

ΠΛΗΡΕΣ ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΜΕΝΟ ΒΟΗΘΗΜΑ

Γ' ΤΑΞΗ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

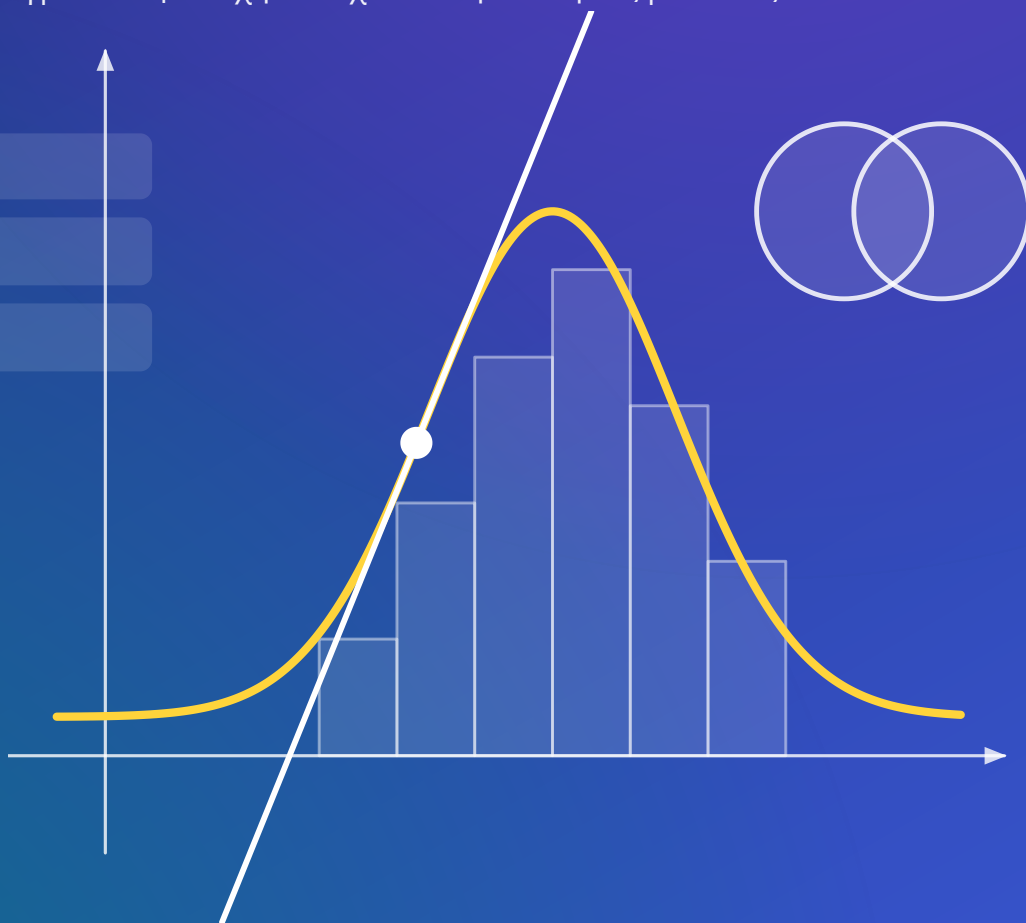
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Θεωρία · Λυμένα παραδείγματα · Προσοχή & συχνά λάθη · Ασκήσεις με λύσεις

1 Διαφορικός Λογισμός

2 Στατιστική

3 Πιθανότητες



mathgreece.com

Πλήρες & ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών

Πρόλογος

Αγαπητή μαθήτριά, αγαπητέ μαθητή,

τα Μαθηματικά της Γ' Λυκείου ΕΠΑΛ είναι ίσως τα πιο «χρήσιμα» Μαθηματικά που θα συναντήσεις στο σχολείο. Σε τρία κεφάλαια γνωρίζεις τρία εργαλεία που χρησιμοποιούνται καθημερινά από μηχανικούς, οικονομολόγους, γιατρούς, τεχνικούς και επιχειρηματίες:

- τον **Διαφορικό Λογισμό**, που μετρά πόσο γρήγορα αλλάζει ένα μέγεθος και βρίσκει πότε κάτι γίνεται μέγιστο ή ελάχιστο·
- τη **Στατιστική**, που οργανώνει, παρουσιάζει και ερμηνεύει δεδομένα·
- τις **Πιθανότητες**, που μας μαθαίνουν να σκεφτόμαστε σωστά όταν υπάρχει αβεβαιότητα.

Το βοήθημα που κρατάς γράφτηκε ώστε να μπορείς να μελετήσεις **μόνος σου**, με σιγουριά, ολόκληρη την ύλη:

- κάθε **κεφάλαιο** ξεκινά με δική του έγχρωμη σελίδα, όπου βλέπεις όλα τα μαθήματά του και τι θα κατακτήσεις·
- κάθε **μάθημα** ξεκινά σε νέα σελίδα με την ένδειξη «ΚΕΦΑΛΑΙΟ ... · ΜΑΘΗΜΑ ...», ενώ στην κορυφή κάθε σελίδας βλέπεις πάντα σε ποιο κεφάλαιο και ποιο μάθημα βρίσκεται· η αρίθμηση ακολουθεί τις παραγράφους του σχολικού βιβλίου (όπου μια παράγραφος είναι μεγάλη, τη χωρίζουμε σε δύο μαθήματα, π.χ. «1.3α» και «1.3β»)·
- η θεωρία παρουσιάζεται απλά αλλά πλήρως, με πλήθος σχημάτων, γραφικών παραστάσεων και διαγραμμάτων·
- σε κάθε μάθημα θα βρεις **λυμένα παραδείγματα**, κουτιά «Προσοχή!» και «Συχνό λάθος» και **μεθοδολογίες** για κάθε τύπο άσκησης·
- κάθε μάθημα κλείνει με **άλυτες ασκήσεις**, των οποίων οι **πλήρεις λύσεις** βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

Όλα τα παραδείγματα και οι ασκήσεις είναι πρωτότυπα, γραμμένα ειδικά για αυτό το βοήθημα· δεν θα τα βρεις στο σχολικό βιβλίο. Έτσι, δουλεύοντάς τα, θα έχεις εξασκηθεί σε πολύ περισσότερο υλικό από όσο σου ζητείται.

ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Το βοήθημα αυτό είναι μέρος ενός μεγαλύτερου έργου. Στο mathgreece.com θα βρεις ένα πλήρες και ολοκληρωμένο **δωρεάν** φροντιστήριο μαθηματικών: θεωρία, βίντεο, επιπλέον ασκήσεις, διαγωνίσματα και θέματα εξετάσεων για όλες τις τάξεις.

Μια συμβουλή από κάποιον που διδάσκει χρόνια: **μη διαβάζεις τα Μαθηματικά σαν μυθιστόρημα**. Κράτα μολύβι και χαρτί, ξαναλύσε κάθε παράδειγμα χωρίς να κοιτάς τη λύση και κάνε πάντα έναν έλεγχο στο τέλος («έχει νόημα αυτό που βρήκα;»). Στη Στατιστική και στις Πιθανότητες, το πιο συχνό λάθος δεν είναι οι πράξεις, αλλά η **ερμηνεία**: διάβαζε προσεκτικά τι ζητείται.

Καλή μελέτη και καλή επιτυχία!

Περιεχόμενα

Πρόλογος	2
Πώς να διαβάσεις αυτό το βοήθημα	4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 • Διαφορικός Λογισμός 6

1.1α	Συναρτήσεις – Γραφικές παραστάσεις – Μονοτονία – Ακρότατα	7
1.1β	Όριο και συνέχεια συνάρτησης	14
1.2	Η έννοια της παραγώγου	19
1.3α	Παράγωγος συνάρτησης – Βασικοί τύποι και κανόνες	23
1.3β	Σύνθετες συναρτήσεις – Δεύτερη παράγωγος – Ρυθμός μεταβολής	28
1.4α	Μονοτονία και ακρότατα με τη βοήθεια της παραγώγου	33
1.4β	Προβλήματα βελτιστοποίησης	37
Επ. 1	Επαναληπτικά θέματα Διαφορικού Λογισμού	41

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 • Στατιστική 44

2.1	Βασικές έννοιες της Στατιστικής	45
2.2α	Παρουσίαση δεδομένων – Πίνακες συχνοτήτων και διαγράμματα	48
2.2β	Ομαδοποίηση – Ιστογράμματα – Καμπύλες συχνοτήτων	53
2.3α	Μέτρα θέσης: μέση τιμή, διάμεσος, τεταρτημόρια, επικρατούσα τιμή	57
2.3β	Μέτρα διασποράς – Κανονική κατανομή – Συντελεστής μεταβολής	63
2.4	Γραμμική παλινδρόμηση	69
2.5	Γραμμική συσχέτιση	73
Επ. 2	Επαναληπτικά θέματα Στατιστικής	77

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 • Πιθανότητες 79

3.1	Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα	80
3.2	Η έννοια της πιθανότητας	85
3.3	Συνδυαστική	90
3.4	Δεσμευμένη πιθανότητα – Ανεξάρτητα ενδεχόμενα	95
Επ. 3	Επαναληπτικά θέματα Πιθανοτήτων	100

Τυπολόγιο – Όλη η ύλη με μια ματιά 102

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 105

Κεφ. 1	Λύσεις ασκήσεων · Διαφορικός Λογισμός	106
Κεφ. 2	Λύσεις ασκήσεων · Στατιστική	108
Κεφ. 3	Λύσεις ασκήσεων · Πιθανότητες	111

Πώς να διαβάσεις αυτό το βοήθημα

Σε όλο το βιβλίο χρησιμοποιούμε τα ίδια «κουτιά», ώστε να αναγνωρίζεις με μια ματιά τι διαβάξεις:

ΟΡΙΣΜΟΣ — Τι είναι

Ο ορισμός μιας νέας έννοιας. Μάθε τον με ακρίβεια.

ΘΕΩΡΗΜΑ — Τι είναι

Ένα βασικό αποτέλεσμα της θεωρίας ή ένας κανόνας που χρησιμοποιείς ελεύθερα στις ασκήσεις.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η αιτιολόγηση ενός αποτελέσματος, γραμμένη βήμα-βήμα.

ΚΛΕΙΔΙ — Τι είναι

Ένας τύπος ή κανόνας που πρέπει να ξέρεις «απέξω».

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ένα σχόλιο που φωτίζει μια λεπτομέρεια της θεωρίας.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Κάτι που χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή: προϋποθέσεις, εξαιρέσεις, λεπτές διατυπώσεις.

ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

Ένα λάθος που κάνουν πολύ συχνά οι μαθητές. Με **X** σημειώνουμε τη λανθασμένη σκέψη και με **✓** τη σωστή.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Πώς αντιμετωπίζουμε μια κατηγορία ασκήσεων: τα βήματα που ακολουθούμε.

ΛΙΓΗ ΙΣΤΟΡΙΑ

Ιστορικά στοιχεία: πώς γεννήθηκαν οι ιδέες που μελετάμε.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Παραπομπή στο mathgreece.com, όπου θα βρεις επιπλέον υλικό για το αντίστοιχο θέμα.

Η διαβάθμιση των ασκήσεων

Σήμανση	Επίπεδο	Τι σημαίνει
●○○	Βασική	Άμεση εφαρμογή της θεωρίας· πρέπει να τη λύνεις χωρίς δυσκολία.
●●○	Μέτρια	Συνδυάζει δύο ή περισσότερες ιδέες· τυπικό θέμα διαγωνίσματος.
●●●	Απαιτητική	Για όσους θέλουν να πάνε παραπέρα· τυπικό «τελευταίο θέμα».

Δίπλα σε κάθε άσκηση υπάρχει η ένδειξη «→ Λύση», που σε οδηγεί (και με κλικ, στο ηλεκτρονικό αρχείο) στην αναλυτική λύση στο τέλος του βιβλίου.

Συμβολισμοί που χρησιμοποιούμε

Σύμβολο	Διαβάζεται / σημαίνει
$\mathbb{R}$	το σύνολο των πραγματικών αριθμών
$f(x)$	η τιμή της συνάρτησης f στο x
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	το όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0
$f'(x_0)$	η παράγωγος της f στο x_0
$f''(x)$	η δεύτερη παράγωγος της f
ν_i, f_i, N_i, F_i	συχνότητα, σχετική συχνότητα, αθροιστική και σχετική αθροιστική συχνότητα
$\bar{x}, \delta, M_0$	μέση τιμή, διάμεσος, επικρατούσα τιμή
s^2, s, CV	διακύμανση, τυπική απόκλιση, συντελεστής μεταβολής
$\Omega, N(\Omega)$	δειγματικός χώρος, πλήθος στοιχείων του
$P(A), P(A B)$	πιθανότητα του A , πιθανότητα του A δεδομένου του B
A'	το συμπλήρωμα (αντίθετο) του ενδεχομένου A

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι δεκαδικοί αριθμοί γράφονται με **υποδιαστολή** (π.χ. 2,5). Όπου γίνονται στρογγυλοποιήσεις, το σημειώνουμε με το σύμβολο $\approx$.

1

Διαφορικός Λογισμός



Τα μαθήματα του κεφαλαίου

- 1.1α** Συναρτήσεις – Γραφικές παραστάσεις – Μονοτονία – Ακρότατα
- 1.1β** Όριο και συνέχεια συνάρτησης
- 1.2** Η έννοια της παραγώγου
- 1.3α** Παράγωγος συνάρτησης – Βασικοί τύποι και κανόνες
- 1.3β** Σύνθετες συναρτήσεις – Δεύτερη παράγωγος – Ρυθμός μεταβολής
- 1.4α** Μονοτονία και ακρότατα με τη βοήθεια της παραγώγου
- 1.4β** Προβλήματα βελτιστοποίησης
- Επ. 1** Επαναληπτικά θέματα Διαφορικού Λογισμού

Τι θα κατακτήσεις

- Να βρίσκεις πεδίο ορισμού, να διαβάξεις γραφικές παραστάσεις, μονοτονία και ακρότατα.
- Να υπολογίζεις απλά όρια και να αναγνωρίζεις συνεχείς συναρτήσεις.
- Να κατανοείς την παράγωγο ως κλίση εφαπτομένης και ως ρυθμό μεταβολής.
- Να παραγωγίζεις με τους βασικούς τύπους και κανόνες, και σύνθετες συναρτήσεις.
- Να μελετάς μονοτονία και ακρότατα και να λύνεις προβλήματα βελτιστοποίησης.

Πόσο γρήγορα κινείται ένα αυτοκίνητο **αυτή ακριβώς τη στιγμή**; Πόσο αυξάνεται το κόστος μιας επιχείρησης αν παραχθεί ένα ακόμη προϊόν; Πότε ένα κέρδος γίνεται μέγιστο; Όλα αυτά τα ερωτήματα έχουν μια κοινή απάντηση: την **παράγωγο**. Στο κεφάλαιο αυτό ξεκινάμε από τις συναρτήσεις, γνωρίζουμε το όριο και τη συνέχεια και φτάνουμε στην παράγωγο και στις εφαρμογές της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Διαφορικός
Λογισμός

ΜΑΘΗΜΑ 1.1α

Συναρτήσεις – Γραφικές παραστάσεις – Μονοτονία – Ακρότατα

Η έννοια της συνάρτησης

Μια **συνάρτηση** είναι ένας κανόνας που σε **κάθε** στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχίζει **ένα ακριβώς** στοιχείο ενός συνόλου B . Μπορείς να τη φανταστείς σαν μια «μηχανή»: βάζεις μέσα έναν αριθμό x και βγαίνει ένας και μοναδικός αριθμός $f(x)$.



Μια συνάρτηση ως «μηχανή»

ΟΡΙΣΜΟΣ — Πραγματική συνάρτηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$, που σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζει έναν πραγματικό αριθμό $y = f(x)$, λέγεται **πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής**.

- Το A λέγεται **πεδίο ορισμού** της f .
- Το x λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** και το y **εξαρτημένη μεταβλητή**.
- Το $f(x)$ λέγεται **τιμή** της f στο x .

Τα γράμματα δεν έχουν σημασία: οι τύποι $f(x) = 3x^2$, $g(t) = 3t^2$ και $h(u) = 3u^2$ περιγράφουν **την ίδια** συνάρτηση. Στις εφαρμογές συχνά η μεταβλητή είναι ο χρόνος t , η ποσότητα q , η τιμή p κ.λπ.

Το πεδίο ορισμού

Όταν μια συνάρτηση δίνεται μόνο με έναν τύπο, το πεδίο ορισμού της είναι το **ευρύτερο** σύνολο αριθμών για τους οποίους ο τύπος «έχει νόημα». Στην πράξη ελέγχουμε τρία πράγματα:

ΚΛΕΙΔΙ — Οι τρεις «απαγορεύσεις»

Αν ο τύπος περιέχει...	Απαιτούμε
κλάσμα $\frac{A(x)}{B(x)}$	$B(x) \neq 0$
ρίζα $\sqrt{A(x)}$	$A(x) \geq 0$
λογάριθμο $\ln A(x)$	$A(x) > 0$

Οι πολωνυμικές συναρτήσεις, η e^x , η $\ln x$ και η $\sin x$ ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Πεδία ορισμού

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων: (α) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$ (β) $g(x) = \sqrt{6-2x}$ (γ) $h(x) = \ln(x-4)$ (δ) $k(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

ΛΥΣΗ

(α) Πρέπει $x^2 - 9 \neq 0$, δηλαδή $x \neq 3$ και $x \neq -3$. Άρα $A = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

(β) Πρέπει $6 - 2x \geq 0 \iff x \leq 3$. Άρα $A = (-\infty, 3]$.

(γ) Πρέπει $x - 4 > 0 \iff x > 4$. Άρα $A = (4, +\infty)$.

(δ) Πρέπει **ταυτόχρονα** $x \geq 0$ (ρίζα) και $x \neq 1$ (παρονομαστής). Άρα $A = [0, 1) \cup (1, +\infty)$. ■

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Ξεχνάμε τη μία από τις δύο συνθήκες

Για την $k(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ ο μαθητής γράφει ✗ « $A = [0, +\infty)$ ».

✓ Όταν ένας τύπος έχει **και** ρίζα **και** κλάσμα, πρέπει να ισχύουν **όλες** οι συνθήκες μαζί. Εδώ εξαιρείται και το $x = 1$.

Πράξεις με συναρτήσεις

Αν οι f και g ορίζονται σε ένα σύνολο A , ορίζονται και οι:

Πράξη	Τύπος	Πεδίο ορισμού
άθροισμα	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	A
διαφορά	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	A
γινόμενο	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	A
πηλίκιο	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	τα $x \in A$ με $g(x) \neq 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Πράξεις

Αν $f(x) = x^2 - 4$ και $g(x) = x + 2$, να βρεθούν οι $f + g$, $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$.

ΛΥΣΗ

$(f+g)(x) = x^2 + x - 2$, $(f \cdot g)(x) = (x^2 - 4)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$.

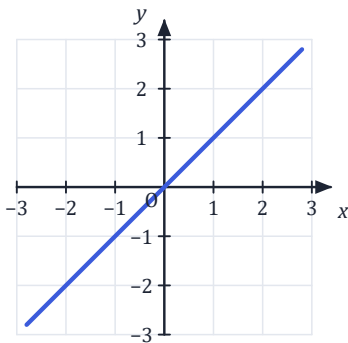
Για το πηλίκιο: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x - 2$, **με** $x \neq -2$. Η απλοποίηση **δεν** «επαναφέρει» το -2 στο πεδίο ορισμού! ■

Γραφική παράσταση

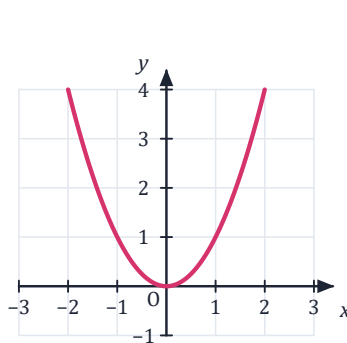
ΟΡΙΣΜΟΣ — Γραφική παράσταση

Γραφική παράσταση (ή καμπύλη) της f λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ του επιπέδου, για όλα τα x του πεδίου ορισμού. Ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει σε αυτήν αν και μόνο αν $\beta = f(\alpha)$.

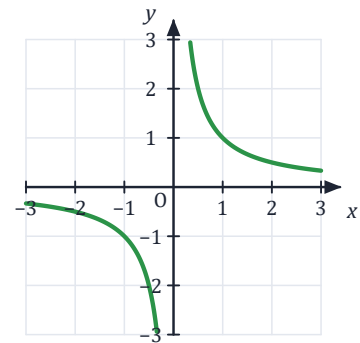
Στο σχήμα που ακολουθεί βλέπεις τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων που πρέπει να αναγνωρίζεις με μια ματιά.



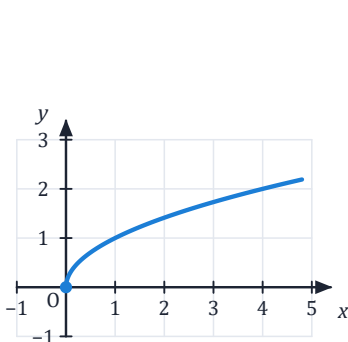
$f(x) = x$ (ευθεία)



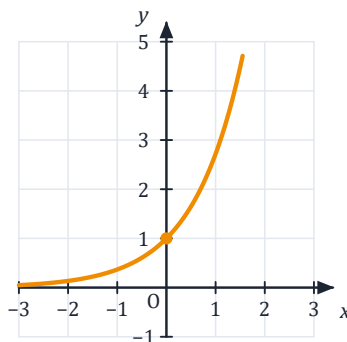
$f(x) = x^2$ (παραβολή)



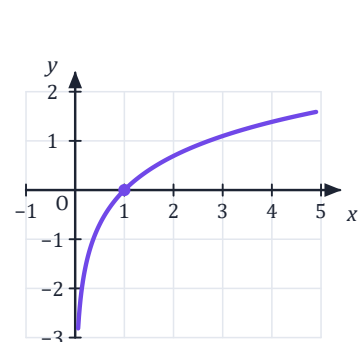
$f(x) = 1/x$ (υπερβολή)



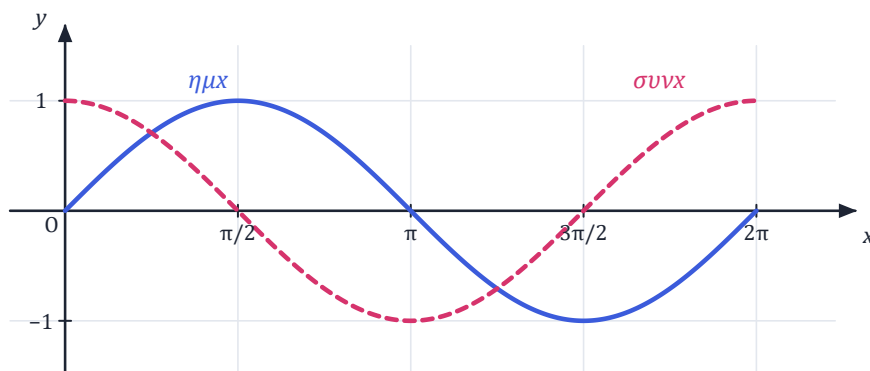
$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = e^x$



$f(x) = \ln x$



$f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$: περιοδικές με περίοδο 2π

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Τι «κρύβουν» αυτές οι γραφικές παραστάσεις

- Η $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει «σπάσιμο» στο 0, γιατί το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.
- Η e^x είναι πάντα θετική (η καμπύλη είναι «πάνω» από τον άξονα $x'x$) και διέρχεται από το $(0, 1)$.
- Η $\ln x$ ορίζεται μόνο για $x > 0$ (η καμπύλη είναι «δεξιά» του $y'y$) και διέρχεται από το $(1, 0)$.
- Οι $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$ παίρνουν τιμές μόνο στο $[-1, 1]$ και επαναλαμβάνονται κάθε 2π .

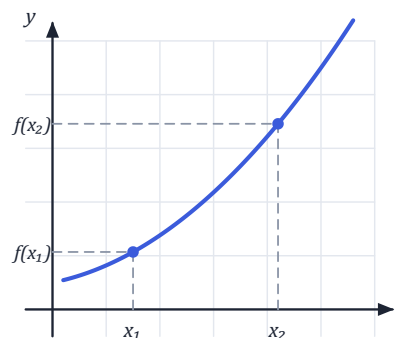
Μονοτονία

ΟΡΙΣΜΟΣ — Γνησίως μονότονη συνάρτηση

Μια συνάρτηση f λέγεται:

- **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ , αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- **γνησίως φθίνουσα** στο Δ , αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Μια συνάρτηση γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται **γνησίως μονότονη**.



Γνησίως αύξουσα: «ανεβαίνει» από αριστερά προς τα δεξιά

Με απλά λόγια: η γνησίως αύξουσα «ανεβαίνει» καθώς προχωράμε προς τα δεξιά (μεγαλύτερο x , μεγαλύτερη τιμή), ενώ η γνησίως φθίνουσα «κατεβαίνει».

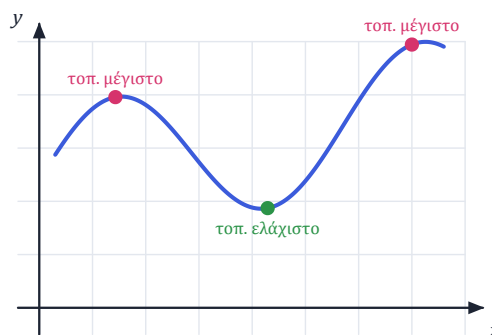
Ακρότατα

ΟΡΙΣΜΟΣ — Τοπικά ακρότατα

Μια συνάρτηση f λέμε ότι παρουσιάζει:

- **τοπικό μέγιστο** στο x_1 , αν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 (ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το x_1).
- **τοπικό ελάχιστο** στο x_2 , αν $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2 .

Αν η ανισότητα ισχύει για **όλα** τα x του πεδίου ορισμού, μιλάμε για **ολικό** μέγιστο ή ελάχιστο. Τα μέγιστα και ελάχιστα λέγονται με μια λέξη **ακρότατα**.



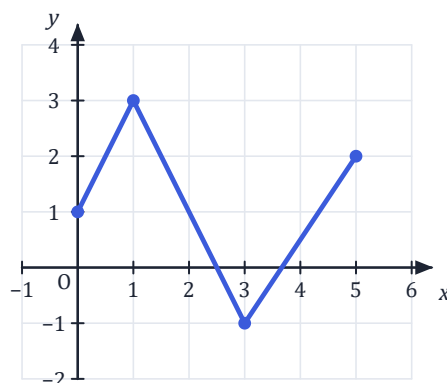
Τοπικά και ολικά ακρότατα

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Ένα **τοπικό** ελάχιστο μπορεί να είναι **μεγαλύτερο** από ένα τοπικό μέγιστο! Το «τοπικό» σημαίνει ότι η σύγκριση γίνεται μόνο με τα **κοντινά** σημεία, όπως μια «κορυφή λόφου» δεν είναι απαραίτητα το ψηλότερο σημείο της περιοχής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Ανάγνωση γραφικής παράστασης

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[0, 5]$ αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν διαδοχικά τα σημεία $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, -1)$ και $(5, 2)$. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.

**ΛΥΣΗ**

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3, 5]$.
- Τοπικό (και ολικό) μέγιστο στο $x = 1$ με τιμή 3· τοπικό (και ολικό) ελάχιστο στο $x = 3$ με τιμή -1 . (Και τα άκρα $x = 0$, $x = 5$ είναι θέσεις τοπικών ελαχίστων/μεγίστων, με τιμές 1 και 2.)
- Η $f(x) = 0$ έχει δύο λύσεις: μία στο $(1, 3)$ και μία στο $(3, 5)$. Από την ευθεία που ενώνει τα $(1, 3)$ και $(3, -1)$ (κλίση -2): $3 - 2(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 2,5$. Από την ευθεία που ενώνει τα $(3, -1)$ και $(5, 2)$ (κλίση $1,5$): $-1 + 1,5(x - 3) = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{3}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Μονοτονία από τον ορισμό

Να αποδειχθεί με τον ορισμό ότι η $f(x) = 5 - 2x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Έστω $x_1 < x_2$. Τότε $-2x_1 > -2x_2$ (πολλαπλασιάσαμε με αρνητικό, άρα αλλάζει η φορά), οπότε $5 - 2x_1 > 5 - 2x_2$, δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Γενικά η $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι γνησίως αύξουσα αν $\alpha > 0$ και γνησίως φθίνουσα αν $\alpha < 0$.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Συνάρτηση από πρόβλημα

Με 40 m σύρμα θέλουμε να περιφράξουμε ορθογώνιο κήπο. Αν x είναι το μήκος της μιας πλευράς, να εκφραστεί το εμβαδόν E του κήπου ως συνάρτηση του x και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

ΛΥΣΗ

Η περίμετρος είναι 40, άρα οι δύο διαστάσεις έχουν άθροισμα 20: η άλλη πλευρά είναι $20 - x$. Επομένως $E(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$. Επειδή οι πλευρές πρέπει να είναι θετικές, $x > 0$ και $20 - x > 0$, δηλαδή το πεδίο ορισμού είναι $(0, 20)$. (Θα βρούμε στο μάθημα 1.4β για ποιο x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πώς «μεταφράζουμε» ένα πρόβλημα σε συνάρτηση

1. Ονομάζουμε x το μέγεθος που μεταβάλλεται.
2. Εκφράζουμε **όλα** τα άλλα μεγέθη μέσω του x , χρησιμοποιώντας τα δεδομένα (π.χ. περίμετρο, κόστος).
3. Γράφουμε τον τύπο του ζητούμενου μεγέθους.
4. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού **από το πρόβλημα** (μήκη θετικά, ποσότητες μη αρνητικές κ.λπ.).



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Θέλεις να εξασκηθείς στις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων; Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με διαδραστικά σχήματα και επιπλέον ασκήσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.1α · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1. Αν $f(x) = x^3 - 2x + 1$, να υπολογίσετε τα $f(0)$, $f(2)$, $f(-1)$ και $f(1/2)$.
●○○ → Λύση 1.1α/1
2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων: (α) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 5x}$ (β) $g(x) = \sqrt{x + 7}$ (γ) $h(x) = \ln(2x - 1)$.
●○○ → Λύση 1.1α/2
3. Για ποιες τιμές του t είναι $\varphi(t) = 0$, αν $\varphi(t) = t^2 - 7t + 10$;
●○○ → Λύση 1.1α/3
4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x^2-1}$.
●●○ → Λύση 1.1α/4
5. Αν $f(x) = 2x + 3$ και $g(x) = x^2 - 1$, να βρείτε τις $f + g$, $f \cdot g$ και $\frac{g}{f}$, καθώς και το πεδίο ορισμού της τελευταίας.
●●○ → Λύση 1.1α/5
6. Να αποδείξετε με τον ορισμό ότι η $f(x) = x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
●●○ → Λύση 1.1α/6
7. Μια επιχείρηση έχει πάγια έξοδα 500 € τον μήνα και επιπλέον κόστος 8 € για κάθε τεμάχιο που παράγει. Πουλά κάθε τεμάχιο 13 €. Να εκφράσετε το κόστος $K(x)$, τα έσοδα $E(x)$ και το κέρδος $P(x)$ ως συναρτήσεις του πλήθους x των τεμαχίων. Από πόσα τεμάχια και πάνω έχει κέρδος;
●●○ → Λύση 1.1α/7

8
...

Ένα ανοικτό κουτί κατασκευάζεται από τετράγωνο χαρτόνι πλευράς 30 cm, αν κόψουμε από τις τέσσερις γωνίες ίσα τετράγωνα πλευράς x και διπλώσουμε. Να εκφράσετε τον όγκο V του κουτιού ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

→ Λύση 1.1α/8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Διαφορικός
Λογισμός
ΜΑΘΗΜΑ 1.1β**Όριο και συνέχεια συνάρτησης**
 Η ιδέα του ορίου

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, που **δεν ορίζεται** στο $x = 3$ (μηδενίζεται ο παρονομαστής). Τι συμβαίνει στις τιμές της όταν το x πλησιάζει το 3; Ας κάνουμε έναν πίνακα:

x	2,9	2,99	2,999	$\rightarrow 3 \leftarrow$	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	5,9	5,99	5,999	$\rightarrow 6 \leftarrow$	6,001	6,01	6,1

Βλέπουμε ότι όσο το x πλησιάζει το 3 (από αριστερά ή από δεξιά), οι τιμές $f(x)$ πλησιάζουν το 6. Πράγματι, για $x \neq 3$:

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3,$$

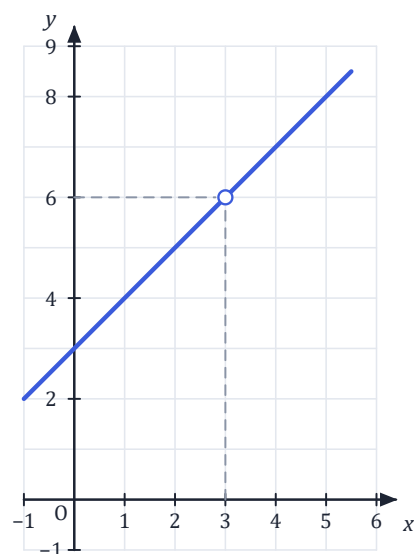
και όταν $x \rightarrow 3$, το $x+3 \rightarrow 6$. Γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

και διαβάζουμε «το όριο της f καθώς το x τείνει στο 3 είναι 6».

 ΟΡΙΣΜΟΣ — Όριο (διαισθητικά)

Λέμε ότι η f έχει **όριο** τον αριθμό ℓ καθώς το x τείνει στο x_0 , και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, όταν οι τιμές $f(x)$ πλησιάζουν όσο θέλουμε το ℓ , για όλα τα x (του πεδίου ορισμού) που είναι αρκετά κοντά στο x_0 , με $x \neq x_0$.



Η γραφική παράσταση έχει μια «τρύπα» στο $(3, 6)$

 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Για το όριο στο x_0 **δεν μας ενδιαφέρει** τι γίνεται ακριβώς στο x_0 — η f μπορεί να μην ορίζεται καν εκεί, όπως στο παράδειγμα. Μας ενδιαφέρει μόνο η συμπεριφορά της **κοντά** στο x_0 .

Ιδιότητες των ορίων

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Κανόνες ορίων

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$ (πραγματικοί αριθμοί), τότε:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa f(x)) = \kappa \ell_1$, για κάθε σταθερά κ
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$, αν $\ell_2 \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^\nu = \ell_1^\nu$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[f(x)]{} = \sqrt{\ell_1}$ (αν $f(x) \geq 0$)

Επίσης, προφανώς, $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

Συνέχεια

Για την $f(x) = x^2 + 1$ βρίσκουμε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5 = f(2)$: το όριο «συμπίπτει» με την τιμή. Αυτή η «καλή» συμπεριφορά έχει όνομα.

