ και $(x-2)^2$. Μ.Κ.Δ. = $x-2$, Ε.Κ.Π. = $(x-2)^2(x-3)$.
- 7) $3x(x-2)(x+2)$, $6(x-2)^2$, $(x-2)(x^2+2x+4)$. Μ.Κ.Δ. = $x-2$. Ε.Κ.Π. = $6x(x-2)^2(x+2)(x^2+2x+4)$.
- 8) Κάθε παράγοντας του Μ.Κ.Δ. εμφανίζεται και στο Ε.Κ.Π. με εκθέτη τουλάχιστον ίσο, άρα το διαιρεί. Για τα μονώνυμα: Μ.Κ.Δ.·Ε.Κ.Π. = $3xy \cdot 18x^2y^3 = 54x^3y^4$ και $6x^2y \cdot 9xy^3 = 54x^3y^4 \checkmark$ (για κάθε παράγοντα, «μικρότερος + μεγαλύτερος εκθέτης» = άθροισμα των δύο εκθετών).

Μάθημα 1.9 · Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

- 1) α) $x \neq -7$ β) $x \neq \frac{1}{2}$ γ) $x \neq \pm 4$ δ) $x \neq 0$ και $x \neq 3$.
- 2) α) $(x-2)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ β) $(x-2)(x-3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2, x \neq 3$ γ) για κάθε x .
- 3) α) $\frac{3\beta^2}{2\alpha}$ β) $\frac{4(x-2)}{6(x-2)} = \frac{2}{3}, x \neq 2$ γ) $\frac{x(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x}{x-3}, x \neq \pm 3$.
- 4) α) $\frac{(x-5)^2}{(x-5)(x+5)} = \frac{x-5}{x+5}$ β) $\frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x+2}{x+1}$ γ) $\frac{2(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2(x-1)}{x+1}$.
- 5) α) $\frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)} = -\frac{1}{x+3}$ β) $\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{-\beta(\alpha-\beta)} = -\frac{\alpha}{\beta}$ γ) $\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+2x+4}{x+2}$.
- 6) Σωστές: β) και γ) (για $x \neq 0$). Λάθος: α) δεν απλοποιείται (το 5 είναι όρος)· δ) δεν απλοποιείται, γιατί το x^2+9 δεν παραγοντοποιείται (ενώ $\frac{x^2-9}{x+3} = x-3$).
- 7) Αριθμητής: $x^2(x-2) - (x-2) = (x-2)(x-1)(x+1)$. Παρονομαστής: $(x-1)(x-2)$. Άρα $A = x+1$ για $x \neq 1, 2$. Για $x = 99$: $A = 100$.
- 8) Περιορισμοί: $x \neq 0, x \neq 2, x \neq -2$. $B = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} \cdot \frac{x}{x+2} = 1$.

Μάθημα 1.10 · Πράξεις ρητών παραστάσεων

- 1) α) $\frac{30xy^2}{20x^3y} = \frac{3y}{2x^2}$ β) $\frac{6\alpha^2}{\beta} \cdot \frac{\beta^2}{3\alpha} = 2\alpha\beta$.
- 2) α) $\frac{(x-1)(x+1) \cdot 4x^2}{2x(x+1)} = 2x(x-1), x \neq 0, -1$ β) $\frac{(x+3)^2}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{x-3}{x+3} = 1, x \neq \pm 3$.
- 3) α) $\frac{x}{x} = 1$ β) $\frac{2(x-5)}{x-5} = 2$ γ) $\frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = x-3$.
- 4) α) $\frac{2x+1}{x(x+1)}$ β) $\frac{3(x+2) - 2(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+10}{(x-2)(x+2)}$ γ) $\frac{3x-2x+2+1}{6} = \frac{x+3}{6}$.

5 $x(x-1)$ και $(x-1)(x+1)$, Ε.Κ.Π. $x(x-1)(x+1)$: $\frac{2(x+1)-x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}$.

6 $\frac{x}{x-4} - \frac{4}{x-4} = \frac{x-4}{x-4} = 1$, για $x \neq 4$.

7 $\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{4x}{x^2-1}$, αφού $(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$.

8 Αριθμητής: $\frac{x^2-y^2}{xy}$, παρονομαστής: $\frac{x-y}{xy}$. Πηλίκο: $\frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x+y$, για $x, y \neq 0, x \neq y$.

9 Παρένθεση: $\frac{2(x+2)-2(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{8}{(x-2)(x+2)}$. Επί $\frac{(x-2)(x+2)}{4}$ δίνει 2. Η παράσταση ισούται με 2 για κάθε $x \neq \pm 2$.

Επανάληψη Κεφαλαίου · Επανάληψη 1ου Κεφαλαίου

1 $-8 - 9 + 1 \cdot (-1) - 3 = -21$.

2 $5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$.

3 $(4x^2 - 12x + 9) - (x^2 - 1) - 3(x^2 - 4x + 4) = 4x^2 - 12x + 9 - x^2 + 1 - 3x^2 + 12x - 12 = -2$. (Σταθερή!)

4 α) $5x(x-2)(x+2)$ β) $(x-4-y)(x-4+y)$ γ) $2(x+5)(x-2)$ δ) $(x+1)^2(x-1)$.

5 Πηλίκο $2x^2 - 3x + 4$, υπόλοιπο -6 . $P(-3) = -54 + 27 + 15 + 6 = -6 \checkmark$.

6 $x(x-1)$, $(x-1)^2$, $x(x-1)(x+1)$. Μ.Κ.Δ. = $x-1$, Ε.Κ.Π. = $x(x-1)^2(x+1)$.

7 $\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2} \cdot \frac{x(x+2)}{2(x-2)} = \frac{x}{2}$, για $x \neq \pm 2$.

8 Ε.Κ.Π. $(x-1)(x+1)$: $\frac{2(x-1) + (x-5) - (x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x-8}{(x-1)(x+1)} = \frac{2(x-4)}{(x-1)(x+1)}$, $x \neq \pm 1$.

9 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, άρα $x^2 + \frac{1}{x^2} = 16 - 2 = 14$.

10 Αριστερά: $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$.

11 Ορθογώνιο: $x^2 - 25$. Τετράγωνο: x^2 . Το τετράγωνο έχει μεγαλύτερο εμβαδόν, κατά 25 τ.μ., **ανεξάρτητα** από το x !

12 Για ν και $\nu+1$: $\nu^2 + (\nu+1)^2 - 1 = \nu^2 + \nu^2 + 2\nu + 1 - 1 = 2\nu^2 + 2\nu = 2\nu(\nu+1)$.

Α' Μέρος · Κεφάλαιο 2ο · Εξισώσεις – Ανισώσεις

Μάθημα 2.1 · Η εξίσωση $ax + \beta = 0$

1 α) $3x = 15, x = 5$ β) $3x - 6 = x + 4, 2x = 10, x = 5$ γ) $7 - 2x - 2 = 3 - x + 4 \iff -x = 2 \iff x = -2$.

2 α) $3x + 2x = 60, x = 12$ β) Ε.Κ.Π. 10: $2(2x-1) - 5(x+3) = -20 \iff 4x - 2 - 5x - 15 = -20 \iff -x = -3 \iff x = 3$.

