

ΠΛΗΡΕΣ ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΜΕΝΟ ΒΟΗΘΗΜΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ · ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

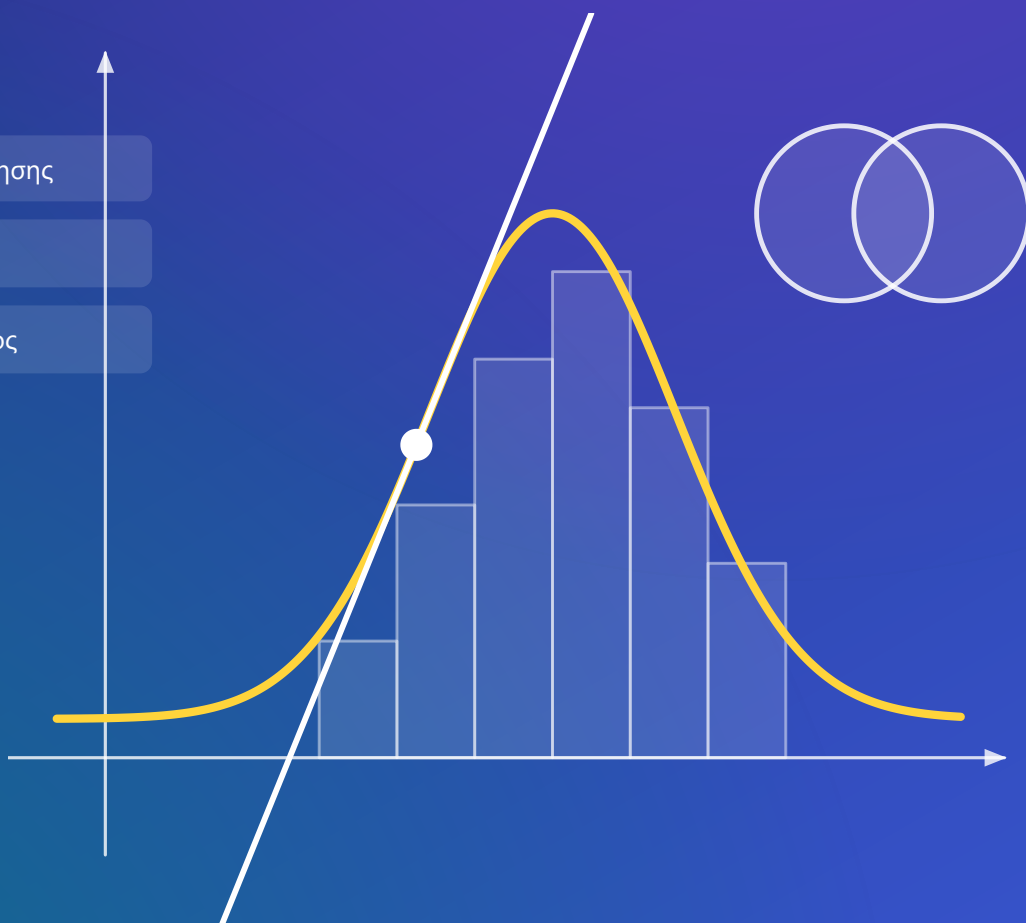
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θεωρία · Λυμένα παραδείγματα · Προσοχή & συχνά λάθη · Ασκήσεις με λύσεις

1 Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

2 Διαφορικός Λογισμός

3 Ολοκληρωτικός Λογισμός



mathgreece.com

Πλήρες & ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο μαθηματικών

Πρόλογος

Αγαπητή μαθήτριά, αγαπητέ μαθητή,

τα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ' Λυκείου είναι, για πολλούς, το μάθημα που «κρίνει» τις Πανελλαδικές. Είναι όμως και κάτι πολύ περισσότερο: είναι η πρώτη σου επαφή με την **Ανάλυση**, τον κλάδο των Μαθηματικών που γέννησε τη σύγχρονη επιστήμη και τεχνολογία. Όρια, παράγωγοι, ολοκληρώματα — τα εργαλεία που θα μάθεις εδώ τα χρησιμοποιούν καθημερινά μηχανικοί, φυσικοί, οικονομολόγοι, γιατροί και προγραμματιστές.

Το βοήθημα που κρατάς γράφτηκε ώστε να μπορείς να μελετήσεις **μόνος σου**, με σιγουριά, ολόκληρη την ύλη:

- κάθε **κεφάλαιο** ξεκινά με δική του έγχρωμη σελίδα, όπου βλέπεις όλα τα μαθήματά του και τι θα κατακτήσεις·
- κάθε **μάθημα** ξεκινά σε νέα σελίδα με την ένδειξη «ΚΕΦΑΛΑΙΟ ... · ΜΑΘΗΜΑ ...», ενώ στην κορυφή κάθε σελίδας βλέπεις πάντα σε ποιο κεφάλαιο και ποιο μάθημα βρίσκεται· η αρίθμηση ακολουθεί τις παραγράφους του σχολικού βιβλίου (όπου μια παράγραφος είναι μεγάλη, τη χωρίζουμε σε δύο μαθήματα, π.χ. «1.5α» και «1.5β»·)
- η θεωρία παρουσιάζεται **πλήρως**: ορισμοί με ακρίβεια, θεωρήματα, και οι **αποδείξεις** που πρέπει να ξέρεις, γραμμένες βήμα-βήμα·
- σε κάθε μάθημα θα βρεις **λυμένα παραδείγματα** διαβαθμισμένης δυσκολίας, κουτιά «Προσοχή!» και «Συχνό λάθος» με όσα συνήθως κοστίζουν μονάδες, και **μεθοδολογίες** για κάθε κατηγορία ασκήσεων·
- κάθε μάθημα κλείνει με **άλυτες ασκήσεις**, των οποίων οι **πλήρεις λύσεις** βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου· κάθε κεφάλαιο κλείνει με **επαναληπτικά θέματα** τύπου εξετάσεων.

Όλα τα παραδείγματα και οι ασκήσεις είναι πρωτότυπα, γραμμένα ειδικά για αυτό το βοήθημα· δεν θα τα βρεις στο σχολικό βιβλίο.

ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Το βοήθημα αυτό είναι μέρος ενός μεγαλύτερου έργου. Στο **mathgreece.com** θα βρεις ένα πλήρες και ολοκληρωμένο **δωρεάν** φροντιστήριο μαθηματικών: θεωρία, βίντεο, επιπλέον ασκήσεις, διαγωνίσματα και θέματα Πανελλαδικών.

Μια συμβουλή από κάποιον που διδάσκει χρόνια: στην Ανάλυση **κάθε λέξη μετράει**. «Συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ » δεν είναι το ίδιο με «συνεχής στο (α, β) »· « $f'(x) > 0$ » δεν είναι το ίδιο με «γνησίως αύξουσα». Πριν εφαρμόσεις ένα θεώρημα, **έλεγξε και γράψε τις προϋποθέσεις του**. Αυτό είναι που ξεχωρίζει το 20 από το 15.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ελέγξτε με τον καθηγητή σας ποιες παράγραφοι περιλαμβάνονται στην εξεταστέα ύλη της χρονιάς σας. Το βοήθημα καλύπτει ολόκληρο το σχολικό βιβλίο.

Καλή μελέτη και καλή επιτυχία!

Περιεχόμενα

Πρόλογος	2
Πώς να διαβάσεις αυτό το βοήθημα	5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Όριο – Συνέχεια συνάρτησης 7

1.1	Πραγματικοί αριθμοί	8
1.2α	Η έννοια της συνάρτησης – Γραφική παράσταση	11
1.2β	Ισότητα – Πράξεις – Σύνθεση συναρτήσεων	16
1.3	Μονότονες συναρτήσεις – Ακρότατα – Αντίστροφη συνάρτηση	19
1.4	Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$	24
1.5α	Ιδιότητες των ορίων – Υπολογισμός ορίων	27
1.5β	Κριτήριο παρεμβολής – Τριγωνομετρικά όρια – Όριο σύνθετης	31
1.6	Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$	34
1.7	Όριο συνάρτησης στο άπειρο	38
1.8α	Συνέχεια συνάρτησης	41
1.8β	Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων σε διάστημα	44
Επ. 1	Επαναληπτικά θέματα: Όριο – Συνέχεια	48

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Διαφορικός Λογισμός 50

2.1	Η έννοια της παραγώγου	51
2.2	Παραγωγίσιμες συναρτήσεις – Παράγωγος συνάρτησης	55
2.3	Κανόνες παραγώγισης	58
2.4	Ρυθμός μεταβολής	62
2.5	Θεώρημα Rolle – Θεώρημα Μέσης Τιμής	65
2.6	Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής	68
2.7	Τοπικά ακρότατα συνάρτησης	72
2.8	Κυρτότητα – Σημεία καμπής	76
2.9	Ασύμπτωτες – Κανόνες De L'Hospital	79
2.10	Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης	83
Επ. 2	Επαναληπτικά θέματα Διαφορικού Λογισμού	86

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Ολοκληρωτικός Λογισμός 88

3.1	Αόριστο ολοκλήρωμα	89
3.2	Μέθοδοι ολοκλήρωσης	93
3.3	Διαφορικές εξισώσεις	97
3.4	Ορισμένο ολοκλήρωμα	100
3.5	Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ – Θεμελιώδες θεώρημα	103
3.6	Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού	107
3.7	Εμβαδόν επίπεδου χωρίου	109
Επ. 3	Επαναληπτικά θέματα Ολοκληρωτικού Λογισμού	112

Τυπολόγιο – Όλη η ύλη με μια ματιά	114
---	------------

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ	117
----------------------------------	------------

Κεφ. 1	Λύσεις ασκήσεων · Όριο – Συνέχεια συνάρτησης	118
Κεφ. 2	Λύσεις ασκήσεων · Διαφορικός Λογισμός	121
Κεφ. 3	Λύσεις ασκήσεων · Ολοκληρωτικός Λογισμός	124

Πώς να διαβάσεις αυτό το βοήθημα

Σε όλο το βιβλίο χρησιμοποιούμε τα ίδια «κουτιά», ώστε να αναγνωρίζεις με μια ματιά τι διαβάζεις:

ΟΡΙΣΜΟΣ — Τι είναι

Ο ορισμός μιας νέας έννοιας. Μάθε τον με ακρίβεια.

ΘΕΩΡΗΜΑ — Τι είναι

Ένα βασικό αποτέλεσμα της θεωρίας ή ένας κανόνας που χρησιμοποιείς ελεύθερα στις ασκήσεις.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η αιτιολόγηση ενός αποτελέσματος, γραμμένη βήμα-βήμα.

ΚΛΕΙΔΙ — Τι είναι

Ένας τύπος ή κανόνας που πρέπει να ξέρεις «απέξω».

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ένα σχόλιο που φωτίζει μια λεπτομέρεια της θεωρίας.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Κάτι που χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή: προϋποθέσεις, εξαιρέσεις, λεπτές διατυπώσεις.

ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ

Ένα λάθος που κάνουν πολύ συχνά οι μαθητές. Με **X** σημειώνουμε τη λανθασμένη σκέψη και με **✓** τη σωστή.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Πώς αντιμετωπίζουμε μια κατηγορία ασκήσεων: τα βήματα που ακολουθούμε.

ΛΙΓΗ ΙΣΤΟΡΙΑ

Ιστορικά στοιχεία: πώς γεννήθηκαν οι ιδέες που μελετάμε.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Παραπομπή στο mathgreece.com, όπου θα βρεις επιπλέον υλικό για το αντίστοιχο θέμα.

Η διαβάθμιση των ασκήσεων

Σήμανση	Επίπεδο	Τι σημαίνει
●○○	Βασική	Άμεση εφαρμογή της θεωρίας· πρέπει να τη λύνεις χωρίς δυσκολία.
●●○	Μέτρια	Συνδυάζει δύο ή περισσότερες ιδέες· τυπικό θέμα διαγωνίσματος.
●●●	Απαιτητική	Για όσους θέλουν να πάνε παραπέρα· τυπικό «τελευταίο θέμα».

Δίπλα σε κάθε άσκηση υπάρχει η ένδειξη «→ Λύση», που σε οδηγεί (και με κλικ, στο ηλεκτρονικό αρχείο) στην αναλυτική λύση στο τέλος του βιβλίου.

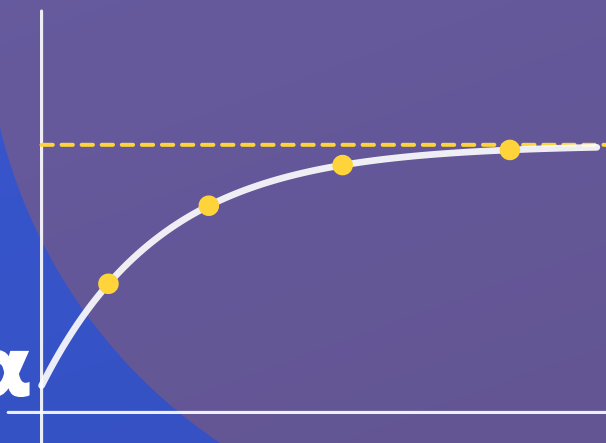
Συμβολισμοί που χρησιμοποιούμε

Σύμβολο	Διαβάζεται / σημαίνει
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, πραγματικοί αριθμοί
$D_f, f(A)$	πεδίο ορισμού της f , σύνολο τιμών της f στο A
C_f	η γραφική παράσταση της f
$f \circ g, f^{-1}$	σύνθεση, αντίστροφη συνάρτηση
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$	όριο από αριστερά, από δεξιά
$f'(x_0), f''(x)$	παράγωγος στο x_0 , δεύτερη παράγωγος
$\int f(x) dx$	αόριστο ολοκλήρωμα (σύνολο παραγουσών)
$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$	ορισμένο ολοκλήρωμα από α έως β
$[F(x)]_{\alpha}^{\beta}$	$F(\beta) - F(\alpha)$
$E(\Omega)$	εμβαδόν του χωρίου Ω
$\nearrow, \searrow$	γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα
$\cup, \cap$ (σε πίνακες)	κυρτή, κοίλη

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στις ασκήσεις, όταν λέμε «συνάρτηση» εννοούμε πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής. Όταν δεν δηλώνεται πεδίο ορισμού, εννοείται το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ο τύπος έχει νόημα.

1

Όριο – Συνέχεια
συνάρτησης

Τα μαθήματα του κεφαλαίου

- 1.1** Πραγματικοί αριθμοί
- 1.2α** Η έννοια της συνάρτησης – Γραφική παράσταση
- 1.2β** Ισότητα – Πράξεις – Σύνθεση συναρτήσεων
- 1.3** Μονότονες συναρτήσεις – Ακρότατα – Αντίστροφη συνάρτηση
- 1.4** Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$
- 1.5α** Ιδιότητες των ορίων – Υπολογισμός ορίων
- 1.5β** Κριτήριο παρεμβολής – Τριγωνομετρικά όρια – Όριο σύνθετης
- 1.6** Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$
- 1.7** Όριο συνάρτησης στο άπειρο
- 1.8α** Συνέχεια συνάρτησης
- 1.8β** Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων σε διάστημα
- Επ. 1** Επαναληπτικά θέματα: Όριο – Συνέχεια

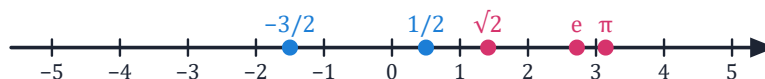
Τι θα κατακτήσεις

- Να βρίσκεις πεδίο ορισμού, να σχεδιάζεις και να «διαβάξεις» γραφικές παραστάσεις.
- Να κάνεις πράξεις και σύνθεση συναρτήσεων και να βρίσκεις αντίστροφες.
- Να υπολογίζεις όρια (πεπερασμένα, άπειρα, στο άπειρο) με όλες τις τεχνικές.
- Να εξετάζεις τη συνέχεια και να εφαρμόζεις τα θεωρήματα Bolzano, ενδιάμεσων τιμών και μέγιστης-ελάχιστης τιμής.

Η Ανάλυση ξεκινά από μια απλή αλλά βαθιά ερώτηση: **τι συμβαίνει στις τιμές μιας συνάρτησης όταν το x πλησιάζει έναν αριθμό** — ή όταν μεγαλώνει απεριόριστα; Στο κεφάλαιο αυτό ξαναγνωρίζουμε τις συναρτήσεις, μαθαίνουμε τη σύνθεση και την αντίστροφη, ορίζουμε το όριο και τη συνέχεια και φτάνουμε στα μεγάλα θεωρήματα των συνεχών συναρτήσεων: Bolzano, ενδιάμεσων τιμών, μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Όριο – Συνέχεια
συνάρτησης
ΜΑΘΗΜΑ 1.1**Πραγματικοί αριθμοί**

Τα σύνολα των αριθμών



Ο άξονας των πραγματικών αριθμών

Υπενθυμίζουμε τα βασικά σύνολα αριθμών:

- **Φυσικοί:** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- **Ακέραιοι:** $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- **Ρητοί:** $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \beta \neq 0 \right\}$ (οι αριθμοί που γράφονται ως κλάσματα ακεραίων· στη δεκαδική μορφή είναι πεπερασμένοι ή περιοδικοί)
- **Πραγματικοί:** $\mathbb{R}$, που περιέχει τους ρητούς και τους **άρρητους** (π.χ. $\sqrt{2}$, π , e).

Ισχύει $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Με αστερίσκο συμβολίζουμε το σύνολο χωρίς το μηδέν: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. Κάθε πραγματικός αριθμός παριστάνεται με ένα σημείο του **άξονα των πραγματικών αριθμών**, και αντίστροφα.