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Συνεχής συνάρτηση

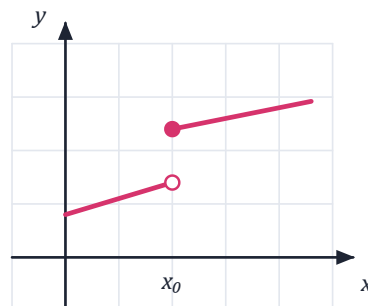
Μια συνάρτηση f λέγεται **συνεχής στο x_0** (του πεδίου ορισμού της) όταν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Λέγεται **συνεχής** όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.



Συνεχής: σχεδιάζεται «χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι»



Ασυνεχής στο x_0 : «άλμα»

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Οι γνωστές μας συναρτήσεις είναι συνεχείς

Οι **πολυωνυμικές**, οι **ρητές** (πηλίκια πολυωνύμων), οι **τριγωνομετρικές** $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, η e^x , η $\ln x$, η $\sqrt{x}$, καθώς και όσες προκύπτουν από αυτές με πράξεις, είναι **συνεχείς** (σε όλο το πεδίο ορισμού τους).

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Πρακτική συνέπεια

Αν η f είναι συνεχής και το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της, τότε το όριο βρίσκεται με **απλή αντικατάσταση**: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

◆ Η περίπτωση « $\frac{0}{0}$ »

Αν η αντικατάσταση δίνει $\frac{0}{0}$, **δεν** σημαίνει ότι το όριο δεν υπάρχει, ούτε ότι είναι 0 ή 1! Σημαίνει ότι πρέπει να **απλοποιήσουμε** πρώτα τον τύπο. Οι δύο συνηθισμένες τεχνικές:

- **Παραγοντοποίηση** αριθμητή και παρονομαστή και απλοποίηση του κοινού παράγοντα $(x - x_0)$.
- **Πολλαπλασιασμός με τη συζυγή παράσταση**, όταν υπάρχουν ρίζες: $(\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Όρια με αντικατάσταση

Να υπολογιστούν: (α) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 1)$ (β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 7}{x + 2}$ (γ) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \sin x)$.

ΛΥΣΗ

Όλες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στα αντίστοιχα σημεία, οπότε αντικαθιστούμε:

$$(α) 3 \cdot 4 - 10 + 1 = 3. (β) \frac{9}{3} = 3. (γ) e^0 + \sin 0 = 1 + 1 = 2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Απροσδιοριστία 0/0 με παραγοντοποίηση

Να υπολογιστούν: (α) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ (β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$.

ΛΥΣΗ

$$(α) \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = x + 4 \rightarrow 8.$$

(β) Αριθμητής: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Παρονομαστής: $(x - 2)(x + 2)$. Άρα για $x \neq 2$ η παράσταση ισούται με $\frac{x - 3}{x + 2} \rightarrow \frac{-1}{4}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Απροσδιοριστία με ρίζα

Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$.

ΛΥΣΗ

Αντικατάσταση: $\frac{0}{0}$. Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή $\sqrt{x} + 3$:

$$\frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \rightarrow \frac{1}{6}.$$

✗ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** — « $0/0 = 1$ » ή « $0/0 = 0$ »

✗ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{0}{0} = 1.$

✓ Το $\frac{0}{0}$ **δεν είναι αριθμός**: είναι ένδειξη ότι πρέπει να κάνουμε πρώτα απλοποίηση. Στο συγκεκριμένο όριο το αποτέλεσμα είναι 8.

✗ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** — Γράφουμε « $\lim$ » μετά το όριο

✗ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = \lim 8.$

✓ Μόλις το x αντικατασταθεί, το σύμβολο $\lim$ **φεύγει**: $\lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 8.$

💡 **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ** — Αλγόριθμος υπολογισμού ορίου

1. Αντικαθιστούμε το x_0 . Αν βγει αριθμός (και ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται), τελειώσαμε.
2. Αν βγει $\frac{0}{0}$: **παραγοντοποιούμε** (ταυτότητες, τριώνυμο, κοινός παράγοντας) ή πολλαπλασιάζουμε με **συζυγή**.
3. Απλοποιούμε τον παράγοντα $x - x_0$ και **ξανααντικαθιστούμε**.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Τα όρια είναι η «πόρτα» προς τις παραγώγους. Αν θέλεις να εξασκηθείς περισσότερο, στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με δεκάδες λυμένα όρια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.1β · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να υπολογίσετε τα όρια: (α) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 4x^2 - 2)$ (β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ (γ) $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \eta \mu x + 3 \sigma \upsilon \nu x).$

●○○

→ Λύση 1.1β/1

2 Να υπολογίσετε τα όρια: (α) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ (β) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}.$

●○○

→ Λύση 1.1β/2

3 Να υπολογίσετε τα όρια: (α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$ (β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3}.$

●●○

→ Λύση 1.1β/3

4 Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}.$

●●○

→ Λύση 1.1β/4

- 5** Να υπολογίσετε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h}$. (Θα δεις στο επόμενο μάθημα ότι αυτό το όριο είναι η παράγωγος της x^2 στο 2!)

→ Λύση 1.1β/5

- 6** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$ για $x \neq 3$. Ποια τιμή πρέπει να δώσουμε στο $f(3)$ ώστε η f να γίνει συνεχής στο 3;

→ Λύση 1.1β/6

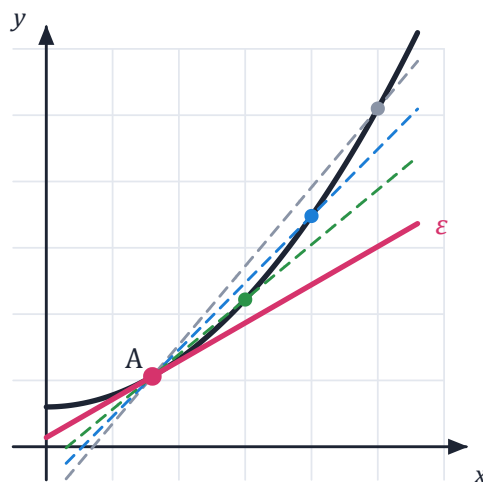
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Διαφορικός
Λογισμός
ΜΑΘΗΜΑ 1.2**Η έννοια της παραγώγου**
Πρόβλημα 1: η εφαπτομένη μιας καμπύλης

Από τη Γεωμετρία ξέρουμε την εφαπτομένη ενός κύκλου. Τι σημαίνει όμως «εφαπτομένη» σε μια οποιαδήποτε καμπύλη, όπως μια παραβολή; Η ιδέα είναι η εξής: παίρνουμε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της καμπύλης και ένα δεύτερο σημείο $M(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Η ευθεία AM (τέμνουσα) έχει κλίση

$$\lambda_{AM} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Καθώς το M πλησιάζει το A (δηλαδή $h \rightarrow 0$), η τέμνουσα «στρίβει» και τείνει σε μια οριακή θέση: αυτή είναι η **εφαπτομένη** της καμπύλης στο A . Η κλίση της είναι το όριο των κλίσεων των τεμνουσών:

$$\lambda = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$



Οι τέμνουσες AM «πλησιάζουν» την εφαπτομένη στο A

Πρόβλημα 2: η στιγμιαία ταχύτητα

Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα και η θέση του τη χρονική στιγμή t είναι $S(t)$. Η **μέση ταχύτητα** στο χρονικό διάστημα από t_0 έως $t_0 + h$ είναι

$$\bar{v} = \frac{\text{διάστημα}}{\text{χρόνος}} = \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}.$$

Όσο μικρότερο το h , τόσο καλύτερα η μέση ταχύτητα περιγράφει την ταχύτητα «τη στιγμή» t_0 . Ορίζουμε λοιπόν τη **στιγμιαία ταχύτητα**:

$$v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}.$$

Παρατηρείς ότι τα δύο προβλήματα — ένα γεωμετρικό και ένα φυσικό — οδήγησαν **στο ίδιο ακριβώς όριο**! Αυτό το όριο είναι η παράγωγος.

Ο ορισμός της παραγώγου
ΟΡΙΣΜΟΣ — Παράγωγος σε σημείο

Μια συνάρτηση f λέγεται **παραγωγίσιμη** σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει (και είναι πραγματικός αριθμός) το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ο αριθμός $f'(x_0)$ λέγεται **παράγωγος της f στο x_0** .

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Οι τρεις «ερμηνείες» της παραγώγου

- Γεωμετρική:** η $f'(x_0)$ είναι η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.
- Φυσική:** αν $S(t)$ είναι η θέση ενός κινητού, η $S'(t_0)$ είναι η **στιγμιαία ταχύτητα** τη χρονική στιγμή t_0 .
- Γενική:** η $f'(x_0)$ είναι ο **ρυθμός μεταβολής** του $y = f(x)$ ως προς το x στο x_0 : περίπου πόσο αλλάζει το y όταν το x αυξηθεί κατά μία μονάδα, κοντά στο x_0 .

◆ **Η εξίσωση της εφαπτομένης**

Μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0) και έχει κλίση λ έχει εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$. Επομένως:

🔑 **ΚΛΕΙΔΙ** — Εξίσωση εφαπτομένης

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

❗ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ** — Τι μας λέει το πρόσημο της παραγώγου

- $f'(x_0) > 0$: η εφαπτομένη «ανεβαίνει», η f αυξάνεται κοντά στο x_0 .
- $f'(x_0) < 0$: η εφαπτομένη «κατεβαίνει», η f μειώνεται.
- $f'(x_0) = 0$: η εφαπτομένη είναι **οριζόντια** (π.χ. σε κορυφή ή πάτο της καμπύλης).

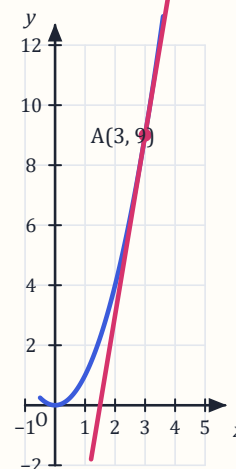
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Παράγωγος από τον ορισμό

Να βρεθεί με τον ορισμό η παράγωγος της $f(x) = x^2$ στο $x_0 = 3$ και η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(3, 9)$.

ΛΥΣΗ

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 6.$$

Άρα $f'(3) = 6$. Η εφαπτομένη: $y - 9 = 6(x - 3)$, δηλαδή $y = 6x - 9$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2** Στιγμαία ταχύτητα

Ένα σώμα αφήνεται να πέσει ελεύθερα και η απόσταση που διανύει σε t δευτερόλεπτα είναι $S(t) = 5t^2$ (σε μέτρα). Να βρεθεί η μέση ταχύτητα στο διάστημα $[2, 3]$ και η στιγμιαία ταχύτητα τη στιγμή $t = 2$.

ΛΥΣΗ

Μέση ταχύτητα: $\frac{S(3) - S(2)}{3 - 2} = \frac{45 - 20}{1} = 25 \text{ m/s.}$

Στιγμαία: $\frac{S(2+h) - S(2)}{h} = \frac{5(4 + 4h + h^2) - 20}{h} = \frac{20h + 5h^2}{h} = 20 + 5h \rightarrow 20$. Άρα $v(2) = S'(2) = 20 \text{ m/s.}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Ρυθμός μεταβολής

Το κόστος (σε €) για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος είναι $K(x) = 200 + 4x + 0,01x^2$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του κόστους όταν $x = 100$ και να ερμηνευτεί.

ΛΥΣΗ

$$\frac{K(100+h) - K(100)}{h} = \frac{4h + 0,01(200h + h^2)}{h} = 4 + 2 + 0,01h \rightarrow 6.$$

Άρα $K'(100) = 6$ €/μονάδα: όταν η παραγωγή είναι 100 μονάδες, η παραγωγή **μίας ακόμη** μονάδας κοστίζει περίπου 6 €. Στα Οικονομικά αυτό λέγεται **οριακό κόστος**.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Σύγχυση μέσης και στιγμιαίας ταχύτητας

✗ «Η ταχύτητα τη στιγμή $t = 2$ είναι $\frac{S(2)}{2} = 10 \text{ m/s}$.»

✓ Το $\frac{S(2)}{2}$ είναι η **μέση** ταχύτητα από 0 έως 2. Η **στιγμιαία** ταχύτητα είναι η παράγωγος $S'(2) = 20 \text{ m/s}$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

Η παράγωγος στο x_0 είναι **αριθμός**, όχι συνάρτηση. Το $f'(3) = 6$ αφορά το συγκεκριμένο σημείο· σε άλλο σημείο η κλίση είναι διαφορετική.

🏛 ΛΙΓΗ ΙΣΤΟΡΙΑ

Ο Διαφορικός Λογισμός θεμελιώθηκε τον 17ο αιώνα, ανεξάρτητα, από τον Άγγλο **Isaac Newton** (1642–1727), που ήθελε να περιγράψει την κίνηση των πλανητών, και τον Γερμανό **Gottfried Leibniz** (1646–1716), που ξεκίνησε από το πρόβλημα της εφαπτομένης. Ο συμβολισμός $\frac{dy}{dx}$ που χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα είναι του Leibniz· ο τόνος f' είναι του Lagrange.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Θέλεις να δεις την τέμνουσα να «γίνεται» εφαπτομένη σε κινούμενο σχήμα; Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο με διαδραστικά γραφήματα για όλη την ύλη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.2 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Να βρείτε με τον ορισμό την παράγωγο της $f(x) = 3x^2$ στο $x_0 = 1$.
●○○ → Λύση 1.2/1
- 2 Να βρείτε με τον ορισμό την παράγωγο της $f(x) = 4x - 7$ σε τυχαίο σημείο x_0 . Τι παρατηρείτε;
●○○ → Λύση 1.2/2
- 3 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x) = x^2 - 2x$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 3$.
●●○ → Λύση 1.2/3
- 4 Η θέση ενός κινητού δίνεται από τον τύπο $S(t) = t^2 + 3t$ (μέτρα, δευτερόλεπτα). Να βρείτε τη μέση ταχύτητα στο $[1, 4]$ και τη στιγμιαία ταχύτητα στο $t = 1$.
●●○ → Λύση 1.2/4
- 5 Να βρείτε με τον ορισμό την παράγωγο της $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $x_0 = 2$.
●●○ → Λύση 1.2/5
- 6 Να βρείτε σε ποιο σημείο της παραβολής $y = x^2$ η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 4x + 1$.
●●● → Λύση 1.2/6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Διαφορικός
Λογισμός

ΜΑΘΗΜΑ 1.3α

Παράγωγος συνάρτησης – Βασικοί τύποι και κανόνες

Η παράγωγος ως συνάρτηση

Στο προηγούμενο μάθημα υπολογίζαμε την παράγωγο σε ένα σημείο με τον ορισμό, κάτι αρκετά κουραστικό. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x ενός διαστήματος, τότε σε κάθε x αντιστοιχεί ένας αριθμός $f'(x)$. Έτσι ορίζεται μια **νέα συνάρτηση**:

ΟΡΙΣΜΟΣ — Παράγωγος συνάρτησης

Η συνάρτηση f' που σε κάθε x αντιστοιχίζει την παράγωγο $f'(x)$ της f στο x λέγεται **(πρώτη) παράγωγος** της f . Γράφουμε επίσης y' ή $\frac{dy}{dx}$. Η παράγωγος της f' , αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος** και συμβολίζεται f'' .

Για παράδειγμα, με τον ορισμό βρίσκουμε για την $f(x) = x^2$:

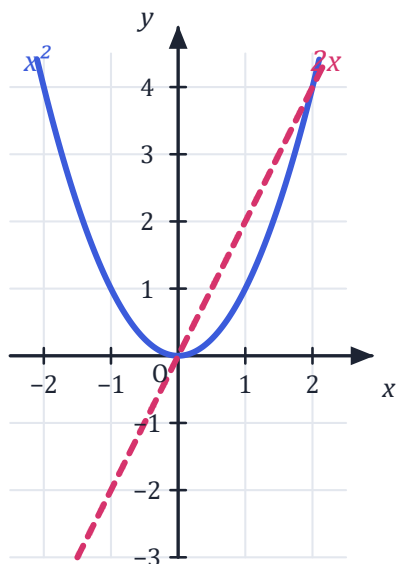
$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \rightarrow 2x, \quad \text{άρα } (x^2)' = 2x.$$

Δεν χρειάζεται να επαναλαμβάνουμε κάθε φορά αυτόν τον υπολογισμό: οι παράγωγοι των βασικών συναρτήσεων έχουν υπολογιστεί μια για πάντα.

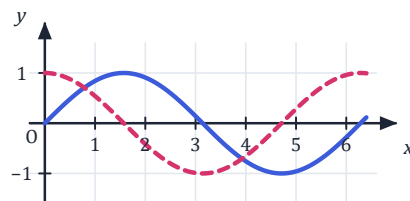
Οι παράγωγοι των βασικών συναρτήσεων

ΚΛΕΙΔΙ — Πίνακας βασικών παραγώγων

Συνάρτηση $f(x)$	Παράγωγος $f'(x)$	Παρατήρηση
c (σταθερά)	0	
x	1	
x^ν	$\nu x^{\nu-1}$	ισχύει για κάθε πραγματικό εκθέτη (με $x > 0$ αν χρειάζεται)
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	
$\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	προσοχή στο πρόσημο!
e^x	e^x	η μόνη (με τις πολλαπλασιάσιές της) που ισούται με την παράγωγό της
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$



Η x^2 και η παράγωγός της $2x$



Η $\sin x$ και η παράγωγός της $\cos x$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Πώς «διαβάζουμε» την παράγωγο από τη γραφική παράσταση

Όπου η x^2 κατεβαίνει ($x < 0$), η παράγωγός της $2x$ είναι αρνητική· όπου ανεβαίνει ($x > 0$), θετική· στον «πάτο» ($x = 0$) μηδενίζεται. Το ίδιο φαίνεται και στο ζεύγος $\sin x$ – $\cos x$: στις κορυφές του ημιτόνου το $\cos x$ μηδενίζεται.

Οι κανόνες παραγωγίσης

ΘΕΩΡΗΜΑ — Κανόνες παραγωγίσης

Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες και c σταθερά:

1. Σταθερά επί συνάρτηση: $(c \cdot f)' = c \cdot f'$
2. Άθροισμα / διαφορά: $(f \pm g)' = f' \pm g'$
3. Γινόμενο: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
4. Πηλίκο: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, όπου $g(x) \neq 0$

Από τον κανόνα του πηλίκου προκύπτει και η παράγωγος της εφαπτομένης: $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

ΠΡΟΣΟΧΗ! — Η παράγωγος γινομένου ΔΕΝ είναι γινόμενο παραγώγων

Αυτό είναι ίσως το πιο συχνό λάθος του κεφαλαίου. Για παράδειγμα, $(x \cdot x)' = (x^2)' = 2x$, ενώ $x' \cdot x' = 1 \cdot 1 = 1$. Ο σωστός κανόνας έχει **δύο όρους**: «παράγωγος του πρώτου επί τον δεύτερο, συν ο πρώτος επί την παράγωγο του δεύτερου».

✗ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** — Λάθος σειρά στον αριθμητή του πηλίκου

$$\times \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{fg' - f'g}{g^2}.$$

✓ $\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$. Μνημονικός κανόνας: «**πάνω** παραγωγίζεται **πρώτο**». Αν αλλάξεις τη σειρά, το αποτέλεσμα βγαίνει με αντίθετο πρόσημο.

✗ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** — Παράγωγος σταθεράς

$$\times (e^2)' = e^2 \text{ ή } \times (\pi^3)' = 3\pi^2.$$

✓ Τα e^2 και π^3 είναι **αριθμοί** (σταθερές), άρα η παράγωγός τους είναι 0. Πρόσεχε ποιο γράμμα είναι η μεταβλητή!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Πολυώνυμο

Να βρεθεί η παράγωγος των: (α) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 7x - 5$ (β) $g(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{x} + 6\sqrt{x}$.

ΛΥΣΗ

$$(\alpha) f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 7 - 0 = 12x^2 - 4x + 7.$$

$$(\beta) g'(x) = \frac{4x^3}{2} - 3 \left(-\frac{1}{x^2} \right) + 6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x^3 + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{\sqrt{x}}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Γινόμενο

Να βρεθεί η παράγωγος των: (α) $f(x) = x^2 e^x$ (β) $g(x) = x \ln x$ (γ) $h(x) = x \eta \mu x$.

ΛΥΣΗ

$$(\alpha) f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = xe^x(x + 2).$$

$$(\beta) g'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

$$(\gamma) h'(x) = \eta \mu x + x \sigma \upsilon \nu x.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Πηλίκο

Να βρεθεί η παράγωγος των: (α) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ (β) $g(x) = \frac{e^x}{x}$.

ΛΥΣΗ

$$(\alpha) f'(x) = \frac{2(x-3) - (2x+1) \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2x-6-2x-1}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}.$$

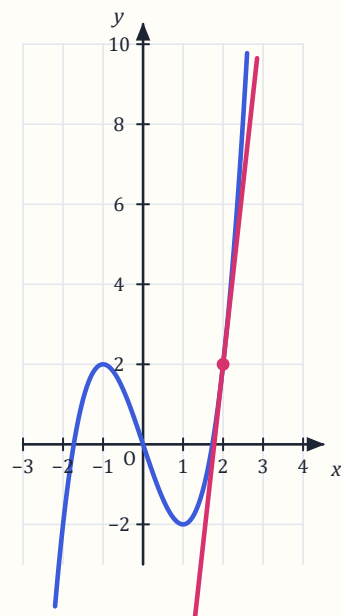
$$(\beta) g'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Εφαπτομένη με τους κανόνες

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x) = x^3 - 3x$ στο σημείο με $x_0 = 2$.

ΛΥΣΗ

$f(2) = 8 - 6 = 2$, $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(2) = 9$. Εφαπτομένη:
 $y - 2 = 9(x - 2)$, δηλαδή $y = 9x - 16$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Πού η εφαπτομένη είναι οριζόντια;

Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x' .

ΛΥΣΗ

Οριζόντια εφαπτομένη σημαίνει κλίση 0: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3) = 0$, άρα $x = 1$ ή $x = 3$. Τα σημεία είναι $(1, f(1)) = (1, 5)$ και $(3, f(3)) = (3, 1)$.

💡 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πριν παραγωγίσεις, απλοποίησε!

Πολλές φορές συμφέρει να γράψουμε τη συνάρτηση σε απλούστερη μορφή πριν παραγωγίσουμε. Για παράδειγμα $f(x) = \frac{x^3 + x}{x} = x^2 + 1$ (για $x \neq 0$), οπότε $f'(x) = 2x$ — χωρίς κανόνα πηλίκου. Ή $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$, οπότε η παράγωγος είναι $-3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Ο πίνακας των παραγώγων πρέπει να γίνει «δεύτερη φύση». Στο mathgreece.com θα βρεις δωρεάν πλήρες φροντιστήριο με τεστ αυτοαξιολόγησης και δεκάδες λυμένες παραγωγίσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.3α · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Να βρείτε τις παραγώγους: (α) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 8$ (β) $f(x) = 7\sqrt{x} - \frac{2}{x}$ (γ) $f(x) = 3e^x - 4 \ln x$.
 ●○○ → Λύση 1.3α/1
- 2** Να βρείτε τις παραγώγους: (α) $f(x) = 2 \eta \mu x - 5 \sigma \upsilon \nu x$ (β) $f(x) = x^5 + e^3$ (γ) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$.
 ●○○ → Λύση 1.3α/2
- 3** Να βρείτε τις παραγώγους: (α) $f(x) = (x^2 + 1)(x - 4)$ (β) $f(x) = e^x \sigma \upsilon \nu x$ (γ) $f(x) = x^2 \ln x$.
 ●●○ → Λύση 1.3α/3
- 4** Να βρείτε τις παραγώγους: (α) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ (β) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
 ●●○ → Λύση 1.3α/4
- 5** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x) = e^x$ στο σημείο $(0, 1)$ και της $g(x) = \ln x$ στο σημείο $(1, 0)$.
 ●●○ → Λύση 1.3α/5
- 6** Να βρείτε σε ποια σημεία η εφαπτομένη της $f(x) = x^3 - 12x$ είναι οριζόντια.
 ●●○ → Λύση 1.3α/6
- 7** Να βρείτε τα α, β ώστε η καμπύλη της $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ να διέρχεται από το σημείο $(1, 3)$ και η εφαπτομένη της σε αυτό να έχει κλίση 5.
 ●●● → Λύση 1.3α/7

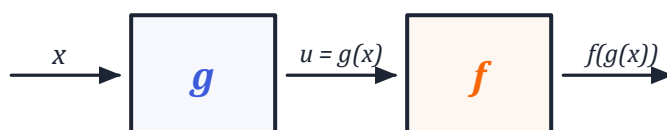
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Διαφορικός
Λογισμός

ΜΑΘΗΜΑ 1.3β

Σύνθετες συναρτήσεις – Δεύτερη παράγωγος – Ρυθμός μεταβολής

Σύνθεση συναρτήσεων

Η συνάρτηση $h(x) = (3x^2 + 1)^5$ δεν είναι ούτε άθροισμα ούτε γινόμενο απλών συναρτήσεων· είναι μια «συνάρτηση μέσα σε συνάρτηση». Αν θέσουμε $u = g(x) = 3x^2 + 1$ (η «εσωτερική») και $f(u) = u^5$ (η «εξωτερική»), τότε $h(x) = f(g(x))$. Λέμε ότι η h είναι η **σύνθεση** της f με τη g .



Η σύνθεση ως δύο διαδοχικές «μηχανές»

Ο κανόνας της αλυσίδας

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο x και η f παραγωγίσιμη στο $g(x)$, τότε

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Με λόγια: **παραγωγίζουμε την εξωτερική** (αφήνοντας μέσα την εσωτερική όπως είναι) **και πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο της εσωτερικής**.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα στις βασικές συναρτήσεις με «εσωτερική» $u = u(x)$ παίρνουμε έναν πίνακα που χρησιμοποιούμε συνέχεια:

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Πίνακας σύνθετων παραγώγων ($u = u(x)$)

Συνάρτηση	Παράγωγος
u^ν	$\nu u^{\nu-1} \cdot u'$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$e^u \cdot u'$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\eta \mu u$	$\sigma \upsilon \nu u \cdot u'$
$\sigma \upsilon \nu u$	$-\eta \mu u \cdot u'$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Σύνθετες παράγωγοι

Να βρεθούν οι παράγωγοι των: (α) $(3x^2 + 1)^5$ (β) e^{-2x} (γ) $\ln(x^2 + 1)$ (δ) $\sqrt{4x + 5}$ (ε) $\eta\mu(3x)$ (στ) $\sigma\upsilon\nu^2 x$.

ΛΥΣΗ

$$(α) 5(3x^2 + 1)^4 \cdot 6x = 30x(3x^2 + 1)^4.$$

$$(β) e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}.$$

$$(γ) \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

$$(δ) \frac{4}{2\sqrt{4x + 5}} = \frac{2}{\sqrt{4x + 5}}.$$

$$(ε) \sigma\upsilon\nu(3x) \cdot 3 = 3 \sigma\upsilon\nu 3x.$$

$$(στ) \text{ Εδώ } \sigma\upsilon\nu^2 x = (\sigma\upsilon\nu x)^2, \text{ άρα } 2 \sigma\upsilon\nu x \cdot (-\eta\mu x) = -2 \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x.$$

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Ξεχνάμε την παράγωγο της εσωτερικής

$$\text{✗ } (e^{5x})' = e^{5x}, \text{ ✗ } ((2x - 1)^3)' = 3(2x - 1)^2.$$

✓ $(e^{5x})' = 5e^{5x}$ και $((2x - 1)^3)' = 3(2x - 1)^2 \cdot 2 = 6(2x - 1)^2$. Η «αλυσίδα» θέλει **πάντα** τον τελευταίο κρίκο: $\cdot u'$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Συνδυασμός κανόνων

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = x e^{x^2}$.

ΛΥΣΗ

$$\text{Γινόμενο, όπου ο δεύτερος παράγοντας είναι σύνθετη: } f'(x) = 1 \cdot e^{x^2} + x \cdot e^{x^2} \cdot 2x = e^{x^2}(1 + 2x^2)$$

Η δεύτερη παράγωγος

Αν παραγωγίσουμε την f' , παίρνουμε τη **δεύτερη παράγωγο** f'' . Για παράδειγμα, για $f(x) = x^4 - 3x^2$: $f'(x) = 4x^3 - 6x$ και $f''(x) = 12x^2 - 6$.

Στην κίνηση, αν $S(t)$ είναι η θέση, τότε:

- $v(t) = S'(t)$ είναι η **ταχύτητα**,
- $a(t) = v'(t) = S''(t)$ είναι η **επιτάχυνση** (ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας).

Ρυθμός μεταβολής στην πράξη

ΚΛΕΙΔΙ — Ρυθμός μεταβολής

Αν ένα μέγεθος y εξαρτάται από ένα μέγεθος x μέσω της $y = f(x)$, ο **ρυθμός μεταβολής** του y ως προς το x , τη στιγμή που $x = x_0$, είναι $f'(x_0)$. Μονάδα του είναι «μονάδες του y ανά μονάδα του x » (π.χ. m/s, €/τεμάχιο, άτομα/έτος).

Πεδίο	Μέγεθος y	Ρυθμός y'
Φυσική	θέση $S(t)$	ταχύτητα $v(t)$
Φυσική	ταχύτητα $v(t)$	επιτάχυνση $a(t)$
Οικονομία	κόστος $K(x)$	οριακό κόστος $K'(x)$
Οικονομία	έσοδα $E(x)$	οριακά έσοδα $E'(x)$
Βιολογία	πληθυσμός $P(t)$	ρυθμός αύξησης πληθυσμού

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Κίνηση σώματος

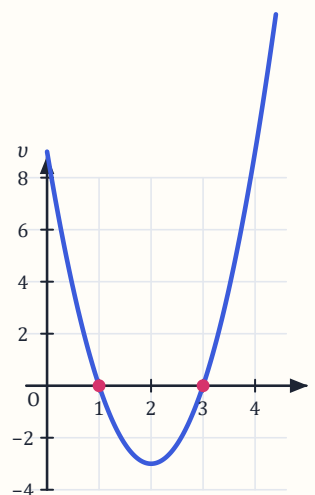
Ένα σώμα κινείται σε ευθεία και η θέση του είναι $S(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (m, s), $t \geq 0$. (α) Να βρεθούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση. (β) Πότε το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο; (γ) Ποια είναι η επιτάχυνση τη στιγμή $t = 1$;

ΛΥΣΗ

(α) $v(t) = S'(t) = 3t^2 - 12t + 9$, $a(t) = v'(t) = 6t - 12$.

(β) $v(t) = 0 \iff 3(t^2 - 4t + 3) = 0 \iff t = 1 \text{ ή } t = 3 \text{ s.}$

(γ) $a(1) = 6 - 12 = -6 \text{ m/s}^2$. Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η ταχύτητα μειώνεται: πράγματι, μετά το $t = 1$ η ταχύτητα γίνεται αρνητική και το σώμα κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση μέχρι το $t = 3$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Πληθυσμός

Ο πληθυσμός μιας καλλιέργειας βακτηρίων μετά από t ώρες είναι $P(t) = 1000 e^{0,2t}$. Να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού τη χρονική στιγμή $t = 0$ και τη στιγμή $t = 5$.

ΛΥΣΗ

$P'(t) = 1000 \cdot e^{0,2t} \cdot 0,2 = 200 e^{0,2t}$. Άρα $P'(0) = 200$ βακτήρια/ώρα και $P'(5) = 200e \approx 544$ βακτήρια/ώρα. Ο ρυθμός αυξάνεται, γιατί όσο περισσότερα είναι τα βακτήρια, τόσο γρηγορότερα πολλαπλασιάζονται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Κύκλος που μεγαλώνει

Μια πέτρα πέφτει σε λίμνη και δημιουργεί κυκλικό κύμα, του οποίου η ακτίνα μετά από t δευτερόλεπτα είναι $r(t) = 2t$ (m). Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του κύκλου τη στιγμή $t = 3$.

ΛΥΣΗ

$E(t) = \pi r(t)^2 = \pi(2t)^2 = 4\pi t^2$, οπότε $E'(t) = 8\pi t$ και $E'(3) = 24\pi \approx 75,4 \text{ m}^2/\text{s}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Οριακό κέρδος

Τα έσοδα μιας επιχείρησης από την πώληση x τεμαχίων είναι $E(x) = 50x - 0,1x^2$ € και το κόστος $K(x) = 10x + 500$ €. Να βρεθεί το οριακό κέρδος για $x = 100$ και για $x = 250$, και να ερμηνευτεί.

ΛΥΣΗ

Κέρδος $P(x) = E(x) - K(x) = 40x - 0,1x^2 - 500$. Οριακό κέρδος $P'(x) = 40 - 0,2x$.

$P'(100) = 20$: στο επίπεδο των 100 τεμαχίων, ένα επιπλέον τεμάχιο αυξάνει το κέρδος κατά περίπου 20 €.

$P'(250) = -10$: στο επίπεδο των 250 τεμαχίων, ένα επιπλέον τεμάχιο **μειώνει** το κέρδος κατά περίπου 10 € — η επιχείρηση έχει ξεπεράσει την «ιδανική» ποσότητα (θα τη βρούμε στο μάθημα 1.4β).