- 3 Ε.Κ.Π. 12: $3(x+1) - 2(x-2) = 12 - x \iff x+7 = 12 - x \iff 2x = 5 \iff x = \frac{5}{2}$.
- 4 α) $4x - 4 - 2x = 2x - 4 \iff 0x = 0$: ταυτότητα. β) $2x - 5 = 2x + 2 \iff 0x = 7$: αδύνατη.
- 5 $x^2 - 4x + 4 - x^2 + 9 = 1 \iff -4x = -12 \iff x = 3$.
- 6 α) $x = 7$ ή $x = 1$ β) $x = -\frac{1}{3}$ γ) $|x| = -3$: αδύνατη.
- 7 Αν $\mu \neq -1$: $x = \frac{(\mu-1)(\mu+1)}{\mu+1} = \mu - 1$. Αν $\mu = -1$: $0x = 0$, ταυτότητα.
- 8 $t = \frac{v-v_0}{\alpha}$ και $\beta = \frac{\Pi}{2} - \alpha$.
- 9 $x + (x+1) + (x+2) = 123 \iff 3x = 120 \iff x = 40$. Οι αριθμοί είναι 40, 41, 42.
- 10 $2x + 2(x+6) = 52 \iff 4x = 40 \iff x = 10$. Διαστάσεις 10 cm και 16 cm, εμβαδόν 160 cm².
- 11 Αν t οι ώρες του αυτοκινήτου, ο ποδηλάτης κινείται $t+1$ ώρες: $60t = 15(t+1) \iff 45t = 15 \iff t = \frac{1}{3}$ h = 20 λεπτά (στα 20 km από την πόλη).

Μάθημα 2.2 · Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

- 1 α) $x(x-8) = 0$: $x = 0$ ή $x = 8$ β) $5x(x+3) = 0$: $x = 0$ ή $x = -3$ γ) $x\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$: $x = 0$ ή $x = \frac{1}{2}$.
- 2 α) $x = \pm 10$ β) $x = \pm \frac{1}{3}$ γ) $x^2 = -9$: αδύνατη δ) $x^2 = 5$: $x = \pm\sqrt{5}$.
- 3 α) $(x+5)^2 = 0$: $x = -5$ (διπλή) β) $(x-3)(x-4) = 0$: $x = 3$ ή $x = 4$ γ) $2x - 1 = \pm 4$: $x = \frac{5}{2}$ ή $x = -\frac{3}{2}$.
- 4 α) $\Delta = 1$, $x = 3$ ή $x = 2$ β) $\Delta = 1 + 24 = 25$, $x = \frac{-1 \pm 5}{6}$: $x = \frac{2}{3}$ ή $x = -1$ γ) $\Delta = 4 - 12 < 0$: αδύνατη δ) $\Delta = 0$, $x = -\frac{1}{2}$ (διπλή).
- 5 α) $\Delta = 12$, $x = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$ β) πολλαπλασιάζουμε με -1 : $x^2 - 6x + 7 = 0$, $\Delta = 8$, $x = 3 \pm \sqrt{2}$.
- 6 α) $x^2 - 2x - 3 = 5 \iff x^2 - 2x - 8 = 0 \iff (x-4)(x+2) = 0$: $x = 4$ ή $x = -2$. β) $(x+2)(x-3) = 0$: $x = -2$ ή $x = 3$ (μην διαιρέσεις με $x+2$!).
- 7 α) ρίζες $\frac{1}{2}, -2$: $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+2) = (2x-1)(x+2)$ β) ρίζες $3, \frac{1}{3}$: $(x-3)(3x-1)$ γ) ρίζες $1 \pm \sqrt{2}$: $(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$.
- 8 $x^2(x-2) - 9(x-2) = (x-2)(x-3)(x+3) = 0$: $x = 2$, $x = 3$, $x = -3$.
- 9 $\Delta = 36 - 4\lambda = 0 \iff \lambda = 9$. Τότε $(x-3)^2 = 0$, διπλή ρίζα $x = 3$.
- 10 $4 + 2\kappa - 10 = 0 \iff \kappa = 3$. $x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5)$, άλλη ρίζα $x = -5$.

Μάθημα 2.3 · Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

- 1 $x^2 = x + 30 \iff x^2 - x - 30 = 0 \iff (x - 6)(x + 5) = 0$. Αποδεκτή η $x = 6$.
- 2 $x^2 + (x + 2)^2 = 130 \iff 2x^2 + 4x - 126 = 0 \iff x^2 + 2x - 63 = 0 \iff (x + 9)(x - 7) = 0$. Αποδεκτή $x = 7$: οι αριθμοί 7 και 9.
- 3 $(x + 9)(x - 4) = x^2 \iff 5x - 36 = 0 \iff x = 7,2$ cm. (Εδώ η εξίσωση «έπεσε» σε 1ου βαθμού, γιατί τα x^2 απαλείφονται!)
- 4 $x^2 + (x + 7)^2 = 169 \iff 2x^2 + 14x - 120 = 0 \iff x^2 + 7x - 60 = 0 \iff (x + 12)(x - 5) = 0$. Κάθετες 5 και 12 cm, εμβαδόν 30 cm^2 .
- 5 Αν x το μήκος, το πλάτος είναι $35 - x$: $x(35 - x) = 300 \iff x^2 - 35x + 300 = 0 \iff (x - 15)(x - 20) = 0$. Διαστάσεις 15 m και 20 m.
- 6 $\nu(\nu - 3) = 70 \iff \nu^2 - 3\nu - 70 = 0 \iff (\nu - 10)(\nu + 7) = 0$. Δέκα πλευρές (δεκάγωνο).
- 7 Με ν ομάδες γίνονται $\frac{\nu(\nu - 1)}{2}$ αγώνες: $\nu^2 - \nu - 90 = 0 \iff (\nu - 10)(\nu + 9) = 0$. Συμμετείχαν 10 ομάδες.
- 8 $20t - 5t^2 = 15 \iff t^2 - 4t + 3 = 0 \iff t = 1 \text{ ή } t = 3$ (μία φορά ανεβαίνοντας, μία κατεβαίνοντας). Έδαφος: $20t - 5t^2 = 0 \iff t = 0 \text{ ή } t = 4$, άρα μετά από 4 s.
- 9 Αν x η πλευρά, η βάση του κουτιού είναι $(x - 6) \times (x - 6)$ και το ύψος 3: $3(x - 6)^2 = 300 \iff (x - 6)^2 = 100 \iff x - 6 = 10$ (το -10 απορρίπτεται), άρα $x = 16$ cm.