Διάταξη

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Βασικές ιδιότητες της διάταξης

Για οποιουδήποτε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$:

1. $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$ (μεταβατική).
2. $\alpha > \beta \iff \alpha + \gamma > \beta + \gamma$.
3. Αν $\gamma > 0$: $\alpha > \beta \iff \alpha\gamma > \beta\gamma$. Αν $\gamma < 0$: $\alpha > \beta \iff \alpha\gamma < \beta\gamma$ (η φορά **αλλάζει!**).
4. $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$ (προσθέτουμε κατά μέλη ανισότητες ίδιας φοράς).
5. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$: $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\delta$.
6. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$: $\alpha > \beta \iff \alpha^\nu > \beta^\nu \iff \sqrt[\nu]{\alpha} > \sqrt[\nu]{\beta}$.
7. Αν $\alpha\beta > 0$ (ομόσημοι): $\alpha > \beta \iff \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Δεν αφαιρούμε και δεν διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη!

Από $5 > 2$ και $4 > 0$ **δεν** προκύπτει $5 - 4 > 2 - 0$ (δηλαδή $1 > 2$, λάθος). Επίσης ο πολλαπλασιασμός κατά μέλη επιτρέπεται **μόνο** για θετικούς αριθμούς.

Διαστήματα

Αν $\alpha < \beta$, τα **διαστήματα** με άκρα α, β είναι:

Συμβολισμός	Σύνολο	Ονομασία
$[\alpha, \beta]$	$\alpha \leq x \leq \beta$	κλειστό
(α, β)	$\alpha < x < \beta$	ανοικτό
$[\alpha, \beta)$	$\alpha \leq x < \beta$	κλειστό–ανοικτό
$(\alpha, \beta]$	$\alpha < x \leq \beta$	ανοικτό–κλειστό
$[\alpha, +\infty)$	$x \geq \alpha$	
$(-\infty, \alpha)$	$x < \alpha$	
$(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R}$	

Τα σημεία ενός διαστήματος που δεν είναι άκρα του λέγονται **εσωτερικά σημεία**. Τα $+\infty$ και $-\infty$ **δεν** είναι αριθμοί, γι' αυτό η αγκύλη δίπλα τους είναι πάντα ανοικτή.

Απόλυτη τιμή

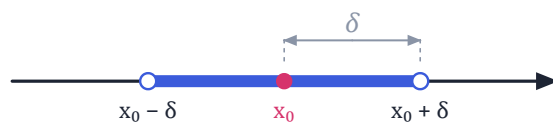
ΟΡΙΣΜΟΣ — Απόλυτη τιμή

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha < 0 \end{cases}$$

Γεωμετρικά, το $|\alpha|$ είναι η απόσταση του α από το 0 και το $|\alpha - \beta|$ η απόσταση των α, β πάνω στον άξονα.

ΘΕΩΡΗΜΑ — Ιδιότητες απόλυτης τιμής

- $|\alpha| \geq 0$, $|\alpha| = |-\alpha|$, $|\alpha|^2 = \alpha^2$, $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$.
- $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$, $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$.
- Τριγωνική ανισότητα:** $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.
- Για $\theta > 0$: $|x| < \theta \iff -\theta < x < \theta$ και $|x| > \theta \iff x < -\theta$ ή $x > \theta$.
- $|x - x_0| < \delta \iff x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.



$|x - x_0| < \delta$: τα x που απέχουν από το x_0 λιγότερο από δ

ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Η ρίζα του τετραγώνου

$\times \sqrt{x^2} = x$.

$\checkmark \sqrt{x^2} = |x|$. Για $x = -3$: $\sqrt{9} = 3 = |-3|$, ενώ το x θα έδινε -3 . Το λάθος αυτό «σκοτώνει» πολλά όρια στο $-\infty$!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ανισότητες με απόλυτες

Να λυθούν: (α) $|2x - 3| < 5$ (β) $|x + 1| \geq 4$.

ΛΥΣΗ

$$(α) -5 < 2x - 3 < 5 \iff -2 < 2x < 8 \iff -1 < x < 4, \text{ δηλαδή } x \in (-1, 4).$$

$$(β) x + 1 \leq -4 \text{ ή } x + 1 \geq 4, \text{ δηλαδή } x \leq -5 \text{ ή } x \geq 3: x \in (-\infty, -5] \cup [3, +\infty).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Διάταξη χωρίς πράξεις

Αν $1 < x < 3$ και $-2 < y < -1$, να βρεθούν μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις $x + y$, $x - y$ και xy .

ΛΥΣΗ

- $x + y$: προσθέτουμε κατά μέλη: $-1 < x + y < 2$.
- $x - y$: γράφουμε $-y$, με $1 < -y < 2$, και προσθέτουμε: $2 < x - y < 5$.
- xy : οι αριθμοί δεν είναι θετικοί, οπότε χρησιμοποιούμε $-y > 0$: $1 \cdot 1 < x(-y) < 3 \cdot 2$, δηλαδή $1 < -xy < 6$, άρα $-6 < xy < -1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.1 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Να γράψετε ως διαστήματα: (α) $-2 \leq x < 5$ (β) $x > -1$ (γ) $|x - 2| \leq 3$.

●○○

→ Λύση 1.1/1

- 2** Να λύσετε την ανίσωση $|3 - x| > 2$.

●○○

→ Λύση 1.1/2

- 3** Αν $2 < \alpha < 4$ και $1 < \beta < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.

●●○

→ Λύση 1.1/3

- 4** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x - 1| + |x + 1| \geq 2$.

●●○

→ Λύση 1.1/4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Όριο – Συνέχεια
συνάρτησης

ΜΑΘΗΜΑ 1.2α

Η έννοια της συνάρτησης – Γραφική
παράσταση

Ορισμός

ΟΡΙΣΜΟΣ — Πραγματική συνάρτηση

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. **Πραγματική συνάρτηση** με πεδίο ορισμού το A λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) f , με την οποία **κάθε** στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε **ένα μόνο** πραγματικό αριθμό y . Το y λέγεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται $f(x)$.

- Το πεδίο ορισμού συμβολίζεται D_f .
- Το σύνολο όλων των τιμών $f(x)$, $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται $f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$.
- Όταν η f δίνεται με τύπο χωρίς να αναφέρεται το πεδίο ορισμού, εννοείται το **ευρύτερο** σύνολο στο οποίο ο τύπος έχει νόημα.

ΚΛΕΙΔΙ — Πώς βρίσκουμε το πεδίο ορισμού

Ο τύπος περιέχει...	Περιορισμός
κλάσμα $\frac{A(x)}{B(x)}$	$B(x) \neq 0$
ρίζα $\sqrt[n]{A(x)}$ (κάθε τάξης $n \geq 2$)	$A(x) \geq 0$
$\ln A(x)$ ή $\log A(x)$	$A(x) > 0$
$\exp A(x)$	$\sin A(x) \neq 0$
$\sin A(x)$	$\eta \mu A(x) \neq 0$
δύναμη $A(x)^\alpha$ με $\alpha \notin \mathbb{Z}$	$A(x) > 0$ (ή ≥ 0 αν $\alpha > 0$)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Ρίζες περιττής τάξης

Στο σχολικό βιβλίο η ρίζα $\sqrt[n]{x}$ ορίζεται **μόνο για $x \geq 0$** , ακόμη και για περιττό n . Έτσι η $f(x) = \sqrt[n]{x}$ έχει πεδίο ορισμού $[0, +\infty)$. (Η «ρίζα» αρνητικού γράφεται ως $-\sqrt[n]{|x|}$.)

Γραφική παράσταση

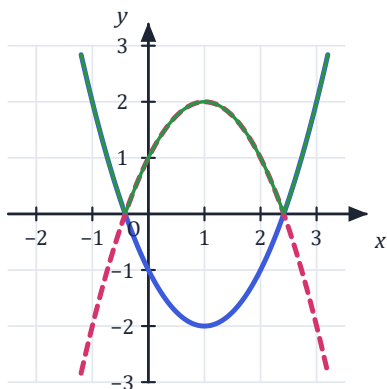
ΟΡΙΣΜΟΣ — Γραφική παράσταση

Γραφική παράσταση της f λέγεται το σύνολο $C_f = \{M(x, y) \mid y = f(x), x \in D_f\}$. Η εξίσωση $y = f(x)$ λέγεται **εξίσωση της C_f** . Κάθε **κατακόρυφη** ευθεία τέμνει τη C_f **το πολύ σε ένα σημείο**.

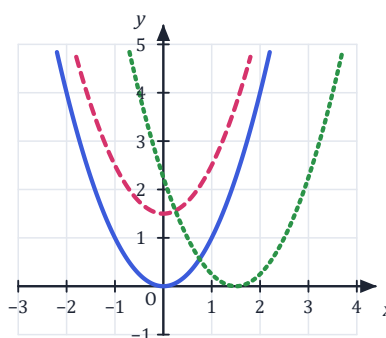
★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Πώς μετασχηματίζεται η γραφική παράσταση

Αν γνωρίζουμε τη C_f :

- η C_{-f} είναι **συμμετρική** της C_f ως προς τον άξονα $x'x$.
- η $C_{|f|}$ προκύπτει αν «αναδιπλώσουμε» προς τα πάνω τα τμήματα της C_f που βρίσκονται κάτω από τον $x'x$.
- η C της $f(x) + c$ ($c > 0$) είναι **κατακόρυφη μετατόπιση** της C_f κατά c προς τα **πάνω** ($-c$: προς τα κάτω).
- η C της $f(x - c)$ ($c > 0$) είναι **οριζόντια μετατόπιση** κατά c προς τα **δεξιά** ($f(x + c)$: προς τα αριστερά).

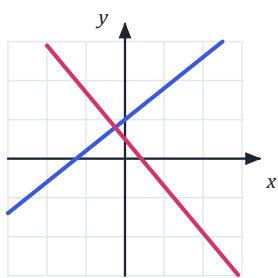


$f, -f$ και $|f|$

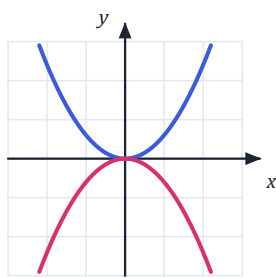


Μετατοπίσεις της $y = x^2$

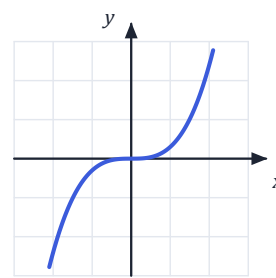
◆ **Οι βασικές συναρτήσεις**



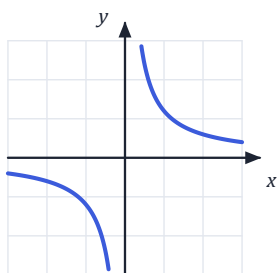
$f(x) = ax + b$



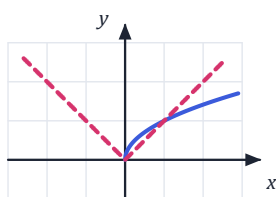
$f(x) = ax^2, a > 0 / a < 0$



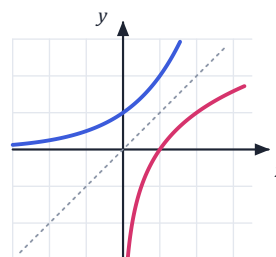
$f(x) = ax^3$



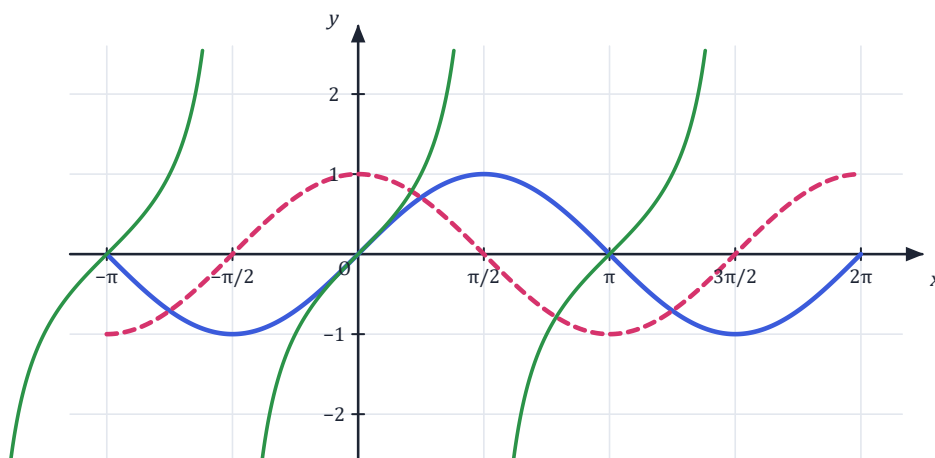
$f(x) = a/x$



$f(x) = \sqrt{x}$ και $|x|$



a^x ($a > 1$) και $\log_a x$



Τριγωνομετρικές συναρτήσεις: ημx, συνx (περίοδος 2π) και εφx (περίοδος π)

❶ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Εκθετική και λογαριθμική

Για $0 < \alpha \neq 1$: η $f(x) = \alpha^x$ έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$, σύνολο τιμών $(0, +\infty)$ και διέρχεται από το $(0, 1)$. η $g(x) = \log_\alpha x$ έχει πεδίο ορισμού $(0, +\infty)$, σύνολο τιμών $\mathbb{R}$ και διέρχεται από το $(1, 0)$. Οι γραφικές τους παραστάσεις είναι **συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$** . Ισχύει $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$ και $\log_\alpha \alpha^x = x$. Ειδικά για $\alpha = e$: $e^{\ln x} = x$ ($x > 0$) και $\ln e^x = x$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Πεδία ορισμού

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των: (α) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-9}$ (β) $g(x) = \ln(4-x^2)$ (γ) $h(x) = \frac{1}{e^x-1}$.

ΛΥΣΗ

(α) $x+2 \geq 0$ και $x^2 \neq 9$: $D_f = [-2, 3) \cup (3, +\infty)$ (το -3 ήδη αποκλείεται).

(β) $4-x^2 > 0 \iff -2 < x < 2$: $D_g = (-2, 2)$.

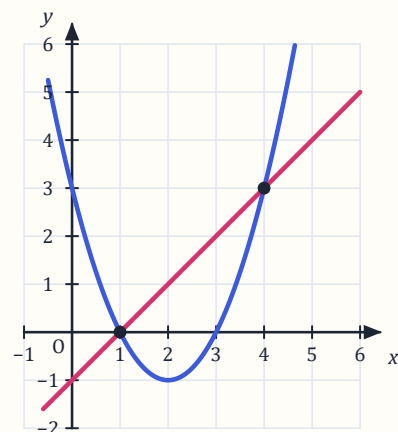
(γ) $e^x \neq 1 \iff x \neq 0$: $D_h = \mathbb{R}^*$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Σημεία τομής με τους άξονες και σχετική θέση

Δίνονται $f(x) = x^2 - 4x + 3$ και $g(x) = x - 1$. Να βρεθούν τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες, τα κοινά σημεία των C_f, C_g και τα διαστήματα όπου η C_f είναι πάνω από τη C_g .

ΛΥΣΗ

- Με τον y' : $f(0) = 3$, σημείο $(0, 3)$. Με τον x' : $x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x = 1$ ή $x = 3$.
- Κοινά σημεία: $x^2 - 4x + 3 = x - 1 \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff x = 1$ ή $x = 4$: σημεία $(1, 0)$ και $(4, 3)$.
- $f(x) - g(x) = (x-1)(x-4) > 0 \iff x < 1$ ή $x > 4$: εκεί η C_f είναι **πάνω** από τη C_g .



💡 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Σχετική θέση δύο καμπυλών

Για να βρούμε πότε η C_f είναι πάνω από τη C_g , μελετάμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$. Οι ρίζες της $f(x) = g(x)$ δίνουν τα κοινά σημεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Σύνολο τιμών

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

ΛΥΣΗ

Ψάχνουμε για ποια y η εξίσωση $y = \frac{2x+1}{x-1}$ έχει λύση $x \neq 1$: $y(x-1) = 2x+1 \iff x(y-2) = y+1$. Αν $y \neq 2$: $x = \frac{y+1}{y-2}$, που είναι πάντα $\neq 1$ (αφού $y+1 = y-2$ είναι αδύνατο). Αν $y = 2$: $0 = 3$, αδύνατο. Άρα $f(D_f) = \mathbb{R} - \{2\}$. ■

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Ελέγχουμε μόνο τον αριθμητή

✗ «Η $f(x) = \frac{\ln x}{x-2}$ ορίζεται για $x > 0$.»

✓ Πρέπει και $x > 0$ και $x \neq 2$: $D_f = (0, 2) \cup (2, +\infty)$.

ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Οι γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων είναι το «αλφάβητο» της Ανάλυσης. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με διαδραστικά γραφήματα για να τις εξασκήσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.2α · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των: (α) $f(x) = \sqrt{6 - 3x}$ (β) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ (γ) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

●○○ → Λύση 1.2α/1
- 2** Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες για $f(x) = e^{2x} - 4$.

●○○ → Λύση 1.2α/2
- 3** Να βρείτε τα διαστήματα όπου η C_f της $f(x) = x^3$ βρίσκεται κάτω από τη C_g της $g(x) = x$.

●●○ → Λύση 1.2α/3
- 4** Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x) = e^x + 1$ και της $g(x) = \ln(x - 1)$.

●●○ → Λύση 1.2α/4
- 5** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = |x^2 - 1|$ και να βρείτε για ποιες τιμές του κ η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει ακριβώς 4 ρίζες.