🔗 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πώς λύνουμε ασκήσεις ρυθμού μεταβολής

1. Βρίσκουμε **ποιο μέγεθος** μεταβάλλεται και **ως προς τι** (συνήθως ως προς τον χρόνο t).
2. Εκφράζουμε το μέγεθος ως συνάρτηση αυτής της μεταβλητής.
3. Παραγωγίζουμε και αντικαθιστούμε την τιμή που ζητείται.
4. Γράφουμε το αποτέλεσμα **με μονάδες** και το ερμηνεύουμε.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Ο κανόνας της αλυσίδας είναι το πιο «τεχνικό» κομμάτι του κεφαλαίου. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με βήμα-βήμα λύσεις και πολλές ασκήσεις εξάσκησης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.3β · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Να βρείτε τις παραγώγους: (α) $(2x - 5)^4$ (β) e^{3x+1} (γ) $\ln(5x)$ (δ) $\sqrt{x^2 + 9}$.
●○○ → Λύση 1.3β/1
- 2 Να βρείτε τις παραγώγους: (α) $\sin(2x)$ (β) $\eta\mu(x^2)$ (γ) e^{-x} .
●○○ → Λύση 1.3β/2
- 3 Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x$.
●○○ → Λύση 1.3β/3
- 4 Να βρείτε τις παραγώγους: (α) $f(x) = x^2 e^{-x}$ (β) $f(x) = \ln(x^2 + 4x)$ (γ) $f(x) = (x + 1)\sqrt{x}$.
●●○ → Λύση 1.3β/4
- 5 Μπάλα πετιέται κατακόρυφα προς τα πάνω και το ύψος της μετά από t s είναι $h(t) = 25t - 5t^2$ (m).
Να βρείτε την ταχύτητα τη στιγμή $t = 1$, τη στιγμή που η ταχύτητα μηδενίζεται και το μέγιστο ύψος.
●●○ → Λύση 1.3β/5
- 6 Η θερμοκρασία ενός φούρνου t λεπτά μετά το άναμμα είναι $T(t) = 220 - 200e^{-0,1t}$ (°C). Να βρείτε
τον ρυθμό αύξησης της θερμοκρασίας τη στιγμή $t = 0$ και τη στιγμή $t = 10$.
●●○ → Λύση 1.3β/6
- 7 Η πλευρά ενός τετραγώνου μεγαλώνει με τον χρόνο σύμφωνα με τον τύπο $a(t) = 3 + 2t$ (cm, s). Να
βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού και της διαγωνίου του τη στιγμή $t = 2$.
●●● → Λύση 1.3β/7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Διαφορικός
Λογισμός

ΜΑΘΗΜΑ 1.4α

Μονοτονία και ακρότατα με τη
βοήθεια της παραγώγου

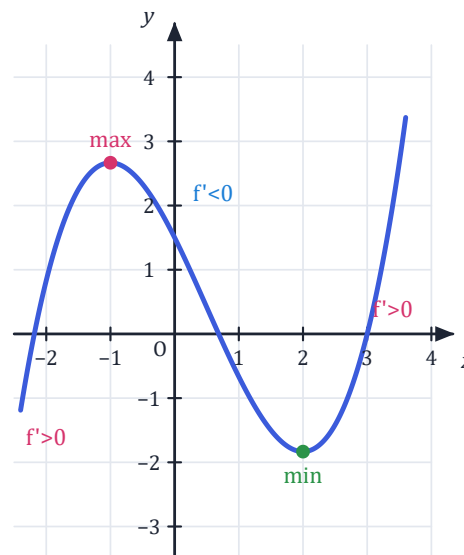
◆ Παράγωγος και μονοτονία

Αν η εφαπτομένη σε κάθε σημείο ενός διαστήματος «ανεβαίνει» (θετική κλίση), η καμπύλη ανεβαίνει· αν «κατεβαίνει», η καμπύλη κατεβαίνει. Αυτή η διαισθητική εικόνα διατυπώνεται αυστηρά ως εξής:

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Κριτήριο μονοτονίας

Έστω f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ .

- Αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ .



Πρόσημο της f' και μονοτονία της f

◆ Παράγωγος και ακρότατα

Στις «κορυφές» και στους «πάτους» μιας ομαλής καμπύλης η εφαπτομένη είναι οριζόντια, δηλαδή η παράγωγος μηδενίζεται, και ταυτόχρονα η παράγωγος **αλλάζει πρόσημο**.

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Κριτήριο πρώτης παραγώγου για ακρότατα

Έστω f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) που περιέχει το x_0 , με $f'(x_0) = 0$.

- Αν $f'(x) > 0$ αριστερά του x_0 και $f'(x) < 0$ δεξιά του, η f παρουσιάζει **μέγιστο** στο x_0 .
- Αν $f'(x) < 0$ αριστερά του x_0 και $f'(x) > 0$ δεξιά του, η f παρουσιάζει **ελάχιστο** στο x_0 .

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Κριτήριο δεύτερης παραγώγου

Αν $f'(x_0) = 0$ και:

- $f''(x_0) < 0$, τότε η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο x_0 .
- $f''(x_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο x_0 .

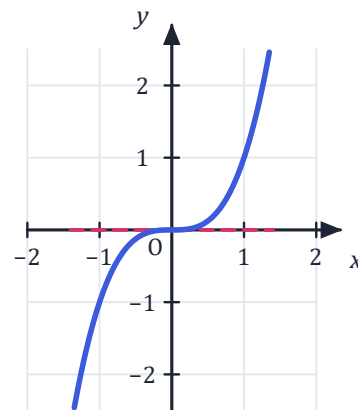
⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Το $f'(x_0) = 0$ ΔΕΝ αρκεί!

Η $f(x) = x^3$ έχει $f'(x) = 3x^2$, οπότε $f'(0) = 0$. Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$ (η f' είναι θετική εκατέρωθεν του 0) και **δεν** έχει ακρότατο στο 0. Για να υπάρχει ακρότατο, η παράγωγος πρέπει να **αλλάζει πρόσημο**. Επίσης, αν $f''(x_0) = 0$, το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου **δεν δίνει απάντηση**· τότε κοιτάμε το πρόσημο της f' .

Η μέθοδος βήμα-βήμα

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Μελέτη μονοτονίας και ακροτάτων

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f .
2. Υπολογίζουμε την $f'(x)$ και την παραγοντοποιούμε όσο γίνεται.
3. Λύνουμε την $f'(x) = 0$ (οι λύσεις λέγονται **κρίσιμα σημεία**).
4. Φτιάχνουμε **πίνακα προσήμων** της f' και από αυτόν τη μονοτονία της f .
5. Όπου η f' αλλάζει πρόσημο έχουμε ακρότατο· υπολογίζουμε την τιμή του.



Η $f(x) = x^3$: $f'(0) = 0$ αλλά όχι ακρότατο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Πλήρης μελέτη πολυωνύμου

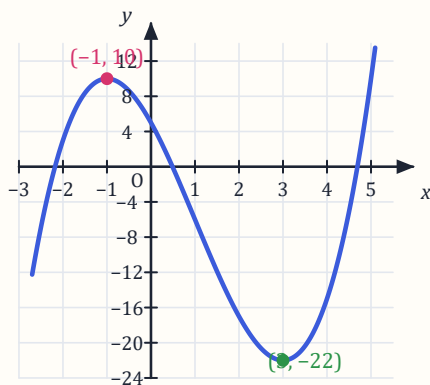
Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

ΛΥΣΗ

Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$.

$f'(x) = 0 \iff x = -1$ ή $x = 3$. Το τριώνυμο είναι θετικό έξω από τις ρίζες και αρνητικό ανάμεσα:

x	$-\infty \dots -1$	$-1 \dots 3$	$3 \dots +\infty$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗



Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 3]$. Τοπικό μέγιστο στο $x = -1$: $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$. Τοπικό ελάχιστο στο $x = 3$: $f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Με εκθετική συνάρτηση

Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x) = x e^{-x}$.

ΛΥΣΗ

$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(1 - x)$. Επειδή $e^{-x} > 0$, το πρόσημο της f' είναι το πρόσημο του $1 - x$: θετικό για $x < 1$, αρνητικό για $x > 1$. Άρα η f αυξάνεται στο $(-\infty, 1]$, μειώνεται στο $[1, +\infty)$ και έχει **μέγιστο** στο $x = 1$ ίσο με $f(1) = \frac{1}{e} \approx 0,37$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Μια ανισότητα με τη βοήθεια ακροτάτου

Να μελετηθεί η $f(x) = x - \ln x$ ($x > 0$) και να αποδειχθεί ότι $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$.

ΛΥΣΗ

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Για $0 < x < 1$ είναι $f'(x) < 0$, για $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$. Η f έχει λοιπόν (ολικό) ελάχιστο στο $x = 1$: $f(1) = 1$. Επομένως $x - \ln x \geq 1$ για κάθε $x > 0$, δηλαδή $\ln x \leq x - 1$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Κριτήριο δεύτερης παραγώγου

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ με το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου.

ΛΥΣΗ

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1)$, κρίσιμα σημεία $x = 2$ και $x = -1$. $f''(x) = 12x - 6$.
 $f''(2) = 18 > 0$: τοπικό **ελάχιστο** $f(2) = 16 - 12 - 24 = -20$. $f''(-1) = -18 < 0$: τοπικό **μέγιστο** $f(-1) = -2 - 3 + 12 = 7$. ■

Ολικά ακρότατα σε κλειστό διάστημα

🔑 **ΚΛΕΙΔΙ** — Μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[\alpha, \beta]$

Μια συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ παίρνει πάντα μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Για να τις βρούμε:

1. βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία ($f'(x) = 0$) που ανήκουν στο (α, β) .
2. υπολογίζουμε την f σε αυτά **και στα άκρα** α, β .
3. η μεγαλύτερη από αυτές τις τιμές είναι το ολικό μέγιστο και η μικρότερη το ολικό ελάχιστο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Ολικά ακρότατα

Να βρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της $f(x) = x^3 - 3x$ στο διάστημα $[0, 2]$.

ΛΥΣΗ

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \iff x = \pm 1$. Στο $(0, 2)$ ανήκει μόνο το $x = 1$. Τιμές: $f(0) = 0$, $f(1) = -2$, $f(2) = 2$. Μέγιστη τιμή 2 (στο $x = 2$, άκρο!) και ελάχιστη -2 (στο $x = 1$).

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Ξεχνάμε τα άκρα

✗ «Μέγιστη τιμή της $x^3 - 3x$ στο $[0, 2]$ δεν υπάρχει, γιατί το μόνο κρίσιμο σημείο δίνει ελάχιστο.»

✓ Σε κλειστό διάστημα το ολικό ακρότατο μπορεί να βρίσκεται **σε άκρο**. Υπολογίζουμε **πάντα** και τις τιμές στα άκρα.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Η μελέτη συνάρτησης είναι κλασικό θέμα εξετάσεων. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με πίνακες προσήμων βήμα-βήμα και δεκάδες λυμένα θέματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.4α · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την $f(x) = x^2 - 6x + 2$.

●○○

→ Λύση 1.4α/1

2 Να μελετήσετε την $f(x) = -x^3 + 12x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

●○○

→ Λύση 1.4α/2

3 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = x + \frac{4}{x}$ για $x > 0$.

●●○

→ Λύση 1.4α/3

4 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = x^2 e^x$.

●●○

→ Λύση 1.4α/4

5 Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ στο $[0, 4]$.

●●○

→ Λύση 1.4α/5

6 Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, μελετώντας τη συνάρτηση $g(x) = e^x - x - 1$.

●●●

→ Λύση 1.4α/6

7 Να βρείτε το α ώστε η $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - 9x + 1$ να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 1$, και να εξετάσετε αν είναι μέγιστο ή ελάχιστο.

●●●

→ Λύση 1.4α/7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Διαφορικός
Λογισμός

ΜΑΘΗΜΑ 1.4β

Προβλήματα βελτιστοποίησης

◆ Τι είναι πρόβλημα βελτιστοποίησης

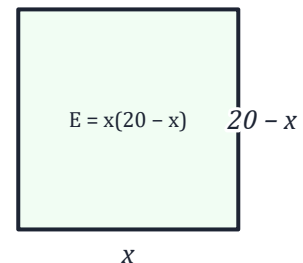
Πολλά προβλήματα της καθημερινής ζωής, της τεχνολογίας και της οικονομίας ζητούν «το καλύτερο»: το **μέγιστο** κέρδος, το **ελάχιστο** κόστος, τη **μεγαλύτερη** χωρητικότητα με το **λιγότερο** υλικό. Η παράγωγος μάς δίνει μια γενική μέθοδο για όλα αυτά.

💡 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Η μέθοδος σε 6 βήματα

1. Διαβάζω προσεκτικά και κάνω σχήμα.
2. Ονομάζω τη μεταβλητή x και εκφράζω το μέγεθος που θέλω να γίνει μέγιστο/ελάχιστο ως **συνάρτηση μιας μεταβλητής** (χρησιμοποιώ τους περιορισμούς του προβλήματος για να «διώξω» τις άλλες μεταβλητές).
3. Βρίσκω το **πεδίο ορισμού** από το νόημα του προβλήματος.
4. Βρίσκω την **παράγωγο** και τα κρίσιμα σημεία.
5. Με πίνακα προσήμων (ή f'') ελέγχω ότι πράγματι έχω **μέγιστο/ελάχιστο**.
6. **Απαντώ** στο ερώτημα του προβλήματος, με μονάδες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ο κήπος με τη μεγαλύτερη επιφάνεια

Με 40 m σύρμα περιφράσσουμε ορθογώνιο κήπο. Ποιες διαστάσεις δίνουν το μεγαλύτερο εμβαδόν;



ΛΥΣΗ

Όπως είδαμε στο μάθημα 1.1α, $E(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$ με $0 < x < 20$. $E'(x) = 20 - 2x$, που μηδενίζεται για $x = 10$, είναι θετική για $x < 10$ και αρνητική για $x > 10$. Μέγιστο για $x = 10$: ο κήπος είναι **τετράγωνο** 10×10 με εμβαδόν 100 m^2 . ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Περίφραξη δίπλα σε τοίχο

Ένας αγρότης έχει 100 m συρματόπλεγμα και θέλει να περιφράξει ορθογώνιο χώρο δίπλα σε έναν μακρύ τοίχο (η πλευρά του τοίχου δεν χρειάζεται περίφραξη). Ποιο είναι το μέγιστο εμβαδόν που μπορεί να περιφράξει;



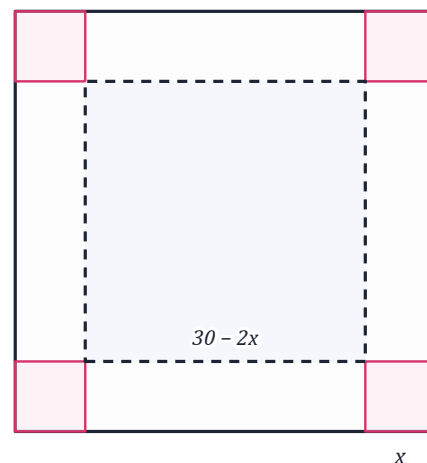
ΛΥΣΗ

Αν οι δύο πλευρές κάθετες στον τοίχο είναι y και η παράλληλη x , τότε $x + 2y = 100$, άρα $x = 100 - 2y$ και $E(y) = y(100 - 2y) = 100y - 2y^2$, με $0 < y < 50$. $E'(y) = 100 - 4y = 0 \iff y = 25$ (μέγιστο, αφού η E' αλλάζει από θετική σε αρνητική). Τότε $x = 50$ και $E_{\max} = 1250 \text{ m}^2$.

Παρατήρησε ότι **δεν** βγαίνει τετράγωνο: η πλευρά κατά μήκος του τοίχου είναι διπλάσια από τις άλλες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Το κουτί με τον μεγαλύτερο όγκο

Από τετράγωνο χαρτόνι πλευράς 30 cm κόβουμε από κάθε γωνία ένα τετράγωνο πλευράς x και διπλώνουμε για να φτιάξουμε ανοικτό κουτί. Ποιο x δίνει τον μεγαλύτερο όγκο;



ΛΥΣΗ

$V(x) = x(30 - 2x)^2$, με $0 < x < 15$. Παραγωγίζουμε με τον κανόνα του γινομένου:

$$V'(x) = (30 - 2x)^2 + x \cdot 2(30 - 2x)(-2) = (30 - 2x)(30 - 2x - 4x) = (30 - 2x)(30 - 6x).$$

Στο $(0, 15)$ ο παράγοντας $30 - 2x$ είναι θετικός, οπότε το πρόσημο της V' είναι το πρόσημο του $30 - 6x$: θετικό για $x < 5$, αρνητικό για $x > 5$. Μέγιστος όγκος για $x = 5 \text{ cm}$: $V(5) = 5 \cdot 20^2 = 2000 \text{ cm}^3$ (δηλαδή 2 λίτρα).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Μέγιστο κέρδος

Η ημερήσια συνάρτηση κέρδους μιας μικρής επιχείρησης που πουλά x μερίδες φαγητού είναι $P(x) = -0,5x^2 + 40x - 300 \text{ €}$. Πόσες μερίδες πρέπει να πουλά για μέγιστο κέρδος, και ποιο είναι αυτό;

ΛΥΣΗ

$P'(x) = -x + 40 = 0 \iff x = 40$, και $P''(x) = -1 < 0$, άρα μέγιστο. $P(40) = -800 + 1600 - 300 = 500$ €.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Τιμή εισιτηρίου

Ένα θέατρο πουλά 300 εισιτήρια ανά παράσταση με τιμή 10 €. Από έρευνα προκύπτει ότι για κάθε αύξηση της τιμής κατά 0,5 € πουλιούνται 10 εισιτήρια λιγότερα. Ποια τιμή δίνει τα μέγιστα έσοδα;

ΛΥΣΗ

Αν κάνουμε x αυξήσεις των 0,5 €, η τιμή είναι $10 + 0,5x$ και τα εισιτήρια $300 - 10x$. Έσοδα:

$$R(x) = (10 + 0,5x)(300 - 10x) = 3000 + 50x - 5x^2, \quad 0 \leq x \leq 30.$$

$R'(x) = 50 - 10x = 0 \iff x = 5$ (μέγιστο, αφού $R'' = -10 < 0$). Τιμή 12,5 €, 250 εισιτήρια, έσοδα 3125 € (αντί για 3000).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Κουτί κονσέρβας με το λιγότερο υλικό

Μια κυλινδρική κονσέρβα πρέπει να έχει όγκο 1000 cm^3 . Ποιες διαστάσεις ελαχιστοποιούν το υλικό (ολική επιφάνεια);

ΛΥΣΗ

Με ακτίνα r και ύψος h : $\pi r^2 h = 1000$, άρα $h = \frac{1000}{\pi r^2}$. Επιφάνεια:

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}, \quad r > 0.$$

$S'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \iff r^3 = \frac{500}{\pi} \iff r \approx 5,42 \text{ cm}$. Για μικρότερα r η S' είναι αρνητική και για μεγαλύτερα θετική, άρα έχουμε ελάχιστο. Τότε $h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi r^3} \cdot r = 2r \approx 10,84 \text{ cm}$. Η «οικονομικότερη» κονσέρβα έχει ύψος ίσο με τη διάμετρο!

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Λύνουμε την εξίσωση αλλά δεν ελέγχουμε

✗ « $f'(x) = 0 \iff x = 5$, άρα στο 5 έχουμε μέγιστο.»

✓ Η $f'(x) = 0$ δίνει υποψήφια σημεία. Πρέπει να ελέγξουμε (πίνακας προσήμων ή f'') αν είναι μέγιστο, ελάχιστο ή τίποτα, και να ελέγξουμε ότι το σημείο ανήκει στο πεδίο ορισμού του προβλήματος.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Τιμές εκτός πεδίου

Στο πρόβλημα του κουτιού η $V'(x) = 0$ δίνει και $x = 15$, που όμως απορρίπτεται, γιατί τότε δεν μένει χαρτόνι για βάση ($30 - 2x = 0$). Πάντα ελέγχουμε τις λύσεις με βάση το νόημα του προβλήματος.

**ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;**

Τα προβλήματα βελτιστοποίησης είναι από τα αγαπημένα θέματα των εξετάσεων. Στο **mathgreece.com** θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με κατηγοριοποιημένα προβλήματα και αναλυτικές λύσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.4β · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Δύο θετικοί αριθμοί έχουν άθροισμα 16. Να βρείτε ποιοι είναι, ώστε το γινόμενό τους να είναι μέγιστο.
●○○

→ Λύση 1.4β/1
- 2** Η συνάρτηση κέρδους μιας επιχείρησης είναι $P(x) = -2x^2 + 120x - 1000$, όπου x οι μονάδες προϊόντος. Να βρείτε το μέγιστο κέρδος.
●○○

→ Λύση 1.4β/2
- 3** Ορθογώνιο έχει εμβαδόν 64 m^2 . Να βρείτε τις διαστάσεις του ώστε η περίμετρος να είναι ελάχιστη.
●●○

→ Λύση 1.4β/3
- 4** Το κόστος παραγωγής x τεμαχίων είναι $K(x) = x^2 + 100x + 2500$ €. Να βρείτε για ποια ποσότητα ελαχιστοποιείται το μέσο κόστος $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$.
●●○

→ Λύση 1.4β/4
- 5** Ένα ορθογώνιο είναι εγγεγραμμένο κάτω από την παραβολή $y = 12 - x^2$, με τη βάση του στον άξονα $x'x$ και συμμετρικό ως προς τον $y'y$. Να βρείτε το μέγιστο εμβαδόν του.
●●○

→ Λύση 1.4β/5
- 6** Ένα κλειστό κουτί με τετραγωνική βάση πρέπει να έχει όγκο 8000 cm^3 . Το υλικό της βάσης και του καπακιού κοστίζει $0,02 \text{ €/cm}^2$, ενώ των πλευρικών τοιχωμάτων $0,01 \text{ €/cm}^2$. Να βρείτε τις διαστάσεις που ελαχιστοποιούν το κόστος.
●●●

→ Λύση 1.4β/6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Διαφορικός
Λογισμός

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

Επαναληπτικά θέματα Διαφορικού
Λογισμού

Ο «χάρτης» του κεφαλαίου

ΣΥΝΟΨΗ — Τι πρέπει να ξέρεις να κάνεις

Δεξιότητα	Μάθημα
Πεδίο ορισμού, γραφικές παραστάσεις, μονοτονία από τον ορισμό	1.1α
Όρια με αντικατάσταση και με απλοποίηση ($\frac{0}{0}$)	1.1β
Παράγωγος από τον ορισμό, εφαπτομένη, στιγμιαία ταχύτητα	1.2
Παραγωγή με τύπους, κανόνες και κανόνα αλυσίδας	1.3α, 1.3β
Ρυθμός μεταβολής, ταχύτητα, επιτάχυνση	1.3β
Πίνακας προσήμων, μονοτονία, ακρότατα, ολικά ακρότατα	1.4α
Προβλήματα βελτιστοποίησης	1.4β

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Θέμα τύπου εξετάσεων: πλήρης μελέτη συνάρτησης

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. (α) Να βρεθεί η $f'(x)$ και να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$. (γ) Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 2}{x - 2}$.

ΛΥΣΗ

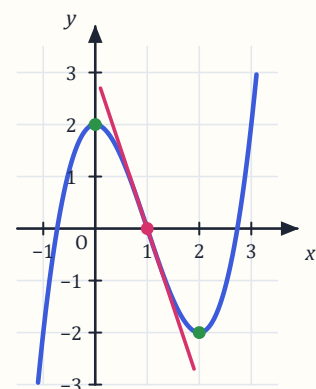
(α) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. Πρόσημα: + για $x < 0$, - στο $(0, 2)$, + για $x > 2$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$, με τοπικό μέγιστο $f(0) = 2$ και τοπικό ελάχιστο $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$.

(β) $f(1) = 0$, $f'(1) = 3 - 6 = -3$. Εφαπτομένη: $y - 0 = -3(x - 1)$, δηλαδή $y = -3x + 3$.

(γ) Αντικατάσταση: $\frac{0}{0}$. Παραγοντοποιούμε: $f(x) + 2 = x^3 - 3x^2 + 4$. Επειδή μηδενίζεται για $x = 2$, διαιρείται με $x - 2$: $x^3 - 3x^2 + 4 = (x - 2)(x^2 - x - 2) = (x - 2)^2(x + 1)$. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)^2(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)(x + 1) = 0.$$

Παρατήρησε ότι αυτό το όριο είναι ακριβώς ο ορισμός της $f'(2)$ (αφού $f(2) = -2$), και πράγματι $f'(2) = 0$!



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Θέμα τύπου εξετάσεων: μέγιστο κέρδος

Τα έσοδα μιας βιοτεχνίας από την πώληση x εκατοντάδων τεμαχίων είναι $R(x) = 60x - x^2$ (χιλ. €) και το κόστος παραγωγής $C(x) = x^2 + 12x + 100$ (χιλ. €), $0 \leq x \leq 30$. (α) Να βρεθεί η συνάρτηση κέρδους. (β) Ποια ποσότητα μεγιστοποιεί το κέρδος και ποιο είναι το μέγιστο κέρδος; (γ) Να βρεθεί το οριακό κέρδος για $x = 10$ και να ερμηνευτεί.

ΛΥΣΗ

(α) $P(x) = R(x) - C(x) = -2x^2 + 48x - 100$.

(β) $P'(x) = -4x + 48 = 0 \iff x = 12$, και $P''(x) = -4 < 0$: μέγιστο. Πρέπει να παραχθούν 1200 τεμάχια, με μέγιστο κέρδος $P(12) = -288 + 576 - 100 = 188$ χιλ. €.

(γ) $P'(10) = 8$: στο επίπεδο των 1000 τεμαχίων, κάθε επιπλέον εκατοντάδα αυξάνει το κέρδος κατά περίπου 8 χιλ. € — άρα συμφέρει να αυξηθεί η παραγωγή.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Θέλεις ολοκληρωμένα επαναληπτικά διαγωνίσματα στον Διαφορικό Λογισμό, με χρονόμετρο και λύσεις; Θα τα βρεις στο mathgreece.com — πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα Επ. 1 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ και να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ μπορεί να «επεκταθεί» σε συνεχή συνάρτηση στο 1.

→ Λύση Επ. 1/1

- 2** Να βρείτε την παράγωγο της $f(x) = x^2 e^{2x}$.

→ Λύση Επ. 1/2

- 3** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x) = \ln x$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = e$.

→ Λύση Επ. 1/3

- 4** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.

→ Λύση Επ. 1/4

- 5** Ένα κινητό έχει θέση $S(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ (m, s), $t \geq 0$. Να βρείτε πότε είναι στιγμιαία ακίνητο και πότε η επιτάχυνσή του μηδενίζεται.

→ Λύση Επ. 1/5

- 6** Να βρείτε το α ώστε η εφαπτομένη της $f(x) = x^2 + \alpha x$ στο σημείο με $x_0 = 1$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 5x - 2$.

→ Λύση Επ. 1/6

- 7 Να βρείτε τον θετικό αριθμό x για τον οποίο το άθροισμα $x + \frac{9}{x}$ γίνεται ελάχιστο.

••○

→ Λύση Επ. 1/7

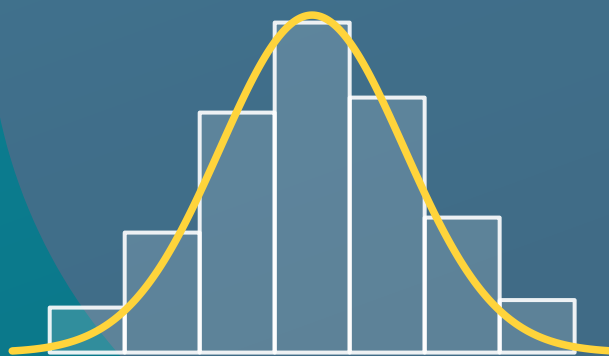
- 8 Η εβδομαδιαία ζήτηση ενός προϊόντος είναι $q = 100 - 2p$ τεμάχια, όπου p η τιμή πώλησης σε €, και κάθε τεμάχιο κοστίζει στην επιχείρηση 10 €. Ποια τιμή μεγιστοποιεί το κέρδος;

•••

→ Λύση Επ. 1/8

2

Στατιστική



Τα μαθήματα του κεφαλαίου

- 2.1** Βασικές έννοιες της Στατιστικής
- 2.2α** Παρουσίαση δεδομένων – Πίνακες συχνотήτων και διαγράμματα
- 2.2β** Ομαδοποίηση – Ιστογράμματα – Καμπύλες συχνотήτων
- 2.3α** Μέτρα θέσης: μέση τιμή, διάμεσος, τεταρτημόρια, επικρατούσα τιμή
- 2.3β** Μέτρα διασποράς – Κανονική κατανομή – Συντελεστής μεταβολής
- 2.4** Γραμμική παλινδρόμηση
- 2.5** Γραμμική συσχέτιση
- Επ. 2** Επαναληπτικά θέματα Στατιστικής

Τι θα κατακτήσεις

- Να γνωρίζεις τις βασικές έννοιες: πληθυσμός, δείγμα, μεταβλητές.
- Να κατασκευάζεις πίνακες συχνотήτων και διαγράμματα.
- Να ομαδοποιείς δεδομένα και να σχεδιάζεις ιστογράμματα και πολύγωνα.
- Να υπολογίζεις και να ερμηνεύεις μέση τιμή, διάμεσο, τεταρτημόρια, επικρατούσα τιμή.
- Να υπολογίζεις εύρος, διακύμανση, τυπική απόκλιση και συντελεστή μεταβολής.
- Να βρίσκεις την ευθεία παλινδρόμησης και τον συντελεστή συσχέτισης.

Ζούμε σε έναν κόσμο γεμάτο δεδομένα: δημοσκοπήσεις, βαθμολογίες, πωλήσεις, μετρήσεις θερμοκρασίας, στατιστικά αγώνων. Η Στατιστική είναι η επιστήμη που μας μαθαίνει να **συλλέγουμε**, να **οργανώνουμε**, να **παρουσιάζουμε** και να **ερμηνεύουμε** δεδομένα, ώστε να βγάζουμε σωστά συμπεράσματα και να παίρνουμε σωστές αποφάσεις. Στο κεφάλαιο αυτό μαθαίνουμε τη γλώσσα της, τους πίνακες και τα διαγράμματα, τα μέτρα θέσης και διασποράς και, τέλος, πώς μελετάμε τη σχέση δύο μεταβλητών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Στατιστική

ΜΑΘΗΜΑ 2.1

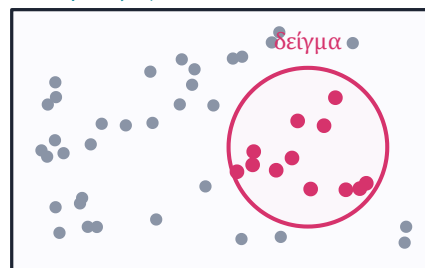
Βασικές έννοιες της Στατιστικής

Πληθυσμός, άτομα, μεταβλητές

ΟΡΙΣΜΟΣ — Βασικοί όροι

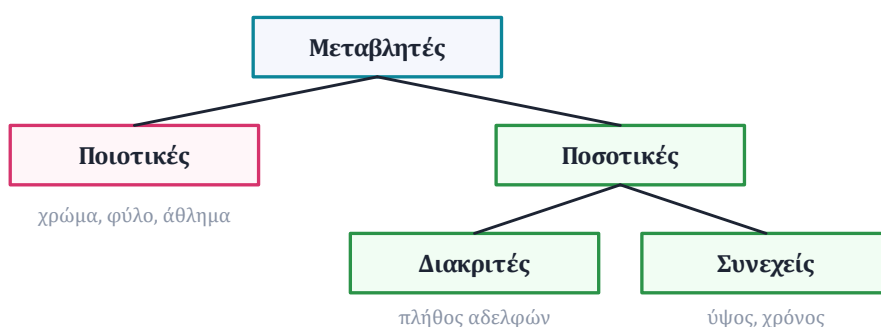
- **Πληθυσμός** λέγεται ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία θέλουμε να εξετάσουμε ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά (π.χ. οι μαθητές ενός σχολείου).
- Τα στοιχεία του πληθυσμού λέγονται **άτομα** ή **μονάδες** (χωρίς να είναι απαραίτητα άνθρωποι: μπορεί να είναι λάμπες, αυτοκίνητα, ημέρες).
- Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε τον πληθυσμό λέγονται **μεταβλητές** και συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα $X, Y, Z, \dots$. Οι δυνατές τιμές τους λέγονται **τιμές της μεταβλητής**.

πληθυσμός



Πληθυσμός και δείγμα

Είδη μεταβλητών



Η ταξινόμηση των μεταβλητών

- **Ποιοτικές** (ή κατηγορικές) λέγονται οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές **δεν είναι αριθμοί** (π.χ. ομάδα αίματος, οικογενειακή κατάσταση, αγαπημένο άθλημα).
- **Ποσοτικές** λέγονται οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι **αριθμοί**. Διακρίνονται σε:
- **διακριτές**, που παίρνουν «μεμονωμένες» τιμές (συνήθως ακέραιες), π.χ. ο αριθμός των παιδιών μιας οικογένειας ή τα γκολ ενός αγώνα.
- **συνεχείς**, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος, π.χ. το ύψος, το βάρος, ο χρόνος.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

Το ότι μια μεταβλητή γράφεται με αριθμούς δεν σημαίνει ότι είναι ποσοτική! Ο **ταχυδρομικός κώδικας** ή ο **αριθμός στη φανέλα** ενός παίκτη είναι ποιοτικές μεταβλητές: δεν έχει νόημα να βρούμε, π.χ., τον «μέσο ταχυδρομικό κώδικα».

◆ Απογραφή και δειγματοληψία

Η εξέταση **όλων** των ατόμων του πληθυσμού λέγεται **απογραφή**. Συχνά όμως αυτό είναι αδύνατο ή πολύ ακριβό (π.χ. για να ελέγξουμε τη διάρκεια ζωής λαμπτήρων θα έπρεπε να τους «κάψουμε» όλους!). Τότε επιλέγουμε ένα υποσύνολο του πληθυσμού, το **δείγμα**, και από αυτό βγάζουμε συμπεράσματα για όλο τον πληθυσμό.

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Το αντιπροσωπευτικό δείγμα

Για να είναι αξιόπιστα τα συμπεράσματα, το δείγμα πρέπει να είναι **αντιπροσωπευτικό** του πληθυσμού. Αυτό εξασφαλίζεται με **τυχαία δειγματοληψία**: κάθε άτομο του πληθυσμού έχει την **ίδια πιθανότητα** να επιλεγεί.

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Περιγραφική και επαγωγική Στατιστική

Η **Περιγραφική Στατιστική** οργανώνει και παρουσιάζει δεδομένα (πίνακες, διαγράμματα, μέτρα). Η **Επαγωγική Στατιστική** χρησιμοποιεί τα δεδομένα ενός δείγματος για να εξαγάγει συμπεράσματα (με κάποια βεβαιότητα) για ολόκληρο τον πληθυσμό. Σε αυτό το κεφάλαιο ασχολούμαστε κυρίως με την πρώτη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Αναγνώριση μεταβλητών

Σε μια έρευνα για τους μαθητές ενός ΕΠΑΛ καταγράφηκαν: (α) η ειδικότητα (β) ο αριθμός των απουσιών (γ) ο χρόνος μετακίνησης προς το σχολείο (δ) ο βαθμός στα Μαθηματικά (ε) ο αριθμός μητρώου. Να χαρακτηριστεί κάθε μεταβλητή.