Μάθημα 2.4 · Κλασματικές εξισώσεις

- 1 α) $x = 3$ β) $5 - x = 3 \iff x = 2$ γ) $x + 4 = 3x \iff x = 2$. Όλες δεκτές ($x \neq 0$).
- 2 α) $x \neq 2, -1$: $3x + 3 = 2x - 4 \iff x = -7$ (δεκτή). β) $x \neq -3$: $5x = 2x + 6 \iff x = 2$ (δεκτή).
- 3 $x \neq \pm 3$: $(x + 3) + 2(x - 3) = 6 \iff 3x = 9 \iff x = 3$, που **απορρίπτεται**. Η εξίσωση είναι αδύνατη.
- 4 $x \neq 0, 1$, Ε.Κ.Π. $x(x - 1)$: $x^2 - 2(x - 1) = 1 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff x = 1$, απορρίπτεται. Αδύνατη.
- 5 $x \neq 0$: $x^2 - 5x + 6 = 0 \iff x = 2 \text{ ή } x = 3$, δεκτές.
- 6 $x \neq \pm 1$: $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 8 \iff 4x = 8 \iff x = 2$, δεκτή.
- 7 $x \neq 0, -2$, Ε.Κ.Π. $x(x + 2)$: $3x - (x + 2) = x - 4 \iff x = -2$, απορρίπτεται. Αδύνατη.
- 8 $x \neq \pm 2$: $2x(x + 2) + x(x - 2) = 8 + 2(x^2 - 4) \iff 3x^2 + 2x = 2x^2 \iff x^2 + 2x = 0 \iff x = 0 \text{ ή } x = -2$. Η $x = -2$ απορρίπτεται, δεκτή η $x = 0$.
- 9 $\frac{x - 3 + 2}{x + 2} = \frac{3}{4} \iff 4x - 4 = 3x + 6 \iff x = 10$. Το κλάσμα είναι $\frac{7}{10}$.
- 10 $\frac{1}{3} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \iff x = 6$ ώρες.
- 11 $\frac{60}{v} - \frac{60}{v + 5} = 1 \iff 300 = v^2 + 5v \iff v^2 + 5v - 300 = 0 \iff (v + 20)(v - 15) = 0$. Ταχύτητα 15 km/h.

Μάθημα 2.5 · Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο

- 1 α) $\frac{21-20}{28} > 0$, άρα $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$. β) $-\frac{2}{3} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{12} > 0$, άρα $-\frac{2}{3} > -\frac{3}{4}$. γ) $\sqrt{12} < \sqrt{18}$, άρα $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.
- 2 α) $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2 \geq 0$. β) $\alpha^2 + 4\alpha + 5 = (\alpha + 2)^2 + 1 \geq 1 > 0$.
- 3 α) $-1 < x + y < 7$ β) $2 < 2x < 6$ και $-12 < -3y < 6$, άρα $-10 < 2x - 3y < 12$ γ) $-3 < -x < -1$.
- 4 α) $x > 4$ β) $-2x \geq 6 \iff x \leq -3$ γ) $3x < -9 \iff x < -3$.
- 5 α) $2x - 3x + 3 \leq 6 \iff -x \leq 3 \iff x \geq -3$. β) Ε.Κ.Π. 12: $6x - 3 - 4x - 8 > 2x \iff 0x > 11$: αδύνατη.
- 6 $x^2 + 4x + 4 - x^2 + 1 \leq 3x + 1 \iff x \leq -4$.
- 7 $x > -3$ και $x \leq 5$: $-3 < x \leq 5$.
- 8 $-2 \leq 2x < 6 \iff -1 \leq x < 3$: ακέραιες $-1, 0, 1, 2$.
- 9 $A > B \iff 12 - 3x > 2x + 2 \iff x < 2$. $A > 0 \iff x < 4$. Κοινές λύσεις: $x < 2$.
- 10 $\frac{14 + 17 + 15 + x}{4} \geq 16 \iff 46 + x \geq 64 \iff x \geq 18$. Πρέπει $18 \leq x \leq 20$.
- 11 $10 < 2x + 3 \Rightarrow x > 3,5$. $x + 3 < x + 10$ ισχύει πάντα. $x < x + 13$ ισχύει πάντα. Άρα $x > 3,5$.

Επανάληψη Κεφαλαίου · Επανάληψη 2ου Κεφαλαίου

- 1 Ε.Κ.Π. 12: $9x - 3 - 2x - 2 = 4x \iff 3x = 5 \iff x = \frac{5}{3}$.
- 2 α) $x = \pm 5$ β) $x = 0$ ή $x = -3$ γ) $x = 3$ ή $x = -2$ δ) $\Delta = 9 - 32 < 0$, αδύνατη.
- 3 $2x^2 + 2x + 5 = 17 \iff x^2 + x - 6 = 0 \iff x = 2$ ή $x = -3$.
- 4 $x \neq \pm 1$: $x(x - 1) + (x + 1) = 2 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1$, και οι δύο απορρίπτονται. Αδύνατη.
- 5 $x - 1 \leq 2x + 2 \iff x \geq -3$. $-3x > -9 \iff x < 3$. Κοινές: $-3 \leq x < 3$.
- 6 Ρίξεις 2 και $\frac{1}{3}$: $3x^2 - 7x + 2 = (x - 2)(3x - 1)$. Κλάσμα: $\frac{3x - 1}{x + 2}$, $x \neq \pm 2$.
- 7 $x + y = 14$, άρα $y = 14 - x$: $x^2 + (14 - x)^2 = 100 \iff x^2 - 14x + 48 = 0 \iff x = 6$ ή $x = 8$. Διαστάσεις 6 και 8 cm.
- 8 $\Delta = 16 - 4(\lambda - 1) = 20 - 4\lambda > 0 \iff \lambda < 5$.
- 9 $\frac{600}{x - 5} - \frac{600}{x} = 6 \iff 3000 = 6x(x - 5) \iff x^2 - 5x - 500 = 0 \iff (x - 25)(x + 20) = 0$. Το εισιτήριο κόστιζε 25 €.

Α' Μέρος · Κεφάλαιο 3ο · Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Μάθημα 3.1 · Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

- 1 $(4, 0): 4 = 4 \checkmark, (0, -2): 4 = 4 \checkmark, (2, -1): 2 + 2 = 4 \checkmark$. Το $(1, 1)$ δίνει -1 , δεν είναι.
- 2 $y = 7 - 2x$: π.χ. $(0, 7), (1, 5), (2, 3), (3, 1)$. Όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία.
- 3 α) Τέμνει τους άξονες στα $(0, 4)$ και $(4, 0)$. β) Στα $(0, -3)$ και $(2, 0)$. γ) Περνάει από την αρχή $(0, 0)$ · παίρνουμε και ένα δεύτερο σημείο, π.χ. $(3, 1)$.
- 4 Οι $y = -1$ και $x = 3$ τέμνονται στο $(3, -1)$. Η $x + y = 2$ τέμνει την $y = -1$ στο $(3, -1)$ επίσης! Άρα και οι τρεις περνούν από το ίδιο σημείο $(3, -1)$ — δεν σχηματίζουν τρίγωνο.
- 5 $2\kappa + 6 = 12 \iff \kappa = 3$.
- 6 $y = 2x - 3$, κλίση 2. $y = -\frac{1}{5}x$, κλίση $-\frac{1}{5}$.
- 7 $(0, -5)$ και $(4, 0)$. Ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες 4 και 5: εμβαδόν $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ τ.μ.
- 8 Οι συντελεστές μηδενίζονται: $\mu^2 - 4 = 0 \iff \mu = \pm 2$ και $\mu - 2 = 0 \iff \mu = 2$. α) Κατακόρυφη: $\mu - 2 = 0$ αλλά $\mu^2 - 4 \neq 0$ — αδύνατο, αφού για $\mu = 2$ μηδενίζονται και οι δύο. Άρα **για καμία** τιμή. β) Για $\mu = 2$: $0x + 0y = 3$, δεν παριστάνει ευθεία (και είναι αδύνατη).
- 9 $10x + 15y = 300 \iff 2x + 3y = 60$. Ο y πρέπει να είναι άρτιος: $(30, 0), (27, 2), (24, 4), (21, 6), (18, 8), (15, 10), (12, 12), (9, 14), (6, 16), (3, 18), (0, 20)$.