●●○ → Λύση 1.2α/5
- 6** Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 20. Να εκφράσετε τη διαγώνιό του d ως συνάρτηση της μιας πλευράς x , να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

●●● → Λύση 1.2α/6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Όριο – Συνέχεια
συνάρτησης

ΜΑΘΗΜΑ 1.2β

Ισότητα – Πράξεις – Σύνθεση
συναρτήσεων

◆ Ισότητα συναρτήσεων

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Ίσες συναρτήσεις

Δύο συναρτήσεις f, g λέγονται **ίσες** ($f = g$) όταν έχουν **το ίδιο πεδίο ορισμού** A και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$. Αν η ισότητα ισχύει μόνο σε ένα υποσύνολο Γ των πεδίων ορισμού, λέμε ότι οι f, g είναι ίσες **στο** Γ .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ίσες ή όχι;

Είναι ίσες οι $f(x) = \frac{x^2 - x}{x}$ και $g(x) = x - 1$;

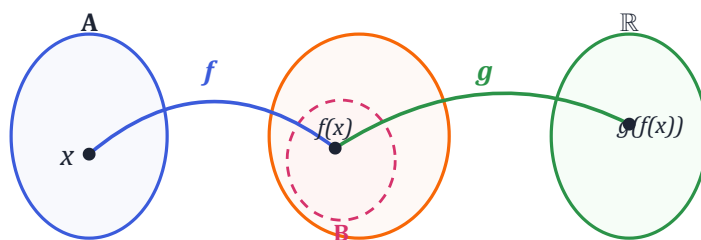
ΛΥΣΗ

Για $x \neq 0$ ισχύει $f(x) = x - 1 = g(x)$. Όμως $D_f = \mathbb{R}^*$ ενώ $D_g = \mathbb{R}$. Άρα **δεν** είναι ίσες· είναι ίσες στο $\mathbb{R}^*$. ■

◆ Πράξεις

Αν f, g είναι συναρτήσεις με πεδία A, B , ορίζουμε τις $f + g, f - g, fg$ με πεδίο ορισμού $A \cap B$, και την $\frac{f}{g}$ με πεδίο ορισμού $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$.

◆ Σύνθεση συναρτήσεων



Η σύνθεση $g \circ f$: πρώτα η f , μετά η g

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Σύνθεση

Αν f, g είναι συναρτήσεις με πεδία A, B , η **σύνθεση της f με τη g** συμβολίζεται $g \circ f$ και ορίζεται ως

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

με πεδίο ορισμού $D_{g \circ f} = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$. Η $g \circ f$ ορίζεται όταν το σύνολο αυτό δεν είναι κενό, δηλαδή όταν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Η σειρά μετράει!

Γενικά $g \circ f \neq f \circ g$. Για $f(x) = x + 1$ και $g(x) = x^2$: $(g \circ f)(x) = (x + 1)^2$, ενώ $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$.
Η σύνθεση όμως είναι **προσεταιριστική**: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

💡 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πώς βρίσκουμε τη σύνθεση $g \circ f$

1. Βρίσκουμε D_f και D_g .
2. Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι τα x με $x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$ (λύνουμε το σύστημα των συνθηκών).
3. Ο τύπος: όπου βλέπουμε x στον τύπο της g , βάζουμε $f(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Σύνθεση με ρίζα

Δίνονται $f(x) = x - 3$ και $g(x) = \sqrt{x}$. Να βρεθούν οι $g \circ f$ και $f \circ g$.

ΛΥΣΗ

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = [0, +\infty).$$

$$g \circ f: \text{πρέπει } x \in \mathbb{R} \text{ και } x - 3 \geq 0, \text{ άρα } D_{g \circ f} = [3, +\infty) \text{ και } (g \circ f)(x) = \sqrt{x - 3}.$$

$$f \circ g: \text{πρέπει } x \geq 0 \text{ (και το } \sqrt{x} \text{ ανήκει πάντα στο } \mathbb{R}), \text{ άρα } D_{f \circ g} = [0, +\infty) \text{ και } (f \circ g)(x) = \sqrt{x} - 3.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Σύνθεση με λογάριθμο

Δίνονται $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{1 - x}$. Να βρεθεί η $g \circ f$.

ΛΥΣΗ

$$\text{Πρέπει } x > 0 \text{ (για την } f) \text{ και } 1 - \ln x \geq 0, \text{ δηλαδή } \ln x \leq 1 \iff x \leq e. \text{ Άρα } D_{g \circ f} = (0, e] \text{ και } (g \circ f)(x) = \sqrt{1 - \ln x}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 «Αποσύνθεση»

Να γραφεί η $h(x) = e^{\eta \mu x^2}$ ως σύνθεση απλούστερων συναρτήσεων.

ΛΥΣΗ

$$h = f_3 \circ f_2 \circ f_1 \text{ με } f_1(x) = x^2, f_2(x) = \eta \mu x, f_3(x) = e^x. \text{ (Η «αποσύνθεση» θα μας χρειαστεί πολύ στην παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων.)}$$

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Ξεχνάμε τον περιορισμό της εσωτερικής

Για $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$, ο μαθητής γράφει ✗ $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{1\}$.

✓ Πρέπει $x \neq 0$ (για να ορίζεται η f) και $\frac{1}{x} \neq 1$, δηλαδή $x \neq 1$. Άρα $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{0, 1\}$, με $(g \circ f)(x) = \frac{x}{1-x}$. Ο απλοποιημένος τύπος «κρύβει» τον περιορισμό $x \neq 0$!



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Η σύνθεση συναρτήσεων είναι πολύ συχνό θέμα στις Πανελλαδικές. Στο mathgreece.com θα βρεις δωρεάν πλήρες φροντιστήριο με κατηγοριοποιημένες ασκήσεις σύνθεσης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.2β · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι $f(x) = \ln x^2$ και $g(x) = 2 \ln x$.

●○○

→ Λύση 1.2β/1

2 Αν $f(x) = 2x + 1$ και $g(x) = x^2 - 3$, να βρείτε τις $f \circ g$ και $g \circ f$.

●○○

→ Λύση 1.2β/2

3 Αν $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \ln(x - 2)$, να βρείτε τη $g \circ f$.

●●○

→ Λύση 1.2β/3

4 Να βρείτε συνάρτηση f ώστε $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 3$, όπου $g(x) = x + 1$.

●●○

→ Λύση 1.2β/4

5 Δίνεται $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε x, y . Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f(-x) = -f(x)$.

●●●

→ Λύση 1.2β/5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Όριο – Συνέχεια
συνάρτησης

ΜΑΘΗΜΑ 1.3

Μονότονες συναρτήσεις – Ακρότατα –
Αντίστροφη συνάρτηση

◆ Μονοτονία

📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Γνησίως μονότονη συνάρτηση

Μια συνάρτηση f λέγεται:

- **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- **γνησίως φθίνουσα** στο Δ , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Αν ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$ (αντίστοιχα $\geq$), η f λέγεται απλώς **αύξουσα** (φθίνουσα). Στην περίπτωση που μια f είναι γνησίως αύξουσα (ή φθίνουσα) σε **όλο** το πεδίο ορισμού της, λέμε απλώς ότι είναι γνησίως αύξουσα (φθίνουσα).

💡 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Μονοτονία με τον ορισμό

Παίρνουμε $x_1 < x_2$ στο Δ και, ξεκινώντας από αυτή την ανισότητα, «χτίζουμε» βήμα-βήμα τον τύπο της f (πολλαπλασιάζουμε, προσθέτουμε, παίρνουμε ρίζες, λογαρίθμους...) προσέχοντας πότε αλλάζει η φορά. Εναλλακτικά, εξετάζουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x_2) - f(x_1)$. (Στο Κεφάλαιο 2 θα βρίσκουμε τη μονοτονία πολύ πιο εύκολα με την παράγωγο.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Μονοτονία με τον ορισμό

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η $f(x) = 2 - \ln(x + 1)$.

ΛΥΣΗ

$D_f = (-1, +\infty)$. Για $-1 < x_1 < x_2$: $x_1 + 1 < x_2 + 1$, άρα (η $\ln$ είναι γνησίως αύξουσα) $\ln(x_1 + 1) < \ln(x_2 + 1)$, οπότε $-\ln(x_1 + 1) > -\ln(x_2 + 1)$ και $f(x_1) > f(x_2)$. Η f είναι **γνησίως φθίνουσα**. ■

◆ Ακρότατα

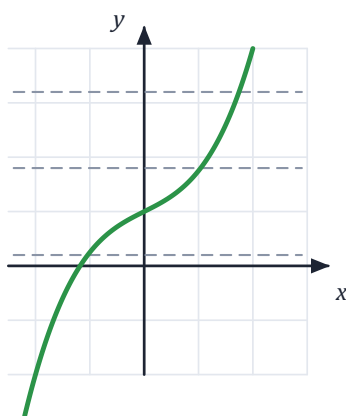
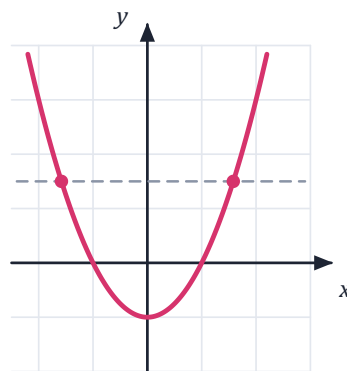
📖 ΟΡΙΣΜΟΣ — Ολικά ακρότατα

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι:

- παρουσιάζει **(ολικό) μέγιστο** στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
- παρουσιάζει **(ολικό) ελάχιστο** στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Π.χ. η $f(x) = 3 - (x - 1)^2$ έχει ολικό μέγιστο $f(1) = 3$ (αφού $(x - 1)^2 \geq 0$), ενώ δεν έχει ελάχιστο. Μια συνάρτηση μπορεί να μην έχει κανένα ακρότατο (π.χ. $f(x) = x$).

Συναρτήσεις «1-1»

1-1: κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C το πολύ μία φορά

όχι 1-1

ΟΡΙΣΜΟΣ — Συνάρτηση 1-1

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1-1** («ένα προς ένα») όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

ή, ισοδύναμα, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Γεωμετρικά: η f είναι 1-1 αν **καμία οριζόντια ευθεία** δεν τέμνει τη C_f σε περισσότερα από ένα σημεία.

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Γνησίως μονότονη $\Rightarrow$ 1-1

Αν μια συνάρτηση είναι **γνησίως μονότονη**, τότε είναι **1-1**.

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω f γνησίως αύξουσα και $x_1 \neq x_2$, π.χ. $x_1 < x_2$. Τότε $f(x_1) < f(x_2)$, άρα $f(x_1) \neq f(x_2)$. Όμοια για γνησίως φθίνουσα. ■

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει

Υπάρχουν συναρτήσεις 1-1 που **δεν** είναι γνησίως μονότονες, π.χ. $f(x) = x$ για $x \leq 0$ και $f(x) = \frac{1}{x}$ για $x > 0$. Επομένως, αν ζητείται «να δείξετε ότι η f είναι 1-1», η μονοτονία είναι ένας (συχνός) τρόπος, όχι ο μόνος.

Αντίστροφη συνάρτηση

Αν η $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για κάθε y του συνόλου τιμών $f(A)$ υπάρχει **μοναδικό** $x \in A$ με $f(x) = y$. Έτσι ορίζεται μια νέα συνάρτηση που «γυρίζει πίσω» από το y στο x .

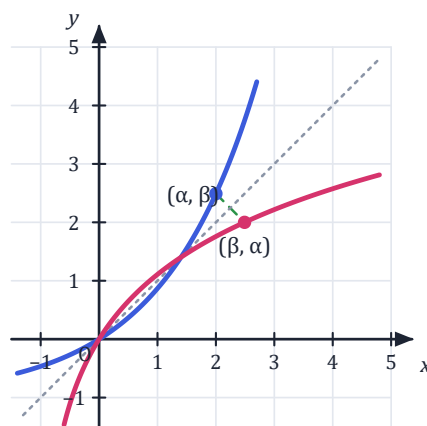
ΟΡΙΣΜΟΣ — Αντίστροφη συνάρτηση

Αν η $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, η **αντίστροφη** $f^{-1} : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται από την ισοδυναμία

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x.$$

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το **σύνολο τιμών** της f και το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το **πεδίο ορισμού** της f . Ισχύει:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in f(A)$$



Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y = x$

ΘΕΩΡΗΜΑ — Συμμετρία των γραφικών παραστάσεων

Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι **συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$** (τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα (το ίδιο για φθίνουσα). Χαρακτηριστικό ζεύγος αντίστροφων: $f(x) = e^x$ και $f^{-1}(x) = \ln x$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πώς βρίσκουμε την αντίστροφη

1. Αποδεικνύουμε ότι η f είναι 1-1 (με τον ορισμό ή με μονοτονία).
2. Λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x : οι τιμές του y για τις οποίες έχει λύση (στο D_f) αποτελούν το $f(A) = D_{f^{-1}}$.
3. Γράφουμε $f^{-1}(y) = \dots$ και (συνήθως) αλλάζουμε το γράμμα: $f^{-1}(x) = \dots$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Αντίστροφη ρητής

Να βρεθεί η αντίστροφη της $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

ΛΥΣΗ

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}.$$

$$\mathbf{1-1:} \quad \text{Αν} \quad f(x_1) = f(x_2): \quad (x_1 + 2)(x_2 - 1) = (x_2 + 2)(x_1 - 1) \iff -x_1 + 2x_2 = -x_2 + 2x_1 \iff 3x_2 = 3x_1, \text{ άρα } x_1 = x_2.$$

Επίλυση: $y = \frac{x+2}{x-1} \iff y(x-1) = x+2 \iff x(y-1) = y+2$. Για $y \neq 1$: $x = \frac{y+2}{y-1}$ (και είναι $\neq 1$). Για $y = 1$ αδύνατο. Άρα $f(A) = \mathbb{R} - \{1\}$ και

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-1}, \quad x \neq 1.$$

Η f είναι αντίστροφη του εαυτού της! (Η C_f είναι συμμετρική ως προς την $y = x$.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Αντίστροφη εκθετικής

Να βρεθεί η αντίστροφη της $f(x) = e^{2x} + 3$.

ΛΥΣΗ

Η f είναι γνησίως αύξουσα (σύνθεση γνησίως αυξουσών και πρόσθεση σταθεράς), άρα 1-1. $y = e^{2x} + 3 \iff e^{2x} = y - 3$, που έχει λύση μόνο για $y > 3$: $2x = \ln(y - 3)$, $x = \frac{1}{2} \ln(y - 3)$. Άρα $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln(x - 3)$, $x > 3$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Εξίσωση με 1-1

Να λυθεί η εξίσωση $e^x + x = e^{3-x} + 3 - x$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε $g(t) = e^t + t$, γνησίως αύξουσα (άθροισμα γνησίως αυξουσών), άρα 1-1. Η εξίσωση γράφεται $g(x) = g(3 - x)$, οπότε $x = 3 - x$, δηλαδή $x = \frac{3}{2}$. ■

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Σύγχυση $f^{-1}(x)$ και $\frac{1}{f(x)}$

✗ «Για $f(x) = 2x$ είναι $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x}$.»

✓ Ο εκθέτης -1 εδώ **δεν** σημαίνει αντίστροφο αριθμό. Η αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = 2x$ είναι $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ (η f διπλασιάζει, η f^{-1} υποδιπλασιάζει).

**ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;**

Η αντίστροφη συνάρτηση και η χρήση της ιδιότητας «1-1» για τη λύση εξισώσεων είναι κλασικά θέματα εξετάσεων. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με πολλά λυμένα θέματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.3 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία με τον ορισμό την $f(x) = 3 - 2\sqrt{x}$.

→ Λύση 1.3/1

2 Να βρείτε την αντίστροφη της $f(x) = 3x - 5$.

→ Λύση 1.3/2

3 Να βρείτε την αντίστροφη της $f(x) = \ln(x - 1) + 2$.

→ Λύση 1.3/3

4 Να αποδείξετε ότι η $f(x) = x^3 + x + 1$ είναι 1-1 και να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) = f(4x - 3)$.

→ Λύση 1.3/4

5 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2 + 1}$.

●●○

→ Λύση 1.3/5

6 Δίνεται γνησίως αύξουσα $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 - 2x) < f(3)$.

●●●

→ Λύση 1.3/6

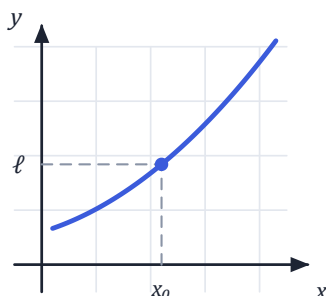
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Όριο – Συνέχεια
συνάρτησης

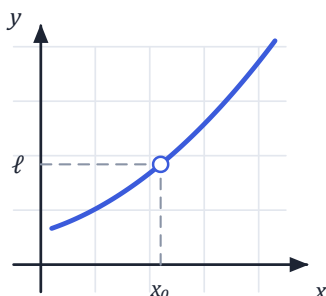
ΜΑΘΗΜΑ 1.4

Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

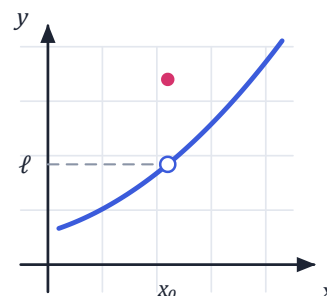
Η ιδέα του ορίου



$$f(x_0) = l$$



$$x_0 \notin D_f, \text{ όμως } \lim f = l$$



$$f(x_0) \neq l, \text{ όμως } \lim f = l$$

Λέμε ότι η f έχει στο x_0 **όριο** τον πραγματικό αριθμό l , και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l,$$

όταν οι τιμές $f(x)$ **προσεγγίζουν όσο θέλουμε** τον αριθμό l , για όλα τα x (του πεδίου ορισμού) που βρίσκονται **αρκούντως κοντά** στο x_0 και είναι διαφορετικά από αυτό.