ΛΥΣΗ

(α) Ποιοτική. (β) Ποσοτική διακριτή. (γ) Ποσοτική συνεχής. (δ) Ποσοτική — συνήθως τη θεωρούμε διακριτή, αν οι βαθμοί είναι ακέραιοι, ή συνεχή αν επιτρέπονται δεκαδικοί. (ε) Ποιοτική (ο αριθμός λειτουργεί απλώς ως «ετικέτα»).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Απογραφή ή δείγμα;

Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι προτιμότερη η δειγματοληψία; (α) Έλεγχος ποιότητας σε μια παρτίδα 10 000 κονσερβών. (β) Οι βαθμοί των 25 μαθητών ενός τμήματος. (γ) Η πρόθεση ψήφου των ψηφοφόρων μιας χώρας.

ΛΥΣΗ

(α) Δείγμα — ο έλεγχος καταστρέφει το προϊόν (πρέπει να ανοιχτεί). (β) Απογραφή — ο πληθυσμός είναι μικρός και τα δεδομένα διαθέσιμα. (γ) Δείγμα — η απογραφή θα ήταν πρακτικά αδύνατη (είναι, ουσιαστικά, οι ίδιες οι εκλογές!).

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Μη αντιπροσωπευτικό δείγμα

✗ «Για να μάθουμε πόσο αθλούνται οι μαθητές της πόλης, ρωτήσαμε 100 παιδιά στην είσοδο ενός γυμναστηρίου.»

✓ Το δείγμα είναι **μεροληπτικό**: όσοι βρίσκονται σε γυμναστήριο αθλούνται περισσότερο από τον μέσο μαθητή. Χρειαζόμαστε τυχαία επιλογή από όλους τους μαθητές της πόλης.

**ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;**

Η Στατιστική είναι παντού στην καθημερινή ζωή. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με πραγματικά δεδομένα και ασκήσεις για όλη την ύλη της Στατιστικής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 2.1 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Να χαρακτηρίσετε τις μεταβλητές: (α) μάρκα κινητού (β) αριθμός μηνυμάτων την ημέρα (γ) βάρος αποσκευής (δ) μέγεθος ρούχων S, M, L, XL.
●○○ → Λύση 2.1/1
- 2 Ένας δήμος θέλει να μάθει πόσα νοικοκυριά χρησιμοποιούν ανακύκλωση. Να περιγράψετε ποιος είναι ο πληθυσμός, ποια η μεταβλητή και πώς θα μπορούσε να γίνει τυχαία δειγματοληψία.
●○○ → Λύση 2.1/2
- 3 Μια εφημερίδα ζήτησε από τους αναγνώστες της να ψηφίσουν στην ιστοσελίδα της αν συμφωνούν με ένα νέο μέτρο. Ψήφισαν 5000 άτομα και το 80% διαφώνησε. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το 80% των πολιτών διαφωνεί;
●●○ → Λύση 2.1/3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Στατιστική

ΜΑΘΗΜΑ 2.2α

Παρουσίαση δεδομένων – Πίνακες
συχνοτήτων και διαγράμματα

Συχνότητες

Έστω ότι ρωτήσαμε 20 μαθητές πόσα αδέρφια έχουν και πήραμε τις απαντήσεις:

1, 2, 0, 1, 1, 3, 2, 1, 0, 2, 1, 4, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 1, 2

Τα «ακατέργαστα» δεδομένα δεν λένε πολλά. Τα οργανώνουμε σε **πίνακα συχνοτήτων**.

ΟΡΙΣΜΟΣ — Συχνότητες

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι διαφορετικές τιμές μιας μεταβλητής σε ένα δείγμα μεγέθους n .

- **Συχνότητα** ν_i της τιμής x_i είναι το πλήθος των φορών που εμφανίζεται. Ισχύει $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k = n$.
- **Σχετική συχνότητα** $f_i = \frac{\nu_i}{n}$. Ισχύει $0 \leq f_i \leq 1$ και $f_1 + \dots + f_k = 1$. Συχνά την εκφράζουμε ως ποσοστό: $f_i\% = 100f_i$.
- **Αθροιστική συχνότητα** $N_i = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_i$ (για ποσοτικές μεταβλητές, με τιμές σε αύξουσα σειρά): πόσες παρατηρήσεις είναι **μικρότερες ή ίσες** του x_i .
- **Σχετική αθροιστική συχνότητα** $F_i = f_1 + \dots + f_i = \frac{N_i}{n}$.

x_i (αδέρφια)	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0	3	0,15	15	3	15
1	8	0,40	40	11	55
2	6	0,30	30	17	85
3	2	0,10	10	19	95
4	1	0,05	5	20	100
Σύνολο	20	1	100		

Από τον πίνακα διαβάζουμε αμέσως, π.χ., ότι το 40% των μαθητών έχει ένα αδέρφι (f_2) και ότι 17 μαθητές έχουν το πολύ δύο αδέρφια (N_3).

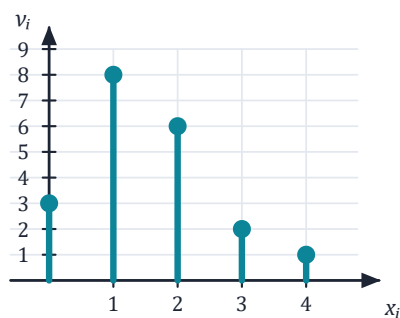
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Χρήσιμες σχέσεις

$\nu_i = N_i - N_{i-1}$ και $f_i = F_i - F_{i-1}$. Η τελευταία αθροιστική συχνότητα είναι πάντα $N_k = n$ και $F_k = 1$ (δηλαδή 100%).

Ραβδόγραμμα και διάγραμμα συχνότητων



Ραβδόγραμμα συχνότητων (ποιοτική μεταβλητή)



Διάγραμμα συχνότητων (ποσοτική διακριτή)

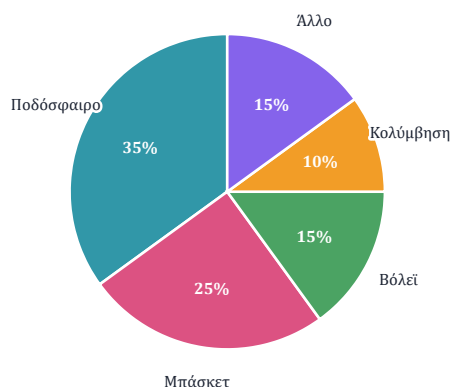
- Το **ραβδόγραμμα** χρησιμοποιείται κυρίως για **ποιοτικές** μεταβλητές: για κάθε κατηγορία σχεδιάζουμε μια ράβδο με ύψος ίσο με τη συχνότητα (ή τη σχετική συχνότητα). Οι ράβδοι έχουν **ίσο πλάτος** και **κενά** ανάμεσά τους.
- Το **διάγραμμα συχνότητων** χρησιμοποιείται για **ποσοτικές διακριτές** μεταβλητές: σε κάθε τιμή x_i υψώνουμε κάθετο τμήμα με μήκος ν_i . Αν ενώσουμε τις κορυφές, παίρνουμε το **πολύγωνο συχνότητων**.

Κυκλικό διάγραμμα

Στο **κυκλικό διάγραμμα** ένας κυκλικός δίσκος χωρίζεται σε τομείς, έναν για κάθε τιμή, με εμβαδά ανάλογα των συχνότητων. Η γωνία του τομέα της τιμής x_i είναι

$$\alpha_i = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 360^\circ = f_i \cdot 360^\circ.$$

Είναι ιδιαίτερα κατάλληλο για να φανεί **πώς μοιράζεται ένα «σύνολο»** σε μέρη (π.χ. ποσοστά ψήφων, κατανομή δαπανών).

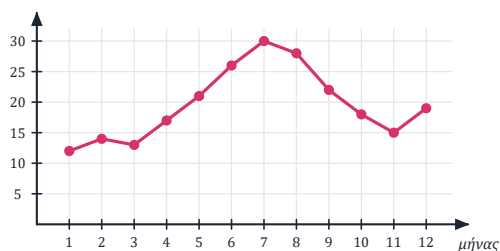


Κυκλικό διάγραμμα: αγαπημένο άθλημα 40 μαθητών

Σημειόγραμμα και χρονόγραμμα



Σημειόγραμμα



Χρονόγραμμα: πωλήσεις ανά μήνα (χιλ. €)

- Στο **σημειόγραμμα** (για λίγες παρατηρήσεις) κάθε παρατήρηση παριστάνεται με μια κουκκίδα πάνω από την τιμή της.
- Το **χρονόγραμμα** δείχνει πώς μεταβάλλεται ένα μέγεθος **με τον χρόνο**: στον οριζόντιο άξονα ο χρόνος, στον κατακόρυφο η τιμή, και ενώνουμε τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα. Από αυτό φαίνονται **τάσεις** (αύξηση, μείωση) και **εποχικότητα** (π.χ. υψηλές πωλήσεις το καλοκαίρι).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ολοκλήρωση πίνακα

Σε έναν πίνακα συχνοτήτων μιας μεταβλητής με τιμές 1, 2, 3, 4 δίνονται: $\nu = 50$, $\nu_1 = 8$, $F_2\% = 46\%$, $f_3 = 0,34$. Να συμπληρωθεί ο πίνακας.

ΛΥΣΗ

$f_1 = \frac{8}{50} = 0,16$. $F_2 = 0,46 \Rightarrow f_2 = 0,46 - 0,16 = 0,30$, άρα $\nu_2 = 0,30 \cdot 50 = 15$. $\nu_3 = 0,34 \cdot 50 = 17$. Τέλος $\nu_4 = 50 - 8 - 15 - 17 = 10$, $f_4 = 0,20$.

x_i	ν_i	f_i	N_i	$F_i\%$
1	8	0,16	8	16
2	15	0,30	23	46
3	17	0,34	40	80
4	10	0,20	50	100

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Γωνίες κυκλικού διαγράμματος

Σε δημοσκόπηση 400 ατόμων για τον τρόπο μετακίνησης στη δουλειά, 160 απάντησαν «αυτοκίνητο», 120 «συγκοινωνία», 80 «μηχανή» και οι υπόλοιποι «με τα πόδια». Να βρεθούν οι γωνίες του κυκλικού διαγράμματος.

ΛΥΣΗ

«Με τα πόδια»: $400 - 360 = 40$. Γωνίες $\alpha_i = \frac{\nu_i}{400} \cdot 360^\circ$: αυτοκίνητο 144° , συγκοινωνία 108° , μηχανή 72° , πόδια 36° . (Έλεγχος: $144 + 108 + 72 + 36 = 360$ ✓.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Από το διάγραμμα στα δεδομένα

Σε κυκλικό διάγραμμα που δείχνει τις ειδικότητες 240 μαθητών ενός ΕΠΑΛ, ο τομέας «Ηλεκτρολογία» έχει γωνία 75° . Πόσοι μαθητές φοιτούν στην ειδικότητα αυτή;

ΛΥΣΗ

$$f = \frac{75}{360} = \frac{5}{24}, \text{ άρα } n = \frac{5}{24} \cdot 240 = 50 \text{ μαθητές.}$$

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Αθροιστική συχνότητα σε ποιοτική μεταβλητή

✗ «Η αθροιστική συχνότητα της κατηγορίας “Μπάσκετ” είναι 24.»

✓ Οι αθροιστικές συχνότητες έχουν νόημα μόνο όταν οι τιμές μπορούν να **διαταχθούν** (ποσοτικές μεταβλητές). Δεν έχει νόημα να πούμε «πόσοι προτιμούν άθλημα μικρότερο ή ίσο του μπάσκετ».

💡 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πώς φτιάχνουμε σωστό πίνακα συχνότητων

1. Γράφουμε τις διαφορετικές τιμές (σε αύξουσα σειρά, αν είναι ποσοτικές).
2. Μετράμε τις συχνότητες ν_i και ελέγχουμε ότι αθροίζουν σε n .
3. Υπολογίζουμε $f_i = \nu_i/n$ και ελέγχουμε ότι αθροίζουν σε 1.
4. Υπολογίζουμε τις αθροιστικές N_i, F_i (η τελευταία πρέπει να είναι n και 100%).

**ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;**

Θέλεις να φτιάξεις διαγράμματα με υπολογιστή; Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με οδηγούς για υπολογιστικά φύλλα και επιπλέον ασκήσεις Στατιστικής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 2.2α · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Οι βαθμοί (0–5) 25 μαθητών σε ένα τεστ είναι: 3, 4, 2, 5, 3, 3, 1, 4, 4, 2, 3, 5, 3, 2, 4, 3, 0, 4, 3, 2, 5, 3, 4, 1, 3. Να κατασκευάσετε πίνακα συχνότητων με $\nu_i, f_i\%, N_i, F_i\%$.

→ Λύση 2.2α/1

- 2** Στο προηγούμενο τεστ, τι ποσοστό των μαθητών έγραψε τουλάχιστον 3; Πόσοι έγραψαν το πολύ 2;

→ Λύση 2.2α/2

- 3** Οι δαπάνες ενός νοικοκυριού τον μήνα είναι: διατροφή 450 €, στέγαση 300 €, μεταφορές 150 €, ψυχαγωγία 100 €, άλλα 200 €. Να βρείτε τις γωνίες του κυκλικού διαγράμματος.

→ Λύση 2.2α/3

- 4** Σε έναν πίνακα συχνοτήτων με τιμές $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ είναι $F_1\% = 10$, $F_2\% = 35$, $F_3\% = 80$ και $n_4 = 8$. Να βρείτε το μέγεθος του δείγματος και όλες τις συχνότητες.

→ Λύση 2.2α/4

- 5** Ένα χρονόγραμμα δείχνει τον αριθμό επισκεπτών ενός μουσείου ανά εξάμηνο για τρία χρόνια: 1200, 2400, 1300, 2600, 1500, 2900. Να περιγράψετε την τάση και την εποχικότητα που παρατηρείτε.

→ Λύση 2.2α/5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Στατιστική

ΜΑΘΗΜΑ 2.2β

Ομαδοποίηση – Ιστογράμματα –
Καμπύλες συχνότητας

◆ Γιατί ομαδοποιούμε

Όταν μια μεταβλητή είναι **συνεχής** (π.χ. ύψος) ή διακριτή με πάρα πολλές διαφορετικές τιμές, ένας πίνακας με κάθε τιμή ξεχωριστά θα ήταν τεράστιος και άχρηστος. Τότε χωρίζουμε το εύρος των τιμών σε διαστήματα, τις **κλάσεις**, και μετράμε πόσες παρατηρήσεις «πέφτουν» σε κάθε κλάση.

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Στοιχεία ομαδοποίησης

- **Κλάσεις:** διαδοχικά διαστήματα της μορφής $[\alpha, \beta)$ (κλειστά αριστερά, ανοικτά δεξιά), ώστε κάθε παρατήρηση να ανήκει σε **ακριβώς μία** κλάση.
- **Όρια κλάσης:** τα άκρα α, β . **Πλάτος κλάσης:** $c = \beta - \alpha$.
- **Κεντρική τιμή κλάσης:** το μέσο της, $x_i = \frac{\alpha + \beta}{2}$. τη χρησιμοποιούμε ως «αντιπρόσωπο» όλων των παρατηρήσεων της κλάσης.
- **Εύρος** των δεδομένων: $R = \text{μεγαλύτερη} - \text{μικρότερη παρατήρηση}$.

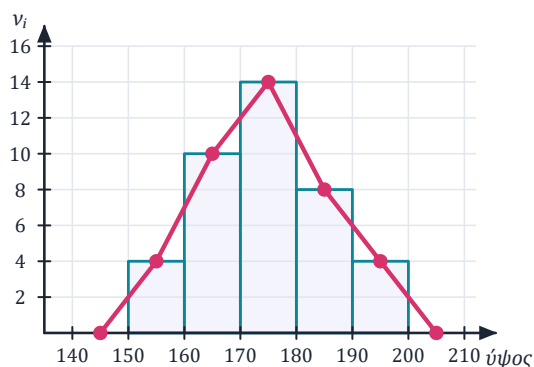
🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Πώς επιλέγουμε τις κλάσεις

1. Αποφασίζουμε το πλήθος κ των κλάσεων — συνήθως από 5 έως 15, ανάλογα με το μέγεθος του δείγματος. (Ένας πρακτικός κανόνας είναι ο **κανόνας του Sturges**: $\kappa \approx 1 + 3,3 \log n$.)
2. Βρίσκουμε το πλάτος: $c \approx \frac{R}{\kappa}$, **στρογγυλοποιημένο προς τα πάνω** σε «βολικό» αριθμό.
3. Ξεκινάμε από μια τιμή λίγο μικρότερη ή ίση με τη μικρότερη παρατήρηση και φτιάχνουμε κ **ισοπλάτεις** κλάσεις.

◆ Παράδειγμα: τα ύψη 40 μαθητών

Κλάση (cm)	Κεντρική τιμή x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[150, 160)	155	4	10	4	10
[160, 170)	165	10	25	14	35
[170, 180)	175	14	35	28	70
[180, 190)	185	8	20	36	90
[190, 200)	195	4	10	40	100
Σύνολο		40	100		

Ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων

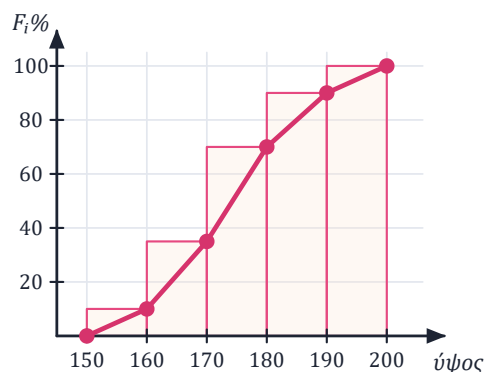


Ιστόγραμμα συχνοτήτων και πολύγωνο συχνοτήτων

- Στο **ιστόγραμμα** κάθε κλάση παριστάνεται με ένα **ορθογώνιο** που έχει βάση το πλάτος της κλάσης και ύψος τέτοιο ώστε το **εμβαδόν** του να είναι ανάλογο της συχνότητας. Για **ισοπλατείς** κλάσεις το ύψος είναι απλώς η συχνότητα ν_i (ή η f_i). Τα ορθογώνια είναι **κολλητά** (χωρίς κενά), γιατί η μεταβλητή είναι συνεχής.
- Αν ενώσουμε τα **μέσα των πάνω βάσεων** των ορθογωνίων και προσθέσουμε δύο «υποθετικές» κλάσεις συχνότητας 0 στα άκρα, παίρνουμε το **πολύγωνο συχνοτήτων**. Το εμβαδόν κάτω από αυτό ισούται με το εμβαδόν του ιστογράμματος.

Πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων

Σε ιστόγραμμα **αθροιστικών** (σχετικών) συχνοτήτων, ενώνουμε το **αριστερό άκρο** της πρώτης κλάσης (με τιμή 0) με τα **δεξιά άκρα** των πάνω πλευρών των ορθογωνίων. Η τεθλασμένη αυτή λέγεται **πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων** (ή ογκόγραμμα). Υποθέτοντας ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι **ομοιόμορφα** κατανομημένες, από αυτό μπορούμε να εκτιμήσουμε πόσες παρατηρήσεις είναι μικρότερες από **οποιαδήποτε** τιμή. Θα το χρησιμοποιήσουμε στο επόμενο μάθημα για να βρούμε τη διάμεσο.



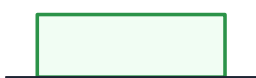
Πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων

Καμπύλες συχνοτήτων

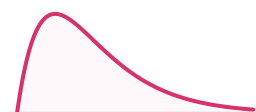
Αν το δείγμα είναι πολύ μεγάλο και οι κλάσεις πολύ στενές, το πολύγωνο συχνοτήτων «λειαίνεται» και γίνεται μια ομαλή καμπύλη, η **καμπύλη συχνοτήτων**. Οι πιο συνηθισμένες μορφές:



Κανονική (συμμετρική)



Ομοιόμορφη



Θετική ασυμμετρία



Αρνητική ασυμμετρία

- **Κανονική** (κωδωνοειδής, συμμετρική): οι περισσότερες τιμές συγκεντρώνονται γύρω από το κέντρο και λιγοστεύουν συμμετρικά προς τα άκρα (π.χ. ύψη ενηλίκων, σφάλματα μετρήσεων).

- **Ομοιόμορφη:** όλες οι τιμές ενός διαστήματος εμφανίζονται περίπου εξίσου συχνά.
- **Θετική ασυμμετρία** («ουρά» προς τα δεξιά): π.χ. τα εισοδήματα — οι περισσότεροι έχουν μέτριο εισόδημα και λίγοι πολύ υψηλό.
- **Αρνητική ασυμμετρία** («ουρά» προς τα αριστερά): π.χ. η ηλικία θανάτου σε μια χώρα με υψηλό προσδόκιμο ζωής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Κατασκευή κλάσεων

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν 30 μαθητές για να λύσουν ένα πρόβλημα κυμαίνονται από 12 έως 47 λεπτά. Να προταθούν 6 ισοπλατείς κλάσεις.

ΛΥΣΗ

$R = 47 - 12 = 35$, $\frac{R}{\kappa} = \frac{35}{6} \approx 5,83$. Στρογγυλοποιούμε προς τα πάνω: $c = 6$. Ξεκινώντας από το 12 : $[12, 18)$, $[18, 24)$, $[24, 30)$, $[30, 36)$, $[36, 42)$, $[42, 48)$. Η τελευταία κλάση περιέχει το 47 ✓. Κεντρικές τιμές: 15, 21, 27, 33, 39, 45.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Ανάγνωση ιστογράμματος

Από τον πίνακα των υψών (40 μαθητές) να βρεθούν: (α) το ποσοστό των μαθητών με ύψος τουλάχιστον 180 cm (β) πόσοι μαθητές έχουν ύψος από 165 έως 185 cm (κατά προσέγγιση).

ΛΥΣΗ

(α) $20\% + 10\% = 30\%$ (ή $100\% - F_3 = 100\% - 70\%$).

(β) Υποθέτουμε ομοιόμορφη κατανομή μέσα σε κάθε κλάση. Στο $[165, 170)$ βρίσκεται το μισό της κλάσης $[160, 170)$: 5 μαθητές. Στο $[170, 180)$ όλοι: 14. Στο $[180, 185)$ το μισό της κλάσης: 4. Σύνολο περίπου $5 + 14 + 4 = 23$ μαθητές.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

Η κεντρική τιμή και η «ομοιόμορφη κατανομή μέσα στην κλάση» είναι **προσεγγίσεις**. Όσα υπολογίζουμε από ομαδοποιημένα δεδομένα (μέση τιμή, διάμεσος κ.λπ.) είναι **εκτιμήσεις** των πραγματικών τιμών.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Κενά στο ιστόγραμμα

✗ Σχεδιάζουμε το ιστόγραμμα με κενά ανάμεσα στα ορθογώνια, όπως ένα ραβδόγραμμα.

✓ Στο ιστόγραμμα οι κλάσεις είναι **διαδοχικά** διαστήματα, άρα τα ορθογώνια είναι **κολλητά**. Κενά αφήνουμε μόνο στο ραβδόγραμμα (ποιοτικές ή διακριτές μεταβλητές).



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Η επιλογή κλάσεων και η ανάγνωση ιστογραμμάτων θέλουν εξάσκηση. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με διαδραστικά ιστογράμματα και ασκήσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 2.2β · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Τα βάρη (kg) 50 αθλητών είναι ομαδοποιημένα στις κλάσεις $[60, 66)$, $[66, 72)$, $[72, 78)$, $[78, 84)$, $[84, 90)$ με συχνότητες 5, 12, 18, 10, 5. Να βρείτε τις κεντρικές τιμές, τα $f_i\%$ και τα $F_i\%$.
●○○ → Λύση 2.2β/1
- 2** Στο προηγούμενο δείγμα, τι ποσοστό των αθλητών ζυγίζει λιγότερο από 72 kg; Πόσοι ζυγίζουν τουλάχιστον 78 kg;
●○○ → Λύση 2.2β/2
- 3** Οι παρατηρήσεις ενός δείγματος κυμαίνονται από 3,2 έως 9,7. Να προτείνετε ομαδοποίηση σε 5 ισοπλατείς κλάσεις.
●●○ → Λύση 2.2β/3
- 4** Στο δείγμα των αθλητών (άσκηση 1) να εκτιμήσετε πόσοι αθλητές ζυγίζουν από 69 έως 81 kg.
●●○ → Λύση 2.2β/4
- 5** Να εξηγήσετε τι είδους ασυμμετρία περιμένετε στις κατανομές: (α) του χρόνου αναμονής σε μια στάση λεωφορείου που περνά κάθε 15 λεπτά (β) των μισθών των εργαζομένων μιας μεγάλης εταιρείας (γ) του βαθμού σε ένα πολύ εύκολο διαγώνισμα.
●●● → Λύση 2.2β/5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Στατιστική

ΜΑΘΗΜΑ 2.3α

Μέτρα θέσης: μέση τιμή, διάμεσος, τεταρτημόρια, επικρατούσα τιμή

◆ Γιατί χρειαζόμαστε «μέτρα»

Οι πίνακες και τα διαγράμματα δίνουν μια εικόνα της κατανομής, αλλά συχνά θέλουμε να τη συνοψίσουμε με λίγους αριθμούς. Τα **μέτρα θέσης** (ή κεντρικής τάσης) δείχνουν **γύρω από ποια τιμή** «κάθονται» τα δεδομένα· τα **μέτρα διασποράς** (επόμενο μάθημα) δείχνουν **πόσο απλώνονται**.

◆ Μέση τιμή

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Μέση τιμή (αριθμητικός μέσος)

Η **μέση τιμή** $\bar{x}$ ενός συνόλου ν παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots, t_\nu$ είναι το άθροισμά τους διαιρεμένο με το πλήθος τους:

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_\nu}{\nu} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} t_i.$$

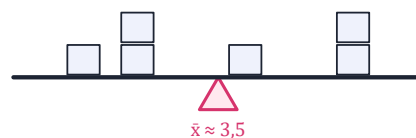
Αν τα δεδομένα δίνονται σε **πίνακα συχνοτήτων** με τιμές $x_1, \dots, x_\kappa$ και συχνότητες $\nu_1, \dots, \nu_\kappa$:

$$\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + \dots + x_\kappa\nu_\kappa}{\nu} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i.$$

Για **ομαδοποιημένα** δεδομένα χρησιμοποιούμε τον ίδιο τύπο, με x_i τις **κεντρικές τιμές** των κλάσεων (οπότε το αποτέλεσμα είναι προσέγγιση).

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Η «φυσική» σημασία

Αν τοποθετήσουμε ίσα βάρη πάνω σε μια ράβδο, στις θέσεις των παρατηρήσεων, η ράβδος **ισορροπεί** ακριβώς στη μέση τιμή. Ένα σημαντικό συμπέρασμα: το άθροισμα των αποκλίσεων από τη μέση τιμή είναι πάντα μηδέν, $\sum (t_i - \bar{x}) = 0$.



Η μέση τιμή είναι το «σημείο ισορροπίας»

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Σταθμικός μέσος

Όταν οι τιμές $x_1, \dots, x_\nu$ δεν έχουν όλες την ίδια «σημασία», τους αποδίδουμε **συντελεστές βαρύτητας** $w_1, \dots, w_\nu$ και υπολογίζουμε τον **σταθμικό μέσο**:

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + \dots + w_\nu}.$$

Διάμεσος

ΟΡΙΣΜΟΣ — Διάμεσος

Η **διάμεσος** δ ενός συνόλου ν παρατηρήσεων, **διατεταγμένων σε αύξουσα σειρά**, είναι:

- η **μεσαία** παρατήρηση, αν το ν είναι **περιττό** (η $\frac{\nu+1}{2}$ -οστή).
- ο **μέσος όρος των δύο μεσαίων** παρατηρήσεων, αν το ν είναι **άρτιο** (της $\frac{\nu}{2}$ -οστής και της $(\frac{\nu}{2} + 1)$ -οστής).

Η διάμεσος «κόβει» τα δεδομένα στη μέση: το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% μεγαλύτερες.

ΠΡΟΣΟΧΗ! — Πρώτα διάταξη!

Για τη διάμεσο, τα τεταρτημόρια και γενικά τα εκατοστημόρια, οι παρατηρήσεις πρέπει **πρώτα να διαταχθούν** κατά αύξουσα σειρά. Η «μεσαία» παρατήρηση των ατάκτων δεδομένων δεν σημαίνει τίποτα.

Εκατοστημόρια και τεταρτημόρια

Γενικεύοντας την ιδέα της διαμέσου, το **κ -οστό εκατοστημόριο** P_κ είναι η τιμή για την οποία το πολύ $\kappa\%$ των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ $(100 - \kappa)\%$ μεγαλύτερες. Ιδιαίτερα σημαντικά είναι τα **τεταρτημόρια**:

$$Q_1 = P_{25}, \quad Q_2 = P_{50} = \delta, \quad Q_3 = P_{75}.$$

ΚΛΕΙΔΙ — Πρακτικός υπολογισμός τεταρτημορίων (μη ομαδοποιημένα δεδομένα)

1. Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις και βρίσκουμε τη διάμεσο δ .
2. Q_1 = η διάμεσος των παρατηρήσεων που βρίσκονται **αριστερά** της δ .
3. Q_3 = η διάμεσος των παρατηρήσεων που βρίσκονται **δεξιά** της δ .

Επικρατούσα τιμή

ΟΡΙΣΜΟΣ — Επικρατούσα τιμή (κορυφή)

Επικρατούσα τιμή M_0 είναι η παρατήρηση με τη **μεγαλύτερη συχνότητα**. Μπορεί να υπάρχουν δύο (κατανομή **δικόρυφη**) ή περισσότερες, ή και καμία (αν όλες οι τιμές εμφανίζονται μία φορά). Είναι το **μόνο** μέτρο θέσης που ορίζεται και για **ποιοτικές** μεταβλητές.

Μέτρα θέσης σε ομαδοποιημένα δεδομένα

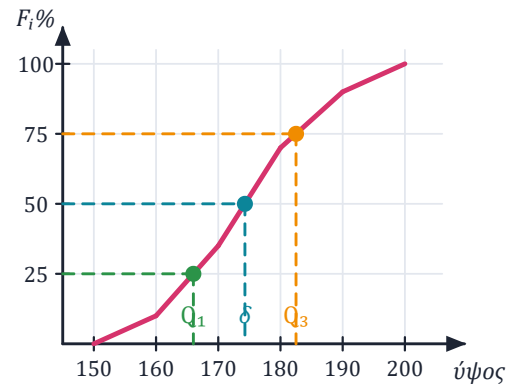
Για τα **ομαδοποιημένα** δεδομένα (π.χ. τα ύψη των 40 μαθητών του μαθήματος 2.2β):

- **Μέση τιμή**: με τις κεντρικές τιμές.
- **Διάμεσος και τεταρτημόρια**: από το **πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων**: στον κατακόρυφο άξονα βρίσκουμε το 50% (ή 25%, 75%), φέρνουμε οριζόντια μέχρι το πολύγωνο και μετά κατακόρυφα προς τον άξονα x' . Αριθμητικά, με **γραμμική παρεμβολή** μέσα στην κλάση: αν η κλάση

$[L, L + c)$ περιέχει το ποσοστό $p\%$, και $F_{\pi\rho\upsilon\nu}$, $F_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}}$ είναι οι σχετικές αθροιστικές συχνότητες στα άκρα της,

$$P_p \approx L + \frac{p - F_{\pi\rho\upsilon\nu}}{F_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} - F_{\pi\rho\upsilon\nu}} \cdot c.$$

- **Επικρατούσα τιμή:** βρίσκουμε την **επικρατούσα κλάση** (με τη μεγαλύτερη συχνότητα) και, γεωμετρικά, την τετμημένη της τομής των τμημάτων που ενώνουν «σταυρωτά» τις κορυφές του ορθογωνίου της με τις κορυφές των γειτονικών (βλ. Παράδειγμα 4).



Διάμεσος και τεταρτημόρια από το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων

ΣΥΝΟΨΗ — Ποιο μέτρο θέσης να χρησιμοποιήσω;

Μέτρο	Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Μέση τιμή $\bar{x}$	χρησιμοποιεί όλες τις τιμές, εύκολη στην άλγεβρα	επηρεάζεται πολύ από ακραίες τιμές
Διάμεσος δ	δεν επηρεάζεται από ακραίες τιμές	αγνοεί το μέγεθος των τιμών
Επικρατούσα M_0	ορίζεται και για ποιοτικά δεδομένα	μπορεί να μην υπάρχει ή να μην είναι μοναδική

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Μέση τιμή και διάμεσος

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε 8 διαγωνίσματα είναι: 12, 15, 9, 18, 14, 16, 11, 17. Να βρεθούν η μέση τιμή και η διάμεσος.

ΛΥΣΗ

$$\bar{x} = \frac{12 + 15 + 9 + 18 + 14 + 16 + 11 + 17}{8} = \frac{112}{8} = 14.$$

Διάταξη: 9, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18. Το $n = 8$ είναι άρτιο, άρα η διάμεσος είναι ο μέσος όρος της 4ης και της 5ης: $\delta = \frac{14 + 15}{2} = 14,5$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Από πίνακα συχνοτήτων

Για τον πίνακα των αδελφών (μάθημα 2.2α: τιμές 0, 1, 2, 3, 4 με συχνότητες 3, 8, 6, 2, 1) να βρεθούν $\bar{x}$, δ και M_0 .

ΛΥΣΗ

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{20} = \frac{30}{20} = 1,5.$$

$\nu = 20$: η διάμεσος είναι ο μέσος όρος της 10ης και 11ης παρατήρησης. Από τις αθροιστικές συχνότητες ($N_1 = 3$, $N_2 = 11$), οι παρατηρήσεις από την 4η έως την 11η είναι ίσες με 1. Άρα $\delta = \frac{1+1}{2} = 1$. Επικρατούσα τιμή $M_0 = 1$ (συχνότητα 8).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Τεταρτημόρια

Να βρεθούν τα τεταρτημόρια των παρατηρήσεων: 8, 3, 12, 5, 9, 20, 6, 8, 13, 5, 10, 15, 7, 11, 8.

ΛΥΣΗ

Διάταξη ($\nu = 15$): 3, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 20.

Διάμεσος: η 8η παρατήρηση, $\delta = 8$. Αριστερά της: 3, 5, 5, 6, 7, 8, 8 $\rightarrow Q_1 = 6$. Δεξιά της: 9, 10, 11, 12, 13, 15, 20 $\rightarrow Q_3 = 12$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Ομαδοποιημένα δεδομένα: όλα τα μέτρα θέσης

Για τα ύψη των 40 μαθητών (κλάσεις $[150, 160)$, ..., $[190, 200)$ με συχνότητες 4, 10, 14, 8, 4) να εκτιμηθούν η μέση τιμή, η διάμεσος, τα Q_1 , Q_3 και η επικρατούσα τιμή.