Μάθημα 3.2 · Γραμμικό σύστημα και γραφική επίλυσή του

- 1 Το $(1, 2): 3 \checkmark$ και $0 \checkmark$ — είναι λύση. Τα $(2, 1)$ και $(3, 0)$ επαληθεύουν μόνο την πρώτη.
- 2 Η 1η περνάει από $(0, 6), (6, 0)$ και η 2η από $(0, -2), (2, 0)$. Τέμνονται στο $(4, 2)$.
- 3 Τέμνονται στο $(2, 3)$. Επαλήθευση: $3 = 4 - 1 \checkmark, 3 = -2 + 5 \checkmark$.
- 4 α) Η 2η είναι διπλάσια της 1ης: αόριστο. β) Ίδια κλίση $-\frac{1}{3}$, διαφορετικό κ ($\frac{4}{3}$ και $\frac{5}{6}$): αδύνατο. γ) Κλίσεις -1 και 1 : μία λύση, την $(1, 0)$.
- 5 Η κατακόρυφη $x = 3$ και η οριζόντια $y = -2$ τέμνονται στο $(3, -2)$. Το σύστημα «δίνει» έτοιμη τη λύση.
- 6 Για παράλληλες ευθείες χρειάζεται ίδια κλίση: $\kappa = 3$ (τα κ -σημεία 1 και -2 διαφέρουν).
- 7 Κορυφές: $x + y = 4$ με $x - y = 0$: $(2, 2)$ · με $y = 0$: $(4, 0)$ · $x - y = 0$ με $y = 0$: $(0, 0)$. Βάση 4, ύψος 2: εμβαδόν 4 τ.μ.
- 8 $y = 20 + 5x$ και $y = 40 + 3x$ τέμνονται στο $(10, 70)$. Για περισσότερες από 10 επισκέψεις συμφέρει το δεύτερο.

Μάθημα 3.3 · Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

- 1 α) $3x = 9$: $(3, 6)$ β) $x = y + 1$: $3y + 3 + 2y = 13 \iff y = 2$: $(3, 2)$.

2 α) $2x = 10$: $(5, 2)$ β) $7x = 21, x = 3, y = 2$: $(3, 2)$.

3 1η επί -2 : $-10x - 4y = -2$, πρόσθεση με 2η: $-7x = 7 \iff x = -1, y = 3$. Λύση $(-1, 3)$.

4 $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$: $5x = 12, x = \frac{12}{5}, y = 7 - \frac{24}{5} = \frac{11}{5}$.

5 $\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$: αφαιρώντας, $4y = 16, y = 4, x = 3$. Λύση $(3, 4)$.

6 α) 2η επί -3 και πρόσθεση: $0 = 0$, αόριστο. β) 1η επί -3 : $0 = -5$, αδύνατο.

7 $x + y = 42, x - y = 8$: $x = 25, y = 17$.

8 $x + y = 35, 2x + 4y = 94$: από την 1η $x = 35 - y$, άρα $70 + 2y = 94 \iff y = 12$. Κουνέλια 12, κότες 23.

9 $\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ 3\alpha + \beta = 9 \end{cases}$: $2\alpha = 4, \alpha = 2, \beta = 3$. Ευθεία $y = 2x + 3$.

10 $\frac{x+2}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x + 4 = y \cdot \frac{x}{y-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x = y - 1$. Άρα $3x = 2x + 3 \iff x = 3, y = 10$. Κλάσμα $\frac{3}{10}$.

11 $v + \rho = 18, v - \rho = 12$: $v = 15 \text{ km/h}, \rho = 3 \text{ km/h}$.

Επανάληψη Κεφαλαίου · Επανάληψη 3ου Κεφαλαίου

1 Σημεία $(0, 3)$ και $(4, 0)$. Μήκος (Πυθαγόρειο): $\sqrt{9 + 16} = 5$.

2 Πρόσθεση: $3x = 6, x = 2, y = -1$. Οι ευθείες τέμνονται στο $(2, -1)$.

3 1η επί 5, 2η επί 3: $35x - 15y = 5, 6x + 15y = 36$, άρα $41x = 41, x = 1, y = 2$.

4 1η επί 6: $3x + 3y = 2x - 2y + 12 \iff x + 5y = 12$. Αφαιρούμε τη 2η: $7y = 15, y = \frac{15}{7}, x = 12 - \frac{75}{7} = \frac{9}{7}$.

5 Η 1η πρέπει να είναι διπλάσια της 2ης: $\lambda = 6$ (και $4 = 2 \cdot 2 \checkmark$).

6 $3x + 2y = 8$ και $2x + 5y = 9$. 1η επί 2, 2η επί 3: $6x + 4y = 16, 6x + 15y = 27$. Αφαιρώντας: $11y = 11, y = 1 \text{ €}, x = 2 \text{ €}$.

7 $x + y = 180, x = 3y + 40$: $4y = 140, y = 35^\circ, x = 145^\circ$.

8 $\alpha + 2\beta = 7$ και $\beta - 2\alpha = -4$. Από τη 2η $\beta = 2\alpha - 4$: $\alpha + 4\alpha - 8 = 7 \iff \alpha = 3, \beta = 2$.

Α' Μέρος · Κεφάλαιο 4ο · Συναρτήσεις

Μάθημα 4.1 · Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a \neq 0$

1 y : $-8, -2, 0, -2, -8$. Παραβολή ανοιχτή προς τα κάτω, με μέγιστο 0 στο $x = 0$.

2 Ελάχιστο: $y = 3x^2, y = 0, 5x^2$. Μέγιστο: $y = -\frac{1}{4}x^2, y = -x^2$. Πιο ανοιχτή: αυτή με το μικρότερο $|a|$, η $y = -\frac{1}{4}x^2$.

- 3 $18 = 9\alpha \iff \alpha = 2$. $(1, 2): 2 = 2 \checkmark$. $(2, -8): 2 \cdot 4 = 8 \neq -8 \times$.
- 4 $2x^2 = 8 \iff x = \pm 2$: σημεία $(2, 8)$ και $(-2, 8)$.
- 5 $-x^2 = 2x - 3 \iff x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x = 1$ ή $x = -3$. Σημεία $(1, -1)$ και $(-3, -9)$.
- 6 $x^2 = 4x - 4 \iff (x - 2)^2 = 0 \iff x = 2$ (διπλή): ένα κοινό σημείο, το $(2, 4)$.
- 7 $E = x^2, x > 0$: το δεξί μισό της παραβολής. $x^2 = 20 \iff x = 2\sqrt{5} \approx 4,47$ cm.
- 8 $\kappa + 2 = \kappa^2 \iff \kappa^2 - \kappa - 2 = 0 \iff \kappa = 2$ ή $\kappa = -1$. Σημεία $(2, 4)$ ή $(-1, 1)$.