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Δύο πράγματα που πρέπει να θυμάσαι

1. Για να αναζητήσουμε όριο στο x_0 , η f πρέπει να ορίζεται «γύρω» από το x_0 : σε σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ή (α, x_0) , ή (x_0, β) . **Δεν** χρειάζεται να ορίζεται στο ίδιο το x_0 .
2. Το όριο **δεν εξαρτάται** από την τιμή $f(x_0)$ (αν υπάρχει): όπως βλέπεις στα τρία σχήματα, το όριο είναι το ίδιο.

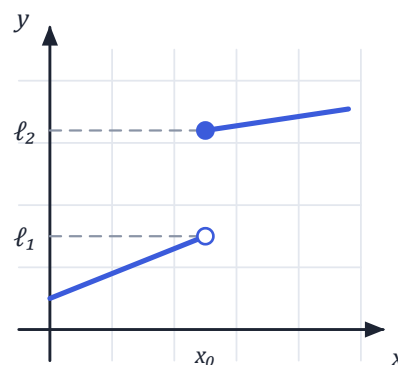
Πλευρικά όρια

Αν οι τιμές $f(x)$ πλησιάζουν το l_1 όταν το x πλησιάζει το x_0 **από αριστερά** ($x < x_0$), γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1$ (**όριο από αριστερά**). Ανάλογα ορίζεται το **όριο από δεξιά** $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Όριο και πλευρικά όρια

Αν η f ορίζεται σε σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l.$$



Διαφορετικά πλευρικά όρια: το όριο δεν υπάρχει

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Χρήσιμες ισοδυναμίες

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \lim_{x \rightarrow x_0} c = c.$

❗ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ** — Πότε κοιτάμε μόνο ένα πλευρικό όριο

Αν η f ορίζεται μόνο στη μία μεριά του x_0 (π.χ. η $\sqrt{x}$ στο $x_0 = 0$, μόνο δεξιά), τότε το όριο στο x_0 ταυτίζεται με το αντίστοιχο πλευρικό: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Όριο συνάρτησης πολλαπλού τύπου

Δίνεται $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \\ 3x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$. Να βρεθεί, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

ΛΥΣΗ

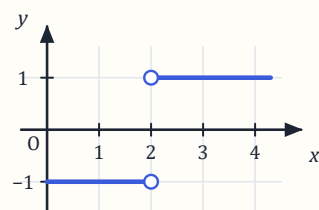
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 1) = 2$. Τα πλευρικά όρια είναι ίσα, άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Απόλυτη τιμή

Να βρεθεί, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2}$.

ΛΥΣΗ

Για $x < 2$: $|x - 2| = -(x - 2)$, οπότε η παράσταση ισούται με -1 . Για $x > 2$ ισούται με 1 . Επομένως $\lim_{x \rightarrow 2^-} = -1 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 2^+}$: το όριο **δεν υπάρχει**. ■

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3** Παράμετρος για ύπαρξη ορίου

Να βρεθεί το λ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, όπου $f(x) = \begin{cases} e^x + \lambda, & x < 0 \\ \lambda^2 x + 3, & x > 0 \end{cases}$.

ΛΥΣΗ

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 + \lambda$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$. Πρέπει $1 + \lambda = 3$, δηλαδή $\lambda = 2$. ■

✗ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** — Η τιμή στο x_0 δεν είναι το όριο

Για την $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 2 \\ 7, & x = 2 \end{cases}$ ο μαθητής γράφει ✗ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 7$.

✓ Το όριο κοιτάζει τις τιμές **κοντά** στο 2, όχι στο 2: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.4 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1

●○○

Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο στο $x_0 = 3$ της $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 3 \\ x^2 - 3, & x > 3 \end{cases}$.

→ Λύση 1.4/1

2

●○○

Να βρείτε τα πλευρικά όρια της $f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|}$ στο 0.

→ Λύση 1.4/2

3

●●○

Να βρείτε τα α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$, όπου $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x < 1 \\ 2\alpha x^2 - \beta, & x > 1 \end{cases}$.

→ Λύση 1.4/3

4

●●○

Αν $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 3x) = 1$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

→ Λύση 1.4/4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Όριο – Συνέχεια
συνάρτησης

ΜΑΘΗΜΑ 1.5α

Ιδιότητες των ορίων – Υπολογισμός ορίων

♦ Όριο και διάταξη

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Διατήρηση προσήμου

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Όριο και ανισότητες

Αν οι f, g έχουν όριο στο x_0 και $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Οι γνήσιες ανισότητες «χαλαρώνουν»

Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 , μπορούμε να συμπεράνουμε μόνο ότι $\lim f \leq \lim g$ — **όχι** ότι $\lim f < \lim g$. Π.χ. $-x^2 < x^2$ για $x \neq 0$, αλλά και τα δύο όρια στο 0 είναι 0.

♦ Πράξεις με όρια

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Όρια και πράξεις

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$ ($\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$), τότε:

1. $\lim(f + g) = \ell_1 + \ell_2$
2. $\lim(\kappa f) = \kappa \ell_1$
3. $\lim(f \cdot g) = \ell_1 \ell_2$
4. $\lim \frac{f}{g} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$, αν $\ell_2 \neq 0$
5. $\lim |f| = |\ell_1|$
6. $\lim \sqrt[n]{f} = \sqrt[n]{\ell_1}$, αν $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0
7. $\lim [f]^\nu = \ell_1^\nu$

→ ΠΟΡΙΣΜΑ — Πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις

- Για κάθε πολυώνυμο P : $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.
- Για κάθε ρητή $\frac{P}{Q}$ με $Q(x_0) \neq 0$: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Τα όρια «σπάνε» μόνο αν υπάρχουν

Η ιδιότητα $\lim(f + g) = \lim f + \lim g$ προϋποθέτει ότι **υπάρχουν** (ως πραγματικοί αριθμοί) τα $\lim f$ και $\lim g$. Το $\lim(f + g)$ μπορεί να υπάρχει χωρίς να υπάρχουν τα επιμέρους όρια: π.χ. για $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x}$, είναι $f + g = 0$.

◆ Η μορφή $\frac{0}{0}$ **💡 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ** — Τεχνικές για την απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$

- 1. Παραγοντοποίηση:** αν $P(x_0) = Q(x_0) = 0$, τότε και τα δύο πολυώνυμα έχουν παράγοντα $(x - x_0)$ (σχήμα Horner ή ταυτότητες). Απλοποιούμε και αντικαθιστούμε.
- 2. Συζυγής παράσταση:** με ρίζες, πολλαπλασιάζουμε με τη συζυγή: $(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B$.
- 3. Απόλυτες τιμές:** «σπάμε» την απόλυτη ανάλογα με το πρόσημο κοντά στο x_0 (συχνά με πλευρικά όρια).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Παραγοντοποίηση με Horner

Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1}$.

ΛΥΣΗ

Αντικατάσταση: $\frac{0}{0}$. Με Horner, $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)^2(x + 2)$. Επίσης $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2(x + 2)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{x + 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Με συζυγή

Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9}$.

ΛΥΣΗ

$$\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9} = \frac{(x+1) - 4}{(x^2 - 9)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{x - 3}{(x - 3)(x + 3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{1}{(x + 3)(\sqrt{x+1} + 2)} \rightarrow \frac{1}{6}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Βρίσκουμε το όριο μιας f από σχέση

Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 5$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x)-3}{x-2}$, οπότε $f(x) = 3 + (x-2)g(x)$ κοντά στο 2. Επομένως $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 + 0 \cdot 5 = 3$. ■

💡 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Η τεχνική της «βοηθητικής συνάρτησης»

Όταν δίνεται όριο μιας παράστασης που περιέχει την άγνωστη f , **ονομάζουμε** την παράσταση $g(x)$, **λύνουμε** ως προς $f(x)$ και παίρνουμε όρια. Είναι ίσως η πιο χρήσιμη τεχνική στις ασκήσεις ορίων με «αφηρημένη» f .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Παράμετρος ώστε να υπάρχει όριο

Να βρεθεί το α ώστε να υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + \alpha x - 6}{x - 2}$, και να υπολογιστεί.

ΛΥΣΗ

Ο παρονομαστής τείνει στο 0. Αν το όριο είναι ένας αριθμός ℓ , τότε $x^2 + \alpha x - 6 = (x - 2) \cdot \frac{x^2 + \alpha x - 6}{x - 2} \rightarrow 0 \cdot \ell = 0$, άρα $4 + 2\alpha - 6 = 0$, $\alpha = 1$. Τότε $\frac{x^2 + \alpha x - 6}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = x + 3 \rightarrow 5$. ■

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Λάθος απλοποίηση

$$\text{✗ } \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x - 2.$$

$$\text{✓ } \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2. \text{ Ελέγχε την παραγοντοποίηση πολλαπλασιάζοντας πίσω.}$$



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με εκατοντάδες λυμένα όρια, ταξινομημένα κατά τεχνική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.5α · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1

Να υπολογίσετε: (α) $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 - x + 4)$ (β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x + 3}$ (γ) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + 9}$.

●○○

→ Λύση 1.5α/1

2

Να υπολογίσετε: (α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$ (β) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4}$.

●○○

→ Λύση 1.5α/2

3

Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

●●○

→ Λύση 1.5α/3

4

Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$.

●●○

→ Λύση 1.5α/4

5

Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 2$, να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x^2 - 1}{x - 1}$.

●●○

→ Λύση 1.5α/5

6

Να βρείτε τα α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + \beta x + 2}{x - 1} = 5$.

●●●

→ Λύση 1.5α/6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Όριο – Συνέχεια
συνάρτησης

ΜΑΘΗΜΑ 1.5β

Κριτήριο παρεμβολής – Τριγωνομετρικά όρια – Όριο σύνθετης

Το κριτήριο παρεμβολής

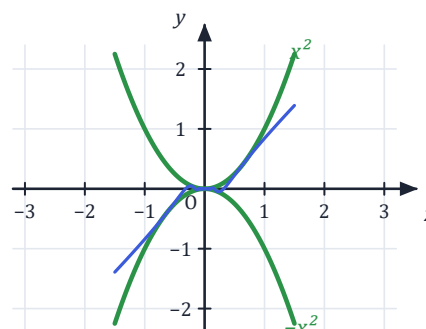
★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Κριτήριο παρεμβολής

Έστω f, g, h συναρτήσεις. Αν κοντά στο x_0 ισχύει

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell,$$

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Το κριτήριο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για συναρτήσεις που «ταλαντεύονται», όπως η $x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$: αφού $|\eta\mu \frac{1}{x}| \leq 1$, ισχύει $-x^2 \leq x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \leq x^2$ και τα όρια των δύο άκρων στο 0 είναι 0, άρα και το ζητούμενο όριο είναι 0.



Το κριτήριο παρεμβολής («σάντουιτς»)

Τριγωνομετρικά όρια

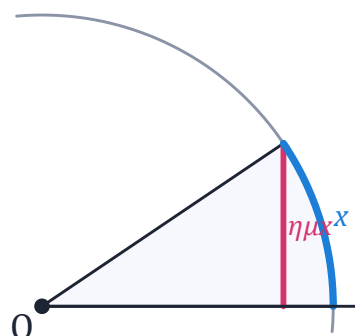
★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Βασικά τριγωνομετρικά όρια

- $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (η ισότητα μόνο για $x = 0$).
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ — Απόδειξη της (4) από την (3)

Για x κοντά στο 0 (με $\sigma\upsilon\nu x \neq -1$):

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x + 1)}{x(\sigma\upsilon\nu x + 1)} = \frac{-\eta\mu^2 x}{x(\sigma\upsilon\nu x + 1)} = -\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x + 1}$$



Γιατί $\eta\mu x/x \rightarrow 1$: για μικρό x , τόξο $\approx$ ημίτονο

Όριο σύνθετης συνάρτησης

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Όριο σύνθετης (μέθοδος αντικατάστασης)

Για να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$:

1. θέτουμε $u = g(x)$ και βρίσκουμε $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ (αν υπάρχει).
2. βρίσκουμε $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ (αν υπάρχει).
3. τότε, αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , το ζητούμενο όριο είναι ℓ .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Τριγωνομετρικά όρια

Να υπολογιστούν: (α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x}$ (β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x}{x}$ (γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$.

ΛΥΣΗ

(α) $\frac{\eta\mu 3x}{x} = 3 \cdot \frac{\eta\mu 3x}{3x}$. Με $u = 3x \rightarrow 0$: $\frac{\eta\mu u}{u} \rightarrow 1$. Άρα το όριο είναι 3.

(β) $\frac{\epsilon\phi x}{x} = \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \rightarrow 1 \cdot 1 = 1$.

(γ) $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2(1 + \sigma\upsilon\nu x)} = \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 \frac{1}{1 + \sigma\upsilon\nu x} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Κριτήριο παρεμβολής

Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} x \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}$.

ΛΥΣΗ

$|x \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}| = |x| |\sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}| \leq |x|$, δηλαδή $-|x| \leq x \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \leq |x|$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής το όριο είναι 0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Όριο σύνθετης

Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x^2 - 1)}{x - 1}$.

ΛΥΣΗ

$\frac{\eta\mu(x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{\eta\mu(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \cdot (x + 1)$. Με $u = x^2 - 1 \rightarrow 0$ (και $u \neq 0$ για $x \neq \pm 1$): $\frac{\eta\mu u}{u} \rightarrow 1$. Άρα το όριο είναι $1 \cdot 2 = 2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Κριτήριο παρεμβολής με «αφηρημένη» f

Αν $|f(x) - 2x| \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

ΛΥΣΗ

$2x - x^2 \leq f(x) \leq 2x + x^2$ και τα άκρα τείνουν στο 0: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Για $x > 0$, διαιρώντας με x : $2 - x \leq \frac{f(x)}{x} \leq 2 + x$ · για $x < 0$ η φορά αντιστρέφεται, αλλά τα άκρα είναι πάλι $2 \pm x$. Και στις δύο περιπτώσεις τα άκρα τείνουν στο 2, άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — «ημ $x / x = \eta\mu$ »

✗ $\frac{\eta\mu 3x}{x} = \eta\mu 3$.

✓ Το $\eta\mu 3x$ **δεν** είναι γινόμενο «ημ $\cdot 3x$ »· είναι το ημίτονο του αριθμού $3x$. Η σωστή τεχνική είναι να δημιουργήσουμε τη μορφή $\frac{\eta\mu u}{u}$ με $u = 3x$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Το $\frac{\eta\mu x}{x} \rightarrow 1$ μόνο στο 0

✗ $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

✓ Το βασικό όριο ισχύει μόνο για $x \rightarrow 0$. Στο π η συνάρτηση είναι συνεχής και απλώς αντικαθιστούμε: $\frac{\eta\mu \pi}{\pi} = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.5β · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να υπολογίσετε: (α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{\eta\mu 2x}$ (β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\eta\mu x}$.

●○○

→ Λύση 1.5β/1

2 Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \eta\mu \frac{1}{x^2}$.

●●○

→ Λύση 1.5β/2

3 Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - x \sin x}{x}$.

●●○

→ Λύση 1.5β/3

4 Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 2x}{x^2}$.

●●○

→ Λύση 1.5β/4

5 Αν $x^2 - x^4 \leq x f(x) \leq x^2 + x^4$ για κάθε x , να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

●●●

→ Λύση 1.5β/5

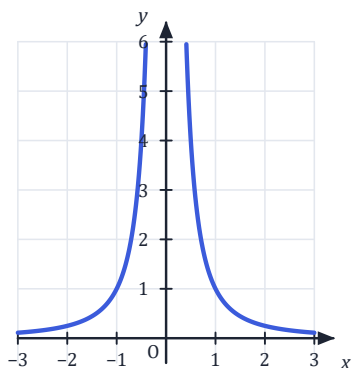
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Όριο – Συνέχεια
συνάρτησης

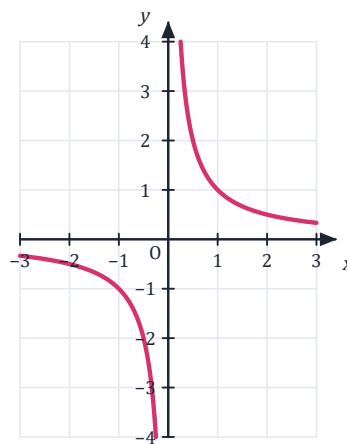
ΜΑΘΗΜΑ 1.6

Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Όταν οι τιμές «εκρήγνυνται»



$$\lim_{x \rightarrow 0} 1/x^2 = +\infty \text{ στο } 0$$



$$1/x: -\infty \text{ από αριστερά, } +\infty \text{ από δεξιά}$$

Όταν οι τιμές της f γίνονται **όσο μεγάλες θέλουμε** για x αρκούντως κοντά στο x_0 , γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$. Ανάλογα ορίζεται το $-\infty$ και τα πλευρικά άπειρα όρια.

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ — Ιδιότητες**

- Αν $\lim f = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 . αν $\lim f = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .
- Αν $\lim f = \pm\infty$, τότε $\lim \frac{1}{f} = 0$.
- Αν $\lim f = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim \frac{1}{f} = +\infty$. αν $f(x) < 0$, τότε $\lim \frac{1}{f} = -\infty$.
- Αν $\lim f = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim |f| = +\infty$.
- Αν $\lim f = +\infty$, τότε $\lim \sqrt[n]{f} = +\infty$.

🔑 **ΚΛΕΙΔΙ — Βασικά άπειρα όρια**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x = +\infty.$$

Πράξεις με άπειρα όρια

Αν $\lim f =$	και $\lim g =$	τότε $\lim(f + g) =$
$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	απροσδιόριστη μορφή

Αν $\lim f =$	και $\lim g =$	τότε $\lim(f \cdot g) =$
$\ell > 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\ell < 0$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$ (ομόσημα) / $-\infty$ (ετερόσημα)
0	$\pm\infty$	απροσδιόριστη μορφή

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Οι απροσδιόριστες μορφές

Οι μορφές $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ είναι **απροσδιόριστες**: το αποτέλεσμα εξαρτάται από τις συγκεκριμένες συναρτήσεις και χρειάζεται «δουλειά» (παραγοντοποίηση, συζυγής, κ.λπ.) για να βρεθεί.