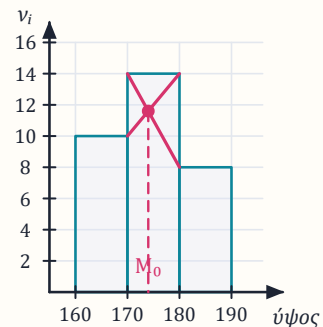
ΛΥΣΗ

$$\begin{array}{c} \text{Μέση} \\ \hline \frac{155 \cdot 4 + 165 \cdot 10 + 175 \cdot 14 + 185 \cdot 8 + 195 \cdot 4}{40} = \frac{6980}{40} = 174,5 \text{ cm.} \end{array} \quad \bar{x} =$$

Διάμεσος: το 50% βρίσκεται στην κλάση $[170, 180)$, όπου F από 35% πάει στο 70%: $\delta \approx 170 + \frac{50 - 35}{70 - 35} \cdot 10 \approx 174,3 \text{ cm.}$

$$\begin{array}{c} \text{Τεταρτημόρια:} \\ Q_1 \approx 160 + \frac{25 - 10}{35 - 10} \cdot 10 = 166 \text{ cm,} \quad Q_3 \approx 180 + \frac{75 - 70}{90 - 70} \cdot 10 = 182,5 \text{ cm.} \end{array}$$

Επικρατούσα τιμή: επικρατούσα κλάση η $[170, 180)$. Η τομή των τμημάτων του σχήματος δίνει $M_0 \approx 170 + 10 \cdot \frac{14 - 10}{(14 - 10) + (14 - 8)} = 174 \text{ cm.}$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5** Ακραίες τιμές

Οι μηνιαίοι μισθοί 5 υπαλλήλων μιας μικρής εταιρείας είναι 900, 950, 1000, 1050 € και ο μισθός του διευθυντή 6000 €. Ποιο μέτρο θέσης περιγράφει καλύτερα τον «τυπικό» μισθό;

ΛΥΣΗ

$\bar{x} = \frac{9900}{5} = 1980$ €, ενώ $\delta = 1000$ €. Η μέση τιμή «τραβιέται» προς τα πάνω από τον έναν πολύ υψηλό μισθό και δεν αντιπροσωπεύει κανέναν από τους υπαλλήλους. Η **διάμεσος** δίνει πολύ καλύτερη εικόνα. Γι' αυτό, π.χ., στις στατιστικές για εισοδήματα αναφέρεται συχνά ο διάμεσος μισθός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Σταθμικός μέσος

Στο απολυτήριο ενός μαθητή, τα μαθήματα ειδικότητας μετρούν με συντελεστή 2 και τα γενικής παιδείας με συντελεστή 1. Ο μαθητής έχει μέσο όρο 16 σε 4 μαθήματα ειδικότητας και 13 σε 6 μαθήματα γενικής παιδείας. Ποιος είναι ο σταθμικός μέσος του;

ΛΥΣΗ

Συνολικό «βάρος» μαθημάτων ειδικότητας $4 \cdot 2 = 8$, γενικής $6 \cdot 1 = 6$. $\bar{x} = \frac{16 \cdot 8 + 13 \cdot 6}{8 + 6} = \frac{128 + 78}{14} = \frac{206}{14} \approx 14,71$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Διάμεσος χωρίς διάταξη

Για τα 7, 2, 9, 4, 5 ο μαθητής γράφει ✗ $\delta = 9$ (η μεσαία στη σειρά που δόθηκαν).

✓ Διάταξη: 2, 4, 5, 7, 9, άρα $\delta = 5$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Μέση τιμή από πίνακα χωρίς συχνότητες

Για τον πίνακα των αδελφών ο μαθητής γράφει ✗ $\bar{x} = \frac{0+1+2+3+4}{5} = 2$.

✓ Κάθε τιμή πρέπει να πολλαπλασιαστεί με τη **συχνότητά** της και να διαιρέσουμε με το **μέγεθος του δείγματος** $n = 20$: $\bar{x} = 1,5$.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Τα μέτρα θέσης είναι σίγουρο θέμα σε κάθε διαγώνισμα Στατιστικής. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με αναλυτικά λυμένα θέματα και ασκήσεις με ομαδοποιημένα δεδομένα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 2.3α · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων: 6, 9, 4, 6, 10, 7, 6, 8, 3.

→ Λύση 2.3α/1

- 2** Οι πωλήσεις ενός καταστήματος σε 6 ημέρες ήταν 120, 95, 140, 110, 135, 100 €. Να βρείτε τη μέση ημερήσια πώληση και τη διάμεσο.

→ Λύση 2.3α/2

- 3** Η μέση τιμή 5 αριθμών είναι 12. Αν προσθέσουμε έναν ακόμη αριθμό, η μέση τιμή γίνεται 13. Ποιος είναι ο αριθμός;

→ Λύση 2.3α/3

- 4** Για τον πίνακα του τεστ (0–5) της άσκησης 1 του μαθήματος 2.2α (συχνότητες 1, 2, 4, 9, 6, 3, $\nu = 25$), να βρείτε $\bar{x}$, δ και M_0 .

→ Λύση 2.3α/4

- 5** Να βρείτε τα τεταρτημόρια των: 21, 15, 30, 18, 25, 12, 27, 19, 23, 16, 28.

→ Λύση 2.3α/5

- 6** Για τα βάρη των 50 αθλητών (κλάσεις $[60, 66), \dots, [84, 90)$, συχνότητες 5, 12, 18, 10, 5) να εκτιμήσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

→ Λύση 2.3α/6

- 7** Σε ένα τμήμα 20 μαθητών η μέση βαθμολογία των αγοριών είναι 13,5 και των κοριτσιών 15. Αν η μέση βαθμολογία όλου του τμήματος είναι 14,4, πόσα είναι τα αγόρια;

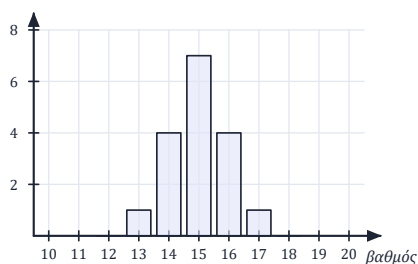
→ Λύση 2.3α/7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Στατιστική

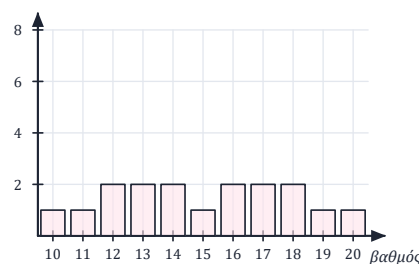
ΜΑΘΗΜΑ 2.3β

Μέτρα διασποράς – Κανονική κατανομή – Συντελεστής μεταβολής

♦ Η ανάγκη για μέτρα διασποράς



Τμήμα Α: συγκεντρωμένοι βαθμοί



Τμήμα Β: απλωμένοι βαθμοί

Τα δύο τμήματα του σχήματος έχουν την **ίδια** μέση τιμή (15) και την **ίδια** διάμεσο, αλλά οι κατανομές τους είναι εντελώς διαφορετικές: στο Α οι βαθμοί είναι «μαζεμένοι» γύρω από το 15, στο Β είναι «απλωμένοι». Τα μέτρα θέσης δεν αρκούν· χρειαζόμαστε μέτρα που να δείχνουν **πόσο μεταβάλλονται** τα δεδομένα.

♦ Εύρος και ενδοτεταρτημοριακό εύρος

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Εύρος – Ενδοτεταρτημοριακό εύρος

- **Εύρος:** $R = \text{μεγαλύτερη παρατήρηση} - \text{μικρότερη παρατήρηση}$.
- **Ενδοτεταρτημοριακό εύρος:** $Q = Q_3 - Q_1$. Σε αυτό το διάστημα βρίσκεται το **μεσαίο 50%** των παρατηρήσεων.

Το εύρος υπολογίζεται εύκολα, αλλά εξαρτάται **μόνο** από τις δύο ακραίες τιμές· μία μόνο «παράξενη» τιμή μπορεί να το αυξήσει πολύ. Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος δεν επηρεάζεται από ακραίες τιμές.

♦ Διακύμανση και τυπική απόκλιση

Το πιο σημαντικό μέτρο διασποράς βασίζεται στις **αποκλίσεις** $t_i - \bar{x}$ των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή. Επειδή αυτές αθροίζουν σε μηδέν (οι θετικές «εξουδετερώνουν» τις αρνητικές), παίρνουμε τα **τετράγωνα** τους.

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Διακύμανση – Τυπική απόκλιση

Η **διακύμανση** (ή διασπορά) s^2 ενός συνόλου n παρατηρήσεων είναι ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων από τη μέση τιμή:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{x})^2.$$

Η **τυπική απόκλιση** είναι η θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης: $s = \sqrt{s^2}$.

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Ισοδύναμοι τύποι για τη διακύμανση

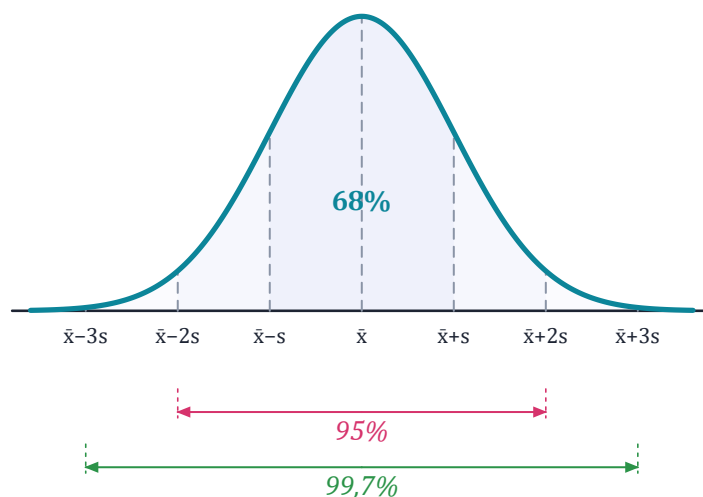
$$s^2 = \frac{1}{\nu} \left[\sum t_i^2 - \frac{(\sum t_i)^2}{\nu} \right] \quad (\text{χωρίς να βρούμε πρώτα αποκλίσεις})$$

Για **πίνακα συχνοτήτων** (ή ομαδοποιημένα δεδομένα, με κεντρικές τιμές):

$$s^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \nu_i = \frac{1}{\nu} \left[\sum x_i^2 \nu_i - \frac{(\sum x_i \nu_i)^2}{\nu} \right].$$

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Γιατί προτιμάμε την τυπική απόκλιση

Η διακύμανση έχει μονάδες **στο τετράγωνο** (π.χ. cm^2 , €^2), που δεν έχουν φυσικό νόημα. Η τυπική απόκλιση s μετριέται στις **ίδιες μονάδες** με τα δεδομένα και ερμηνεύεται εύκολα: είναι, χονδρικά, «πόσο απέχει τυπικά μια παρατήρηση από τη μέση τιμή».

📌 Η κανονική κατανομή

Κανονική κατανομή: ο κανόνας 68 – 95 – 99,7

Αν η καμπύλη συχνοτήτων είναι **κανονική** (ή περίπου κανονική), η τυπική απόκλιση έχει έναν πολύ συγκεκριμένο νόημα:

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Ο εμπειρικός κανόνας

Σε μια κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s :

- περίπου το 68% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$.
- περίπου το 95% στο $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$.
- περίπου το 99,7% στο $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$.

Επίσης, λόγω συμμετρίας, η μέση τιμή, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή **συμπίπτουν**, και το εύρος είναι περίπου $R \approx 6s$.

Συντελεστής μεταβολής

Πώς συγκρίνουμε τη διασπορά δύο δειγμάτων με **διαφορετικές μονάδες** ή **πολύ διαφορετικές μέσες τιμές**; Μια τυπική απόκλιση 6 kg είναι μεγάλη για βάρη νεογνών αλλά μικρή για βάρη ενηλίκων. Χρειαζόμαστε ένα **σχετικό** μέτρο.

ΟΡΙΣΜΟΣ — Συντελεστής μεταβολής

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \quad (\bar{x} > 0),$$

συνήθως εκφρασμένος ως ποσοστό. Είναι **καθαρός αριθμός** (χωρίς μονάδες). Δεχόμαστε ότι ένα δείγμα είναι **ομοιογενές** αν $CV \leq 10\%$.

Πώς αλλάζουν τα μέτρα με έναν μετασχηματισμό

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Γραμμικός μετασχηματισμός δεδομένων

Αν σε κάθε παρατήρηση x_i αντιστοιχίσουμε την $y_i = \alpha x_i + \beta$, τότε

$$\bar{y} = \alpha \bar{x} + \beta, \quad s_y = |\alpha| s_x, \quad \delta_y = \alpha \delta_x + \beta \quad (\text{για } \alpha > 0).$$

Ειδικότερα: αν **προσθέσουμε** την ίδια σταθερά σε όλες τις τιμές, η μέση τιμή μετακινείται αλλά η **τυπική απόκλιση δεν αλλάζει**. αν **πολλαπλασιάσουμε** με α , και η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση πολλαπλασιάζονται (η s με $|\alpha|$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Υπολογισμός διακύμανσης

Να βρεθούν το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων 4, 6, 7, 9, 14.

ΛΥΣΗ

$$R = 14 - 4 = 10. \quad \bar{x} = \frac{40}{5} = 8.$$

t_i	4	6	7	9	14	Σύνολο
$t_i - \bar{x}$	-4	-2	-1	1	6	0
$(t_i - \bar{x})^2$	16	4	1	1	36	58

$$s^2 = \frac{58}{5} = 11,6 \text{ και } s = \sqrt{11,6} \approx 3,41.$$

Έλεγχος με τον δεύτερο τύπο: $\sum t_i^2 = 16 + 36 + 49 + 81 + 196 = 378$, $\frac{(\sum t_i)^2}{n} = \frac{1600}{5} = 320$, άρα $s^2 = \frac{378-320}{5} = 11,6 \checkmark$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Ομαδοποιημένα δεδομένα

Για τα ύψη των 40 μαθητών ($\bar{x} = 174,5$) να βρεθούν η τυπική απόκλιση και ο συντελεστής μεταβολής. Είναι το δείγμα ομοιογενές;

ΛΥΣΗ

x_i	155	165	175	185	195
ν_i	4	10	14	8	4
$x_i - \bar{x}$	-19,5	-9,5	0,5	10,5	20,5
$(x_i - \bar{x})^2 \nu_i$	1521	902,5	3,5	882	1681

Άθροισμα 4990, άρα $s^2 = \frac{4990}{40} = 124,75$ και $s \approx 11,17$ cm. $CV = \frac{11,17}{174,5} \approx 6,4\% \leq 10\%$: το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Κανονική κατανομή

Τα βάρη των αθλητών μιας ομάδας ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή με $\bar{x} = 70$ kg και $s = 8$ kg.
 (α) Σε ποιο διάστημα βρίσκεται περίπου το 95% των βαρών; (β) Τι ποσοστό ζυγίζει πάνω από 78 kg;
 (γ) Τι ποσοστό ζυγίζει από 54 έως 78 kg;

ΛΥΣΗ

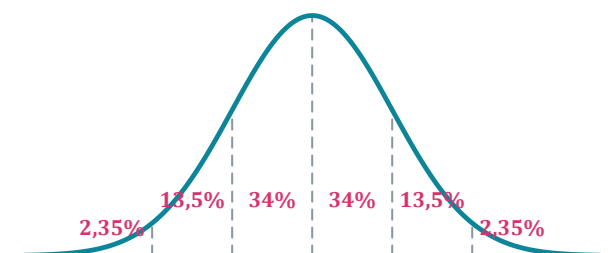
(α) $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) = (54, 86)$ kg.

(β) Στο (62, 78) βρίσκεται το 68%, άρα έξω από αυτό το 32%, μοιρασμένο συμμετρικά: πάνω από 78 kg περίπου το 16%.

(γ) Από 54 ($\bar{x} - 2s$) έως 70: το μισό του 95%, δηλαδή 47,5%. Από 70 έως 78 ($\bar{x} + s$): το μισό του 68%, δηλαδή 34%. Σύνολο περίπου 81,5%.

🔍 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πώς δουλεύουμε με τον κανόνα 68–95–99,7

Σχεδιάζουμε **πάντα** την καμπύλη με τα σημεία $\bar{x} \pm s$, $\bar{x} \pm 2s$, $\bar{x} \pm 3s$ και σημειώνουμε τα ποσοστά **ανά «λωρίδα»**: 34%, 13,5%, 2,35% (και 0,15% στις ουρές) σε κάθε μισό. Μετά απλώς προσθέτουμε τις λωρίδες που ζητούνται.



Τα ποσοστά ανά «λωρίδα» της κανονικής κατανομής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Συντελεστής μεταβολής

Οι μηνιαίοι μισθοί σε δύο εταιρείες έχουν: εταιρεία Α: $\bar{x}_A = 2000$ €, $s_A = 360$ €, εταιρεία Β: $\bar{x}_B = 1200$ €, $s_B = 300$ €. Σε ποια εταιρεία οι μισθοί είναι πιο ομοιογενείς;

ΛΥΣΗ

$CV_A = \frac{360}{2000} = 18\%$, $CV_B = \frac{300}{1200} = 25\%$. Παρόλο που η **τυπική απόκλιση** είναι μεγαλύτερη στην Α, η **σχετική** διασπορά είναι μικρότερη: οι μισθοί της Α είναι πιο ομοιογενείς (καμία πάντως δεν είναι ομοιογενής με το κριτήριο του 10%).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Μετασχηματισμός

Οι θερμοκρασίες μιας πόλης τον Μάιο είχαν μέση τιμή 20°C και τυπική απόκλιση 3°C . Ποια είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση σε βαθμούς Φαρενάιτ ($F = 1,8C + 32$); Αλλάζει ο συντελεστής μεταβολής;

ΛΥΣΗ

$\bar{F} = 1,8 \cdot 20 + 32 = 68^\circ\text{F}$, $s_F = 1,8 \cdot 3 = 5,4^\circ\text{F}$. $CV_C = \frac{3}{20} = 15\%$, ενώ $CV_F = \frac{5,4}{68} \approx 7,9\%$: ο CV **αλλάζει** όταν προσθέτουμε σταθερά — δεν είναι αξιόπιστος για κλίμακες με «αυθαίρετο» μηδέν, όπως οι θερμοκρασίες.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Διακύμανση χωρίς τετράγωνα

✗ «Η μέση απόκλιση από τη μέση τιμή είναι $\frac{1}{n} \sum (t_i - \bar{x})$, άρα η διασπορά είναι μηδέν.»

✓ Το $\sum (t_i - \bar{x})$ είναι **πάντα** 0. Γι' αυτό η διακύμανση χρησιμοποιεί τα **τετράγωνα** των αποκλίσεων.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Ξεχνάμε τη ρίζα

✗ « $s^2 = 11,6$, άρα η τυπική απόκλιση είναι 11,6.»

✓ Η τυπική απόκλιση είναι η **ρίζα** της διακύμανσης: $s = \sqrt{11,6} \approx 3,41$. Ελέγχε πάντα αν μια απάντηση «έχει νόημα»: μια τυπική απόκλιση μεγαλύτερη από το εύρος (10) είναι αδύνατη!



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Η διακύμανση και η κανονική κατανομή είναι η «καρδιά» της Στατιστικής. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με λυμένα θέματα εξετάσεων πάνω σε αυτά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 2.3β · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να βρείτε το εύρος, τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση των: 2, 5, 6, 8, 9.

●○○

→ Λύση 2.3β/1

2 Ένα δείγμα έχει $\bar{x} = 50$ και $s = 4$. Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής και να κρίνετε αν είναι ομοιογενές.

●○○

→ Λύση 2.3β/2

- 3** Για τον πίνακα των αδελφών (0, 1, 2, 3, 4 με συχνότητες 3, 8, 6, 2, 1, $\bar{x} = 1,5$) να βρείτε την τυπική απόκλιση.
→ Λύση 2.3β/3
- 4** Οι χρόνοι αντίδρασης οδηγών ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή με $\bar{x} = 0,8$ s και $s = 0,1$ s. Τι ποσοστό οδηγών έχει χρόνο αντίδρασης μεγαλύτερο από 1 s; Μεταξύ 0,7 και 1 s;
→ Λύση 2.3β/4
- 5** Σε κάθε βαθμό ενός διαγωνίσματος ο καθηγητής προσθέτει 2 μονάδες «μπόνους». Πριν το μπόνους ήταν $\bar{x} = 11$ και $s = 3$. Ποια είναι η νέα μέση τιμή, η νέα τυπική απόκλιση και ο νέος CV;
→ Λύση 2.3β/5
- 6** Ένα δείγμα 10 παρατηρήσεων έχει $\sum t_i = 120$ και $\sum t_i^2 = 1530$. Να βρείτε $\bar{x}$, s και CV .
→ Λύση 2.3β/6
- 7** Σε μια κανονική κατανομή το 16% των τιμών είναι μικρότερες από 40 και το 2,5% μεγαλύτερες από 70. Να βρείτε τα $\bar{x}$ και s .
→ Λύση 2.3β/7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Στατιστική

ΜΑΘΗΜΑ 2.4

Γραμμική παλινδρόμηση

♦ Δύο μεταβλητές μαζί

Μέχρι τώρα μελετούσαμε **μία** μεταβλητή. Συχνά όμως μας ενδιαφέρει η **σχέση** δύο μεταβλητών: επηρεάζουν οι ώρες μελέτης τον βαθμό; Οι δαπάνες διαφήμισης τις πωλήσεις; Η θερμοκρασία την κατανάλωση ρεύματος; Παίρνουμε τότε **ζεύγη** παρατηρήσεων (x_i, y_i) .

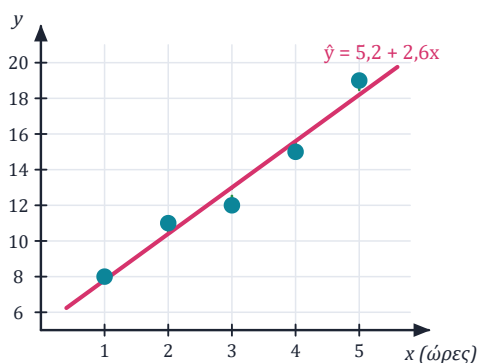
📖 **ΟΡΙΣΜΟΣ** — Ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή – Διάγραμμα διασποράς

- Η μεταβλητή X που «εξηγεί» λέγεται **ανεξάρτητη** (ή επεξηγηματική) και η Y που «εξηγείται» **εξαρτημένη**.
- Αν σε σύστημα αξόνων σχεδιάσουμε τα σημεία (x_i, y_i) , παίρνουμε το **διάγραμμα διασποράς**, από το οποίο φαίνεται με μια ματιά αν υπάρχει σχέση και τι μορφή έχει.

♦ Η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων

Αν τα σημεία του διαγράμματος διασποράς βρίσκονται περίπου πάνω σε μια ευθεία, λέμε ότι υπάρχει **γραμμική σχέση** και αναζητούμε την ευθεία $\hat{y} = \alpha + \beta x$ που «ταιριάζει» καλύτερα στα δεδομένα. Μια πρώτη λύση είναι να τη χαράξουμε «με το μάτι» (**ελεύθερο σχέδιο**), αλλά έτσι κάθε άτομο θα έβρισκε διαφορετική ευθεία. Χρειαζόμαστε ένα αντικειμενικό κριτήριο.

Για κάθε σημείο, η **κατακόρυφη απόκλιση** (ή **σφάλμα**, **κατάλοιπο**) είναι $e_i = y_i - \hat{y}_i$, η διαφορά της πραγματικής τιμής από την τιμή που «προβλέπει» η ευθεία.



Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων και κατακόρυφες αποκλίσεις

📖 **ΟΡΙΣΜΟΣ** — Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων

Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων (ή ευθεία παλινδρόμησης της Y πάνω στη X) λέγεται η ευθεία $\hat{y} = \alpha + \beta x$ για την οποία το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποκλίσεων $\sum e_i^2 = \sum (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$ γίνεται **ελάχιστο**.

🔑 **ΚΛΕΙΔΙ** — Οι συντελεστές της ευθείας

$$\hat{\beta} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\nu \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\nu \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}.$$

❶ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Τι σημαίνουν οι συντελεστές

- Η ευθεία διέρχεται **πάντα** από το σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$ (το «κέντρο βάρους» των δεδομένων).
- Ο **συντελεστής διεύθυνσης** $\hat{\beta}$ δείχνει πόσο μεταβάλλεται κατά μέσο όρο η Y όταν η X αυξάνεται κατά **μία μονάδα**. Αν $\hat{\beta} > 0$ η σχέση είναι αύξουσα, αν $\hat{\beta} < 0$ φθίνουσα.
- Το $\hat{\alpha}$ είναι η τιμή της ευθείας για $x = 0$ (έχει πρακτικό νόημα μόνο αν το 0 είναι «λογική» τιμή της X).

♦ Πρόβλεψη

Η ευθεία παλινδρόμησης χρησιμοποιείται για **πρόβλεψη**: για μια νέα τιμή x υπολογίζουμε $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Προσοχή στην παρεκβολή!

Οι προβλέψεις είναι αξιόπιστες μόνο για τιμές της X **μέσα** στο διάστημα των δεδομένων (ή πολύ κοντά σε αυτό). Αν π.χ. μελετήσαμε το ύψος παιδιών από 2 έως 10 ετών, η ευθεία **δεν** μπορεί να προβλέψει το ύψος στα 40 — θα έδινε κάποιον γίγαντα!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ώρες μελέτης και βαθμός

Πέντε μαθητές δήλωσαν τις ώρες μελέτης x για ένα διαγώνισμα και πήραν βαθμούς y :

x_i	1	2	3	4	5
y_i	8	11	12	15	19

Να βρεθεί η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων και να προβλεφθεί ο βαθμός ενός μαθητή που μελέτησε 3,5 ώρες.

ΛΥΣΗ

$$\bar{x} = 3, \bar{y} = \frac{65}{5} = 13.$$

$x_i - \bar{x}$	-2	-1	0	1	2	Σύνολο
$y_i - \bar{y}$	-5	-2	-1	2	6	
$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	10	2	0	2	12	26
$(x_i - \bar{x})^2$	4	1	0	1	4	10

$\hat{\beta} = \frac{26}{10} = 2,6$ και $\hat{\alpha} = 13 - 2,6 \cdot 3 = 5,2$. Η ευθεία είναι $\hat{y} = 5,2 + 2,6x$: κάθε επιπλέον ώρα μελέτης «προσθέτει» κατά μέσο όρο 2,6 μονάδες.

Πρόβλεψη: $\hat{y}(3,5) = 5,2 + 9,1 = 14,3$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Με τον «υπολογιστικό» τύπο

Να επαληθευτεί το $\hat{\beta}$ του προηγούμενου παραδείγματος με τον τύπο που χρησιμοποιεί αθροίσματα.

ΛΥΣΗ

$\sum x_i = 15, \sum y_i = 65, \sum x_i y_i = 8 + 22 + 36 + 60 + 95 = 221, \sum x_i^2 = 55$. Τότε

$$\hat{\beta} = \frac{5 \cdot 221 - 15 \cdot 65}{5 \cdot 55 - 15^2} = \frac{1105 - 975}{275 - 225} = \frac{130}{50} = 2,6 [v].$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Διαφήμιση και πωλήσεις

Μια επιχείρηση κατέγραψε τις μηνιαίες δαπάνες διαφήμισης x (χιλ. €) και τις πωλήσεις y (χιλ. €):

x_i	2	3	5	6	8	9
y_i	20	24	30	33	40	45

Αν $\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 129$ και $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 37,5$, να βρεθεί η ευθεία παλινδρόμησης και η πρόβλεψη των πωλήσεων για δαπάνη 7 χιλ. €.

ΛΥΣΗ

$\bar{x} = \frac{33}{6} = 5,5, \bar{y} = \frac{192}{6} = 32. \hat{\beta} = \frac{129}{37,5} = 3,44, \hat{\alpha} = 32 - 3,44 \cdot 5,5 = 13,08$. Ευθεία: $\hat{y} = 13,08 + 3,44x$. Για $x = 7$: $\hat{y} = 13,08 + 24,08 = 37,16$ χιλ. €.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Λάθος σειρά μεταβλητών

✗ «Θα προβλέψουμε τις ώρες μελέτης από τον βαθμό με την ίδια ευθεία λύνοντας ως προς x .»

✓ Η ευθεία της Y πάνω στη X ελαχιστοποιεί τις **κατακόρυφες** αποκλίσεις και φτιάχνεται για να προβλέπει τη Y από τη X . Για το αντίστροφο υπολογίζεται **άλλη** ευθεία (της X πάνω στην Y), που γενικά διαφέρει.

🔗 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Βήματα για την ευθεία παλινδρόμησης

1. Διάγραμμα διασποράς: έχει νόημα γραμμική σχέση;
2. Υπολογίζω $\bar{x}, \bar{y}$.
3. Φτιάχνω πίνακα με $x_i - \bar{x}, y_i - \bar{y}$, γινόμενα και τετράγωνα (ή με $x_i y_i$ και x_i^2).
4. $\hat{\beta}$ πρώτα, μετά $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}$.
5. Ερμηνεύω το $\hat{\beta}$ και κάνω προβλέψεις **μόνο** μέσα στο εύρος των δεδομένων.

**ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;**

Θέλεις να βρίσκεις την ευθεία παλινδρόμησης με υπολογιστή τσέπης ή με λογιστικό φύλλο; Στο mathgreece.com θα βρεις οδηγούς και πλήρες δωρεάν φροντιστήριο Στατιστικής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 2.4 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Για τα ζεύγη $(1, 3), (2, 5), (3, 6), (4, 8)$ να βρείτε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων.

●○○ → Λύση 2.4/1
- 2** Η ευθεία παλινδρόμησης του κόστους y (€) ως προς την απόσταση x (km) μιας υπηρεσίας μεταφοράς είναι $\hat{y} = 3,5 + 0,8x$. Να ερμηνεύσετε τους συντελεστές και να προβλέψετε το κόστος για 12 km.

●○○ → Λύση 2.4/2
- 3** Για $n = 6$ ζεύγη δίνονται $\sum x_i = 24$, $\sum y_i = 60$, $\sum x_i y_i = 270$ και $\sum x_i^2 = 116$. Να βρείτε την ευθεία παλινδρόμησης.

●●○ → Λύση 2.4/3
- 4** Η ευθεία παλινδρόμησης μιας μεταβλητής Y πάνω σε μια X διέρχεται από το σημείο $(2, 9)$ και έχει $\hat{\beta} = 2$. Αν $\bar{x} = 5$, να βρείτε το $\bar{y}$.

●●○ → Λύση 2.4/4
- 5** Για τα δεδομένα τιμής x (€) και ημερήσιας ζήτησης y (τεμάχια) ενός προϊόντος: $(1, 50), (2, 44), (3, 40), (4, 31), (5, 25)$, να βρείτε την ευθεία παλινδρόμησης και να ερμηνεύσετε το πρόσημο του $\hat{\beta}$.

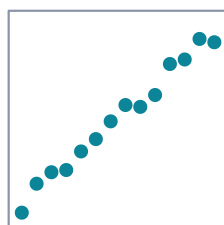
●●● → Λύση 2.4/5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Στατιστική

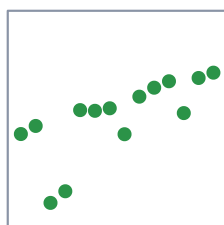
ΜΑΘΗΜΑ 2.5

Γραμμική συσχέτιση

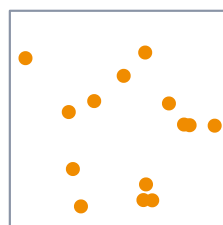
♦ Πόσο «ισχυρή» είναι η γραμμική σχέση;



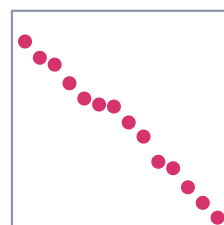
$r \approx +1$



$r \approx +0,6$



$r \approx 0$



$r \approx -1$

Η ευθεία παλινδρόμησης μας λέει **ποια** είναι η γραμμική σχέση· δεν μας λέει **πόσο καλά** τα σημεία ακολουθούν την ευθεία. Στο σχήμα, τα σημεία του πρώτου διαγράμματος είναι σχεδόν πάνω σε ευθεία, του δεύτερου πιο σκόρπια, του τρίτου εντελώς τυχαία. Χρειαζόμαστε ένα μέτρο αυτής της «ισχύος».

📖 **ΟΡΙΣΜΟΣ** — Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης

Ο **συντελεστής γραμμικής συσχέτισης** (του Pearson) δύο μεταβλητών X, Y είναι

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\nu \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[\nu \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] [\nu \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}$$

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Ιδιότητες του r

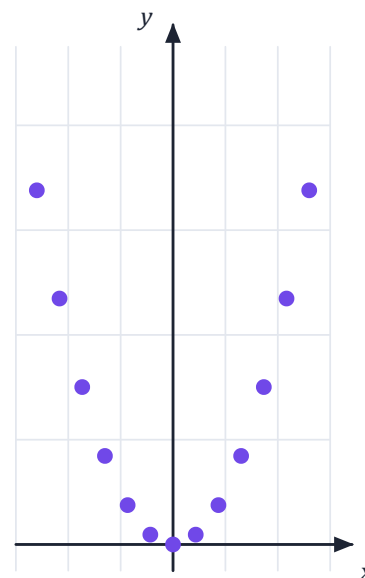
1. Ισχύει πάντα $-1 \leq r \leq 1$.
2. $r = 1$ ή $r = -1$ ακριβώς όταν όλα τα σημεία βρίσκονται **πάνω σε ευθεία** (με θετική ή αρνητική κλίση αντίστοιχα).
3. $r > 0$: **θετική** συσχέτιση (όταν μεγαλώνει η μία, τείνει να μεγαλώνει και η άλλη)· $r < 0$: **αρνητική** συσχέτιση.
4. $r \approx 0$: **δεν υπάρχει γραμμική** συσχέτιση (μπορεί όμως να υπάρχει **μη γραμμική** σχέση!).
5. Το r έχει **το ίδιο πρόσημο** με τον συντελεστή $\hat{\beta}$ της ευθείας παλινδρόμησης.
6. Το r είναι καθαρός αριθμός· **δεν αλλάζει** αν αλλάξουμε μονάδες μέτρησης.