Μάθημα 4.2 · Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$

- 1 α) $x_K = 3, y_K = -4$: $K(3, -4)$, άξονας $x = 3$. β) $K(2, 4), x = 2$. γ) $x_K = -1, y_K = 2 - 4 - 1 = -3$: $K(-1, -3), x = -1$.
- 2 $y'y$: $(0, -6)$. $x'x$: $(x + 3)(x - 2) = 0$, σημεία $(-3, 0)$ και $(2, 0)$.
- 3 $\alpha < 0$, κορυφή $(1, 4)$, άξονας $x = 1, y'y$ στο $(0, 3)$ (συμμετρικό $(2, 3)$), ρίζες $x = 3$ και $x = -1$. Μέγιστο 4 για $x = 1$.
- 4 α) $\Delta = 0$: εφάπτεται στο $(2, 0)$. β) $\Delta = 1 - 24 < 0$: δεν τον συναντά. γ) $\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$: τέμνει στα $x = 1$ και $x = 4$.
- 5 $(x^2 + 8x + 16) - 16 + 10 = (x + 4)^2 - 6$. Κορυφή $(-4, -6)$.
- 6 $\gamma = 1$ και $\alpha + 4 + 1 = 3 \iff \alpha = -2$. $y = -2x^2 + 4x + 1$: $x_K = 1, y_K = 3$. Κορυφή $(1, 3)$ — είναι το ίδιο το δεύτερο σημείο!
- 7 $P = x(14 - x) = -x^2 + 14x$, μέγιστο για $x = 7$: αριθμοί 7 και 7, γινόμενο 49.
- 8 Αν x οι δύο κάθετες πλευρές, η παράλληλη στο ποτάμι είναι $60 - 2x$. $E = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x$, μέγιστο για $x = 15$: διαστάσεις 15 m και 30 m, εμβαδόν 450 m^2 .
- 9 Με αύξηση $x \text{ €}$: εισπράξεις $(10 + x)(200 - 10x) = -10x^2 + 100x + 2000$. Μέγιστο για $x = 5$: τιμή 15 €, 150 εισιτήρια, εισπράξεις 2250 €.

Επανάληψη Κεφαλαίου · Επανάληψη 4ου Κεφαλαίου

- 1 $2 = 4\alpha \iff \alpha = \frac{1}{2}$. Παραβολή ανοιχτή προς τα πάνω, πιο «ανοιχτή» από την $y = x^2$.
- 2 $\alpha > 0$, κορυφή $(-2, -1)$, $y'y$: $(0, 3)$, ρίζες -1 και -3 . Ελάχιστο -1 για $x = -2$.
- 3 $x^2 = -x^2 + 8 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$: σημεία $(2, 4)$ και $(-2, 4)$.
- 4 $\Delta = 36 - 4\kappa = 0 \iff \kappa = 9$. Εφάπτεται στο $(3, 0)$.
- 5 $-\frac{\beta}{-2} = 2 \iff \beta = 4$. $-4 + 8 + \gamma = 5 \iff \gamma = 1$. $-x^2 + 4x + 1 = 0 \iff x = 2 \pm \sqrt{5}$.
- 6 $E = \frac{x(12 - x)}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 6x$, μέγιστο για $x = 6$: κάθετες 6 και 6 cm, $E = 18 \text{ cm}^2$.

Α' Μέρος · Κεφάλαιο 5ο · Πιθανότητες

Μάθημα 5.1 · Σύνολα

- 1 α) $\{\Pi, \Gamma, \Theta, \Lambda, \Sigma, \Phi, \Psi, \chi\}$ β) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ γ) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.
- 2 α) $\{x \mid x \text{ θετικό πολλαπλάσιο του } 5\}$ β) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ ή $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1\}$.
- 3 α) $\in$ β) $\subseteq$ γ) $\not\subseteq$ δ) $\subseteq$ ε) $\notin$.
- 4 $\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}$: $8 = 2^3$ υποσύνολα.
- 5 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12\}$, $A \cap B = \{3, 6, 12\}$, $A' = \{5, 7, 8, 10, 11\}$, $(A \cup B)' = \{5, 7, 8, 10, 11\}$.
- 6 Αφού το A είναι «μέσα» στο B: $A \cup B = B$ και $A \cap B = A$.
- 7 Μόνο βιβλία 15, μόνο σειρές 11: α) 26 μαθητές. Ένα τουλάχιστον: $15 + 7 + 11 = 33$, άρα β) 7 μαθητές.
- 8 α) Τα στοιχεία που ανήκουν στο A αλλά όχι στο B («μόνο A»). β) Τα στοιχεία που δεν ανήκουν σε κανένα από τα δύο — είναι το $(A \cup B)'$.

Μάθημα 5.2 · Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

- 1 α) $\{Z, A, P, I\}$ β) $\{K1, K2, \dots, K6, \Gamma1, \dots, \Gamma6\}$: 12 στοιχεία.
- 2 $\Omega = \{AAA, AAK, AK A, AKK, KAA, KAK, KKA, KKK\}$. $E_1 = \{AKK, KAK, KKA\}$, $E_2 = \Omega - \{KKK\}$ (επτά στοιχεία).
- 3 α) $\{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$ β) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ γ) $\{(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)\}$.
- 4 $\Omega = \{AM, AK, MA, MK, KA, KM\}$: $3 \cdot 2 = 6$ στοιχεία (η δεύτερη μπάλα δεν μπορεί να είναι ίδια με την πρώτη).
- 5 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A' = \{4, 5, 6\}$ («μεγαλύτερο του 3»), $A' \cap B' = \{4, 6\}$ («ούτε το A ούτε το B»).
- 6 $\Omega = \{K, \Gamma K, \Gamma \Gamma K, \Gamma \Gamma \Gamma\}$.
- 7 $A = \{(6, 6)\}$ και $(6, 6) \notin B$, άρα $A \cap B = \emptyset$: είναι ασυμβίβαστα.

Μάθημα 5.3 · Η έννοια της πιθανότητας

- 1 $N(\Omega) = 10$. α) $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ β) $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ γ) 0 (αδύνατο).
- 2 Το A εμφανίζεται 3 φορές: $P = \frac{3}{10}$. Φωνήεντα: A, Η, Α, Ι, Α = 5: $P = \frac{1}{2}$.
- 3 α) $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ β) $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$: $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ γ) 18 ζεύγη: $\frac{1}{2}$.
- 4 $N(\Omega) = 8$. α) $\frac{1}{8}$ β) $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ γ) $\{AAK, AK A, KAA\}$: $\frac{3}{8}$.
- 5 $P(A \cup B) = 0,7$, $P(A') = 0,6$, $P((A \cup B)') = 0,3$.