Η μορφή $\frac{\alpha}{0}$ με $\alpha \neq 0$

💡 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Όριο ρητής όταν μηδενίζεται μόνο ο παρονομαστής

Αν $\lim P(x) = \alpha \neq 0$ και $\lim Q(x) = 0$, τότε το όριο του $\frac{P}{Q}$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$ (ή δεν υπάρχει). Το πρόσημο το καθορίζει το **πρόσημο του $Q(x)$ κοντά στο x_0** — γι' αυτό συνήθως εξετάζουμε **πλευρικά όρια**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Άπειρα όρια

Να βρεθούν: (α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2}$ (β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1}$.

ΛΥΣΗ

(α) Ο παρονομαστής $\rightarrow 0$ με θετικές τιμές, ο αριθμητής $= 3 > 0$: το όριο είναι $+\infty$.

(β) Ο αριθμητής $\rightarrow 2 > 0$. Για $x \rightarrow 1^-$: $x-1 < 0$, άρα $-\infty$. Για $x \rightarrow 1^+$: $+\infty$. Τα πλευρικά διαφέρουν, άρα το όριο στο 1 **δεν υπάρχει**. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Ρητή με παράγοντα στο τετράγωνο

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x^3+2x^2+x}$.

ΛΥΣΗ

$x^3+2x^2+x = x(x+1)^2$. Κοντά στο -1 : $x < 0$ και $(x+1)^2 > 0$, άρα ο παρονομαστής είναι **αρνητικός** και τείνει στο 0. Ο αριθμητής $\rightarrow -3 < 0$. Πηλίκος αρνητικού προς «αρνητικό μηδέν»: $+\infty$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Παράμετρος

Να βρεθεί το λ ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\lambda-1)x+2}{x^2} = +\infty$ — και να εξεταστεί τι γίνεται για άλλες τιμές.

ΛΥΣΗ

Ο αριθμητής τείνει στο $2 > 0$ για **κάθε** λ και ο παρονομαστής στο 0 με θετικές τιμές. Άρα το όριο είναι $+\infty$ για **κάθε** $\lambda \in \mathbb{R}$. (Η παράμετρος δεν επηρεάζει το όριο, γιατί ο όρος $(\lambda-1)x$ μηδενίζεται.)

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — « $a/0 = \infty$ » χωρίς πρόσημο

✗ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = \infty$.

✓ Πρέπει να εξετάσουμε το πρόσημο του παρονομαστή από **κάθε** πλευρά: εδώ τα πλευρικά όρια είναι $-\infty$ και $+\infty$, οπότε το όριο **δεν υπάρχει**.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Τα άπειρα όρια και οι απροσδιόριστες μορφές χρειάζονται πολλή εξάσκηση. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με κατηγοριοποιημένες ασκήσεις και λύσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.6 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να βρείτε: (α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-5}{x^2}$ (β) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{3-x}$ (γ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$.

●○○

→ Λύση 1.6/1

2 Να βρείτε τα πλευρικά όρια της $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$ στο $x_0 = 2$.

●●○

→ Λύση 1.6/2

3 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$.

••○

→ Λύση 1.6/3

4 Να βρείτε τα $\alpha \in \mathbb{R}$ για τα οποία $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha x - 1}{(x-2)^2} = -\infty$.

•••

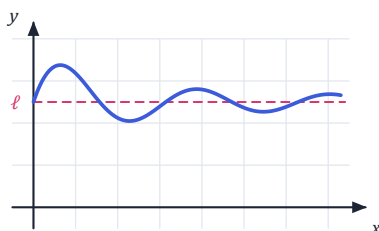
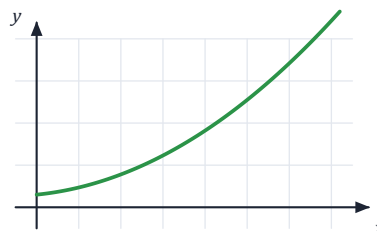
→ Λύση 1.6/4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Όριο – Συνέχεια
συνάρτησης

ΜΑΘΗΜΑ 1.7

Όριο συνάρτησης στο άπειρο

♦ Όριο όταν το x μεγαλώνει απεριόριστα
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ στο $+\infty$: οριζόντια «σταθεροποίηση»

 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ στο $+\infty$

Αν η f ορίζεται σε διάστημα $(\alpha, +\infty)$, γράφουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ όταν οι τιμές $f(x)$ πλησιάζουν όσο θέλουμε τον l για αρκετά μεγάλα x , και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ όταν οι τιμές γίνονται όσο μεγάλες θέλουμε. Ανάλογα ορίζονται τα όρια για $x \rightarrow -\infty$. Οι ιδιότητες των ορίων (πράξεις, διάταξη, κριτήριο παρεμβολής) ισχύουν και εδώ.

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Βασικά όρια στο άπειρο

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\nu = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\nu = +\infty$ αν ν άρτιος, $-\infty$ αν ν περιττός.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$.
- Πολυώνυμο: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_\nu x^\nu + \dots + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha_\nu x^\nu$ (κυριαρχεί ο μεγιστοβάθμιος όρος).
- Ρητή: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha_\nu x^\nu + \dots}{\beta_\kappa x^\kappa + \dots} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}$ (λόγος μεγιστοβάθμιων όρων).
- Εκθετική: αν $\alpha > 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$. αν $0 < \alpha < 1$ αντίστροφα.
- Λογαριθμική: αν $\alpha > 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_\alpha x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_\alpha x = -\infty$.

⚠️ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Ο κανόνας του μεγιστοβάθμιου όρου ισχύει ΜΟΝΟ στο $\pm\infty$

Στο $x_0 \in \mathbb{R}$ δεν «κρατάμε» μόνο τον μεγιστοβάθμιο όρο! Επίσης ο κανόνας αφορά πολυώνυμα και ρητές· για ρίζες ή εκθετικές χρειάζεται άλλη τεχνική (κοινός παράγοντας).

♦ Όρια με ρίζες στο άπειρο

💡 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Τεχνικές με ρίζες

1. Κοινός παράγοντας τη μεγαλύτερη δύναμη μέσα στη ρίζα: $\sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = |x| \sqrt{1 + \frac{3}{x}}$. Προσοχή: $|x| = x$ στο $+\infty$, αλλά $|x| = -x$ στο $-\infty$!
2. Αν προκύψει $\infty - \infty$ με ρίζες, πολλαπλασιάζουμε με τη συζυγή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ρητές στο άπειρο

Να βρεθούν: (α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + 5}$ (β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + x}$ (γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 1}{x^2 - 3}$.

ΛΥΣΗ

(α) $\frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$. (β) $\frac{x^3}{x^2} = x \rightarrow -\infty$. (γ) $\frac{4x}{x^2} = \frac{4}{x} \rightarrow 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Με ρίζα και συζυγή

Να βρεθούν: (α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$ (β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} + x)$.

ΛΥΣΗ

(α) Μορφή $\infty - \infty$. Συζυγή:

$$\frac{x^2 + 4x - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x} + x} = \frac{4x}{x\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + x} = \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1} \rightarrow \frac{4}{2} = 2.$$

(β) Εδώ $x < 0$, οπότε $\sqrt{x^2 + 4x} = |x|\sqrt{1 + \frac{4}{x}} = -x\sqrt{1 + \frac{4}{x}}$. Με συζυγή:

$$\frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4x} - x} = \frac{4x}{-x\sqrt{1 + \frac{4}{x}} - x} = \frac{4}{-\sqrt{1 + \frac{4}{x}} - 1} \rightarrow -2.$$

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Το $|x|$ στο $-\infty$

$$\text{✗ } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\sqrt{1 + 1/x^2}}{x} = 1.$$

✓ Στο $-\infty$ είναι $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, άρα το όριο είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + 1/x^2}}{x} = -1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Εκθετικές στο άπειρο

Να βρεθούν: (α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2^x}{3^x - 1}$ (β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 2^x}{3^x - 1}$.

ΛΥΣΗ

(α) Διαιρούμε με 3^x : $\frac{1 + (2/3)^x}{1 - (1/3)^x} \rightarrow \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$.

(β) Για $x \rightarrow -\infty$: $3^x \rightarrow 0$ και $2^x \rightarrow 0$, άρα $\frac{0 + 0}{0 - 1} = 0$.

♦ Όριο ακολουθίας

Μια **ακολουθία** είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}^*$, $\alpha_\nu = f(\nu)$. Το όριό της (όταν $\nu \rightarrow +\infty$) ορίζεται και υπολογίζεται όπως το όριο συνάρτησης στο $+\infty$. Π.χ. $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{2\nu + 1}{\nu + 3} = 2$.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με όλα τα «κόλπα» για όρια στο άπειρο (ρίζες, εκθετικές, τριγωνομετρικές με κριτήριο παρεμβολής).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.7 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να βρείτε: (α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 5x^2 + 1)$ (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - x^2}{3x^2 + x}$.

●○○

→ Λύση 1.7/1

2 Να βρείτε: (α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$ (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{x}$ (γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

●○○

→ Λύση 1.7/2

3 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x})$.

●●○

→ Λύση 1.7/3

4 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x}$.

●●○

→ Λύση 1.7/4

5 Να βρείτε τα α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \alpha x - \beta) = 0$.

●●●

→ Λύση 1.7/5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

ΜΑΘΗΜΑ 1.8α

Συνέχεια συνάρτησης

Ορισμός

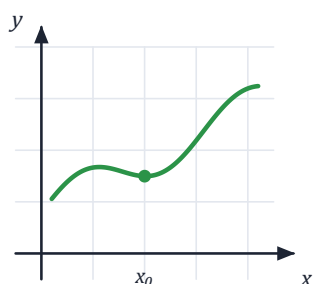
ΟΡΙΣΜΟΣ — Συνέχεια σε σημείο

Έστω f μια συνάρτηση και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Η f λέγεται **συνεχής στο x_0** όταν

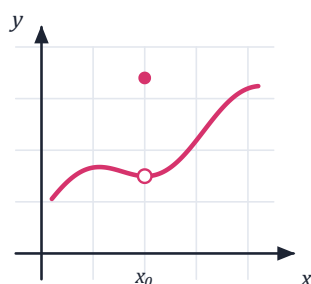
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Η f λέγεται **συνεχής** όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

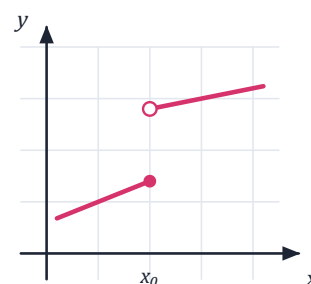
Μια συνάρτηση **δεν** είναι συνεχής στο $x_0 \in D_f$ όταν: (α) δεν υπάρχει το όριο στο x_0 , ή (β) υπάρχει αλλά είναι διαφορετικό από το $f(x_0)$.



Συνεχής στο x_0



Όριο $\neq f(x_0)$



Δεν υπάρχει όριο

Ποιες συναρτήσεις είναι συνεχείς

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Οι βασικές συναρτήσεις είναι συνεχείς

- Οι **πολυωνυμικές**, οι **ρητές**, η $\sqrt{x}$, οι $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, η $\epsilon\phi x$, η α^x και η $\log_\alpha x$ είναι συνεχείς (στο πεδίο ορισμού τους).
- Αν οι f, g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε συνεχείς στο x_0 είναι και οι $f + g, cf, fg, \frac{f}{g}$ (με $g(x_0) \neq 0$), $|f|$, $\sqrt[n]{f}$ (με $f \geq 0$ κοντά στο x_0).
- **Σύνθεση**: αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

ΟΡΙΣΜΟΣ — Συνέχεια σε διάστημα

- Η f είναι συνεχής σε ανοικτό διάστημα (α, β) όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του.
- Η f είναι συνεχής σε **κλειστό** διάστημα $[\alpha, \beta]$ όταν είναι συνεχής στο (α, β) και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Συνέχεια συνάρτησης πολλαπλού τύπου

Να βρεθεί το α ώστε η $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \alpha, & x = 2 \end{cases}$ να είναι συνεχής.

ΛΥΣΗ

Για $x \neq 2$ η f είναι ρητή, άρα συνεχής. Στο 2: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$. Συνέχεια σημαίνει $f(2) = 4$, δηλαδή $\alpha = 4$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Δύο παράμετροι

Να βρεθούν τα α, β ώστε η $f(x) = \begin{cases} \alpha x + 1, & x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ x^2 + \beta, & x > 1 \end{cases}$ να είναι συνεχής στο 1.

ΛΥΣΗ

Πρέπει $\lim_{x \rightarrow 1^-} f = \lim_{x \rightarrow 1^+} f = f(1)$: $\alpha + 1 = 3$ και $1 + \beta = 3$, άρα $\alpha = 2, \beta = 2$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Συνέχεια «αφηρημένης» συνάρτησης

Αν $|f(x) - 1| \leq |x|$ για κάθε x , να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο 0.

ΛΥΣΗ

Για $x = 0$: $|f(0) - 1| \leq 0$, άρα $f(0) = 1$. Επίσης $1 - |x| \leq f(x) \leq 1 + |x|$ και τα άκρα $\rightarrow 1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$. ■

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Συνέχεια σε σημείο εκτός πεδίου

✗ «Η $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι ασυνεχής στο 0.»

✓ Η συνέχεια (και η ασυνέχεια) εξετάζεται **μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού**. Η $\frac{1}{x}$ είναι **συνεχής** συνάρτηση (σε όλο το $\mathbb{R}^*$)· στο 0 απλώς δεν ορίζεται.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.8α · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 ●○○ Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο 0 η $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

→ Λύση 1.8α/1

- 2 ●○○ Να βρείτε το κ ώστε η $f(x) = \begin{cases} e^x + \kappa, & x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}, & x > 0 \end{cases}$ να είναι συνεχής.

→ Λύση 1.8α/2

- 3 ●●○ Να αποδείξετε ότι αν $xf(x) = \eta\mu x$ για κάθε x και η f είναι συνεχής στο 0, τότε $f(0) = 1$.

→ Λύση 1.8α/3

- 4 ●●● Δίνεται $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε x, y , συνεχής στο 0. Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής σε κάθε x_0 .

→ Λύση 1.8α/4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Όριο – Συνέχεια
συνάρτησης

ΜΑΘΗΜΑ 1.8β

Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων σε
διάστημα

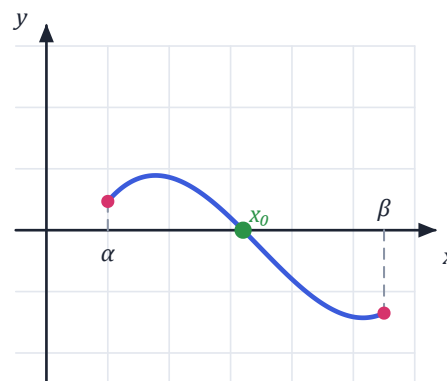
◆ Το θεώρημα του Bolzano

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Θεώρημα του Bolzano

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι **συνεχής** στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει **ένα τουλάχιστον** $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα (α, β) .



Θεώρημα Bolzano: ετερόσημες τιμές $\Rightarrow$ ρίζα

Γεωμετρικά: αν η καμπύλη μιας συνεχούς συνάρτησης ξεκινά κάτω από τον άξονα $x'x$ και καταλήγει πάνω από αυτόν (ή αντίστροφα), τότε **τον τέμνει** τουλάχιστον μία φορά.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Οι προϋποθέσεις είναι απαραίτητες

- Χωρίς **συνέχεια** το θεώρημα δεν ισχύει: η $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $[-1, 1]$ έχει $f(-1)f(1) < 0$ αλλά καμία ρίζα (και φυσικά δεν ορίζεται καν στο 0).
- Το θεώρημα εξασφαλίζει **ύπαρξη**, όχι **μοναδικότητα**: μπορεί να υπάρχουν περισσότερες ρίζες. Για μοναδικότητα χρειαζόμαστε επιπλέον **γνήσια μονοτονία**.
- Αν $f(\alpha)f(\beta) > 0$, **δεν** σημαίνει ότι δεν υπάρχει ρίζα!

→ ΠΟΡΙΣΜΑ — Πρόσσημο συνεχούς συνάρτησης

Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και **δεν μηδενίζεται** σε αυτό, τότε **διατηρεί σταθερό πρόσημο** στο Δ . Επομένως, ανάμεσα σε δύο **διαδοχικές** ρίζες μιας συνεχούς συνάρτησης, το πρόσημό της είναι σταθερό — αρκεί να το βρούμε σε **ένα** σημείο.

◆ Το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Τότε, για **κάθε** αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

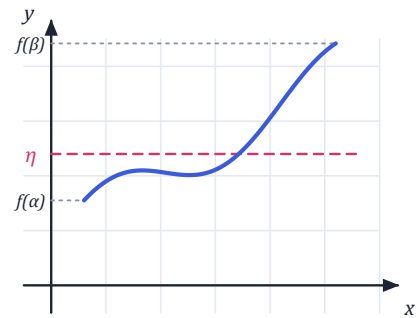
✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Θεωρούμε τη $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$. Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$, $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$. Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με

$$g(x_0) = 0, \text{ δηλαδή } f(x_0) = \eta.$$

→ **ΠΟΡΙΣΜΑ** — Η εικόνα διαστήματος

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα.



Κάθε τιμή η ανάμεσα στα $f(\alpha), f(\beta)$ «πιάνεται»

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Αν η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m . Δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ με $f(x_1) = m, f(x_2) = M$ και $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Συνεπώς $f([\alpha, \beta]) = [m, M]$.