🔑 **ΚΛΕΙΔΙ** — Ερμηνεία της τιμής του $|r|$ (συνήθης πρακτική)

$ r $	Γραμμική συσχέτιση
0,8 έως 1	ισχυρή
0,5 έως 0,8	μέτρια
0,3 έως 0,5	ασθενής
κάτω από 0,3	πολύ ασθενής ή ανύπαρκτη

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Συσχέτιση ≠ αιτιότητα

Μια ισχυρή συσχέτιση **δεν αποδεικνύει** ότι η μία μεταβλητή προκαλεί την άλλη. Για παράδειγμα, οι πωλήσεις παγωτών και οι πνιγμοί στις παραλίες συσχετίζονται θετικά — όχι επειδή το παγωτό προκαλεί πνιγμούς, αλλά επειδή και τα δύο αυξάνονται το καλοκαίρι (κοινή «κρυφή» αιτία: η ζέστη). Επίσης, $r \approx 0$ σημαίνει μόνο ότι δεν υπάρχει **γραμμική** σχέση: στο διπλανό σχήμα τα σημεία ακολουθούν τέλεια μια παραβολή, αλλά $r = 0$.

 $r \approx 0$ αλλά ισχυρή μη γραμμική σχέση**◆ Παλινδρόμηση και συσχέτιση μαζί**

Η παλινδρόμηση **περιγράφει** τη σχέση (δίνει την ευθεία), ενώ η συσχέτιση **μετρά** πόσο ισχυρή είναι. Στην πράξη τις μελετάμε μαζί: πρώτα ελέγχουμε με το r αν η γραμμική σχέση είναι αρκετά ισχυρή, και μόνο τότε εμπιστευόμαστε τις προβλέψεις της ευθείας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Υπολογισμός του r

Για τα δεδομένα «ώρες μελέτης – βαθμός» του μαθήματος 2.4 ($\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 26$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 10$, αποκλίσεις y : $-5, -2, -1, 2, 6$) να βρεθεί και να ερμηνευτεί ο συντελεστής συσχέτισης.

ΛΥΣΗ

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 25 + 4 + 1 + 4 + 36 = 70. \text{ Άρα}$$

$$r = \frac{26}{\sqrt{10 \cdot 70}} = \frac{26}{\sqrt{700}} \approx \frac{26}{26,46} \approx 0,98.$$

Υπάρχει **ισχυρή θετική** γραμμική συσχέτιση: περισσότερη μελέτη συνοδεύεται, σχεδόν γραμμικά, από υψηλότερο βαθμό. Οι προβλέψεις της ευθείας είναι αξιόπιστες (μέσα στο εύρος 1–5 ωρών).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Αρνητική συσχέτιση

Για τα δεδομένα «τιμή – ζήτηση» της άσκησης 5 του μαθήματος 2.4 ($\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y}) = -63$, $\sum (x - \bar{x})^2 = 10$, $\sum (y - \bar{y})^2 = 402$) να βρεθεί το r .

ΛΥΣΗ

$$r = \frac{-63}{\sqrt{10 \cdot 402}} = \frac{-63}{\sqrt{4020}} \approx \frac{-63}{63,40} \approx -0,99: \text{ ισχυρή αρνητική γραμμική συσχέτιση — όσο αυξάνεται η τιμή, τόσο μειώνεται η ζήτηση, σχεδόν γραμμικά. Παρατήρησε ότι το } r \text{ είναι αρνητικό, όπως και το } \hat{\beta} = -6,3.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Ερμηνεία τιμών

Να διαταχθούν κατά αύξουσα **ισχύ** γραμμικής συσχέτισης οι τιμές: $r_1 = -0,85$, $r_2 = 0,4$, $r_3 = 0,1$, $r_4 = -0,6$, $r_5 = 0,95$.

ΛΥΣΗ

Η ισχύς κρίνεται από την **απόλυτη τιμή** $|r|$: $0,1 < 0,4 < 0,6 < 0,85 < 0,95$, δηλαδή r_3, r_2, r_4, r_1, r_5 . Προσοχή: το $r_1 = -0,85$ δείχνει **ισχυρότερη** συσχέτιση από το $r_2 = 0,4$, παρόλο που είναι «μικρότερος» αριθμός.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Το πρόσημο ως ισχύς

✗ «Το $r = -0,9$ δείχνει πολύ ασθενή συσχέτιση, γιατί είναι αρνητικό.»

✓ Το **πρόσημο** δείχνει την **κατεύθυνση** (θετική ή αρνητική), ενώ η **απόλυτη τιμή** δείχνει την **ισχύ**. Το $r = -0,9$ είναι ισχυρή αρνητική συσχέτιση.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Τιμή εκτός ορίων

✗ «Υπολογίσαμε $r = 1,3$, άρα η συσχέτιση είναι πολύ ισχυρή.»

✓ Το r **δεν μπορεί** να είναι εκτός του $[-1, 1]$. Μια τέτοια τιμή σημαίνει **λάθος στις πράξεις** — ψάξε το (συνήθως ξεχασμένη ρίζα στον παρονομαστή).

ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Η συσχέτιση χρησιμοποιείται σε κάθε επιστήμη, από την ιατρική μέχρι την οικονομία. Στο **mathgreece.com** θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με πραγματικά παραδείγματα και ασκήσεις με λύσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 2.5 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να χαρακτηρίσετε τη γραμμική συσχέτιση για: (α) $r = 0,92$ (β) $r = -0,45$ (γ) $r = 0,05$ (δ) $r = -1$.

●○○

→ Λύση 2.5/1

2 Η ευθεία παλινδρόμησης μιας Y πάνω σε μια X είναι $\hat{y} = 12 - 0,7x$. Τι πρόσημο έχει ο συντελεστής συσχέτισης; Γιατί;

●○○

→ Λύση 2.5/2

3 Για τα ζεύγη $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 8)$ (άσκηση 1 του μαθήματος 2.4) να βρείτε τον συντελεστή συσχέτισης.

●●○

→ Λύση 2.5/3

- 4** Σε μια έρευνα βρέθηκε ισχυρή θετική συσχέτιση ανάμεσα στον αριθμό των πυροσβεστών που πήγαν σε μια πυρκαγιά και στο ύψος των ζημιών. Σημαίνει αυτό ότι οι πυροσβέστες προκαλούν ζημιές;

→ Λύση 2.5/4

- 5** Για $n = 5$ ζεύγη δίνονται: $\sum x = 20$, $\sum y = 40$, $\sum xy = 180$, $\sum x^2 = 90$, $\sum y^2 = 360$. Να βρείτε την ευθεία παλινδρόμησης και τον συντελεστή συσχέτισης.

→ Λύση 2.5/5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Στατιστική

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

Επαναληπτικά Θέματα Στατιστικής

Ο «χάρτης» του κεφαλαίου

ΣΥΝΟΨΗ — Τι πρέπει να ξέρεις να κάνεις

Δεξιότητα	Μάθημα
Αναγνώριση πληθυσμού, δείγματος και είδους μεταβλητής	2.1
Πίνακες συχνοτήτων (ν_i, f_i, N_i, F_i), διαγράμματα, γωνίες κυκλικού	2.2α
Ομαδοποίηση, ιστόγραμμα, πολύγωνα, καμπύλες συχνοτήτων	2.2β
Μέση τιμή, διάμεσος, τεταρτημόρια, επικρατούσα (και σε ομαδοποιημένα)	2.3α
Εύρος, διακύμανση, τυπική απόκλιση, κανόνας 68–95–99,7, CV	2.3β
Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων και πρόβλεψη	2.4
Συντελεστής συσχέτισης και ερμηνεία του	2.5

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Θέμα τύπου εξετάσεων: πλήρης περιγραφή δείγματος

Οι ώρες που αφιέρωσαν 10 μαθητές σε εθελοντική εργασία έναν μήνα ήταν: 5, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 12, 18. (α) Να βρεθούν η μέση τιμή, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή. (β) Να βρεθούν τα τεταρτημόρια και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος. (γ) Να βρεθούν η τυπική απόκλιση και ο συντελεστής μεταβολής. Είναι το δείγμα ομοιογενές;

ΛΥΣΗ

(α) $\bar{x} = \frac{100}{10} = 10$ ώρες. Τα δεδομένα είναι ήδη διατεταγμένα· $\nu = 10$, άρα $\delta = \frac{9+10}{2} = 9,5$. Οι τιμές 8 και 12 εμφανίζονται από δύο φορές: η κατανομή είναι **δικόρυφη**, με επικρατούσες τιμές 8 και 12.

(β) Πρώτο μισό 5, 7, 8, 8, 9 $\rightarrow Q_1 = 8$. Δεύτερο μισό 10, 11, 12, 12, 18 $\rightarrow Q_3 = 12$. $Q = 12 - 8 = 4$ ώρες.

(γ) Αποκλίσεις: $-5, -3, -2, -2, -1, 0, 1, 2, 2, 8$, τετράγωνα: 25, 9, 4, 4, 1, 0, 1, 4, 4, 64, άθροισμα 116. $s^2 = 11,6$, $s \approx 3,41$ ώρες. $CV = \frac{3,41}{10} \approx 34\% > 10\%$: το δείγμα **δεν** είναι ομοιογενές (κυρίως λόγω της ακραίας τιμής 18).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Θέμα τύπου εξετάσεων: πίνακας με κενά

Σε δείγμα ν οικογενειών καταγράφηκε ο αριθμός των αυτοκινήτων x_i . Δίνονται: $x_i = 0, 1, 2, 3$, $f_1\% = 10$, $F_2\% = 60$, $\nu_3 = 12$ και η μέση τιμή $\bar{x} = 1,5$. Να βρεθούν το ν και όλες οι συχνότητες.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $f_3 = \alpha$, $f_4 = \beta$ (σε δεκαδική μορφή). Από $F_2 = 0,6$: $f_2 = 0,5$, και $\alpha + \beta = 0,4$. Η μέση τιμή: $\bar{x} = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,5 + 2\alpha + 3\beta = 1,5$, άρα $2\alpha + 3\beta = 1$. Από το σύστημα: $\beta = 1 - 0,8 = 0,2$, $\alpha = 0,2$. Τότε $\nu_3 = 0,2\nu = 12 \Rightarrow \nu = 60$, και $\nu_1 = 6$, $\nu_2 = 30$, $\nu_3 = 12$, $\nu_4 = 12$.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Στο mathgreece.com θα βρεις επαναληπτικά διαγωνίσματα Στατιστικής με πραγματικά δεδομένα και αναλυτικές λύσεις — ένα πλήρες, δωρεάν φροντιστήριο για όλη την ύλη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα Επ. 2 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Πέντε αριθμοί έχουν μέση τιμή 12 και τυπική απόκλιση 2. Αν πολλαπλασιάσουμε καθέναν με 3 και προσθέσουμε 2, ποια θα είναι η νέα μέση τιμή και η νέα τυπική απόκλιση;

●○○

→ Λύση Επ. 2/1
- 2** Οι τιμές 12, 18, x , 14, 16 έχουν μέση τιμή 15. Να βρείτε το x και τη διάμεσο.

●○○

→ Λύση Επ. 2/2
- 3** Δεδομένα είναι ομαδοποιημένα στις κλάσεις $[0, 4)$, $[4, 8)$, $[8, 12)$, $[12, 16)$ με συχνότητες 5, 15, 20, 10. Να εκτιμήσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

●●○

→ Λύση Επ. 2/3
- 4** Ο δείκτης νοημοσύνης σε έναν πληθυσμό ακολουθεί περίπου κανονική κατανομή με $\bar{x} = 100$ και $s = 15$. Τι ποσοστό έχει δείκτη (α) πάνω από 130 (β) από 85 έως 115 (γ) από 70 έως 115;

●●○

→ Λύση Επ. 2/4
- 5** Σε κυκλικό διάγραμμα 360 ψηφοφόρων, το κόμμα Α έχει γωνία 126° και το Β 90° . Πόσους ψήφους πήρε το καθένα και ποιο ποσοστό;

●●○

→ Λύση Επ. 2/5
- 6** Για δύο μεταβλητές βρέθηκε $\bar{x} = 4$, $\bar{y} = 20$ και ότι η ευθεία παλινδρόμησης έχει $\hat{\beta} = 2,5$. Να βρείτε την ευθεία και την πρόβλεψη για $x = 6$.

●●○

→ Λύση Επ. 2/6
- 7** Δύο δείγματα έχουν: Α: $\bar{x} = 80$, $s = 6$ Β: $\bar{x} = 20$, $s = 3$. Ποιο είναι πιο ομοιογενές;

●●○

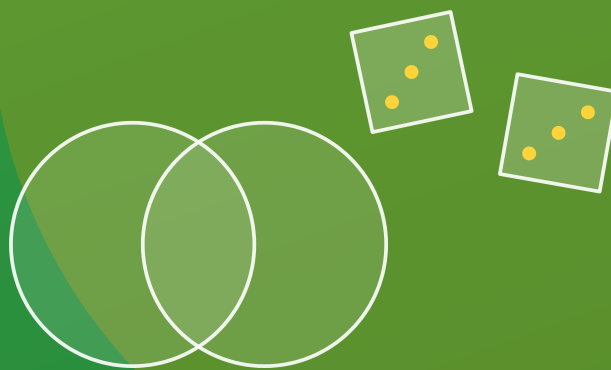
→ Λύση Επ. 2/7
- 8** Για 5 ζεύγη τιμών δίνονται $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 40$, $\sum (y_i - \bar{y})^2 = 90$ και $r = 0,8$. Να βρείτε τον συντελεστή $\hat{\beta}$ της ευθείας παλινδρόμησης.

●●●

→ Λύση Επ. 2/8

3

Πιθανότητες



Τα μαθήματα του κεφαλαίου

3.1 Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα**3.2** Η έννοια της πιθανότητας**3.3** Συνδυαστική**3.4** Δεσμευμένη πιθανότητα –
Ανεξάρτητα ενδεχόμενα**Επ. 3** Επαναληπτικά θέματα
Πιθανοτήτων

Τι θα κατακτήσεις

- Να περιγράφεις δειγματικό χώρο και ενδεχόμενα και να κάνεις πράξεις με αυτά.
- Να υπολογίζεις πιθανότητες με τον κλασικό ορισμό και με τους κανόνες λογισμού.
- Να μετράς με την πολλαπλασιαστική αρχή, τις διατάξεις, τις μεταθέσεις και τους συνδυασμούς.
- Να υπολογίζεις δεσμευμένες πιθανότητες και να αναγνωρίζεις ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Θα βρέξει αύριο; Θα κερδίσει η ομάδα μας; Πόσο πιθανό είναι να είναι ελαττωματικό ένα προϊόν; Ζούμε σε έναν κόσμο αβεβαιότητας, και η Θεωρία Πιθανοτήτων είναι το εργαλείο που μας επιτρέπει να τη «μετράμε». Στο κεφάλαιο αυτό μαθαίνουμε να περιγράφουμε τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, να υπολογίζουμε πιθανότητες, να μετράμε «με έξυπνο τρόπο» με τη Συνδυαστική και, τέλος, να ενημερώνουμε τις πιθανότητες όταν αποκτούμε νέα πληροφορία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Πιθανότητες

ΜΑΘΗΜΑ 3.1

Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

Πείραμα τύχης και δειγματικός χώρος

ΟΡΙΣΜΟΣ — Πείραμα τύχης

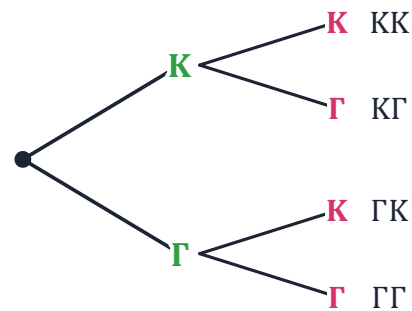
Πείραμα τύχης λέγεται κάθε πείραμα που, όσες φορές κι αν επαναληφθεί (φαινομενικά) κάτω από τις ίδιες συνθήκες, **δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα** το αποτέλεσμα του. Παραδείγματα: η ρίψη ενός ζαριού, η κλήρωση ενός λαχνού, ο αριθμός των πελατών που θα μπουν σε ένα κατάστημα σε μια ώρα.

ΟΡΙΣΜΟΣ — Δειγματικός χώρος

Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης λέγεται **δειγματικός χώρος** και συμβολίζεται με Ω . Αν $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, το πλήθος των στοιχείων του συμβολίζεται $N(\Omega) = n$.



Ρίψη ζαριού: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



Δύο ρίψεις νομίσματος: δενδροδιάγραμμα

Πείραμα	Δειγματικός χώρος	$N(\Omega)$
Ρίψη νομίσματος	$\{K, \Gamma\}$	2
Ρίψη ζαριού	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	6
Δύο ρίψεις νομίσματος	$\{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$	4
Ρίψη δύο ζαριών	ζεύγη (i, j) με $i, j \in \{1, \dots, 6\}$	36
Φύλο παιδιών οικογένειας με 3 παιδιά	$\{AAA, AAK, AKA, KAA, AKK, KAK, KKA, KKK\}$	8

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πώς βρίσκουμε τον δειγματικό χώρο

Όταν το πείραμα γίνεται σε **στάδια** (π.χ. δύο ρίψεις, τρία παιδιά), χρησιμοποιούμε **δενδροδιάγραμμα**: κάθε «κλαδί» είναι ένα δυνατό αποτέλεσμα του σταδίου και κάθε διαδρομή από τη ρίζα ως ένα «φύλλο» είναι ένα στοιχείο του Ω . Για δύο ζάρια βολεύει ένας **πίνακας διπλής εισόδου** 6×6 .

Ενδεχόμενα

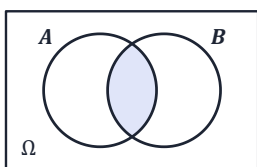
ΟΡΙΣΜΟΣ — Ενδεχόμενο

Ενδεχόμενο λέγεται κάθε υποσύνολο A του δειγματικού χώρου. Λέμε ότι το A **πραγματοποιείται** όταν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι στοιχείο του A .

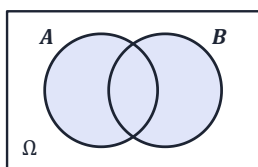
- **Απλό** λέγεται ένα ενδεχόμενο με ένα στοιχείο, **σύνθετο** αν έχει περισσότερα.
- Το ίδιο το Ω λέγεται **βέβαιο** ενδεχόμενο (πραγματοποιείται πάντα).
- Το κενό σύνολο $\emptyset$ λέγεται **αδύνατο** ενδεχόμενο (δεν πραγματοποιείται ποτέ).

Για παράδειγμα, στη ρίψη ζαριού το ενδεχόμενο «φέρνω άρτιο» είναι το $A = \{2, 4, 6\}$, το «φέρνω 7» είναι το αδύνατο $\emptyset$ και το «φέρνω αριθμό μικρότερο του 10» είναι το βέβαιο Ω .

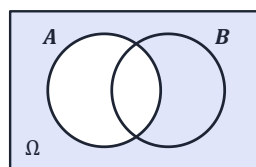
Πράξεις με ενδεχόμενα



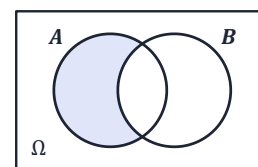
$A \cap B$: «και το A και το B »



$A \cup B$: «τουλάχιστον ένα»



A' : «όχι το A »



$A - B$: «μόνο το A »

ΚΛΕΙΔΙ — Πράξεις και η «γλώσσα» τους

Συμβολισμός	Πραγματοποιείται όταν...	Λεκτική διατύπωση
$A \cap B$	πραγματοποιούνται και τα δύο	«το A και το B »
$A \cup B$	πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα	«το A ή το B »
A'	δεν πραγματοποιείται το A	« όχι το A » (συμπληρωματικό)
$A - B$	το A αλλά όχι το B	« μόνο το A » (από τα δύο)
$(A - B) \cup (B - A)$	ακριβώς ένα από τα δύο	«ή μόνο το A ή μόνο το B »
$(A \cup B)'$	κανένα από τα δύο	« ούτε το A ούτε το B »
$A \subseteq B$	όποτε το A , και το B	«το A συνεπάγεται το B »

ΟΡΙΣΜΟΣ — Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα A, B λέγονται **ασυμβίβαστα** (ή αμοιβαίως αποκλειόμενα) όταν $A \cap B = \emptyset$, δηλαδή όταν **δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα**.

Για παράδειγμα, στη ρίψη ζαριού τα $A = \{2, 4, 6\}$ («άρτιο») και $\Gamma = \{1, 3\}$ είναι ασυμβίβαστα. Ένα ενδεχόμενο και το συμπληρωματικό του είναι **πάντα** ασυμβίβαστα, και επιπλέον $A \cup A' = \Omega$.

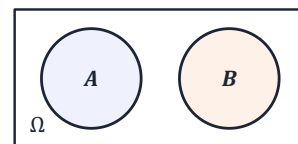
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Πράξεις στη ρίψη ζαριού

Ρίχνουμε ένα ζάρι. Έστω A «άρτιος αριθμός», B «αριθμός μεγαλύτερος του 3». Να βρεθούν τα $A \cap B$, $A \cup B$, A' , $A - B$, $B - A$ και $(A \cup B)'$.

ΛΥΣΗ

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{4, 5, 6\}.$$

$$A \cap B = \{4, 6\}, \quad A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}, \quad A' = \{1, 3, 5\}, \quad A - B = \{2\}, \quad B - A = \{5\}, \quad (A \cup B)' = \{1, 3\}.$$



Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Δύο ζάρια

Ρίχνουμε δύο ζάρια (ένα κόκκινο και ένα μπλε). Να βρεθούν τα ενδεχόμενα: A «το άθροισμα είναι 7», B «το άθροισμα είναι τουλάχιστον 10», Γ «οι δύο ενδείξεις είναι ίσες», καθώς και τα πλήθη των στοιχείων τους.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

ΛΥΣΗ

Ο δειγματικός χώρος έχει 36 ζεύγη. Από τον πίνακα των αθροισμάτων:

$$A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}, \quad N(A) = 6 \text{ (πορτοκαλί)}.$$

$$B = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}, \quad N(B) = 6 \text{ (πράσινα)}.$$

$$\Gamma = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\}, \quad N(\Gamma) = 6 \text{ (η διαγώνιος)}.$$

Παρατήρησε ότι τα A και B είναι ασυμβίβαστα, ενώ τα B και Γ έχουν κοινά στοιχεία: $B \cap \Gamma = \{(5, 5), (6, 6)\}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Μετάφραση λέξεων σε σύμβολα

Ένας μαθητής δίνει εξετάσεις σε Μαθηματικά (M) και Φυσική (Φ), όπου M , Φ τα ενδεχόμενα «περνά το μάθημα». Να εκφραστούν με σύμβολα: (α) περνά και τα δύο (β) περνά τουλάχιστον ένα (γ) περνά μόνο τα Μαθηματικά (δ) δεν περνά κανένα (ε) περνά ακριβώς ένα.

ΛΥΣΗ

$$(α) M \cap \Phi \quad (β) M \cup \Phi \quad (γ) M - \Phi \text{ (ή } M \cap \Phi') \quad (δ) (M \cup \Phi)' \text{ (ή } M' \cap \Phi') \quad (ε) (M - \Phi) \cup (\Phi - M).$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Οι νόμοι του De Morgan

$(A \cup B)' = A' \cap B'$: «όχι τουλάχιστον ένα» σημαίνει «κανένα». $(A \cap B)' = A' \cup B'$: «όχι και τα δύο» σημαίνει «τουλάχιστον ένα δεν». Είναι πολύ χρήσιμοι στις λεκτικές ασκήσεις.

ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Σύγχυση «ή» και «και»

✗ «Το A ή το B » σημαίνει «ακριβώς ένα από τα δύο».

✓ Στα Μαθηματικά το «ή» είναι **περιεκτικό**: $A \cup B$ σημαίνει «τουλάχιστον ένα», δηλαδή **περιλαμβάνει και την περίπτωση** να πραγματοποιηθούν και τα δύο. Για «ακριβώς ένα» γράφουμε $(A - B) \cup (B - A)$.

ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Ασυμβίβαστα $\neq$ συμπληρωματικά

✗ «Αφού τα A, Γ είναι ασυμβίβαστα, το Γ είναι το A' »

✓ Τα συμπληρωματικά είναι πάντα ασυμβίβαστα, αλλά **όχι** το αντίστροφο. Στο ζάρι, τα $A = \{2, 4, 6\}$ και $\Gamma = \{1, 3\}$ είναι ασυμβίβαστα, αλλά $A' = \{1, 3, 5\} \neq \Gamma$.

ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Τα διαγράμματα Venn και τα δένδροδιαγράμματα είναι τα καλύτερα «εργαλεία σκέψης» στις Πιθανότητες. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με πολλές ασκήσεις μετάφρασης λεκτικών προβλημάτων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 3.1 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Να γράψετε τον δειγματικό χώρο και τα ενδεχόμενα A «ακριβώς δύο κορόνες» και B «τουλάχιστον μία γράμματα».

→ Λύση 3.1/1

2 Σε ένα κουτί υπάρχουν τρεις μπάλες: κόκκινη (K), άσπρη (A), μαύρη (M). Παίρνουμε δύο μπάλες, τη μία μετά την άλλη, **χωρίς** επανάθεση. Να γράψετε τον δειγματικό χώρο.

→ Λύση 3.1/2

3 Αν $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $B = \{4, 5, 6, 7\}$, να βρείτε τα $A \cap B$, $A \cup B$, $A' \cap B$, $(A \cup B)'$ και το ενδεχόμενο «ακριβώς ένα από τα A, B ».

→ Λύση 3.1/3

4 Με τα ενδεχόμενα A, B να εκφράσετε: (α) «κανένα από τα δύο» (β) «το πολύ ένα από τα δύο». Να δείξετε σε διάγραμμα Venn την περιοχή του (β).

→ Λύση 3.1/4

- 5** Ρίχνουμε δύο ζάρια. Να βρείτε πόσα στοιχεία έχει το ενδεχόμενο «το γινόμενο των ενδείξεων είναι άρτιος αριθμός». (Υπόδειξη: σκεφτείτε το συμπληρωματικό.)

→ Λύση 3.1/5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Πιθανότητες

ΜΑΘΗΜΑ 3.2

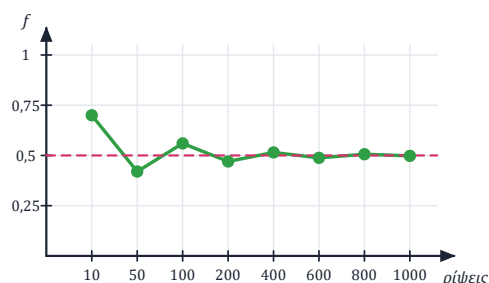
Η έννοια της πιθανότητας

◆ Σχετική συχνότητα και στατιστική ομαλότητα

Αν ρίξουμε ένα νόμισμα 10 φορές, μπορεί να φέρουμε 7 κορόνες (σχετική συχνότητα 0,7). Αν όμως το ρίξουμε 1000 φορές, η σχετική συχνότητα της κορόνας θα είναι πολύ κοντά στο 0,5. Γενικά παρατηρείται ότι:

🔑 **ΚΛΕΙΔΙ** — **Νόμος των μεγάλων αριθμών**
(στατιστική ομαλότητα)

Όταν ένα πείραμα τύχης επαναλαμβάνεται **πέρα** **πολλές φορές**, η σχετική συχνότητα $f_A = \frac{\kappa}{\nu}$ ενός ενδεχομένου A τείνει να **σταθεροποιείται** γύρω από έναν αριθμό. Αυτός ο αριθμός είναι, διαισθητικά, η **πιθανότητα** του A .



Η σχετική συχνότητα «σταθεροποιείται» γύρω από το 0,5

◆ Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Όταν όλα τα απλά ενδεχόμενα έχουν **την ίδια** δυνατότητα να πραγματοποιηθούν (λέμε ότι είναι **ισοπίθανα**: ένα «αμερόληπτο» ζάρι, ένα «τίμιο» νόμισμα, μια τυχαία κλήρωση), η σχετική συχνότητα κάθε ενδεχομένου τείνει στο κλάσμα των «ευνοϊκών» αποτελεσμάτων.

📖 **ΟΡΙΣΜΟΣ** — **Κλασικός ορισμός της πιθανότητας**

Σε ένα πείραμα με **ισοπίθανα** αποτελέσματα, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A είναι

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}.$$

Άμεσες συνέπειες: $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$ και $0 \leq P(A) \leq 1$ για κάθε ενδεχόμενο A .

📌 **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ** — **Ο αξιωματικός ορισμός**

Όταν τα αποτελέσματα **δεν** είναι ισοπίθανα (π.χ. ένα «πειραγμένο» ζάρι), δίνουμε σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ έναν αριθμό $P(\omega_i) \geq 0$, με $P(\omega_1) + \dots + P(\omega_n) = 1$, και ορίζουμε ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου το **άθροισμα** των πιθανοτήτων των στοιχείων του. Όλοι οι κανόνες που ακολουθούν ισχύουν και σε αυτή την περίπτωση.

Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Οι βασικοί κανόνες

Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω :

1. **Συμπληρωματικό:** $P(A') = 1 - P(A)$.
2. **Προσθετικός νόμος (ασυμβίβαστα):** αν $A \cap B = \emptyset$, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
3. **Προσθετικός νόμος (γενικά):** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. **Διαφορά:** $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
5. **Μονοτονία:** αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$.

✎ ΑΠΟΔΕΙΞΗ — (στην περίπτωση ισοπίθανων αποτελεσμάτων)

(1) Επειδή $A \cup A' = \Omega$ και $A \cap A' = \emptyset$, είναι $N(A) + N(A') = N(\Omega)$. Διαιρώντας με $N(\Omega)$: $P(A) + P(A') = 1$.

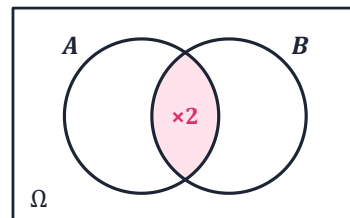
(3) Όταν προσθέτουμε $N(A) + N(B)$, τα στοιχεία της τομής μετριοούνται **δύο φορές**: γι' αυτό τα αφαιρούμε μία φορά: $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$. Διαιρούμε με $N(\Omega)$. Η (2) είναι η ειδική περίπτωση $N(A \cap B) = 0$.

(4) Το A χωρίζεται στα ασυμβίβαστα $A - B$ και $A \cap B$, άρα $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$.

(5) Αν $A \subseteq B$, τότε $N(A) \leq N(B)$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

Ο απλός προσθετικός νόμος $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ισχύει **μόνο** για ασυμβίβαστα ενδεχόμενα. Αν τα A, B έχουν κοινά στοιχεία, πρέπει να αφαιρέσουμε το $P(A \cap B)$ — αλλιώς μπορεί να βρούμε «πιθανότητα» μεγαλύτερη από 1!



Γιατί αφαιρούμε την τομή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ζάρι

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι. Να βρεθούν οι πιθανότητες: (α) να φέρουμε άρτιο (β) να φέρουμε άρτιο ή μεγαλύτερο του 3 (γ) να μη φέρουμε 6.

ΛΥΣΗ

(α) $A = \{2, 4, 6\}$: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

(β) Με $B = \{4, 5, 6\}$ και $A \cap B = \{4, 6\}$: $P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. (Πράγματι $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.)

(γ) $P(\{6\}') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Δύο ζάρια

Ρίχνουμε δύο ζάρια. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα να είναι (α) 7 (β) τουλάχιστον 10 (γ) διάφορο του 2;

ΛΥΣΗ

Από το Παράδειγμα 2 του μαθήματος 3.1: (α) $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. (β) $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. (γ) Άθροισμα 2 μόνο με το (1, 1), άρα $1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Ενδιαφέροντα μαθητών

Σε ένα τμήμα 30 μαθητών, 18 παίζουν ποδόσφαιρο, 12 μπάσκετ και 5 παίζουν και τα δύο. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα να παίζει (α) τουλάχιστον ένα από τα δύο αθλήματα (β) κανένα (γ) μόνο ποδόσφαιρο;

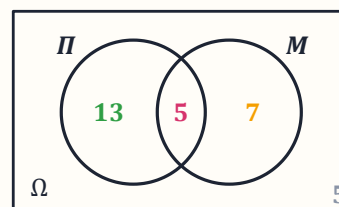
ΛΥΣΗ

Με Π «ποδόσφαιρο», M «μπάσκετ»: $P(\Pi) = \frac{18}{30}$, $P(M) = \frac{12}{30}$, $P(\Pi \cap M) = \frac{5}{30}$.

$$(α) P(\Pi \cup M) = \frac{18+12-5}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

$$(β) P((\Pi \cup M)') = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \text{ (δηλαδή 5 μαθητές).}$$

$$(γ) P(\Pi - M) = \frac{18}{30} - \frac{5}{30} = \frac{13}{30}.$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Με τους κανόνες, χωρίς αριθμούς στοιχείων

Αν $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ και $P(A \cup B) = 0,7$, να βρεθούν τα $P(A \cap B)$, $P(A - B)$, $P(A' \cap B')$ και η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα A, B .

ΛΥΣΗ

$$P(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,7 = 0,2. \quad P(A - B) = 0,5 - 0,2 = 0,3. \quad P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - 0,7 = 0,3. \text{ Ακριβώς ένα: } P(A - B) + P(B - A) = 0,3 + (0,4 - 0,2) = 0,5.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Οργάνωσε τα δεδομένα σε Venn με αριθμούς

Στις ασκήσεις με δύο ενδεχόμενα γράψε πρώτα την πιθανότητα (ή το πλήθος) της **τομής** στο κέντρο του Venn και μετά συμπλήρωσε τα «μόνο A », «μόνο B » και το εξωτερικό. Τα τέσσερα κομμάτια πρέπει να αθροίζουν σε 1 (ή σε $N(\Omega)$).

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Πιθανότητα μεγαλύτερη από 1

✗ $P(A \cup B) = 0,6 + 0,7 = 1,3$.

✓ Μια πιθανότητα **δεν** μπορεί να ξεπερνά το 1. Τα A, B σίγουρα δεν είναι ασυμβίβαστα· χρειάζεται το $P(A \cap B)$. (Μάλιστα, αφού $P(A \cup B) \leq 1$, συμπεραίνουμε ότι $P(A \cap B) \geq 0,3$.)

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Μη ισοπίθανα αποτελέσματα

✗ «Ρίχνω δύο ζάρια· τα δυνατά αθροίσματα είναι 2, 3, ..., 12, δηλαδή 11, άρα $P(\text{άθροισμα } 7) = \frac{1}{11}$ ».