$$6 \quad P(B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$

$$7 \quad P(O \cup A) = 0,60 + 0,45 - 0,20 = 0,85. \text{ Τίποτα: } 1 - 0,85 = 0,15 = 15\%.$$

$$8 \quad N(\Omega) = 90. \alpha) 11, 22, \dots, 99: \frac{9}{90} = \frac{1}{10} \quad \beta) 18 \text{ αριθμοί: } \frac{1}{5} \quad \gamma) > 80: 19, \text{ τελειώνουν σε } 0: 9, \text{ κοινά: } 90: 1. P = \frac{19+9-1}{90} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}.$$

$$9 \quad \text{Ίσα: 6 ζεύγη. Τα υπόλοιπα 30 μοιράζονται εξίσου σε «μεγαλύτερο» και «μικρότερο» λόγω συμμετρίας: 15. } P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

Επανάληψη Κεφαλαίου · Επανάληψη 5ου Κεφαλαίου

$$1 \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}, A \cap B = \{2, 4\}, A' = \{5, 6, 7, 8\}, B' = \{1, 3, 5, 7\}.$$

$$2 \quad N(\Omega) = 12, \text{ ευνοϊκά: } K2, K4, K6. P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

$$3 \quad P(K) = \frac{5}{50} = \frac{1}{10} = 10\%, P(K') = \frac{9}{10} = 90\%.$$

$$4 \quad \text{Περιττό γινόμενο μόνο όταν και τα δύο είναι περιττά: } 3 \cdot 3 = 9 \text{ ζεύγη. } P(\text{άρτιο}) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{3}{4}.$$

$$5 \quad \alpha) \frac{18+12-5}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} \quad \beta) \frac{13}{30}.$$

$$6 \quad \text{Τετράγωνα: } 1, 4, \dots, 100: 10. \text{ Πολλαπλάσια του } 10: 10. \text{ Κοινό: } 100. P = \frac{10+10-1}{100} = \frac{19}{100}.$$

Β' Μέρος · Κεφάλαιο 1ο · Γεωμετρία

Μάθημα 1.1 · Ισότητα τριγώνων

$$1 \quad \text{Ναι, από Π-Γ-Π (η } \hat{A} \text{ είναι περιεχόμενη των } AB, AG). \text{ Επομένως } B\Gamma = EZ, \hat{B} = \hat{E}, \hat{\Gamma} = \hat{Z}.$$

$$2 \quad \text{Ναι, Γ-Π-Γ: η πλευρά } K\Lambda \text{ και οι προσκείμενες γωνίες της } \hat{K}, \hat{\Lambda}.$$

$$3 \quad \text{Φέρνουμε τη διαγώνιο } B\Delta. \text{ Τα τρίγωνα } AB\Delta \text{ και } \Gamma\Delta B \text{ έχουν } AB = \Gamma\Delta, A\Delta = \Gamma B, B\Delta \text{ κοινή: ίσα από Π-Π-Π. Άρα } \hat{A} = \hat{\Gamma} \text{ (απέναντι από την κοινή πλευρά } B\Delta).$$

$$4 \quad \text{Τρίγωνα } AB\Delta \text{ και } A\Gamma E: AB = A\Gamma, B\Delta = \Gamma E, \hat{B} = \hat{\Gamma} \text{ (γωνίες βάσης ισοσκελούς). Από Π-Γ-Π είναι ίσα, άρα } A\Delta = AE.$$

$$5 \quad \text{Τα ορθογώνια τρίγωνα } MKB \text{ και } M\Lambda\Gamma \text{ έχουν υποτείνουσες } MB = M\Gamma \text{ και οξείες γωνίες } \hat{B} = \hat{\Gamma}. \text{ Είναι ίσα, άρα } MK = M\Lambda. \text{ (Αλλιώς: ο } M \text{ ανήκει στη διχοτόμο της } \hat{A}).$$

$$6 \quad \text{Επειδή } AB = A\Gamma, \text{ είναι } \hat{B} = \hat{\Gamma}. \text{ επειδή } BA = B\Gamma, \text{ είναι } \hat{A} = \hat{\Gamma}. \text{ Άρα όλες ίσες και } 3\hat{A} = 180^\circ, \hat{A} = 60^\circ.$$

$$7 \quad \text{Τα τρίγωνα } AOB \text{ και } \Gamma OD \text{ είναι ίσα (Π-Γ-Π: } OA = OG, OB = OD, \text{ κατακορυφήν γωνίες), άρα } O\hat{A}B = O\hat{\Gamma}D \text{ (εντός εναλλάξ) και } AB \parallel \Gamma D. \text{ Ομοίως από τα } AO\Delta, \Gamma OB: A\Delta \parallel B\Gamma.$$

- 8 Τρίγωνα $\triangle AMB$ και $\triangle M\Gamma$: $MA = M\Delta$, $MB = M\Gamma$, κατακορυφήν γωνίες. Ίσα (Π-Γ-Π), άρα $\Gamma\Delta = AB$ και $M\hat{A}B = M\hat{\Delta}\Gamma$ (εντός εναλλάξ), οπότε $\Gamma\Delta \parallel AB$.

Μάθημα 1.2 · Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

- 1 α) $\frac{3}{2}$ β) $\frac{60}{24} = \frac{5}{2}$ γ) $\frac{2000}{800} = \frac{5}{2}$.
- 2 $300\,000 : 25\,000 = 12$ cm.
- 3 α) $x = 10$ β) $x^2 = 100$, $x = 10$ γ) $5x + 5 = 7x$, $x = \frac{5}{2}$.
- 4 5 μερίδια των 4 cm: $MA = 12$ cm, $MB = 8$ cm, $\frac{MB}{AB} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.
- 5 Θέτουμε $\alpha = 2\kappa$, $\beta = 5\kappa$: $\frac{7\kappa}{5\kappa} = \frac{7}{5}$, $\frac{3\kappa}{2\kappa} = \frac{3}{2}$, $\frac{11\kappa}{10\kappa} = \frac{11}{10}$.
- 6 12 μερίδια των 4 cm: 12, 16, 20 cm. Επειδή $12^2 + 16^2 = 400 = 20^2$, είναι **ορθογώνιο**.
- 7 $AB = 6$, $B\Gamma = 15$, $AM = 10,5$. Άρα $BM = AM - AB = 4,5$ cm.
- 8 Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$, τότε $\alpha = \lambda\beta$ και $\gamma = \lambda\delta$, οπότε $\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} = \frac{\lambda(\beta + \delta)}{\beta + \delta} = \lambda$.

Μάθημα 1.3 · Θεώρημα του Θαλή

- 1 $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'} \iff \frac{6}{9} = \frac{A'B'}{12} \iff A'B' = 8$.
- 2 $\frac{4}{6} = \frac{5}{E\Gamma} \iff E\Gamma = 7,5$.
- 3 $\frac{6}{15} = \frac{AE}{10} \iff AE = 4$, $E\Gamma = 6$.
- 4 $\frac{3}{4,5} = \frac{2}{3}$ και $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$: ίσοι λόγοι, άρα από το αντίστροφο $\Delta E \parallel B\Gamma$.
- 5 Ημιευθεία Ax , τρία ίσα τμήματα $AK_1 = K_1K_2 = K_2K_3$, ενώνουμε K_3 με B , φέρνουμε από K_1, K_2 παράλληλες στην K_3B . Κάθε κομμάτι $\approx 2,33$ cm.
- 6 $\frac{h}{10} = \frac{1,5}{2} \iff h = 7,5$ m.
- 7 Τρεις παράλληλες ($AB, EZ, \Delta\Gamma$): $\frac{AE}{E\Delta} = \frac{BZ}{Z\Gamma} = \frac{2}{3}$. Με $BZ + Z\Gamma = 10$: $BZ = 4$, $Z\Gamma = 6$.
- 8 Από τον Θαλή $\frac{AN}{NT} = \frac{AM}{MB} = 1$, άρα $AN = NT$.