🔑 **ΚΛΕΙΔΙ** — Εικόνα διαστήματος μέσω γνησίως μονότονης και συνεχούς f

Δ	f γνησίως αύξουσα	f γνησίως φθίνουσα
$[\alpha, \beta]$	$[f(\alpha), f(\beta)]$	$[f(\beta), f(\alpha)]$
(α, β)	(A, B)	(B, A)
$[\alpha, \beta)$	$[f(\alpha), B)$	$(B, f(\alpha)]$
$(\alpha, \beta]$	$(A, f(\beta)]$	$[f(\beta), A)$

όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$ (τα άκρα μπορεί να είναι και $\pm\infty$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ύπαρξη ρίζας

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 + x - 1 = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα, η οποία βρίσκεται στο $(0, 1)$.

ΛΥΣΗ

Ύπαρξη: Η $f(x) = x^3 + x - 1$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ (πολυωνυμική), με $f(0) = -1 < 0$ και $f(1) = 1 > 0$. Από Bolzano υπάρχει ρίζα στο $(0, 1)$.

Μοναδικότητα: Για $x_1 < x_2$: $x_1^3 < x_2^3$ και $x_1 < x_2$, άρα $f(x_1) < f(x_2)$. Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1-1, οπότε η ρίζα είναι μοναδική (σε όλο το $\mathbb{R}$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Κοινό σημείο δύο καμπυλών

Να αποδειχθεί ότι οι C_f και C_g των $f(x) = e^x$ και $g(x) = 2 - x$ τέμνονται σε ένα σημείο με τετμημένη στο $(0, 1)$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε $h(x) = f(x) - g(x) = e^x + x - 2$, συνεχής στο $[0, 1]$, με $h(0) = -1 < 0$ και $h(1) = e - 1 > 0$. Από Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ με $h(x_0) = 0$, δηλαδή $f(x_0) = g(x_0)$. ■

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πώς δουλεύουμε με το Bolzano

1. Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο ένα μέλος και ορίζουμε $h(x) = \text{«αυτό που μένει»}$ (προσοχή αν υπάρχουν παρονομαστές: τους «διώχνουμε» πρώτα).
2. Επιλέγουμε **κατάλληλο** κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.
3. Ελέγχουμε (και **γράφουμε**) τη συνέχεια της h στο $[\alpha, \beta]$.
4. Υπολογίζουμε $h(\alpha)$, $h(\beta)$ και δείχνουμε ότι είναι ετερόσημα.
5. Για μοναδικότητα: γνήσια μονοτονία (με ορισμό ή, αργότερα, με παράγωγο).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Πρόσημο ανάμεσα σε ρίζες

Να βρεθεί το πρόσημο της $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ στο $[0, 2\pi]$.

ΛΥΣΗ

Ρίζες: $\epsilon\phi x = 1$, δηλαδή $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = \frac{5\pi}{4}$. Η f είναι συνεχής, οπότε έχει σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα $[0, \frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$, $(\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$. Δοκιμές: $f(0) = -1 < 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1 > 0$, $f(2\pi) = -1 < 0$. Άρα $f < 0$ στο πρώτο και στο τρίτο διάστημα, $f > 0$ στο μεσαίο. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Σύνολο τιμών με μονοτονία

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$.

ΛΥΣΗ

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα (άθροισμα των γνησίως αυξουσών $\ln x$ και $-\frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$). $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$. Άρα $f((0, +\infty)) = \mathbb{R}$. (Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει ακριβώς μία λύση για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.) ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Ύπαρξη ξ με «αφηρημένη» f

Έστω f συνεχής στο $[0, 1]$ με $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε x . Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ με $f(\xi) = \xi$ (σταθερό σημείο).

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε $g(x) = f(x) - x$, συνεχής στο $[0, 1]$. $g(0) = f(0) \geq 0$ και $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Αν $g(0) = 0$ ή $g(1) = 0$, τελειώσαμε ($\xi = 0$ ή $\xi = 1$). Αλλιώς $g(0) > 0 > g(1)$ και από Bolzano υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ με $g(\xi) = 0$.

✗ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** — Bolzano σε ανοικτό διάστημα

✗ «Η f είναι συνεχής στο (α, β) με $f(\alpha)f(\beta) < 0$, άρα από Bolzano...»

✓ Το θεώρημα απαιτεί συνέχεια στο **κλειστό** $[\alpha, \beta]$. Αν η f ορίζεται μόνο στο ανοικτό, χρησιμοποιούμε όρια στα άκρα ή διαλέγουμε μικρότερο κλειστό διάστημα μέσα στο (α, β) .

ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Τα θεωρήματα Bolzano, ενδιάμεσων τιμών και μέγιστης-ελάχιστης τιμής εμφανίζονται σχεδόν κάθε χρόνο στις Πανελλαδικές. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με όλες τις κατηγορίες ασκήσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 1.8β · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 - 3x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

●○○

→ Λύση 1.8β/1

2 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = 3 - x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(1, e)$.

●○○

→ Λύση 1.8β/2

3 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0$ έχει ρίζα στο $(1, 2)$.

●●○

→ Λύση 1.8β/3

4 Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x) = e^x + x^3$ στο διάστημα $[0, 1]$ και στο $\mathbb{R}$.

●●○

→ Λύση 1.8β/4

5 Να βρείτε το πρόσημο της $f(x) = x^3 - 4x$ σε όλο το $\mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας τις ρίζες και τη συνέχεια.

●●○

→ Λύση 1.8β/5

6 Έστω f συνεχής στο $[1, 3]$ με $f(1) = 3$ και $f(3) = 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 2$.

●●●

→ Λύση 1.8β/6

7 Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$.

●●●

→ Λύση 1.8β/7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Όριο – Συνέχεια
συνάρτησης

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

Επαναληπτικά θέματα: Όριο – Συνέχεια

Ο «χάρτης» του κεφαλαίου

ΣΥΝΟΨΗ — Τι πρέπει να ξέρεις να κάνεις

Δεξιότητα	Μάθημα
Πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, γραφικές παραστάσεις, σχετική θέση	1.2α
Ισότητα, πράξεις, σύνθεση συναρτήσεων	1.2β
Μονοτονία, ακρότατα, 1-1, αντίστροφη	1.3
Όρια: αντικατάσταση, $\frac{0}{0}$, πλευρικά, παρεμβολή, τριγωνομετρικά, σύνθετη	1.4 – 1.5β
Άπειρα όρια, απροσδιόριστες μορφές, όρια στο $\pm\infty$	1.6 – 1.7
Συνέχεια, Bolzano, ενδιάμεσες τιμές, μέγιστη-ελάχιστη, σύνολο τιμών	1.8α – 1.8β

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Θέμα τύπου Πανελλαδικών

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. (α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της. (β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$. (γ) Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$. (δ) Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$, αν είναι γνωστό ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

ΛΥΣΗ

(α) Για $x_1 < x_2$: $e^{x_1} < e^{x_2}$ και $x_1 - 1 < x_2 - 1$. Προσθέτοντας, $f(x_1) < f(x_2)$: γνησίως αύξουσα. Είναι συνεχής, με $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 - \infty = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(β) Παρατηρούμε ότι $f(0) = 1 + 0 - 1 = 0$. Επειδή η f είναι 1-1 (γνησίως μονότονη), η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα.

(γ) Ως 1-1, η f αντιστρέφεται, με $D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. $f^{-1}(x) = 1 \iff x = f(1) = e$.

(δ) $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x - 1}{x} + 1 \rightarrow 1 + 1 = 2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Θέμα τύπου Πανελλαδικών με συνέχεια και Bolzano

Δίνεται συνεχής $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, $f(2) = 5$. Να αποδειχθεί ότι: (α) υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ με $f(\xi) = \xi + 2$. (β) υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3}$.

ΛΥΣΗ

(α) Θεωρούμε $k(x) = f(x) - x - 2$, συνεχής στο $[0, 2]$ (διαφορά συνεχών). $k(0) = 1 - 2 = -1 < 0$ και $k(2) = 5 - 4 = 1 > 0$. Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ με $k(\xi) = 0$, δηλαδή $f(\xi) = \xi + 2$.

(β) Η f είναι συνεχής στο κλειστό $[0, 2]$, άρα (θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης) έχει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη M . Τότε $m \leq f(0), f(1), f(2) \leq M$, άρα $m \leq \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} \leq M$. Επειδή $f([0, 2]) = [m, M]$, η τιμή αυτή «πιάνεται»: υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$ με την ιδιότητα. ■

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Όταν η βοηθητική συνάρτηση μηδενίζεται σε άκρο

Το θεώρημα Bolzano χρειάζεται **γνήσια** ετερόσημες τιμές στα άκρα. Αν η βοηθητική συνάρτηση μηδενίζεται σε ένα άκρο, το θεώρημα δεν δίνει ρίζα στο **ανοικτό** διάστημα. Σε τέτοιες περιπτώσεις ψάχνουμε άλλο διάστημα ή άλλη μέθοδο.

ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Θέλεις ολοκληρωμένα επαναληπτικά διαγωνίσματα στα όρια και στη συνέχεια, σε επίπεδο Πανελλαδικών; Θα τα βρεις στο mathgreece.com — πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα Επ. 1 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 ●○○ Να υπολογίσετε: (α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3}{x^2 + x}$ (γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{x}$.

→ Λύση Επ. 1/1

2 ●●○ Να βρείτε την αντίστροφη της $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

→ Λύση Επ. 1/2

3 ●●○ Να βρείτε τα α, β ώστε η $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$ να είναι συνεχής.

→ Λύση Επ. 1/3

4 ●●○ Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x e^x = 1$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.

→ Λύση Επ. 1/4

5 ●●● Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta\mu x}{x + f(x)}$.

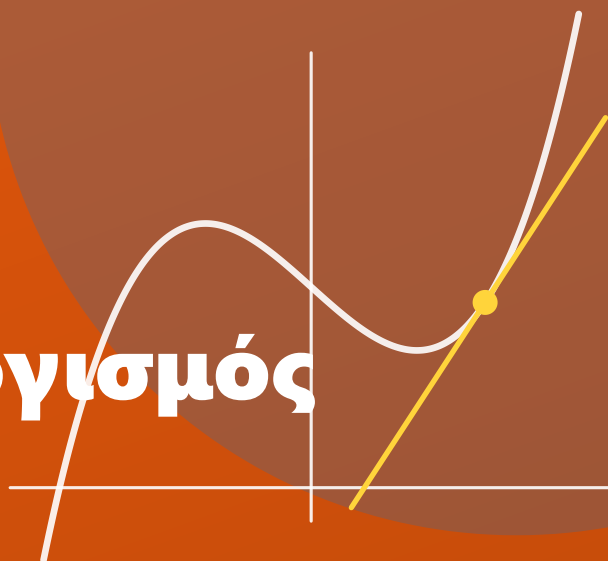
→ Λύση Επ. 1/5

6 ●●● Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f^2(x) = 1 + x^2$ για κάθε x και $f(0) = -1$. Να βρείτε τον τύπο της f .

→ Λύση Επ. 1/6

2

Διαφορικός Λογισμός



Τα μαθήματα του κεφαλαίου

- 2.1** Η έννοια της παραγώγου
- 2.2** Παραγωγίσιμες συναρτήσεις – Παράγωγος συνάρτηση
- 2.3** Κανόνες παραγώγισης
- 2.4** Ρυθμός μεταβολής
- 2.5** Θεώρημα Rolle – Θεώρημα Μέσης Τιμής
- 2.6** Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής
- 2.7** Τοπικά ακρότατα συνάρτησης
- 2.8** Κυρτότητα – Σημεία καμπής
- 2.9** Ασύμπτωτες – Κανόνες De L'Hospital
- 2.10** Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης
- Επ. 2** Επαναληπτικά θέματα Διαφορικού Λογισμού

Τι θα κατακτήσεις

- Να βρίσκεις παραγώγους με τον ορισμό και με τους κανόνες, και εξισώσεις εφαπτομένων.
- Να λύνεις προβλήματα ρυθμού μεταβολής.
- Να εφαρμόζεις τα θεωρήματα Rolle, Μέσης Τιμής και τις συνέπειές τους.
- Να μελετάς μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα και σημεία καμπής.
- Να βρίσκεις ασύμπτωτες και όρια με τους κανόνες De L'Hospital.
- Να μελετάς πλήρως και να σχεδιάζεις τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

Η παράγωγος είναι ίσως η σπουδαιότερη έννοια που θα συναντήσεις στα σχολικά Μαθηματικά. Με αυτήν περιγράφουμε την κλίση μιας καμπύλης, την ταχύτητα ενός κινητού, τον ρυθμό με τον οποίο αλλάζει οποιοδήποτε μέγεθος. Στο κεφάλαιο αυτό ορίζουμε την παράγωγο, μαθαίνουμε να την υπολογίζουμε και, κυρίως, τη χρησιμοποιούμε: με τα θεωρήματα Rolle και Μέσης Τιμής μελετάμε μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα, ασύμπτωτες και φτάνουμε στην πλήρη μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Διαφορικός
Λογισμός

ΜΑΘΗΜΑ 2.1

Η έννοια της παραγώγου

Το πρόβλημα της εφαπτομένης

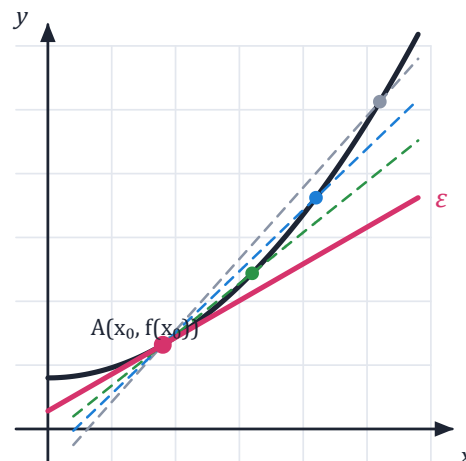
Έστω $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f και $M(x, f(x))$ ένα άλλο σημείο της. Η τέμνουσα AM έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{AM} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Όταν το M κινείται πάνω στη C_f και πλησιάζει το A (δηλαδή $x \rightarrow x_0$), η τέμνουσα τείνει σε μια οριακή θέση, την **εφαπτομένη** της C_f στο A .

ΟΡΙΣΜΟΣ — Εφαπτομένη

Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός λ , τότε **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ορίζουμε την ευθεία που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .



Οι τέμνουσες AM τείνουν στην εφαπτομένη ε

Το πρόβλημα της στιγμιαίας ταχύτητας

Αν $S(t)$ είναι η θέση ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα, η **μέση ταχύτητα** στο $[t_0, t]$ είναι $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$ και η **στιγμιαία ταχύτητα** τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}.$$

Ο ορισμός της παραγώγου

ΟΡΙΣΜΟΣ — Παράγωγος σε σημείο

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σε ένα σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι **πραγματικός αριθμός**. Το όριο αυτό λέγεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται $f'(x_0)$.

Ισοδύναμα, θέτοντας $x = x_0 + h$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Εξίσωση εφαπτομένης

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Η $f'(x_0)$ είναι η **κλίση** της C_f στο A .

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Πλευρικές παράγωγοι

Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, είναι πραγματικοί αριθμοί και είναι **ίσα**. Αυτό χρησιμοποιείται κυρίως σε συναρτήσεις πολλαπλού τύπου και σε απόλυτες τιμές.

🔵 Παραγωγισιμότητα και συνέχεια

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ συνεχής

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και **συνεχής** στο σημείο αυτό.

✍️ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

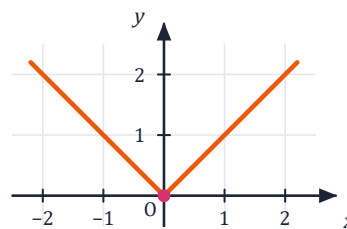
Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 . ■

⚠️ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει

Η $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο 0, αλλά $\frac{|x| - 0}{x - 0}$ έχει πλευρικά όρια -1 και 1 : **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο 0 (η C_f έχει «γωνία»). Χρήσιμη συνέπεια: αν μια f **δεν** είναι συνεχής στο x_0 , τότε **δεν** είναι παραγωγίσιμη εκεί.



📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Κατακόρυφη εφαπτομένη

Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ (ή $-\infty$), ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο A την **κατακόρυφη** ευθεία $x = x_0$. Π.χ. η $f(x) = \sqrt{x}$ έχει στο $(0, 0)$ κατακόρυφη εφαπτομένη τον άξονα $y'y$.

Η $|x|$ είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Παράγωγος με τον ορισμό

Να βρεθεί με τον ορισμό η παράγωγος της $f(x) = x^2 - 3x$ στο $x_0 = 2$ και η εφαπτομένη της C_f στο $(2, f(2))$.

ΛΥΣΗ

$f(2) = -2$. $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 2} = x - 1 \rightarrow 1$. Άρα $f'(2) = 1$ και η εφαπτομένη είναι $y + 2 = x - 2$, δηλαδή $y = x - 4$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Παραγωγισιμότητα συνάρτησης πολλαπλού τύπου

Να εξεταστεί αν είναι παραγωγίσιμη στο 1 η $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$.

ΛΥΣΗ

$f(1) = 1$. Από αριστερά: $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \rightarrow 2$. Από δεξιά: $\frac{2x - 1 - 1}{x - 1} = 2 \rightarrow 2$. Τα πλευρικά όρια είναι ίσα, άρα $f'(1) = 2$. (Η ευθεία $y = 2x - 1$ είναι ακριβώς η εφαπτομένη της παραβολής στο $(1, 1)$, οπότε η «ένωση» είναι λεία.) ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Παράμετροι για παραγωγισιμότητα

Να βρεθούν τα α, β ώστε η $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x < 1 \\ \ln x + 2, & x \geq 1 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο 1.

ΛΥΣΗ

Αναγκαία συνθήκη: συνέχεια. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f = \alpha + \beta$ και $f(1) = 2$, άρα $\alpha + \beta = 2$.