✓ Τα 11 αθροίσματα **δεν** είναι ισοπίθανα (το 7 προκύπτει με 6 τρόπους, το 2 με έναν). Ο κλασικός ορισμός εφαρμόζεται στα 36 **ισοπίθανα** ζεύγη: $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

🏠 ΛΙΓΗ ΙΣΤΟΡΙΑ

Η Θεωρία Πιθανοτήτων γεννήθηκε τον 17ο αιώνα από... ένα πρόβλημα τυχερών παιχνιδιών! Ο ευγενής Chevalier de Méré ρώτησε τον Blaise **Pascal** πώς πρέπει να μοιραστεί το στοίχημα ενός παιχνιδιού που διακόπηκε. Η αλληλογραφία του Pascal με τον Pierre de **Fermat** (1654) θεωρείται η αφετηρία της επιστήμης. Ο αξιωματικός ορισμός δόθηκε πολύ αργότερα, το 1933, από τον Ρώσο **Kolmogorov**.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Οι Πιθανότητες έχουν πολλές «παγίδες» που ξεγελούν ακόμη και ενήλικες. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με διασκεδαστικά προβλήματα και αναλυτικές λύσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 3.2 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Σε ένα κουτί υπάρχουν 5 κόκκινες, 3 πράσινες και 2 μπλε μπάλες. Παίρνουμε τυχαία μία. Ποια η πιθανότητα να είναι (α) κόκκινη (β) όχι μπλε (γ) κόκκινη ή πράσινη;

→ Λύση 3.2/1

- 2** Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Ποια η πιθανότητα να φέρουμε (α) τρεις κορόνες (β) τουλάχιστον μία γράμματα (γ) ακριβώς δύο κορόνες;

→ Λύση 3.2/2

- 3** Αν $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,3$ και $P(A \cap B) = 0,1$, να βρείτε τις πιθανότητες: (α) $P(A \cup B)$ (β) $P(B - A)$ (γ) να μην πραγματοποιηθεί κανένα (δ) να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα.

→ Λύση 3.2/3

- 4** Ρίχνουμε δύο ζάρια. Να βρείτε την πιθανότητα (α) οι ενδείξεις να είναι ίσες (β) το άθροισμα να είναι άρτιο (γ) τουλάχιστον μία ένδειξη να είναι 6.

→ Λύση 3.2/4

- 5** Σε ένα σχολείο το 40% των μαθητών μιλά αγγλικά άπταιστα, το 25% γερμανικά και το 10% και τις δύο γλώσσες. Ποιο ποσοστό δεν μιλά καμία από τις δύο;

→ Λύση 3.2/5

- 6** Να εξετάσετε αν μπορούν να υπάρχουν ενδεχόμενα με $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,6$ και $P(A \cap B) = 0,2$.

→ Λύση 3.2/6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Πιθανότητες

ΜΑΘΗΜΑ 3.3

Συνδυαστική

◆ Γιατί χρειαζόμαστε «έξυπνη» μέτρηση

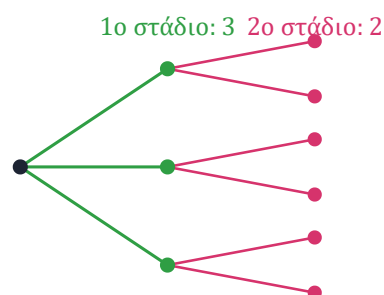
Για τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας πρέπει να **μετράμε** περιπτώσεις. Όταν οι περιπτώσεις είναι εκατομμύρια (π.χ. οι δυνατές στήλες του ΛΟΤΤΟ), δεν μπορούμε να τις γράψουμε μία-μία. Η **Συνδυαστική** μάς δίνει μεθόδους για να μετράμε χωρίς να απαριθμούμε.

◆ Η βασική αρχή απαρίθμησης

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Πολλαπλασιαστική αρχή

Αν μια διαδικασία γίνεται σε κ **διαδοχικά στάδια**, και το 1ο στάδιο μπορεί να γίνει με ν_1 τρόπους, το 2ο (για κάθε τρόπο του 1ου) με ν_2 τρόπους, ..., το κ -οστό με ν_κ τρόπους, τότε η διαδικασία μπορεί να γίνει με

$$\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \dots \cdot \nu_\kappa \text{ τρόπους.}$$



3 τρόποι $\times$ 2 τρόποι = 6 διαδρομές

Για παράδειγμα, αν ένα εστιατόριο προσφέρει 3 ορεκτικά και 2 κυρίως πιάτα, μπορούμε να φτιάξουμε $3 \cdot 2 = 6$ διαφορετικά γεύματα (ορεκτικό + κυρίως). Ένας τετραψήφιος κωδικός PIN (ψηφία 0–9, με επανάληψη) έχει $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10\,000$ δυνατές τιμές.

◆ Διατάξεις

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Διατάξεις

Διάταξη των ν στοιχείων ανά κ ($\kappa \leq \nu$) λέγεται κάθε **διατεταγμένη** ομάδα κ **διαφορετικών** στοιχείων από τα ν (δηλαδή μας ενδιαφέρει η **σειρά**). Το πλήθος τους είναι

$$\Delta_\kappa^\nu = \nu(\nu - 1)(\nu - 2) \cdots (\nu - \kappa + 1) = \frac{\nu!}{(\nu - \kappa)!}.$$

Ο τύπος προκύπτει από την πολλαπλασιαστική αρχή: για την 1η θέση έχουμε ν επιλογές, για τη 2η $\nu - 1$ (ένα στοιχείο έχει ήδη χρησιμοποιηθεί), κ.ο.κ., για την κ -οστή $\nu - \kappa + 1$.

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Το παραγοντικό

Ο συμβολισμός $\nu!$ (διαβάζεται « ν παραγοντικό») σημαίνει $\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu$. Συμφωνούμε επίσης ότι $0! = 1$. Παραδείγματα: $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $10! = 3\,628\,800$. Το παραγοντικό μεγαλώνει **εξαιρετικά** γρήγορα!

Μεταθέσεις

ΟΡΙΣΜΟΣ — Μεταθέσεις

Μετάθεση ν στοιχείων λέγεται κάθε διάταξη **όλων** των ν στοιχείων (δηλαδή κάθε τρόπος να τα βάλουμε σε σειρά). Το πλήθος τους είναι

$$M_\nu = \Delta_\nu^\nu = \nu!.$$

Συνδυασμοί

ΟΡΙΣΜΟΣ — Συνδυασμοί

Συνδυασμός των ν στοιχείων ανά κ λέγεται κάθε υποσύνολο κ στοιχείων από τα ν (δηλαδή **δεν** μας ενδιαφέρει η σειρά). Το πλήθος τους είναι

$$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa! (\nu - \kappa)!} = \frac{\Delta_\kappa^\nu}{\kappa!}.$$

Γιατί διαιρούμε με $\kappa!$; Κάθε υποσύνολο κ στοιχείων μπορεί να διαταχθεί με $\kappa!$ τρόπους· άρα οι διατάξεις είναι $\kappa!$ φορές περισσότερες από τους συνδυασμούς.

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Ιδιότητες των συνδυασμών

$$\binom{\nu}{0} = \binom{\nu}{\nu} = 1, \quad \binom{\nu}{1} = \nu, \quad \binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu}{\nu - \kappa}.$$

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Πότε χρησιμοποιώ τι

Ερώτηση	Σειρά;	Επανάληψη;	Τύπος
Κωδικός, πινακίδα, PIN	ναι	ναι	ν^κ (πολλαπλασιαστική αρχή)
Βάθρο αγώνα, πρόεδρος–αντιπρόεδρος	ναι	όχι	$\Delta_\kappa^\nu = \frac{\nu!}{(\nu - \kappa)!}$
Σειρά σε ράφι, θέσεις σε θρανία (όλοι)	ναι	όχι (όλα)	$\nu!$
Επιτροπή, ομάδα, στήλη ΛΟΤΤΟ	όχι	όχι	$\binom{\nu}{\kappa}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Βάθρο

Σε έναν αγώνα δρόμου συμμετέχουν 8 αθλητές. Με πόσους τρόπους μπορούν να απονεμηθούν το χρυσό, το ασημένιο και το χάλκινο μετάλλιο;

ΛΥΣΗ

Η σειρά μετράει και ένας αθλητής δεν μπορεί να πάρει δύο μετάλλια: $\Delta_3^8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ τρόποι. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Βιβλία στο ράφι

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 5 διαφορετικά βιβλία σε ένα ράφι; Και αν δύο συγκεκριμένα βιβλία πρέπει να είναι δίπλα-δίπλα;

ΛΥΣΗ

Όλες οι σειρές: $5! = 120$.

Αν δύο βιβλία πρέπει να είναι μαζί, τα «κολλάμε» σε ένα «μπλοκ». Τότε έχουμε 4 αντικείμενα για τη σειρά ($4! = 24$ τρόποι) και μέσα στο μπλοκ τα δύο βιβλία έχουν $2! = 2$ σειρές. Σύνολο $24 \cdot 2 = 48$ τρόποι.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Επιτροπή

Από ένα τμήμα 10 μαθητών θα επιλεγεί 3μελής επιτροπή. Με πόσους τρόπους; Και αν η επιτροπή αποτελείται από πρόεδρο, γραμματέα και ταμία;

ΛΥΣΗ

Επιτροπή χωρίς ρόλους (η σειρά δεν μετράει): $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{720}{6} = 120$.

Με διακριτούς ρόλους (η σειρά μετράει): $\Delta_3^{10} = 720$. Παρατήρησε ότι $720 = 120 \cdot 3!$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Μικτή επιτροπή

Μια ομάδα έχει 6 αγόρια και 5 κορίτσια. Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί 4μελής επιτροπή με 2 αγόρια και 2 κορίτσια; Ποια είναι η πιθανότητα μια τυχαία 4μελής επιτροπή να έχει αυτή τη σύνθεση;

ΛΥΣΗ

Επιλέγουμε τα αγόρια ($\binom{6}{2} = 15$ τρόποι) και τα κορίτσια ($\binom{5}{2} = 10$ τρόποι). Πολλαπλασιαστική αρχή: $15 \cdot 10 = 150$ επιτροπές.

Όλες οι δυνατές 4μελείς επιτροπές από 11 άτομα: $\binom{11}{4} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{24} = 330$. Άρα $P = \frac{150}{330} = \frac{5}{11} \approx 0,45$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Το ΛΟΤΤΟ

Στο ΛΟΤΤΟ επιλέγουμε 6 αριθμούς από τους 49. Πόσες διαφορετικές στήλες υπάρχουν και ποια είναι η πιθανότητα μια στήλη να κερδίσει την πρώτη κατηγορία (και τα 6 σωστά);

ΛΥΣΗ

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{720} = 13\,983\,816. \text{ Η πιθανότητα είναι } \frac{1}{13\,983\,816} \approx 0,00000007 \text{ —}$$

περίπου 1 στα 14 εκατομμύρια!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Κωδικοί

Ένας κωδικός αποτελείται από 2 γράμματα (από τα 24 του ελληνικού αλφαβήτου) ακολουθούμενα από 3 ψηφία. Πόσοι κωδικοί υπάρχουν (α) αν επιτρέπονται επαναλήψεις (β) αν όλα τα γράμματα και όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά;

ΛΥΣΗ

$$(α) 24 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 576\,000. (β) 24 \cdot 23 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 397\,440.$$

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Διατάξεις αντί για συνδυασμούς

Για μια 3μελή ομάδα από 10 άτομα ο μαθητής γράφει $\times 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

✓ Σε μια ομάδα **χωρίς ρόλους** η σειρά δεν μετράει: η ομάδα {Άννα, Βασίλης, Γιώργος} είναι ίδια με την {Γιώργος, Άννα, Βασίλης}. Άρα $\binom{10}{3} = 120$. **Πάντα** ρωτάμε: «αν αλλάξω τη σειρά, παίρνω κάτι διαφορετικό;»

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Πρόσθεση αντί για πολλαπλασιασμό

$\times$ «2 αγόρια από 6 και 2 κορίτσια από 5: $15 + 10 = 25$ τρόποι.»

✓ Το «και» (διαδοχικά στάδια) σημαίνει **πολλαπλασιασμό**: $15 \cdot 10 = 150$. Πρόσθεση κάνουμε όταν έχουμε **διαζευκτικές** περιπτώσεις («ή αυτό ή εκείνο»).



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Η Συνδυαστική είναι πολύ διασκεδαστική όταν τη «δεις» με παραδείγματα. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με γρίφους, προβλήματα και αναλυτικές λύσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 3.3 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να υπολογίσετε: (α) $6!$ (β) $\frac{8!}{6!}$ (γ) Δ_2^7 (δ) $\binom{9}{2}$ (ε) $\binom{12}{10}$.

●○○

→ Λύση 3.3/1

2 Ένα κατάστημα πουλά μπλουζάκια σε 4 χρώματα και 5 μεγέθη, με ή χωρίς στάμπα. Πόσα διαφορετικά προϊόντα πουλά;

●○○

→ Λύση 3.3/2

- 3** Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 6 φίλοι σε 6 θέσεις στη σειρά ενός κινηματογράφου; Και αν δύο από αυτούς θέλουν να κάθονται στις άκρες; → Λύση 3.3/3
-
- 4** Από 7 μαθηματικούς και 4 φυσικούς θα σχηματιστεί επιτροπή 5 ατόμων με τουλάχιστον 3 μαθηματικούς. Με πόσους τρόπους; → Λύση 3.3/4
-
- 5** Σε ένα κουτί υπάρχουν 4 ελαττωματικές και 8 καλές λάμπες. Παίρνουμε τυχαία 3. Ποια η πιθανότητα (α) να είναι όλες καλές (β) να είναι ακριβώς μία ελαττωματική; → Λύση 3.3/5
-
- 6** Σε ένα πρωτάθλημα με 10 ομάδες, κάθε ομάδα παίζει με κάθε άλλη δύο φορές (εντός και εκτός έδρας). Πόσοι αγώνες γίνονται; Πόσοι θα γίνονταν αν έπαιζαν μία φορά; → Λύση 3.3/6
-

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Πιθανότητες

ΜΑΘΗΜΑ 3.4

Δεσμευμένη πιθανότητα – Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

♦ Όταν έχουμε επιπλέον πληροφορία

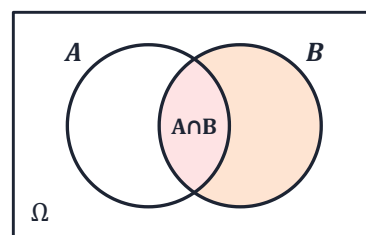
Ρίχνουμε ένα ζάρι, και κάποιος μας λέει μόνο ότι «ήρθε άρτιος αριθμός». Ποια είναι τώρα η πιθανότητα να ήρθε 6; Αρχικά ήταν $\frac{1}{6}$. Όμως η πληροφορία «άρτιος» περιορίζει τα δυνατά αποτελέσματα στο $B = \{2, 4, 6\}$, και από αυτά μόνο ένα είναι το 6: η νέα πιθανότητα είναι $\frac{1}{3}$. Η πληροφορία **άλλαξε** την πιθανότητα.

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Δεσμευμένη πιθανότητα

Η πιθανότητα του A δεδομένου του B (με $P(B) > 0$) είναι

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Σε πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα: $P(A | B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)}.$



Ο «νέος» δειγματικός χώρος είναι το B

Η ιδέα: αφού ξέρουμε ότι πραγματοποιήθηκε το B , ο «δειγματικός χώρος» **συρρικνώνεται** στο B , και από το A «επιβιώνει» μόνο το κομμάτι $A \cap B$.

♦ Ο πολλαπλασιαστικός νόμος

Λύνοντας τον ορισμό ως προς την τομή:

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Πολλαπλασιαστικός νόμος

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B) = P(A) \cdot P(B | A).$$

Είναι ιδιαίτερα χρήσιμος σε πειράματα με **διαδοχικά στάδια**, όπου οι πιθανότητες κάθε σταδίου εξαρτώνται από τα προηγούμενα: στο **δενδροδιάγραμμα** πολλαπλασιάζουμε τις πιθανότητες **κατά μήκος** κάθε κλαδιού.

♦ Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Μερικές φορές η πληροφορία για το B **δεν αλλάζει** την πιθανότητα του A : για παράδειγμα, το αποτέλεσμα ενός νομίσματος δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα ενός ζαριού.

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα A, B λέγονται **ανεξάρτητα** όταν

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ισοδύναμα (αν $P(B) > 0$): $P(A | B) = P(A)$, δηλαδή η πραγματοποίηση του B δεν επηρεάζει την πιθανότητα του A .

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Ανεξάρτητα ≠ ασυμβίβαστα

Αυτές οι δύο έννοιες συγχέονται πολύ συχνά, αλλά είναι **σχεδόν αντίθετες**! Αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα (με θετικές πιθανότητες), τότε $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$: είναι **εξαρτημένα** — αν ξέρω ότι έγινε το B , ξέρω με βεβαιότητα ότι **δεν** έγινε το A .

i ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν τα A, B είναι ανεξάρτητα, τότε ανεξάρτητα είναι και τα A', B , τα A, B' και τα A', B' . Η ανεξαρτησία επεκτείνεται και σε περισσότερα ενδεχόμενα: π.χ. σε 3 ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος, $P(\text{τρεις κορόνες}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ζάρι με πληροφορία

Ρίχνουμε ένα ζάρι. Αν γνωρίζουμε ότι ήρθε αριθμός μεγαλύτερος του 2, ποια είναι η πιθανότητα να είναι άρτιος;

ΛΥΣΗ

$$B = \{3, 4, 5, 6\}, A = \{2, 4, 6\}, A \cap B = \{4, 6\}. P(A | B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Πίνακας διπλής εισόδου

Σε ένα σχολείο 200 μαθητών καταγράφηκε το φύλο και αν ασχολούνται με κάποιο άθλημα:

	Αθλείται	Δεν αθλείται	Σύνολο
Αγόρι	70	30	100
Κορίτσι	50	50	100
Σύνολο	120	80	200

Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. (α) Ποια η πιθανότητα να αθλείται; (β) Αν είναι κορίτσι, ποια η πιθανότητα να αθλείται; (γ) Αν αθλείται, ποια η πιθανότητα να είναι κορίτσι; (δ) Είναι τα ενδεχόμενα «κορίτσι» και «αθλείται» ανεξάρτητα;

ΛΥΣΗ

(α) $P(A) = \frac{120}{200} = 0,6$.

(β) $P(A | K) = \frac{50}{100} = 0,5$ (περιοριζόμαστε στη γραμμή των κοριτσιών).

(γ) $P(K | A) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12} \approx 0,42$ (περιοριζόμαστε στη στήλη «αθλείται»). Παρατήρησε ότι $P(A | K) \neq P(K | A)$!

(δ) $P(A | K) = 0,5 \neq 0,6 = P(A)$: τα ενδεχόμενα **δεν** είναι ανεξάρτητα. (Ισοδύναμα $P(K \cap A) = 0,25 \neq 0,5 \cdot 0,6 = 0,3$.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Κλήρωση χωρίς επανάθεση

Ένα κουτί περιέχει 4 κόκκινες και 6 μαύρες μπάλες. Παίρνουμε δύο μπάλες, τη μία μετά την άλλη, χωρίς επανάθεση. Ποια η πιθανότητα (α) να είναι και οι δύο κόκκινες (β) να είναι μία κόκκινη και μία μαύρη;

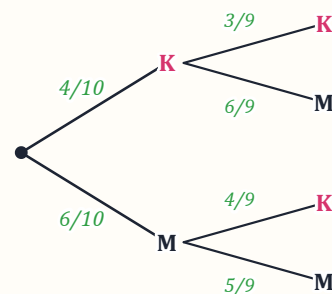
ΛΥΣΗ

Με δένδροδιάγραμμα και πολλαπλασιαστικό νόμο:

$$(α) P(K_1 \cap K_2) = P(K_1) \cdot P(K_2 | K_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}.$$

$$(β) \text{ Δύο κλαδιά: } KM \text{ ή } MK \text{ (ασυμβίβαστα): } \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}.$$

$$(\text{Έλεγχος με Συνδυαστική: } (α) \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15} \checkmark.)$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Ανεξάρτητες βολές

Ένας μπασκετμπολίστας ευστοχεί στις ελεύθερες βολές με πιθανότητα 0,8, ανεξάρτητα από βολή σε βολή. Σε δύο βολές, ποια η πιθανότητα να ευστοχήσει (α) και στις δύο (β) σε καμία (γ) τουλάχιστον σε μία;

ΛΥΣΗ

$$(α) 0,8 \cdot 0,8 = 0,64. (β) 0,2 \cdot 0,2 = 0,04. (γ) 1 - 0,04 = 0,96 \text{ (συμπληρωματικό του «καμία»)}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Ποιοτικός έλεγχος (με δένδροδιάγραμμα)

Ένα εργοστάσιο έχει δύο μηχανές. Η μηχανή Α παράγει το 60% των προϊόντων με ποσοστό ελαττωματικών 2%, ενώ η Β το 40% με ποσοστό ελαττωματικών 5%. (α) Ποια η πιθανότητα ένα τυχαίο προϊόν να είναι ελαττωματικό; (β) Αν ένα προϊόν βρέθηκε ελαττωματικό, ποια η πιθανότητα να προέρχεται από τη μηχανή Α;

ΛΥΣΗ

$$(α) \text{ Δύο κλαδιά οδηγούν σε ελαττωματικό: } P(E) = 0,6 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,05 = 0,012 + 0,020 = 0,032, \text{ δηλαδή } 3,2\%.$$

$$(β) P(A | E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{0,012}{0,032} = 0,375. \text{ Αν και η Α παράγει τα περισσότερα προϊόντα, ένα ελαττωματικό προέρχεται πιθανότερα από τη Β (62,5\%)}!$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Δενδροδιάγραμμα: οι δύο «χρυσοί» κανόνες

1. Κατά μήκος ενός κλαδιού **πολλαπλασιάζουμε** (πολλαπλασιαστικός νόμος).
2. **Ανάμεσα** σε διαφορετικά κλαδιά που οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα **προσθέτουμε** (ασυμβίβαστα).
3. Έλεγχος: οι πιθανότητες των κλαδιών που ξεκινούν από τον ίδιο κόμβο αθροίζουν σε 1.

ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Σύγχυση $P(A | B)$ και $P(B | A)$

✗ «Η πιθανότητα να αθλείται ένα κορίτσι είναι ίδια με την πιθανότητα να είναι κορίτσι κάποιος που αθλείται.»

✓ $P(A | K) = 0,5$ ενώ $P(K | A) \approx 0,42$. Η δεσμευμένη πιθανότητα **δεν** είναι συμμετρική: αλλάζει ο «παρονομαστής» (το ενδεχόμενο που θεωρούμε δεδομένο).

ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — «Το τυχερό νούμερο έρχεται»

✗ «Το νόμισμα έφερε 5 φορές κορόνα στη σειρά, άρα την επόμενη φορά είναι πιο πιθανό να έρθει γράμματα.»

✓ Οι ρίψεις είναι **ανεξάρτητες**: το νόμισμα «δεν θυμάται». Η πιθανότητα για γράμματα είναι πάλι $\frac{1}{2}$. (Αυτό είναι η περίφημη «πλάνη του τζογαδόρου».)

ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Η δεσμευμένη πιθανότητα κρύβει μερικά από τα πιο εντυπωσιακά «παράδοξα» των Μαθηματικών. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με τέτοια προβλήματα και αναλυτικές λύσεις. Καλή επιτυχία!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 3.4 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Αν $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ και $P(A \cap B) = 0,2$, να βρείτε τα $P(A | B)$ και $P(B | A)$. Είναι τα A , B ανεξάρτητα;

→ Λύση 3.4/1

- 2** Ρίχνουμε ένα νόμισμα και ένα ζάρι. Ποια η πιθανότητα να έρθει κορόνα και 6; Κορόνα ή 6;

→ Λύση 3.4/2

- 3** Ρίχνουμε δύο ζάρια. Αν το άθροισμα είναι 8, ποια η πιθανότητα το ένα ζάρι να έδειξε 6;

→ Λύση 3.4/3

- 4** Ένα κουτί έχει 3 άσπρες και 2 μαύρες μπάλες. Παίρνουμε δύο μπάλες χωρίς επανάθεση. Ποια η πιθανότητα η δεύτερη να είναι μαύρη;

→ Λύση 3.4/4

- 5 Δύο σκοπευτές ρίχνουν ανεξάρτητα στον ίδιο στόχο, με πιθανότητες επιτυχίας 0,7 και 0,6. Ποια η πιθανότητα ο στόχος να πετύχει (α) και από τους δύο (β) από ακριβώς έναν (γ) από κανέναν; → Λύση 3.4/5
- 6 Ένα τεστ για μια ασθένεια, που προσβάλλει το 1% του πληθυσμού, βγαίνει θετικό στο 95% των ασθενών και (λανθασμένα) στο 10% των υγιών. Αν ένα άτομο βγει θετικό, ποια η πιθανότητα να έχει πραγματικά την ασθένεια; → Λύση 3.4/6
- 7 Να αποδείξετε ότι, αν τα A, B είναι ανεξάρτητα, τότε και τα A, B' είναι ανεξάρτητα. → Λύση 3.4/7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Πιθανότητες

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

Επαναληπτικά θέματα Πιθανοτήτων

Ο «χάρτης» του κεφαλαίου

ΣΥΝΟΨΗ — Τι πρέπει να ξέρεις να κάνεις

Δεξιότητα	Μάθημα
Δειγματικός χώρος, δένδροδιάγραμμα, πίνακας διπλής εισόδου	3.1
Πράξεις ενδεχομένων και «μετάφραση» λέξεων σε σύμβολα	3.1
Κλασικός ορισμός, συμπληρωματικό, προσθετικός νόμος	3.2
Πολλαπλασιαστική αρχή, διατάξεις, μεταθέσεις, συνδυασμοί	3.3
Δεσμευμένη πιθανότητα, πολλαπλασιαστικός νόμος, ανεξαρτησία	3.4

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Θέμα τύπου εξετάσεων: κλήρωση από κάλπη

Μια κάλπη περιέχει 5 κόκκινες και 3 άσπρες μπάλες. Παίρνουμε τυχαία δύο μπάλες ταυτόχρονα. (α) Ποια η πιθανότητα να είναι ίδιου χρώματος; (β) Ποια η πιθανότητα να είναι τουλάχιστον μία άσπρη; (γ) Αν οι δύο μπάλες είναι ίδιου χρώματος, ποια η πιθανότητα να είναι κόκκινες;

ΛΥΣΗ

$$N(\Omega) = \binom{8}{2} = 28.$$

$$(α) \text{ Δύο κόκκινες: } \binom{5}{2} = 10 \cdot \text{ δύο άσπρες: } \binom{3}{2} = 3. P(I) = \frac{13}{28}.$$

$$(β) \text{ Συμπληρωματικό του «καμία άσπρη» (δηλαδή δύο κόκκινες): } 1 - \frac{10}{28} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}.$$

$$(γ) P(K | I) = \frac{P(K \cap I)}{P(I)} = \frac{10/28}{13/28} = \frac{10}{13}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Θέμα τύπου εξετάσεων: ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα με $P(A) = 0,5$ και $P(B) = 0,3$. Να βρεθούν οι πιθανότητες: (α) $P(A \cap B)$ (β) $P(A \cup B)$ (γ) να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα δύο (δ) $P(A | B')$.

ΛΥΣΗ

$$(α) P(A \cap B) = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15.$$

$$(β) P(A \cup B) = 0,5 + 0,3 - 0,15 = 0,65.$$

$$(γ) P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,65 - 0,15 = 0,5.$$

$$(δ) \text{ Τα } A, B' \text{ είναι επίσης ανεξάρτητα, άρα } P(A | B') = P(A) = 0,5.$$



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Θέλεις να δοκιμάσεις τις γνώσεις σου σε ολοκληρωμένα επαναληπτικά διαγωνίσματα Πιθανοτήτων; Στο mathgreece.com σε περιμένει ένα πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα Επ. 3 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Ρίχνουμε δύο ζάρια. Ποια η πιθανότητα το άθροισμα να είναι 9;

●○○ → Λύση Επ. 3/1
- 2** Ρίχνουμε τρία νομίσματα. Ποια η πιθανότητα να έρθουν τουλάχιστον δύο κορόνες;

●○○ → Λύση Επ. 3/2
- 3** Επιλέγουμε τυχαία έναν τετραψήφιο κωδικό PIN (ψηφία 0–9, με επανάληψη). Ποια η πιθανότητα να έχει όλα τα ψηφία διαφορετικά;

●●○ → Λύση Επ. 3/3
- 4** Από 5 άνδρες και 4 γυναίκες επιλέγεται τυχαία 3μελής επιτροπή. Ποια η πιθανότητα να περιλαμβάνει τουλάχιστον μία γυναίκα;

●●○ → Λύση Επ. 3/4
- 5** Αν $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ και $P(A \cap B) = 0,3$, να εξετάσετε αν τα A , B είναι ανεξάρτητα και να βρείτε την $P(A | B)$.

●●○ → Λύση Επ. 3/5
- 6** Τα A , B είναι ασυμβίβαστα με $P(A) = 0,5$ και $P(A \cup B) = 0,8$. Να βρείτε την $P(B)$ και να εξετάσετε αν είναι ανεξάρτητα.

●●○ → Λύση Επ. 3/6
- 7** Το 70% των μαθητών περνά ένα πρώτο τεστ. Από όσους το περνούν, το 80% περνά και το δεύτερο, ενώ από όσους αποτυγχάνουν στο πρώτο, το 40% περνά το δεύτερο. Ποια η πιθανότητα ένας τυχαίος μαθητής να περάσει το δεύτερο τεστ;

●●○ → Λύση Επ. 3/7
- 8** Γράφουμε τυχαία τα γράμματα της λέξης ΑΡΙΘΜΟΣ σε μια σειρά. Ποια η πιθανότητα η «λέξη» που προκύπτει να αρχίζει από Α; Να αρχίζει από Α και να τελειώνει σε Σ;

●●● → Λύση Επ. 3/8

Τυπολόγιο – Όλη η ύλη με μια ματιά

Στις σελίδες αυτές συγκεντρώνονται όλοι οι βασικοί τύποι και κανόνες του βιβλίου, οργανωμένοι ανά κεφάλαιο. Χρησιμοποίησέ τες για γρήγορη επανάληψη πριν από ένα διαγώνισμα — και αν κάτι δεν σου είναι ξεκάθαρο, γύρνα στο αντίστοιχο μάθημα.

Κεφάλαιο 1 • Διαφορικός Λογισμός

Θέμα	Τύπος / κανόνας
Πεδίο ορισμού	παρονομαστής $\neq 0$, υπόρριζο ≥ 0 , όρισμα λογαρίθμου > 0
Συνέχεια στο x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
Ορισμός παραγώγου	$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
Εφαπτομένη	$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
Βασικές παράγωγοι	$(c)' = 0, (x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}, (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x, (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x, (e^x)' = e^x, (\ln x)' = \frac{1}{x}$
Κανόνες	$(f \pm g)' = f' \pm g', (cf)' = cf', (fg)' = f'g + fg', \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
Σύνθετη	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) g'(x)$
	$(e^u)' = e^u u', (\ln u)' = \frac{u'}{u}, (u^\nu)' = \nu u^{\nu-1} u'$
Κίνηση	$v(t) = S'(t), a(t) = v'(t) = S''(t)$
Μονοτονία	$f' > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα, $f' < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα
Ακρότατα	$f'(x_0) = 0$ και αλλαγή προσήμου της f' ή $f''(x_0) < 0$ (μέγιστο), $f''(x_0) > 0$ (ελάχιστο)

Κεφάλαιο 2 · Στατιστική

Θέμα	Τύπος
Σχετική συχνότητα	$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \sum f_i = 1$
Αθροιστικές	$N_i = \nu_1 + \dots + \nu_i, F_i = \frac{N_i}{\nu}$
Γωνία κυκλικού διαγράμματος	$\alpha_i = f_i \cdot 360^\circ$
Πλάτος κλάσης	$c \approx \frac{R}{\kappa}$ (στρογγυλοποίηση προς τα πάνω)
Μέση τιμή	$\bar{x} = \frac{1}{\nu} \sum t_i = \frac{1}{\nu} \sum x_i \nu_i = \sum x_i f_i$
Σταθμικός μέσος	$\bar{x} = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i}$
Διάμεσος	μεσαία παρατήρηση (ή μέσος όρος των δύο μεσαίων) μετά από διάταξη
Εκατοστημόριο (ομαδοποιημένα)	$P_p \approx L + \frac{p - F_{\pi\rho\nu}}{F_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} - F_{\pi\rho\nu}} c$
Εύρος, ενδοτεταρτημοριακό	$R = \max - \min, Q = Q_3 - Q_1$
Διακύμανση	$s^2 = \frac{1}{\nu} \sum (t_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{\nu} \left[\sum t_i^2 - \frac{(\sum t_i)^2}{\nu} \right]$
Τυπική απόκλιση	$s = \sqrt{s^2}$
Κανονική κατανομή	68% στο $\bar{x} \pm s$, 95% στο $\bar{x} \pm 2s$, 99,7% στο $\bar{x} \pm 3s$
Συντελεστής μεταβολής	$CV = \frac{s}{\bar{x}}$, ομοιογενές αν $CV \leq 10\%$
Μετασχηματισμός $y = \alpha x + \beta$	$\bar{y} = \alpha \bar{x} + \beta, s_y = \alpha s_x$
Παλινδρόμηση	$\hat{\beta} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}$
Συσχέτιση	$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}, -1 \leq r \leq 1$

◆ Κεφάλαιο 3 · Πιθανότητες

Θέμα	Τύπος
Κλασικός ορισμός	$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$
Συμπληρωματικό	$P(A') = 1 - P(A)$
Προσθετικός νόμος	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Διαφορά	$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
Πολλαπλασιαστική αρχή	$\nu_1 \cdot \nu_2 \cdots \nu_\kappa$
Διατάξεις	$\Delta_\kappa^\nu = \frac{\nu!}{(\nu - \kappa)!}$
Μεταθέσεις	$\nu!$
Συνδυασμοί	$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu - \kappa)!}$
Δεσμευμένη	$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Πολλαπλασιαστικός νόμος	$P(A \cap B) = P(B) P(A B)$
Ανεξάρτητα	$P(A \cap B) = P(A) P(B)$



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Θέλεις αυτό το τυπολόγιο σε μορφή κάρτας, μαζί με επαναληπτικά διαγωνίσματα για όλη την ύλη; Θα τα βρεις στο mathgreece.com — πλήρες και ολοκληρωμένο **δωρεάν** φροντιστήριο.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Λύσεις των ασκήσεων

Εδώ θα βρεις αναλυτικές λύσεις για όλες τις άλυτες ασκήσεις του βοηθήματος, οργανωμένες ανά κεφάλαιο και μάθημα. Συμβουλή: προσπάθησε πρώτα μόνος σου τουλάχιστον 15 λεπτά — η λύση διαβάζεται πολύ πιο ουσιαστικά όταν έχεις ήδη παλέψει με την άσκηση.