Μάθημα 1.4 · Ομοιοθεσία

- 1 α) 6 cm β) 1 cm γ) 4,5 cm.
- 2 10, 12,5, 15 cm· περίμετρος 37,5 cm ($= 2,5 \cdot 15$).

- 3 $A'(3, 3), B'(9, 3), \Gamma'(9, 6), \Delta'(3, 6)$. Ορθογώνιο 6×3 από ορθογώνιο 2×1 .
- 4 $\lambda = \frac{2}{5} = 0,4 < 1$: σμίκρυνση.
- 5 $OA' = 10, \lambda = \frac{10}{4} = 2,5, A'B' = 7,5$.
- 6 Οι πλευρές πολλαπλασιάζονται με λ (μένουν ίσες μεταξύ τους) και οι γωνίες μένουν ορθές, άρα προκύπτει τετράγωνο. Η διαγώνιος είναι ευθύγραμμο τμήμα, άρα κι αυτή γίνεται λ φορές.

Μάθημα 1.5 · Ομοιότητα

- 1 $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ και $\hat{\Lambda} = 70^\circ$. Άρα $\hat{A} = \hat{K}, \hat{B} = \hat{\Lambda}, \hat{\Gamma} = \hat{M}$: όμοια, $AB\Gamma \sim K\Lambda M$. Ομόλογες: $AB-K\Lambda, B\Gamma-\Lambda M, \Gamma A-MK$.
- 2 6, 9, 12 cm· περίμετρος 27 cm ($= \frac{3}{2} \cdot 18$).
- 3 $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta E}{B\Gamma} \iff \frac{3}{9} = \frac{4}{B\Gamma} \iff B\Gamma = 12$.
- 4 $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$ (κατακορυφήν) και $O\hat{A}B = O\hat{\Gamma}\Delta$ (εντός εναλλάξ): όμοια. $\frac{OA}{OG} = \frac{AB}{\Gamma\Delta} \iff \frac{6}{9} = \frac{4}{\Gamma\Delta} \iff \Gamma\Delta = 6$.
- 5 $\frac{h}{18} = \frac{1,8}{2,4} \iff h = 13,5$ m.
- 6 $16 \cdot 50 = 800$ cm = 8 m.
- 7 $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta = 13 \cdot 4 = 52 \Rightarrow AB = 2\sqrt{13}$. $A\Gamma^2 = \Gamma B \cdot \Gamma\Delta = 13 \cdot 9 = 117 \Rightarrow A\Gamma = 3\sqrt{13}$. Από $\Delta B \sim \Gamma\Delta A$: $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma = 36, A\Delta = 6$.
- 8 Αν $\hat{A} = \hat{\Delta} = \varphi$, τότε οι γωνίες βάσης είναι και στα δύο $\frac{180^\circ - \varphi}{2}$. Έχουν λοιπόν δύο γωνίες ίσες: όμοια.

Μάθημα 1.6 · Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων

- 1 Περίμετρος 36 cm, εμβαδόν $6 \cdot 9 = 54$ cm².
- 2 $\lambda^2 = \frac{81}{36} \Rightarrow \lambda = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.
- 3 $20 \cdot 6,25 = 125$ cm².
- 4 $(A\Delta E) = 54 \cdot \frac{1}{9} = 6$ cm², τραπέζιο 48 cm².
- 5 1 cm $\rightarrow 500$ m, άρα 1 cm² $\rightarrow 250\,000$ m². Πραγματικό εμβαδόν $500\,000$ m² = 500 στρέμματα.
- 6 Λόγος εμβαδών $\left(\frac{40}{30}\right)^2 = \frac{16}{9} \approx 1,78$, ενώ ο λόγος τιμών είναι 1,6. Η μεγάλη δίνει 78% περισσότερη πίτσα για 60% περισσότερα χρήματα: **συμφέρει η μεγάλη**.
- 7 $\lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda = \sqrt{2} \approx 1,41$ φορές.
- 8 $\lambda = \frac{0,5}{2} = \frac{1}{4}$, βάρος ανάλογο του όγκου: $800 \cdot \frac{1}{64} = 12,5$ kg.

Επανάληψη Κεφαλαίου · Επανάληψη 1ου Κεφαλαίου

- 1 Τρίγωνα ΝΒΓ και ΜΓΒ: $BN = ΓΜ$ (μισά ίσων πλευρών), $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ΒΓ κοινή. Π-Γ-Π: ίσα, άρα $ΓΝ = ΒΜ$.
- 2 $\lambda = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$: $AE = 6$, $\Delta E = 11,25$.
- 3 5 m και 4 m, εμβαδόν 20 m^2 (έλεγχος: $5 \text{ cm}^2 \cdot 200^2 = 200\,000 \text{ cm}^2 = 20 \text{ m}^2 \checkmark$).
- 4 $\Delta OΒ \sim \Gamma O\Delta$ (κατακορυφήν και εντός εναλλάξ γωνίες) με λόγο $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$. $(\Gamma O\Delta) = 9 \cdot \frac{25}{9} = 25$.
- 5 Θαλής: σε λόγο $300 : 450 = 2 : 3$. 1000 σε 5 μερίδια: 400 m και 600 m.
- 6 $\lambda^2 = \frac{54}{24} = \frac{9}{4}$, $\lambda = \frac{3}{2}$: διαστάσεις 9×6 .

Β' Μέρος · Κεφάλαιο 2ο · Τριγωνομετρία

Μάθημα 2.1 · Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

- 1 $\rho = 5$: $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}$, $\epsilon\phi\omega = \frac{4}{3}$.
- 2 $\rho = 13$: $\eta\mu\omega = \frac{12}{13}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{5}{13}$, $\epsilon\phi\omega = -\frac{12}{5}$. Αμβλεία.
- 3 α) - β) + γ) - δ) +.
- 4 $1 - 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 = -4$.
- 5 Αδύνατες: β) ($|\sigma\upsilon\nu\omega| \leq 1$) και δ) (το ημίτονο είναι μη αρνητικό για $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$).
- 6 $\rho = 2\sqrt{2}$, $\eta\mu\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\epsilon\phi\omega = -1$ και η γωνία είναι αμβλεία. Το σημείο $(-2, 2)$ βρίσκεται στη διχοτόμο του 2ου τεταρτημορίου, άρα $\omega = 135^\circ$.
- 7 Η $\hat{A}$ είναι αμβλεία, άρα το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο. Οι άλλες δύο γωνίες είναι οξείες (ένα τρίγωνο έχει το πολύ μία αμβλεία), άρα $\sigma\upsilon\nu B > 0$.