Ίσες πλευρικές παράγωγοι. Από αριστερά: $\frac{\alpha x^2 + \beta - 2}{x - 1} = \frac{\alpha(x^2 - 1)}{x - 1} = \alpha(x + 1) \rightarrow 2\alpha$ (χρησιμοποιήσαμε $\beta - 2 = -\alpha$). Από δεξιά: $\frac{\ln x}{x - 1} \rightarrow 1$ (θα το δικαιολογήσουμε και ως $(\ln x)'(1) = 1$). Άρα $2\alpha = 1$: $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{2}$. ■

🔍 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Παραγωγισιμότητα σε σημείο «αλλαγής τύπου»

1. Ελέγχουμε πρώτα τη **συνέχεια** (αν δεν είναι συνεχής, δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη).
2. Υπολογίζουμε τα **δύο πλευρικά όρια** του λόγου μεταβολής $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, χρησιμοποιώντας το **σωστό** $f(x_0)$ (από τον τύπο που ισχύει στο x_0).
3. Αν είναι ίσα και πραγματικοί αριθμοί, η κοινή τιμή είναι η $f'(x_0)$.

❌ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Παραγωγίζουμε τους τύπους χωριστά

Για την f του Παραδείγματος 2 ο μαθητής γράφει ❌ «Για $x \leq 1$ είναι $f'(x) = 2x$, άρα $f'(1) = 2$.»

✓ Το συμπέρασμα έτυχε να είναι σωστό, η μέθοδος όμως όχι: στο σημείο **αλλαγής τύπου** η παράγωγος υπολογίζεται **με τον ορισμό** (πλευρικά όρια). Αν, π.χ., ο δεύτερος τύπος ήταν $2x + 5$, η f δεν θα ήταν καν συνεχής στο 1!



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με κινούμενα σχήματα για την τέμνουσα που γίνεται εφαπτομένη και πολλές ασκήσεις παραγωγισιμότητας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 2.1 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1

Να βρείτε με τον ορισμό την παράγωγο της $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $x_0 = 2$.

●○○

→ Λύση 2.1/1

2

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x) = x^3$ στο σημείο $(1, 1)$, υπολογίζοντας την $f'(1)$ με τον ορισμό.

●○○

→ Λύση 2.1/2

3

Να εξετάσετε αν η $f(x) = |x - 2|(x + 1)$ είναι παραγωγίσιμη στο 2.

●●○

→ Λύση 2.1/3

4

Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο 0 η $f(x) = x|x|$.

●●○

→ Λύση 2.1/4

5

Αν η f είναι συνεχής στο 1 και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = 4$, να βρείτε τα $f(1)$ και $f'(1)$.

●●○

→ Λύση 2.1/5

6

Να βρείτε τα α, β ώστε η $f(x) = \begin{cases} e^x + \alpha, & x \leq 0 \\ \beta x + 2, & x > 0 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο 0.

●●●

→ Λύση 2.1/6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Διαφορικός
Λογισμός

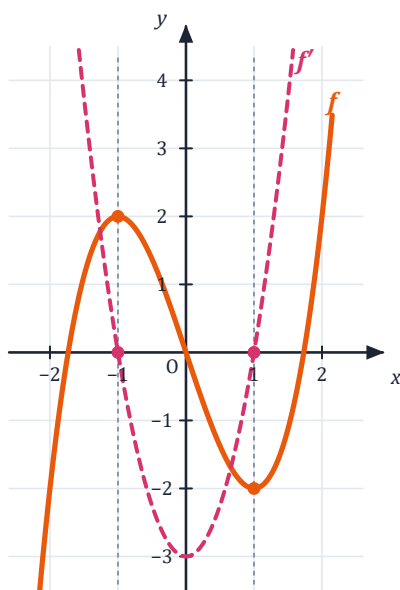
ΜΑΘΗΜΑ 2.2

Παραγωγίσιμες συναρτήσεις – Παράγωγος συνάρτηση

Η παράγωγος συνάρτηση

ΟΡΙΣΜΟΣ — Παράγωγος συνάρτηση

- Η f λέγεται **παραγωγίσιμη** όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, και **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα** (α, β) όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του.
- Η f είναι **παραγωγίσιμη στο κλειστό** $[\alpha, \beta]$ όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον υπάρχουν (ως πραγματικοί αριθμοί) τα $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}$.
- Αν A_1 είναι το σύνολο των σημείων όπου η f είναι παραγωγίσιμη, η συνάρτηση $f' : A_1 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$, λέγεται **(πρώτη) παράγωγος** της f . Η παράγωγος της f' λέγεται **δεύτερη παράγωγος** f'' κ.ο.κ. ($f^{(\nu)}, \nu \geq 3$).



Η $f(x) = x^3 - 3x$ (συνεχής) και η παράγωγός της $f'(x) = 3x^2 - 3$ (διακεκομμένη): όπου $f' > 0$ η f ανεβαίνει, όπου $f' < 0$ κατεβαίνει

Οι παράγωγοι των βασικών συναρτήσεων

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Πίνακας βασικών παραγώγων

$f(x)$	$f'(x)$	Πεδίο
c	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$x^\nu, \nu \in \mathbb{N}, \nu \geq 2$	$\nu x^{\nu-1}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$
$\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\mathbb{R}$
$\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ — Απόδειξη για τη x^ν

Για $x \neq x_0$: $\frac{x^\nu - x_0^\nu}{x - x_0} = x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1}$ (ταυτότητα $\alpha^\nu - \beta^\nu$). Όταν $x \rightarrow x_0$, καθένας από τους ν όρους τείνει στο $x_0^{\nu-1}$, άρα το όριο είναι $\nu x_0^{\nu-1}$. ■

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ — Απόδειξη για τη $\sqrt{x}$

Για $x_0 > 0$ και $x \neq x_0$:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Η $\sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0: $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$ (κατακόρυφη εφαπτομένη). ■

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ — Απόδειξη για την $\eta\mu x$

Για $h \neq 0$:

$$\frac{\eta\mu(x+h) - \eta\mu x}{h} = \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x \eta\mu h - \eta\mu x}{h} = \eta\mu x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}.$$

Από τα βασικά τριγωνομετρικά όρια, όταν $h \rightarrow 0$ η παράσταση τείνει στο $\eta\mu x \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu x \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x$. Όμοια βρίσκουμε $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$. ■

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Για τις e^x και $\ln x$

Η απόδειξη στηρίζεται στο όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, το οποίο δεχόμαστε. Τότε $\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} \rightarrow e^x$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Εφαπτομένη με πίνακα

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x) = \sqrt{x}$ στο σημείο με τετμημένη 4, και να εξεταστεί αν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΛΥΣΗ

$f(4) = 2, f'(4) = \frac{1}{4}$. Εφαπτομένη: $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$, δηλαδή $y = \frac{x}{4} + 1$. Για $x = 0$ δίνει $y = 1 \neq 0$: **δεν** διέρχεται από την αρχή. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Παραγωγισιμότητα της $|f|$

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = |x^2 - 1|$, όπου ορίζεται.

ΛΥΣΗ

Για $|x| > 1$: $f(x) = x^2 - 1, f'(x) = 2x$. Για $|x| < 1$: $f(x) = 1 - x^2, f'(x) = -2x$. Στο $x = 1$: $\frac{|x^2-1|}{x-1} = |x+1| \frac{|x-1|}{x-1}$: από αριστερά $\rightarrow -2$, από δεξιά $\rightarrow 2$, άρα **όχι** παραγωγίσιμη. Όμοια στο -1 . Άρα $f'(x) = 2x$ για $|x| > 1, f'(x) = -2x$ για $|x| < 1$. ■

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 2.2 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Να βρείτε την εφαπτομένη της $f(x) = \eta\mu x$ στο $(0, 0)$ και της $g(x) = e^x$ στο $(0, 1)$.
●○○ → Λύση 2.2/1
- 2 Να βρείτε σε ποιο σημείο της $C_f, f(x) = \ln x$, η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
●●○ → Λύση 2.2/2
- 3 Να βρείτε τη δεύτερη και την τρίτη παράγωγο της $f(x) = x^4 + \eta\mu x$.
●●○ → Λύση 2.2/3
- 4 Να βρείτε τα σημεία της $C_f, f(x) = x^3$, στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 12x + 5$, καθώς και τις εξισώσεις τους.
... → Λύση 2.2/4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Διαφορικός
Λογισμός

ΜΑΘΗΜΑ 2.3

Κανόνες παραγώγισης

Άθροισμα, γινόμενο, πηλίκο

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Κανόνες παραγώγισης

Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x και $c \in \mathbb{R}$, τότε:

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(cf)'(x) = c f'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, με $g(x) \neq 0$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ — Απόδειξη του (1)

$$\frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \rightarrow f'(x) + g'(x).$$

→ ΠΟΡΙΣΜΑ — Χρήσιμες παράγωγοι από τους κανόνες

- $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $\left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = -\frac{\nu}{x^{\nu+1}}$ ($x \neq 0$).
- $(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$ και $(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$.

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Κανόνας της αλυσίδας

Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο x και η f παραγωγίσιμη στο $g(x)$, τότε η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x και

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Με τον συμβολισμό του Leibniz: αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, τότε $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Τρεις σημαντικές παράγωγοι (αποδεικνύονται με τον κανόνα της αλυσίδας)

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, για $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ και $x > 0$.
- $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$, για $\alpha > 0$.
- $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$, για $x \neq 0$.

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$(1) \ x^\alpha = e^{\alpha \ln x}, \text{ άρα } (x^\alpha)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

$$(2) \alpha^x = e^{x \ln \alpha}, \text{ άρα } (\alpha^x)' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha.$$

$$(3) \text{ Για } x > 0: (\ln x)' = \frac{1}{x}. \text{ Για } x < 0: \ln |x| = \ln(-x), \text{ άρα } (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Πίνακας παραγώγων σύνθετων ($u = u(x)$)

Συνάρτηση	Παράγωγος
u^α	$\alpha u^{\alpha-1} u'$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$e^u u'$
α^u	$\alpha^u \ln \alpha \cdot u'$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\eta \mu u$	$\sigma \nu u \cdot u'$
$\sigma \nu u$	$-\eta \mu u \cdot u'$
$\epsilon \varphi u$	$\frac{u'}{\sigma \nu^2 u}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Κανόνες

Να βρεθούν οι παράγωγοι: (α) $f(x) = x^3 e^x$ (β) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ (γ) $f(x) = \epsilon \varphi x - x$.

ΛΥΣΗ

$$(α) 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x).$$

$$(β) \frac{\frac{1}{x} x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}.$$

$$(γ) \frac{1}{\sigma \nu^2 x} - 1 = \frac{1 - \sigma \nu^2 x}{\sigma \nu^2 x} = \epsilon \varphi^2 x.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Σύνθετες

Να βρεθούν οι παράγωγοι: (α) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ (β) $f(x) = e^{\eta \mu x}$ (γ) $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$ (δ) $f(x) = 2^{x^2}$ (ε) $f(x) = x^{\sqrt{2}}$.

ΛΥΣΗ

$$(α) \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}. (β) e^{\eta \mu x} \sigma \nu x. (γ) \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}. (δ) 2^{x^2} \ln 2 \cdot 2x. (ε) \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1} (x > 0).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Η «δύναμη» x^x

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = x^x, x > 0$.

ΛΥΣΗ

Ούτε ο τύπος $(x^\alpha)'$ (σταθερός εκθέτης) ούτε ο $(\alpha^x)'$ (σταθερή βάση) εφαρμόζονται! Γράφουμε $x^x = e^{x \ln x}$, οπότε

$$f'(x) = e^{x \ln x} \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (\ln x + 1).$$



✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Σύγχυση $(x^\alpha)'$ και $(\alpha^x)'$

$\times (2^x)' = x \cdot 2^{x-1}.$

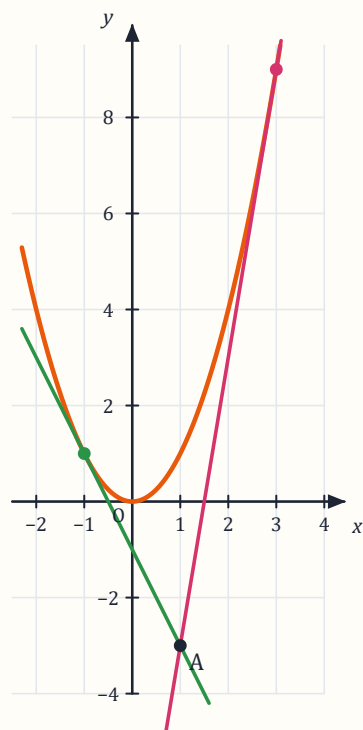
✓ Στο 2^x η μεταβλητή είναι στον **εκθέτη**: $(2^x)' = 2^x \ln 2$. Ο τύπος $\nu x^{\nu-1}$ ισχύει μόνο όταν η μεταβλητή είναι στη **βάση** και ο εκθέτης σταθερός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Εφαπτομένη από εξωτερικό σημείο

Να βρεθούν οι εφαπτομένες της $C_f, f(x) = x^2$, που διέρχονται από το σημείο $A(1, -3)$.

ΛΥΣΗ

Εφαπτομένη στο (α, α^2) : $y = 2\alpha(x - \alpha) + \alpha^2 = 2\alpha x - \alpha^2$.
Διέρχεται από το A : $-3 = 2\alpha - \alpha^2 \iff \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0 \iff \alpha = 3$ ή $\alpha = -1$. Εφαπτομένες: $y = 6x - 9$ και $y = -2x - 1$.



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Εφαπτομένη που διέρχεται από δοσμένο σημείο (όχι της καμπύλης)

Δεν ξέρουμε το σημείο επαφής, οπότε το ονομάζουμε $(\alpha, f(\alpha))$, γράφουμε τη γενική εξίσωση της εφαπτομένης σε αυτό και απαιτούμε να επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του δοσμένου σημείου. Λύνουμε ως προς α .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Κοινή εφαπτομένη

Να αποδειχθεί ότι οι C_f, C_g των $f(x) = e^x$ και $g(x) = x + 1$ εφάπτονται στο σημείο $(0, 1)$.

ΛΥΣΗ

$f(0) = 1 = g(0)$ (κοινό σημείο) και $f'(0) = e^0 = 1 = g'(0)$ (ίδια κλίση). Άρα έχουν κοινή εφαπτομένη στο $(0, 1)$, την $y = x + 1$.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Οι κανόνες παραγώγισης θέλουν «χέρι». Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με δεκάδες ασκήσεις αυτοματισμού και λύσεις βήμα-βήμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 2.3 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να βρείτε τις παραγώγους: (α) $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$ (β) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$ (γ) $f(x) = \eta\mu^3 x$.

●○○

→ Λύση 2.3/1

2 Να βρείτε τις παραγώγους: (α) $\ln(x^2 + 4)$ (β) $e^{\sqrt{x}}$ (γ) 3^{2x} (δ) $\ln |\sin x|$.

●○○

→ Λύση 2.3/2

3 Να βρείτε την παράγωγο της $f(x) = (\eta\mu x)^x, x \in (0, \pi)$.

●●○

→ Λύση 2.3/3

4 Να βρείτε τις εφαπτομένες της $f(x) = \frac{1}{x}$ που διέρχονται από το σημείο $(2, 0)$.

●●○

→ Λύση 2.3/4

5 Αν $f(x) = x g(x^2)$ με $g(1) = 2, g'(1) = 3$, να βρείτε την $f'(1)$.

●●○

→ Λύση 2.3/5

6 Να βρείτε το α ώστε οι C_f, C_g των $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \alpha x^2$ να έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο.

●●●

→ Λύση 2.3/6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Διαφορικός
Λογισμός

ΜΑΘΗΜΑ 2.4

Ρυθμός μεταβολής

Ο ρυθμός μεταβολής

ΟΡΙΣΜΟΣ — Ρυθμός μεταβολής

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x** στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

Μέγεθος	Ρυθμός μεταβολής
Θέση $S(t)$ κινητού	ταχύτητα $v(t) = S'(t)$
Ταχύτητα $v(t)$	επιτάχυνση $a(t) = v'(t) = S''(t)$
Κόστος $K(x)$	οριακό κόστος $K'(x)$
Έσοδα $E(x)$	οριακά έσοδα $E'(x)$
Κέρδος $P(x) = E(x) - K(x)$	οριακό κέρδος $P'(x)$

Σχετικοί ρυθμοί

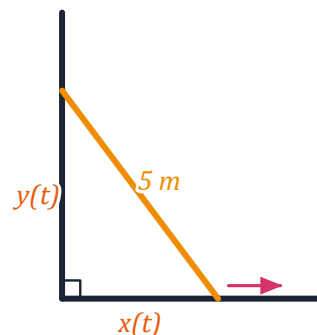
Συχνά δύο ή περισσότερα μεγέθη μεταβάλλονται **ταυτόχρονα** με τον χρόνο και συνδέονται με μια σχέση. Τότε, παραγωγίζοντας τη σχέση **ως προς t** (με τον κανόνα της αλυσίδας), βρίσκουμε σχέση ανάμεσα στους ρυθμούς τους.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πώς λύνουμε προβλήματα σχετικών ρυθμών

1. Σχήμα και ονομασία των μεταβλητών ως συναρτήσεις του χρόνου: $x(t), y(t), \dots$
2. Σχέση που τις συνδέει (Πυθαγόρειο, όγκος, ομοιότητα...), **για κάθε t** .
3. Παραγωγή ως προς t (προσοχή: π.χ. $(x^2(t))' = 2x(t)x'(t)$).
4. Αντικατάσταση των τιμών **τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0** — **μόνο μετά** την παραγωγή!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Η σκάλα που γλιστράει

Μια σκάλα μήκους 5 m ακουμπά σε κατακόρυφο τοίχο. Η βάση της απομακρύνεται από τον τοίχο με ρυθμό 0,5 m/s. Με ποιον ρυθμό κατεβαίνει η κορυφή της τη στιγμή που η βάση απέχει 3 m από τον τοίχο;



ΛΥΣΗ

Αν $x(t)$ η απόσταση της βάσης και $y(t)$ το ύψος της κορυφής: $x^2(t) + y^2(t) = 25$ για κάθε t . Παραγωγίζουμε: $2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$.