Για ακόμη περισσότερες λυμένες ασκήσεις και θέματα εξετάσεων:

mathgreece.com

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Διαφορικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 1.1α — Συναρτήσεις – Γραφικές παραστάσεις – Μονοτονία – Ακρότατα

- 1 $f(0) = 1, f(2) = 8 - 4 + 1 = 5, f(-1) = -1 + 2 + 1 = 2, f(1/2) = \frac{1}{8} - 1 + 1 = \frac{1}{8}.$
- 2 (α) $x^2 - 5x = x(x - 5) \neq 0: A = \mathbb{R} - \{0, 5\}.$ (β) $x \geq -7: A = [-7, +\infty).$ (γ) $2x - 1 > 0: A = (\frac{1}{2}, +\infty).$
- 3 $t^2 - 7t + 10 = 0 \iff t = 2 \text{ ή } t = 5.$
- 4 Πρέπει $4 - x \geq 0$, δηλαδή $x \leq 4$, και $x^2 \neq 1$, δηλαδή $x \neq \pm 1$. Άρα $A = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 4].$
- 5 $(f + g)(x) = x^2 + 2x + 2, (fg)(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3, \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{x^2 - 1}{2x + 3}$ με $x \neq -\frac{3}{2}.$
- 6 Έστω $0 \leq x_1 < x_2$. Τότε $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0$, αφού $x_2 - x_1 > 0$ και $x_2 + x_1 > 0$. Άρα $f(x_1) < f(x_2).$
- 7 $K(x) = 500 + 8x, E(x) = 13x, P(x) = E(x) - K(x) = 5x - 500$. Κέρδος όταν $P(x) > 0 \iff x > 100$, δηλαδή από 101 τεμάχια και πάνω.
- 8 Η βάση γίνεται τετράγωνο πλευράς $30 - 2x$ και το ύψος είναι x . Άρα $V(x) = x(30 - 2x)^2$. Πρέπει $x > 0$ και $30 - 2x > 0$, δηλαδή $0 < x < 15$. (Θα βρούμε τον μέγιστο όγκο στο μάθημα 1.4β.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Διαφορικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 1.1β — Όριο και συνέχεια συνάρτησης

- 1 (α) $-1 + 4 - 2 = 1.$ (β) $\frac{10}{2} = 5.$ (γ) $0 + 3 = 3.$
- 2 (α) $\lim(x + 5) = 10.$ (β) $\lim(x - 2) = -4.$
- 3 (α) $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+3}{x+1} \rightarrow \frac{4}{2} = 2.$ (β) $2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1)$, οπότε το όριο είναι $\lim(2x + 1) = 7.$
- 4 Πολλαπλασιάζουμε με $\sqrt{x+4} + 2: \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} \rightarrow \frac{1}{4}.$
- 5 $(2 + h)^2 - 4 = 4h + h^2 = h(4 + h)$, άρα το όριο είναι $\lim(4 + h) = 4.$
- 6 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{x-3} = \lim x = 3.$ Για να είναι συνεχής πρέπει $f(3) = 3.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Διαφορικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 1.2 — Η έννοια της παραγώγου

- 1 $\frac{3(1+h)^2 - 3}{h} = \frac{6h + 3h^2}{h} = 6 + 3h \rightarrow 6.$ Άρα $f'(1) = 6.$
- 2 $\frac{4(x_0+h) - 7 - (4x_0 - 7)}{h} = \frac{4h}{h} = 4.$ Η παράγωγος είναι 4 σε κάθε σημείο: η κλίση μιας ευθείας είναι σταθερή.
- 3 $f(3) = 3. \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 2(3+h) - 3}{h} = \frac{4h + h^2}{h} \rightarrow 4.$ Εφαπτομένη: $y - 3 = 4(x - 3)$, δηλαδή $y = 4x - 9.$
- 4 Μέση: $\frac{S(4) - S(1)}{3} = \frac{28 - 4}{3} = 8 \text{ m/s}.$ Στιγμιαία: $\frac{(1+h)^2 + 3(1+h) - 4}{h} = \frac{5h + h^2}{h} \rightarrow 5 \text{ m/s}.$
- 5 $\frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{2 - (2+h)}{2h(2+h)} = \frac{-1}{2(2+h)} \rightarrow -\frac{1}{4}.$
- 6 Η παράγωγος της x^2 στο x_0 (με τον ορισμό): $\frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h \rightarrow 2x_0.$ Παράλληλη εφαπτομένη σημαίνει ίση κλίση: $2x_0 = 4 \Rightarrow x_0 = 2.$ Το σημείο είναι το $(2, 4).$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Διαφορικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 1.3α — Παράγωγος συνάρτησης – Βασικοί τύποι και κανόνες

- 1 (α) $20x^3 - 6x$ (β) $\frac{7}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2}$ (γ) $3e^x - \frac{4}{x}$.
- 2 (α) $2 \sin x + 5 \eta \mu x$ (β) $5x^4$ (το e^3 είναι σταθερά) (γ) $x^2 - x + 1$.
- 3 (α) $2x(x-4) + (x^2+1) = 3x^2 - 8x + 1$ (β) $e^x \sin x - e^x \eta \mu x = e^x (\sin x - \eta \mu x)$ (γ) $2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$.
- 4 (α) $\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ (β) $\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$.
- 5 $f'(0) = e^0 = 1: y - 1 = x$, δηλαδή $y = x + 1$.
 $g'(1) = 1: y = x - 1$.
- 6 $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \iff x = \pm 2$. Σημεία $(2, -16)$ και $(-2, 16)$.
- 7 $f(1) = 1 + \alpha + \beta = 3$ και $f'(x) = 2x + \alpha$,
 $f'(1) = 2 + \alpha = 5$. Άρα $\alpha = 3$ και $\beta = -1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Διαφορικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 1.3β — Σύνθετες συναρτήσεις – Δεύτερη παράγωγος – Ρυθμός μεταβολής

- 1 (α) $4(2x-5)^3 \cdot 2 = 8(2x-5)^3$ (β) $3e^{3x+1}$ (γ) $\frac{5}{5x} = \frac{1}{x}$ (δ) $\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.
- 2 (α) $-2 \eta \mu 2x$ (β) $2x \sin(x^2)$ (γ) $-e^{-x}$.
- 3 $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5$, $f''(x) = 12x^2 - 12x$.
- 4 (α) $2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2-x)$ (β) $\frac{2x+4}{x^2+4x}$ (γ) $\sqrt{x} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$.
- 5 $v(t) = 25 - 10t$, $v(1) = 15$ m/s. $v(t) = 0 \iff t = 2,5$ s. Μέγιστο ύψος $h(2,5) = 62,5 - 31,25 = 31,25$ m.
- 6 $T'(t) = 200 \cdot 0,1e^{-0,1t} = 20e^{-0,1t}$. $T'(0) = 20$ °C/λεπτό, $T'(10) = 20e^{-1} \approx 7,4$ °C/λεπτό: ο φούρνος ζεσταίνεται όλο και πιο αργά.
- 7 $E(t) = (3+2t)^2$, $E'(t) = 2(3+2t) \cdot 2 = 4(3+2t)$, $E'(2) = 28$ cm²/s. Διαγώνιος $\delta(t) = \sqrt{2}(3+2t)$, $\delta'(t) = 2\sqrt{2} \approx 2,83$ cm/s (σταθερός ρυθμός).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Διαφορικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 1.4α — Μονοτονία και ακρότατα με τη βοήθεια της παραγώγου

- 1 $f'(x) = 2x - 6$. Φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$, αύξουσα στο $[3, +\infty)$, ελάχιστο $f(3) = -7$.
- 2 $f'(x) = -3x^2 + 12 = -3(x-2)(x+2)$: αρνητική για $|x| > 2$, θετική για $-2 < x < 2$. Φθίνουσα στα $(-\infty, -2]$, $[2, +\infty)$, αύξουσα στο $[-2, 2]$. Ελάχιστο $f(-2) = -16$, μέγιστο $f(2) = 16$.
- 3 $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$. Για $0 < x < 2$ αρνητική, για $x > 2$ θετική. Ελάχιστο $f(2) = 4$. (Άρα $x + \frac{4}{x} \geq 4$ για κάθε $x > 0$.)
- 4 $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(x+2)$. Πρόσημο του $x(x+2)$: θετικό για $x < -2$ ή $x > 0$, αρνητικό στο $(-2, 0)$. Τοπικό μέγιστο $f(-2) = 4e^{-2} \approx 0,54$, τοπικό ελάχιστο $f(0) = 0$.
- 5 $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$. Τιμές: $f(0) = 0$, $f(1) = 4$, $f(3) = 0$, $f(4) = 4$. Μέγιστη 4 (στα $x = 1$ και $x = 4$), ελάχιστη 0 (στα $x = 0$ και $x = 3$).
- 6 $g'(x) = e^x - 1$: αρνητική για $x < 0$, θετική για $x > 0$. Η g έχει ολικό ελάχιστο $g(0) = 0$. Άρα $g(x) \geq 0$, δηλαδή $e^x \geq x + 1$.

- 7 $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x - 9$, $f'(1) = 3 + 2\alpha - 9 = 0 \Rightarrow \alpha = 3$. Τότε $f''(x) = 6x + 6$, $f''(1) = 12 > 0$: τοπικό **ελάχιστο**, $f(1) = 1 + 3 - 9 + 1 = -4$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Διαφορικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 1.4β — Προβλήματα βελτιστοποίησης

- 1 x και $16 - x$, $\Pi(x) = 16x - x^2$, $\Pi'(x) = 16 - 2x = 0 \iff x = 8$. Οι αριθμοί είναι 8 και 8, γινόμενο 64.
- 2 $P'(x) = -4x + 120 = 0 \iff x = 30$, $P(30) = -1800 + 3600 - 1000 = 800$.
- 3 $y = \frac{64}{x}$, $\Pi(x) = 2x + \frac{128}{x}$, $\Pi'(x) = 2 - \frac{128}{x^2} = 0 \iff x = 8$. Ελάχιστο (η Π' αλλάζει από αρνητική σε θετική). Τετράγωνο 8×8 , περίμετρος 32 m.
- 4 $\bar{K}(x) = x + 100 + \frac{2500}{x}$, $\bar{K}'(x) = 1 - \frac{2500}{x^2} = 0 \iff x = 50$. Ελάχιστο μέσο κόστος $\bar{K}(50) = 50 + 100 + 50 = 200$ €/τεμάχιο.
- 5 Με κορυφές $(\pm x, 0)$ και $(\pm x, 12 - x^2)$: $E(x) = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$, $0 < x < \sqrt{12}$. $E'(x) = 24 - 6x^2 = 0 \iff x = 2$. $E(2) = 2 \cdot 2 \cdot 8 = 32$.
- 6 Βάση $x \times x$, ύψος $h = \frac{8000}{x^2}$. Κόστος $C(x) = 0,02 \cdot 2x^2 + 0,01 \cdot 4xh = 0,04x^2 + \frac{320}{x}$. $C'(x) = 0,08x - \frac{320}{x^2} = 0 \iff x^3 = 4000 \iff x \approx 15,87$ cm, και $h = \frac{8000}{x^2} \approx 31,75$ cm (δηλαδή $h = 2x$). Ελάχιστο κόστος $\approx 0,04 \cdot 251,98 + 20,16 \approx 30,24$ €.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Διαφορικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα Επ. 1 — Επαναληπτικά θέματα Διαφορικού Λογισμού

- 1 Το όριο είναι $\lim(x+1) = 2$. Αν ορίσουμε $f(1) = 2$, η συνάρτηση γίνεται συνεχής στο 1 (στην ουσία γίνεται $f(x) = x + 1$ για κάθε x).
- 2 $f'(x) = 2xe^{2x} + x^2 \cdot 2e^{2x} = 2xe^{2x}(1+x)$.
- 3 $f(e) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(e) = \frac{1}{e}$. Εφαπτομένη: $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$, δηλαδή $y = \frac{x}{e}$ — διέρχεται από την αρχή των αξόνων!
- 4 $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$. Αύξουσα στα $(-\infty, 1]$, $[2, +\infty)$, φθίνουσα στο $[1, 2]$. Τοπικό μέγιστο $f(1) = 5$, τοπικό ελάχιστο $f(2) = 16 - 36 + 24 = 4$.
- 5 $v(t) = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t-2)(t-4)$: ακίνητο τις στιγμές $t = 2$ s και $t = 4$ s. $a(t) = 6t - 18 = 0 \iff t = 3$ s.
- 6 $f'(x) = 2x + \alpha$, $f'(1) = 2 + \alpha = 5 \Rightarrow \alpha = 3$.
- 7 $g(x) = x + \frac{9}{x}$, $g'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = 0 \iff x = 3$ (ελάχιστο, αφού η g' αλλάζει από αρνητική σε θετική). Ελάχιστη τιμή $g(3) = 6$.
- 8 Κέρδος $K(p) = (p-10)(100-2p) = -2p^2 + 120p - 1000$, για $10 \leq p \leq 50$. $K'(p) = -4p + 120 = 0 \iff p = 30$ €. Μέγιστο κέρδος $K(30) = 20 \cdot 40 = 800$ € την εβδομάδα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Στατιστική

Λύσεις · Μάθημα 2.1 — Βασικές έννοιες της Στατιστικής

- 1 (α) Ποιοτική. (β) Ποσοτική διακριτή. (γ) Ποσοτική συνεχής. (δ) Ποιοτική (με φυσική σειρά διάταξης, αλλά όχι αριθμητική).

- 2** Πληθυσμός: όλα τα νοικοκυριά του δήμου.
Μεταβλητή: «χρησιμοποιεί ανακύκλωση» (ποιοτική, ναι/όχι). Τυχαία δειγματοληψία: από τον κατάλογο όλων των διευθύνσεων επιλέγουμε π.χ. 400 νοικοκυριά με κλήρωση (γεννήτρια τυχαίων αριθμών), ώστε κάθε νοικοκυριό να έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί.

- 3** Όχι. Το δείγμα δεν είναι τυχαίο: ψηφίζουν μόνο αναγνώστες της συγκεκριμένης εφημερίδας και, συνήθως, όσοι έχουν έντονη άποψη (αυτοεπιλογή). Το μεγάλο μέγεθος του δείγματος δεν διορθώνει τη μεροληψία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Στατιστική

Λύσεις · Μάθημα 2.2α — Παρουσίαση δεδομένων – Πίνακες συχνотήτων και διαγράμματα

1

x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0	1	4	1	4
1	2	8	3	12
2	4	16	7	28
3	9	36	16	64
4	6	24	22	88
5	3	12	25	100

- 2** Τουλάχιστον 3: $36 + 24 + 12 = 72\%$ (ή $100 - F_3 = 100 - 28$). Το πολύ 2: $N_3 = 7$ μαθητές.

- 3** Σύνολο 1200 €. Γωνίες: διατροφή 135° , στέγαση 90° , μεταφορές 45° , ψυχαγωγία 30° , άλλα 60° .

- 4** $f_4 = 100\% - 80\% = 20\%$, άρα $0,2\nu = 8$ και $\nu = 40$. Από τις αθροιστικές: $f_1 = 10\%$, $f_2 = 35\% - 10\% = 25\%$, $f_3 = 80\% - 35\% = 45\%$. Συχνотήτες: $\nu_1 = 4$, $\nu_2 = 10$, $\nu_3 = 18$, $\nu_4 = 8$ (έλεγχος: άθροισμα 40 ✓).

- 5** Υπάρχει **ανοδική τάση** (κάθε χρόνο οι επισκέπτες αυξάνονται: $3600 \rightarrow 3900 \rightarrow 4400$ ετησίως) και έντονη **εποχικότητα**: το δεύτερο εξάμηνο κάθε χρονιάς (καλοκαίρι) έχει περίπου διπλάσιους επισκέπτες από το πρώτο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Στατιστική

Λύσεις · Μάθημα 2.2β — Ομαδοποίηση – Ιστογράμματα – Καμπύλες συχνотήτων

- 1** Κεντρικές τιμές 63, 69, 75, 81, 87. $f_i\%$: 10, 24, 36, 20, 10. $F_i\%$: 10, 34, 70, 90, 100.
- 2** $F_2\% = 34\%$. Τουλάχιστον 78 kg: $10 + 5 = 15$ αθλητές.
- 3** $R = 9,7 - 3,2 = 6,5$ και $\frac{6,5}{5} = 1,3$. Αν πάρουμε ακριβώς $c = 1,3$ ξεκινώντας από το 3,2, η τελευταία κλάση θα ήταν $[8,4, 9,7)$ και η μεγαλύτερη παρατήρηση 9,7 θα έμενε **εκτός** (το διάστημα είναι ανοικτό δεξιά). Γι' αυτό στρογγυλοποιούμε προς τα πάνω: $c = 1,4$. Κλάσεις: $[3,2, 4,6)$, $[4,6, 6,0)$, $[6,0, 7,4)$, $[7,4, 8,8)$, $[8,8, 10,2)$.

- 4** Μισή κλάση $[66, 72)$: 6, ολόκληρη $[72, 78)$: 18, μισή $[78, 84)$: 5. Σύνολο περίπου 29 αθλητές.

- 5** (α) Περίπου **ομοιόμορφη** στο $[0, 15]$ λεπτά (κάθε χρόνος αναμονής εξίσου πιθανός, αν φτάνουμε τυχαία). (β) **Θετική ασυμμετρία**: πολλοί μέτριοι μισθοί, λίγοι πολύ υψηλοί. (γ) **Αρνητική ασυμμετρία**: οι περισσότεροι πήραν υψηλό βαθμό, λίγοι χαμηλό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Στατιστική

Λύσεις · Μάθημα 2.3α — Μέτρα θέσης: μέση τιμή, διάμεσος, τεταρτημόρια, επικρατούσα τιμή

- 1 Άθροισμα 59, $\bar{x} = \frac{59}{9} \approx 6,56$. Διάταξη: 3, 4, 6, 6, 6, 7, 8, 9, 10, $\delta = 6$. $M_0 = 6$.
- 2 $\bar{x} = \frac{700}{6} \approx 116,67$ €. Διάταξη: 95, 100, 110, 120, 135, 140, $\delta = \frac{110+120}{2} = 115$ €.
- 3 Άθροισμα των 5: 60. Των 6: 78. Ο νέος αριθμός είναι 18.
- 4 $\bar{x} = \frac{0+2+8+27+24+15}{25} = \frac{76}{25} = 3,04$. Η δ είναι η 13η παρατήρηση: $N_3 = 7$, $N_4 = 16$, άρα $\delta = 3$. $M_0 = 3$.
- 5 Διάταξη: 12, 15, 16, 18, 19, **21**, 23, 25, 27, 28, 30 ($\nu = 11$). $\delta = 21$. Αριστερά: 12, 15, 16, 18, 19 $\rightarrow Q_1 = 16$. Δεξιά: 23, 25, 27, 28, 30 $\rightarrow Q_3 = 27$.
- 6 $\bar{x} = \frac{63 \cdot 5 + 69 \cdot 12 + 75 \cdot 18 + 81 \cdot 10 + 87 \cdot 5}{50} = \frac{315 + 828 + 1350 + 810 + 435}{50} = \frac{3738}{50} = 74,76$ kg. $F\%$: 10, 34, 70, 90, 100. Διάμεσος στην $[72, 78)$: $\delta \approx 72 + \frac{50-34}{70-34} \cdot 6 \approx 74,67$ kg.
- 7 Αν α τα αγόρια: $13,5\alpha + 15(20 - \alpha) = 14,4 \cdot 20 = 288$, δηλαδή $300 - 1,5\alpha = 288$, $\alpha = 8$ αγόρια (και 12 κορίτσια).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Στατιστική

Λύσεις · Μάθημα 2.3β — Μέτρα διασποράς – Κανονική κατανομή – Συντελεστής μεταβολής

- 1 $R = 7$, $\bar{x} = 6$. Αποκλίσεις $-4, -1, 0, 2, 3$, τετράγωνα 16, 1, 0, 4, 9, άθροισμα 30. $s^2 = 6$, $s = \sqrt{6} \approx 2,45$.
- 2 $CV = \frac{4}{50} = 8\% \leq 10\%$: ομοιογενές.
- 3 $\sum (x_i - \bar{x})^2 \nu_i = 2,25 \cdot 3 + 0,25 \cdot 8 + 0,25 \cdot 6 + 2,25 \cdot 2 + 6,25 \cdot 1 = 6,75 + 2 + 1,5 + 4,5 + 6,25 = 21$. $s^2 = \frac{21}{20} = 1,05$, $s \approx 1,02$.
- 4 $1 = \bar{x} + 2s$: πάνω από αυτό περίπου 2,5%. Μεταξύ 0,7 ($\bar{x} - s$) και 1 ($\bar{x} + 2s$): $34\% + 34\% + 13,5\% = 81,5\%$.
- 5 $\bar{y} = 13$, $s_y = 3$ (δεν αλλάζει), $CV_y = \frac{3}{13} \approx 23\%$ (από $\frac{3}{11} \approx 27\%$).
- 6 $\bar{x} = 12$. $s^2 = \frac{1}{10} (1530 - \frac{14400}{10}) = \frac{90}{10} = 9$, $s = 3$. $CV = 25\%$.
- 7 Το 16% αριστερά αντιστοιχεί στο $\bar{x} - s$ και το 2,5% δεξιά στο $\bar{x} + 2s$. Άρα $\bar{x} - s = 40$ και $\bar{x} + 2s = 70$. Αφαιρώντας: $3s = 30$, $s = 10$, $\bar{x} = 50$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Στατιστική

Λύσεις · Μάθημα 2.4 — Γραμμική παλινδρόμηση

- 1 $\bar{x} = 2,5$, $\bar{y} = 5,5$. Αποκλίσεις x : $-1,5, -0,5, 0,5, 1,5$ · y : $-2,5, -0,5, 0,5, 2,5$. $\sum$ γινομένων = $3,75 + 0,25 + 0,25 + 3,75 = 8$, $\sum (x - \bar{x})^2 = 5$. $\hat{\beta} = 1,6$, $\hat{\alpha} = 5,5 - 4 = 1,5$. $\hat{y} = 1,5 + 1,6x$.
- 2 $\hat{\alpha} = 3,5$: «πάγια» χρέωση (κόστος σε μηδενική απόσταση). $\hat{\beta} = 0,8$: κάθε επιπλέον χιλιόμετρο κοστίζει κατά μέσο όρο 0,8 €. Για 12 km: $3,5 + 9,6 = 13,1$ €.
- 3 $\hat{\beta} = \frac{6 \cdot 270 - 24 \cdot 60}{6 \cdot 116 - 576} = \frac{1620 - 1440}{696 - 576} = \frac{180}{120} = 1,5$. $\bar{x} = 4$, $\bar{y} = 10$, $\hat{\alpha} = 10 - 6 = 4$. $\hat{y} = 4 + 1,5x$.
- 4 Η ευθεία είναι $\hat{y} = 9 + 2(x - 2) = 5 + 2x$. Διέρχεται από το $(\bar{x}, \bar{y})$: $\bar{y} = 5 + 10 = 15$.

- 5 $\bar{x} = 3, \bar{y} = 38$. Αποκλίσεις y : 12, 6, 2, -7, -13·
γινόμενα με $x - \bar{x}$ (-2, -1, 0, 1, 2):
-24, -6, 0, -7, -26, άθροισμα -63· $\sum (x - \bar{x})^2 =$
10. $\hat{\beta} = -6,3, \hat{\alpha} = 38 + 18,9 = 56,9. \hat{y} = 56,9 -$
6,3 x . Το αρνητικό $\hat{\beta}$ σημαίνει ότι κάθε αύξηση της
τιμής κατά 1 € μειώνει κατά μέσο όρο τη ζήτηση
κατά 6,3 τεμάχια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Στατιστική

Λύσεις · Μάθημα 2.5 — Γραμμική συσχέτιση

- 1 (α) Ισχυρή θετική. (β) Ασθενής αρνητική. (γ)
Πρακτικά ανύπαρκτη. (δ) Τέλεια αρνητική (όλα τα
σημεία σε ευθεία με αρνητική κλίση).
- 2 Αρνητικό, γιατί το r έχει πάντα το ίδιο πρόσημο με
το $\hat{\beta} = -0,7$.
- 3 $\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y}) = 8, \sum (x - \bar{x})^2 = 5, \sum (y - \bar{y})^2 = 6,25 + 0,25 + 0,25 + 6,25 = 13. r = \frac{8}{\sqrt{65}} \approx$
0,99.
- 4 Όχι. Η κοινή αιτία είναι το **μέγεθος της πυρκαγιάς**:
μεγάλες πυρκαγιές προκαλούν μεγάλες ζημιές **και**
απαιτούν περισσότερους πυροσβέστες. Συσχέτιση
δεν σημαίνει αιτιότητα.
- 5 $\nu \sum xy - \sum x \sum y = 900 - 800 = 100. \nu \sum x^2 -$
 $(\sum x)^2 = 450 - 400 = 50. \nu \sum y^2 - (\sum y)^2 =$
1800 - 1600 = 200. $\hat{\beta} = \frac{100}{50} = 2, \bar{x} = 4, \bar{y} = 8,$
 $\hat{\alpha} = 0$, άρα $\hat{y} = 2x. r = \frac{100}{\sqrt{50 \cdot 200}} = \frac{100}{100} = 1$: τα
σημεία βρίσκονται **ακριβώς** πάνω στην ευθεία $y =$
 $2x$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Στατιστική

Λύσεις · Μάθημα Επ. 2 — Επαναληπτικά θέματα Στατιστικής

- 1 $\bar{y} = 3 \cdot 12 + 2 = 38, s_y = 3 \cdot 2 = 6$.
- 2 $60 + x = 75 \Rightarrow x = 15$. Διάταξη 12, 14, 15, 16, 18,
 $\delta = 15$.
- 3 $\bar{x} = \frac{2 \cdot 5 + 6 \cdot 15 + 10 \cdot 20 + 14 \cdot 10}{50} = \frac{440}{50} = 8,8. F\%:$
10, 40, 80, 100. Διάμεσος στην [8, 12): $\delta \approx 8 +$
 $\frac{50-40}{80-40} \cdot 4 = 9$.
- 4 (α) $130 = \bar{x} + 2s$: περίπου 2,5%. (β) $\bar{x} \pm s$: 68%.
(γ) Από $\bar{x} - 2s$ έως $\bar{x} + s$: 47,5% + 34% = 81,5%.
- 5 A: $\frac{126}{360} = 35\%$, δηλαδή 126 ψήφοι. B: 25%, 90 ψήφοι.
(Με $\nu = 360$ η γωνία σε μοίρες ισούται με τον
αριθμό των ψήφων!)
- 6 $\hat{\alpha} = 20 - 2,5 \cdot 4 = 10, \hat{y} = 10 + 2,5x$. Για $x = 6$:
 $\hat{y} = 25$.
- 7 $CV_A = 7,5\%$ (ομοιογενές), $CV_B = 15\%$ (όχι
ομοιογενές). Πιο ομοιογενές το A, παρότι έχει
μεγαλύτερη τυπική απόκλιση.
- 8 $r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{40 \cdot 90}} = \frac{S_{xy}}{60} = 0,8 \Rightarrow S_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) =$
48. $\hat{\beta} = \frac{48}{40} = 1,2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Πιθανότητες

Λύσεις · Μάθημα 3.1 — Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

- 1 $\Omega =$
{KKK, KKG, KKK, GKK, KGG, GKGG, GGK, GGG}.
 $A = \{KKG, KKK, GKK\}. B = \Omega - \{KKK\}$ (όλα
εκτός από το KKK), $N(B) = 7$.
- 2 $\Omega = \{KA, KM, AK, AM, MK, MA\}$ (η σειρά
μετράει, και δεν μπορεί να βγει η ίδια μπάλα δύο
φορές). $N(\Omega) = 6$.

- 3 $A \cap B = \{4, 5\}$, $A \cup B = \{1, \dots, 7\}$, $A' \cap B = B - A = \{6, 7\}$, $(A \cup B)' = \{8, 9, 10\}$, ακριβώς ένα: $\{1, 2, 3, 6, 7\}$.

- 4 (α) $(A \cup B)' = A' \cap B'$. (β) «Το πολύ ένα» σημαίνει «όχι και τα δύο»: $(A \cap B)'$ — δηλαδή όλο το Ω εκτός από την τομή (η περιοχή έξω από τον «φακό» της τομής).

- 5 Το γινόμενο είναι **περιττό** μόνο όταν και οι δύο ενδείξεις είναι περιττές: $3 \cdot 3 = 9$ ζεύγη. Άρα το γινόμενο είναι άρτιο σε $36 - 9 = 27$ ζεύγη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Πιθανότητες

Λύσεις · Μάθημα 3.2 — Η έννοια της πιθανότητας

- 1 $N(\Omega) = 10$. (α) $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ (β) $1 - \frac{2}{10} = \frac{4}{5}$ (γ) $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ (ασυμβίβαστα).

- 2 $N(\Omega) = 8$. (α) $\frac{1}{8}$ (β) $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ (γ) $\frac{3}{8}$.

- 3 (α) 0,8 (β) $0,3 - 0,1 = 0,2$ (γ) $1 - 0,8 = 0,2$ (δ) $1 - P(A \cap B) = 0,9$.

- 4 (α) $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. (β) Άρτιο άθροισμα όταν οι ενδείξεις είναι και οι δύο άρτιες (9 ζεύγη) ή και οι δύο περιττές (9): $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. (γ) Καμία $6:5 \cdot 5 = 25$ ζεύγη, άρα $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

- 5 $P(A \cup \Gamma) = 0,40 + 0,25 - 0,10 = 0,55$, άρα καμία: 45%.

- 6 Τότε θα ήταν $P(A \cup B) = 0,7 + 0,6 - 0,2 = 1,1 > 1$, αδύνατο. Άρα **δεν** μπορούν να υπάρχουν. (Γενικά πρέπει $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1 = 0,3$.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Πιθανότητες

Λύσεις · Μάθημα 3.3 — Συνδυαστική

- 1 (α) 720 (β) $8 \cdot 7 = 56$ (γ) 42 (δ) 36 (ε) $\binom{12}{2} = 66$.

- 2 $4 \cdot 5 \cdot 2 = 40$.

- 3 $6! = 720$. Αν δύο συγκεκριμένοι κάθονται στις άκρες: 2 τρόποι γι' αυτούς (ποιος αριστερά) και $4! = 24$ για τους υπόλοιπους: 48.

- 4 $3M+2\Phi: \binom{7}{3} \binom{4}{2} = 35 \cdot 6 = 210$. $4M+1\Phi: \binom{7}{4} \binom{4}{1} = 35 \cdot 4 = 140$. $5M: \binom{7}{5} = 21$. Σύνολο 371.

- 5 $N(\Omega) = \binom{12}{3} = 220$. (α) $\frac{\binom{8}{3}}{220} = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$. (β) $\frac{\binom{4}{1} \binom{8}{2}}{220} = \frac{4 \cdot 28}{220} = \frac{112}{220} = \frac{28}{55}$.

- 6 Δύο φορές: η σειρά (γηπεδούχος-φιλοξενούμενος) μετράει, άρα $\Delta_2^{10} = 90$ αγώνες. Μία φορά: $\binom{10}{2} = 45$ αγώνες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Πιθανότητες

Λύσεις · Μάθημα 3.4 — Δεσμευμένη πιθανότητα – Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

- 1 $P(A | B) = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$, $P(B | A) = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$. Επειδή $P(A)P(B) = 0,2 = P(A \cap B)$, είναι **ανεξάρτητα** (πράγματι $P(A | B) = P(A)$).

- 2 Ανεξάρτητα: $P(K \cap 6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$. $P(K \cup 6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$.

- 3 Άθροισμα 8: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) — 5 ζεύγη. Με κάποιο 6: (2, 6), (6, 2). $P = \frac{2}{5}$.

- 4 $P(M_2) = P(A_1)P(M_2 | A_1) + P(M_1)P(M_2 | M_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{20} + \frac{2}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ — όσο και η πιθανότητα η **πρώτη** να είναι μαύρη!

5 (α) $0,7 \cdot 0,6 = 0,42$. (β) $0,7 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,6 = 0,28 + 0,18 = 0,46$. (γ) $0,3 \cdot 0,4 = 0,12$. (Έλεγχος: $0,42 + 0,46 + 0,12 = 1$ ✓.)

6 $P(+) = 0,01 \cdot 0,95 + 0,99 \cdot 0,10 = 0,0095 + 0,099 = 0,1085$. $P(A | +) = \frac{0,0095}{0,1085} \approx 0,088$, δηλαδή περίπου 9%! Επειδή η ασθένεια είναι σπάνια, τα περισσότερα θετικά αποτελέσματα προέρχονται από υγιείς — ένα εντυπωσιακό αλλά πολύ σημαντικό συμπέρασμα.

7 $P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B')$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Πιθανότητες

Λύσεις · Μάθημα Επ. 3 — Επαναληπτικά θέματα Πιθανοτήτων

1 Ζεύγη: $(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$. $P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

2 Ευνοϊκά: ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ, ΚΚΚ — 4 από 8. $P = \frac{1}{2}$.

3 $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10^4} = \frac{5040}{10000} = 0,504$.

4 $1 - \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = 1 - \frac{10}{84} = \frac{74}{84} = \frac{37}{42}$.

5 $P(A)P(B) = 0,3 = P(A \cap B)$: ανεξάρτητα. $P(A | B) = \frac{0,3}{0,5} = 0,6 = P(A)$.

6 $P(B) = 0,8 - 0,5 = 0,3$. Δεν είναι ανεξάρτητα: $P(A \cap B) = 0 \neq 0,15 = P(A)P(B)$.

7 Δενδροδιάγραμμα: $0,7 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,56 + 0,12 = 0,68$.

8 Όλες οι σειρές: $7! = 5040$. Με Α πρώτο: $6! = 720$, $P = \frac{1}{7}$. Με Α πρώτο και Σ τελευταίο: $5! = 120$, $P = \frac{120}{5040} = \frac{1}{42}$.

Τα Μαθηματικά δεν τελειώνουν εδώ...

Αυτό το βοήθημα σε συνόδευσε σε όλη την ύλη των Μαθηματικών της Γ' Λυκείου ΕΠΑΛ: από την έννοια της παραγώγου μέχρι τη στατιστική ανάλυση δεδομένων και τις πιθανότητες. Αν θέλεις να συνεχίσεις, να λύσεις περισσότερες ασκήσεις, να δεις βίντεο-εξηγήσεις ή να προετοιμαστείς για διαγωνίσματα, σε περιμένει ένα πλήρες και ολοκληρωμένο **δωρεάν** φροντιστήριο:

mathgreece.com

- Θεωρία βήμα-βήμα για κάθε μάθημα
- Εκατοντάδες λυμένες και άλυτες ασκήσεις
- Διαγωνίσματα και θέματα εξετάσεων
- Υλικό για όλες τις τάξεις του Γυμνασίου και του Λυκείου

«Η Στατιστική είναι η γραμματική της επιστήμης» — Karl Pearson.