Μάθημα 2.2 · Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

- 1 α) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ β) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ γ) $-\sqrt{3}$ δ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- 2 $\eta\mu 140^\circ \approx 0,643$, $\sigma\upsilon\nu 140^\circ \approx -0,766$.
- 3 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + (-1) \cdot 1 = -1$.
- 4 α) 120° β) 60° ή 120° γ) 135° δ) 0° ή 180° .
- 5 $\eta\mu 160^\circ = \eta\mu 20^\circ$ και $\sigma\upsilon\nu 160^\circ = -\sigma\upsilon\nu 20^\circ$, άρα όλα αλληλοαναιρούνται.

$$\textcircled{6} \quad \sin A = -\sin(B + \Gamma) = -\frac{1}{2}, \text{ άρα } \hat{A} = 120^\circ.$$

$$\textcircled{7} \quad \varepsilon\varphi \omega \cdot \varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) = \varepsilon\varphi \omega \cdot (-\varepsilon\varphi \omega) = -\varepsilon\varphi^2 \omega \leq 0.$$

Μάθημα 2.3 · Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

$$\textcircled{1} \quad \sin \omega = \frac{3}{5}, \varepsilon\varphi \omega = \frac{4}{3}.$$

$$\textcircled{2} \quad \sin^2 \omega = \frac{144}{169}, \sin \omega = -\frac{12}{13}, \varepsilon\varphi \omega = -\frac{5}{12}.$$

$$\textcircled{3} \quad \eta\mu \omega = \frac{4}{5}, \varepsilon\varphi \omega = -\frac{4}{3}. \text{ Αμβλεία (αρνητικό συνημίτονο).}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Αρνητική εφαπτομένη} \Rightarrow \text{αμβλεία. Σημείο } M(-4, 3), \rho = 5: \eta\mu \omega = \frac{3}{5}, \sin \omega = -\frac{4}{5}.$$

$$\textcircled{5} \quad (\eta\mu^2 \omega - \sin^2 \omega)(\eta\mu^2 \omega + \sin^2 \omega) = \eta\mu^2 \omega - \sin^2 \omega.$$

$$\textcircled{6} \quad 1 + 2\eta\mu \omega \sin \omega + 1 - 2\eta\mu \omega \sin \omega = 2.$$

$$\textcircled{7} \quad 1 + \frac{\eta\mu^2 \omega}{\sin^2 \omega} = \frac{\sin^2 \omega + \eta\mu^2 \omega}{\sin^2 \omega} = \frac{1}{\sin^2 \omega}. \text{ Με } \varepsilon\varphi \omega = 3: \sin^2 \omega = \frac{1}{10}, \sin \omega = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\textcircled{8} \quad \text{Ε.Κ.Π. } \eta\mu \omega(1 + \sin \omega): \text{ αριθμητής } \eta\mu^2 \omega + 1 + 2\sin \omega + \sin^2 \omega = 2 + 2\sin \omega = 2(1 + \sin \omega). \text{ Άρα } B = \frac{2}{\eta\mu \omega}.$$

Μάθημα 2.4 · Νόμος των ημιτόνων – Νόμος των συνημιτόνων

$$\textcircled{1} \quad \frac{6}{1/2} = \frac{\beta}{\sqrt{2}/2} \iff \beta = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}.$$

$$\textcircled{2} \quad \alpha^2 = 16 + 36 - 24 = 28, \alpha = 2\sqrt{7}. \text{ Ε } = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

$$\textcircled{3} \quad \sin \omega = \frac{25 + 64 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}, \text{ άρα } \omega = 60^\circ.$$

$$\textcircled{4} \quad 11^2 = 121 > 6^2 + 8^2 = 100: \text{ η μεγαλύτερη γωνία είναι αμβλεία, άρα αμβλυγώνιο.}$$

$$\textcircled{5} \quad \alpha^2 = 4 + 12 - 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16 + 12 = 28, \alpha = 2\sqrt{7}.$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\eta\mu \Gamma} \iff \eta\mu \Gamma = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Άρα } \hat{\Gamma} = 45^\circ \text{ ή } 135^\circ. \text{ η } 135^\circ \text{ απορρίπτεται (} 60^\circ + 135^\circ > 180^\circ \text{)}. \text{ Επίσης } \gamma < \beta \Rightarrow \hat{\Gamma} < \hat{B}. \text{ Άρα } \hat{\Gamma} = 45^\circ, \hat{A} = 75^\circ.$$

$$\textcircled{7} \quad \text{Αποστάσεις 20 και 30 μίλια: } d^2 = 400 + 900 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1900, d = 10\sqrt{19} \approx 43,6 \text{ μίλια.}$$

$$\textcircled{8} \quad E = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 50 \cdot \frac{1}{2} = 500 \text{ m}^2.$$

Επανάληψη Κεφαλαίου · Επανάληψη 2ου Κεφαλαίου

$$\textcircled{1} \quad \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - (-1) = \frac{5}{2}.$$

$$\textcircled{2} \quad \eta\mu \omega = \frac{5}{13}, \epsilon\varphi \omega = -\frac{5}{12}. \text{ Για } 180^\circ - \omega: \eta\mu = \frac{5}{13}, \sigma\upsilon\nu = \frac{12}{13}, \epsilon\varphi = \frac{5}{12}.$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 \omega}{1 - \sigma\upsilon\nu \omega} = \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu \omega)(1 + \sigma\upsilon\nu \omega)}{1 - \sigma\upsilon\nu \omega} = 1 + \sigma\upsilon\nu \omega.$$

$$\textcircled{4} \quad \sigma\upsilon\nu A = \frac{64 + 49 - 169}{112} = -\frac{56}{112} = -\frac{1}{2}, \hat{A} = 120^\circ. E = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}.$$

$$\textcircled{5} \quad AB^2 = 6400 + 2500 - 4000 = 4900, AB = 70 \text{ m}.$$

$$\textcircled{6} \quad \hat{\Gamma} = 75^\circ. \frac{\alpha}{\eta\mu 45^\circ} = \frac{10}{\eta\mu 75^\circ} \Rightarrow \alpha \approx \frac{10 \cdot 0,707}{0,966} \approx 7,32. \beta \approx \frac{10 \cdot 0,866}{0,966} \approx 8,97.$$

ΣΥΝΕΧΙΣΕ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΣΟΥ

Το φροντιστήριο που χωράει στην τσέπη σου

Βιντεομαθήματα, σημειώσεις, κουίζ, podcasts, παιχνίδια γνώσεων και πίνακες μελέτης για Γυμνάσιο, Λύκειο και Πανεπιστήμιο — όλα δωρεάν, όλα στα ελληνικά.

mathgreece.com

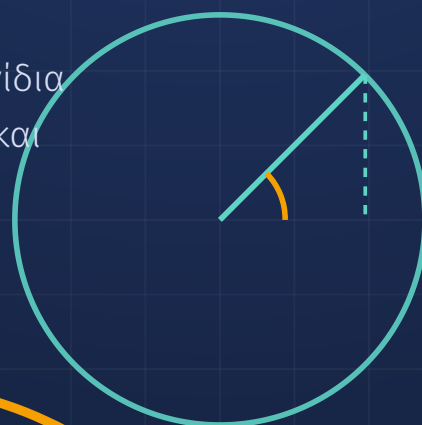
YouTube: MATHGREECE

100% δωρεάν

mathgreece.com

Πλήρες & δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών

π



ημω

=

x^2

%

$\alpha + \beta$