Τη στιγμή t_0 : $x(t_0) = 3$, $y(t_0) = 4$, $x'(t_0) = 0,5$. Τότε $3 \cdot 0,5 + 4y'(t_0) = 0$, δηλαδή $y'(t_0) = -0,375$ m/s: η κορυφή **κατεβαίνει** με ρυθμό 0,375 m/s. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Σφαιρικό μπαλόνι

Ένα σφαιρικό μπαλόνι φουσκώνει έτσι ώστε ο όγκος του να αυξάνεται με ρυθμό $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. Με ποιον ρυθμό αυξάνεται η ακτίνα του όταν $r = 5 \text{ cm}$;

ΛΥΣΗ

$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$, άρα $V'(t) = 4\pi r^2(t)r'(t)$. Για $r = 5$: $100 = 4\pi \cdot 25 \cdot r'$, $r' = \frac{1}{\pi} \approx 0,32 \text{ cm/s}$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Οριακά μεγέθη

Η συνάρτηση κόστους μιας βιομηχανίας είναι $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 20$ (χιλ. €) για την παραγωγή x τόνων. Για ποια παραγωγή το οριακό κόστος γίνεται ελάχιστο;

ΛΥΣΗ

$K'(x) = 3x^2 - 12x + 15 = 3(x - 2)^2 + 3$. Ελάχιστο για $x = 2$ τόνους, με οριακό κόστος 3 χιλ. €/τόνο. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Σημείο που κινείται σε καμπύλη

Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται πάνω στην καμπύλη $y = \sqrt{x}$, με την τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες/s. Με ποιον ρυθμό μεταβάλλεται η απόστασή του από την αρχή των αξόνων όταν $x = 4$;

ΛΥΣΗ

$d(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$. $d'(t) = \frac{(2x+1)x'}{2\sqrt{x^2+x}}$. Για $x = 4$, $x' = 2$: $d' = \frac{9 \cdot 2}{2\sqrt{20}} = \frac{9}{2\sqrt{5}} \approx 2,01$ μονάδες/s. ■

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Αντικατάσταση πριν την παραγωγή

✗ «Τη στιγμή εκείνη $x = 3$, άρα $3^2 + y^2 = 25$, και παραγωγίζοντας $0 + 2yy' = 0$, δηλαδή $y' = 0$.»

✓ Αν αντικαταστήσεις την τιμή **πριν** παραγωγίσεις, «παγώνεις» τη μεταβλητή και χάνεις τον ρυθμό της. Παραγωγίζουμε **πρώτα** τη σχέση που ισχύει για **κάθε** t και **μετά** αντικαθιστούμε.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Τα προβλήματα σχετικών ρυθμών «γεννούν» πάντα δυσκολίες. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με σχήματα και λύσεις βήμα-βήμα για όλες τις κατηγορίες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 2.4 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Ένα κινητό έχει θέση $S(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (m, s). Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση τη στιγμή $t = 2$.
●○○ → Λύση 2.4/1
- 2** Η πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου αυξάνεται με ρυθμό 3 cm/s. Με ποιον ρυθμό αυξάνεται το εμβαδόν του όταν η πλευρά είναι 10 cm;
●●○ → Λύση 2.4/2
- 3** Ένας κώνος (κορυφή προς τα κάτω) με ακτίνα βάσης 3 m και ύψος 6 m γεμίζει με νερό με ρυθμό 2 m³/min. Με ποιον ρυθμό ανεβαίνει η στάθμη όταν το βάθος του νερού είναι 4 m;
●●○ → Λύση 2.4/3
- 4** Ένα αυτοκίνητο Α κινείται προς βορρά με 60 km/h και ένα αυτοκίνητο Β προς ανατολή με 80 km/h, ξεκινώντας ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο. Με ποιον ρυθμό αυξάνεται η απόστασή τους μετά από 2 ώρες;
●●● → Λύση 2.4/4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Διαφορικός
Λογισμός

ΜΑΘΗΜΑ 2.5

Θεώρημα Rolle – Θεώρημα Μέσης Τιμής

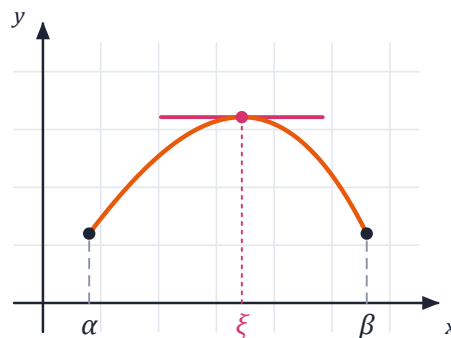
Το θεώρημα του Rolle

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Θεώρημα του Rolle

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- **συνεχής** στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$,
- **παραγωγίσιμη** στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$,

τότε υπάρχει **ένα τουλάχιστον** $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.



Rolle: $f(\alpha) = f(\beta) \Rightarrow$ οριζόντια εφαπτομένη

Γεωμετρικά: υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι **παράλληλη στον άξονα x'** .

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Οι τρεις προϋποθέσεις είναι όλες απαραίτητες

- Η $f(x) = |x|$ στο $[-1, 1]$: συνεχής, $f(-1) = f(1)$, αλλά **όχι παραγωγίσιμη** στο 0 — και πράγματι $f'(x) = \pm 1 \neq 0$.
- Αν $f(\alpha) \neq f(\beta)$, το θεώρημα δεν λέει τίποτα (π.χ. $f(x) = x$ στο $[0, 1]$).

Το θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.)

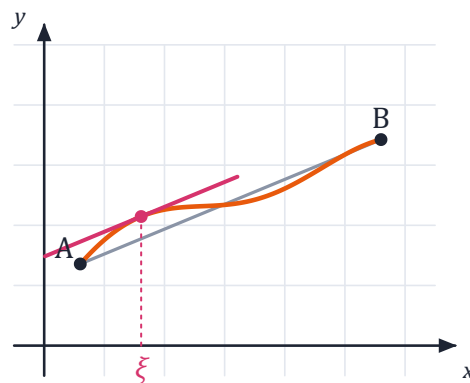
★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- **συνεχής** στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- **παραγωγίσιμη** στο ανοικτό διάστημα (α, β) ,

τότε υπάρχει **ένα τουλάχιστον** $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$



Θ.Μ.Τ.: εφαπτομένη παράλληλη στη χορδή AB

Γεωμετρικά: υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι **παράλληλη στη χορδή** που ενώνει τα άκρα $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$. **Φυσικά:** κάποια χρονική στιγμή η στιγμιαία ταχύτητα ισούται με τη μέση ταχύτητα.

❗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Το Rolle είναι ειδική περίπτωση του Θ.Μ.Τ.

Αν $f(\alpha) = f(\beta)$, ο λόγος $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ είναι 0 και το Θ.Μ.Τ. δίνει ακριβώς το Rolle. (Το Θ.Μ.Τ. αποδεικνύεται εφαρμόζοντας το Rolle στη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}x$.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Εφαρμογή του Rolle

Να εξεταστεί αν ισχύει το θεώρημα Rolle για την $f(x) = x^2 - 4x + 1$ στο $[0, 4]$ και να βρεθούν τα ξ .

ΛΥΣΗ

Η f είναι πολυωνυμική, άρα συνεχής στο $[0, 4]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 4)$, και $f(0) = 1 = f(4)$.
Ισχύει λοιπόν το θεώρημα: $f'(\xi) = 2\xi - 4 = 0 \iff \xi = 2 \in (0, 4)$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Ύπαρξη ρίζας της παραγώγου

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $4x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

ΛΥΣΗ

Το πολυώνυμο είναι παράγωγος της $F(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$. Η F είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $F(0) = 0 = F(1)$. Από Rolle υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ με $F'(\xi) = 0$, δηλαδή η εξίσωση έχει ρίζα. ■

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πότε σκεφτόμαστε Rolle για την ύπαρξη ρίζας

Αν το Bolzano «δεν δουλεύει» (π.χ. οι τιμές στα άκρα δεν είναι ετερόσημες), ψάχνουμε μια **αρχική** F της παράστασης ($F' = \eta$ παράσταση) με $F(\alpha) = F(\beta)$ και εφαρμόζουμε **Rolle στην F** .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Ανισότητα με Θ.Μ.Τ.

Να αποδειχθεί ότι για $0 < \alpha < \beta$ ισχύει $\frac{\beta - \alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta - \alpha}{\alpha}$.

ΛΥΣΗ

Η $f(x) = \ln x$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha, \beta]$, άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $\frac{1}{\xi} = \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha}$. Επειδή $\alpha < \xi < \beta$: $\frac{1}{\beta} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{\alpha}$, δηλαδή $\frac{1}{\beta} < \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha}$. Πολλαπλασιάζοντας με $\beta - \alpha > 0$ προκύπτει το ζητούμενο. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Δύο εφαρμογές Θ.Μ.Τ.

Έστω f συνεχής στο $[0, 4]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 4)$, με $f(0) = 1$, $f(2) = 5$, $f(4) = 1$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 4)$ με $f'(\xi_1) = 2$ και $f'(\xi_2) = -2$, και ότι υπάρχει $\xi \in (0, 4)$ με $f'(\xi) = 0$.

ΛΥΣΗ

Θ.Μ.Τ. στο $[0, 2]$: υπάρχει $\xi_1 \in (0, 2)$ με $f'(\xi_1) = \frac{5-1}{2-0} = 2$. Θ.Μ.Τ. στο $[2, 4]$: υπάρχει $\xi_2 \in (2, 4)$ με $f'(\xi_2) = \frac{1-5}{4-2} = -2$. Τέλος, $f(0) = f(4)$, άρα από Rolle στο $[0, 4]$ υπάρχει ξ με $f'(\xi) = 0$. ■

✗ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** — Το ξ «υπολογίζεται» πάντα

✗ «Από το Θ.Μ.Τ. το ξ είναι το μέσο του $[\alpha, \beta]$.»

✓ Το θεώρημα εξασφαλίζει μόνο την **ύπαρξη** του ξ · δεν λέει πού βρίσκεται (εκτός από το ότι είναι στο **ανοικτό** (α, β)) ούτε ότι είναι μοναδικό.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Τα θεωρήματα Rolle και Μέσης Τιμής εμφανίζονται σχεδόν σε κάθε Θέμα Γ ή Δ των Πανελλαδικών. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με όλες τις «πατέντες» εφαρμογής τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 2.5 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να εξετάσετε αν ισχύει το θεώρημα Rolle για την $f(x) = \eta\mu x$ στο $[0, \pi]$ και να βρείτε τα ξ .

●○○

→ Λύση 2.5/1

2 Να βρείτε το ξ του Θ.Μ.Τ. για την $f(x) = x^3$ στο $[0, 3]$.

●○○

→ Λύση 2.5/2

3 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^2 + 2\alpha x - \alpha - 1 = 0$ έχει ρίζα στο $(0, 1)$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

●●○

→ Λύση 2.5/3

4 Να αποδείξετε ότι $|\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta| \leq |\alpha - \beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

●●○

→ Λύση 2.5/4

5 Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ και $f'(x) \leq 2$ για κάθε x . Να αποδείξετε ότι $f(3) \leq 5$.

●●●

→ Λύση 2.5/5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Διαφορικός
Λογισμός

ΜΑΘΗΜΑ 2.6

Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

◆ Σταθερή συνάρτηση

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Θεώρημα (σταθερή συνάρτηση)

Έστω f συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ .

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ για οποιαδήποτε $x_1 < x_2$ του Δ . Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) (όπου όλα τα σημεία είναι εσωτερικά του Δ). Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ με $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Αφού $f'(\xi) = 0$, προκύπτει $f(x_1) = f(x_2)$. ■

→ ΠΟΡΙΣΜΑ — Συναρτήσεις με ίσες παραγώγους

Έστω f, g συνεχείς σε ένα διάστημα Δ με $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η $h = f - g$ είναι συνεχής στο Δ και $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο. Από το προηγούμενο θεώρημα η h είναι σταθερή: $f(x) - g(x) = c$. ■

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Μόνο σε ΔΙΑΣΤΗΜΑ!

Το θεώρημα δεν ισχύει σε ένωση διαστημάτων. Η $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$ έχει $f'(x) = 0$ σε όλο το $\mathbb{R}^*$, αλλά δεν είναι σταθερή. Σε ένωση διαστημάτων η f είναι σταθερή σε καθένα χωριστά (με πιθανώς διαφορετικές σταθερές).

◆ Μονοτονία συνάρτησης

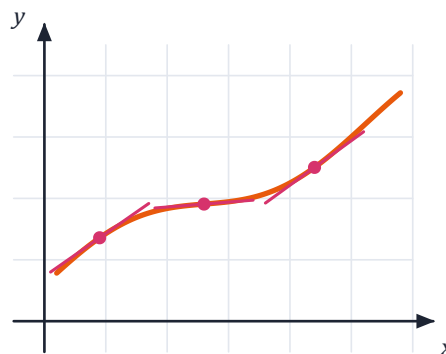
★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Κριτήριο μονοτονίας

Έστω f συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα** σε όλο το Δ .

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $f' > 0$ και $x_1 < x_2$ στο Δ . Από Θ.Μ.Τ. στο $[x_1, x_2]$ υπάρχει ξ με $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Αφού $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, είναι $f(x_2) > f(x_1)$: η f είναι γνησίως αύξουσα. Όμοια η δεύτερη περίπτωση. ■



$f' > 0$: οι εφαπτομένες «ανεβαίνουν» και η f αυξάνεται

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει

Η $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όμως $f'(0) = 0$. Άρα από «γνησίως αύξουσα» δεν προκύπτει « $f' > 0$ » — μόνο ότι $f' \geq 0$. Επίσης: μια f με $f' > 0$ σε $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ΔΕΝ είναι απαραίτητα γνησίως αύξουσα στην ένωση (π.χ. $f(x) = -\frac{1}{x}$).

💡 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Μελέτη μονοτονίας

1. Πεδίο ορισμού και συνέχεια.
2. Υπολογισμός της f' και παραγοντοποίηση.
3. Ρίζες και πρόσημο της f' (πίνακας).
4. Συμπέρασμα ανά διάστημα — γράφουμε κλειστά τα άκρα όπου η f είναι συνεχής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 — Ισότητα με σταθερά

Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ χρησιμοποιώντας παραγώγους.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $h(x) = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x$. $h'(x) = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - 2\sigma\upsilon\nu x \eta\mu x = 0$, άρα η h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$: $h(x) = h(0) = 1$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 — Εύρεση τύπου από σχέση παραγώγων

Να βρεθεί η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν $f'(x) = f(x)$ για κάθε x και $f(0) = 3$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε $g(x) = e^{-x} f(x)$. Τότε $g'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = e^{-x} (f'(x) - f(x)) = 0$. Άρα η g είναι σταθερή: $g(x) = g(0) = 3$, δηλαδή $f(x) = 3e^x$. ■

💡 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Η «πατέντα» $f' = f$

Όταν δίνεται σχέση της μορφής $f'(x) = \lambda f(x)$, πολλαπλασιάζουμε με $e^{-\lambda x}$ και παρατηρούμε ότι $(e^{-\lambda x} f(x))' = e^{-\lambda x} (f'(x) - \lambda f(x)) = 0$. Άρα $f(x) = c e^{\lambda x}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Μονοτονία

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

ΛΥΣΗ

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3).$$

x	$-\infty \dots -1$	$-1 \dots 3$	$3 \dots +\infty$
$f'(x)$	+	-	+
f	↗	↘	↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[3, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 3]$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Ανισότητα με μονοτονία

Να αποδειχθεί ότι $\ln(1+x) < x$ για κάθε $x > 0$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε $h(x) = x - \ln(1+x)$, $x \geq 0$. $h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0$ για $x > 0$, και η h είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$. Άρα γνησίως αύξουσα εκεί, οπότε για $x > 0$: $h(x) > h(0) = 0$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Μοναδική ρίζα με μονοτονία

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $e^x = 2 - x$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

ΛΥΣΗ

$h(x) = e^x + x - 2$: $h'(x) = e^x + 1 > 0$, γνησίως αύξουσα, άρα το πολύ μία ρίζα. $h(0) = -1$, $h(1) = e - 1 > 0$ και η h είναι συνεχής: από Bolzano υπάρχει ρίζα στο $(0, 1)$. Άρα ακριβώς μία. ■

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Μονοτονία σε ένωση διαστημάτων

✗ « $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}^*$.»

✓ Η f είναι γνησίως φθίνουσα **σε καθένα** από τα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, όχι στην ένωσή τους: $-1 < 1$ αλλά $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$.

ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με όλες τις κατηγορίες ασκήσεων πάνω στις συνέπειες του Θ.Μ.Τ.: ταυτότητες, εύρεση τύπου, ανισότητες, πλήθος ριζών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 2.6 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Να μελετήσετε τη μονοτονία της $f(x) = x e^x$.
●○○ → Λύση 2.6/1
- 2 Να μελετήσετε τη μονοτονία της $f(x) = x - \ln x$.
●○○ → Λύση 2.6/2
- 3 Να βρείτε την f αν $f'(x) = 2x + \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 4$.
●●○ → Λύση 2.6/3
- 4 Να αποδείξετε ότι $e^x \geq 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
●●○ → Λύση 2.6/4
- 5 Να βρείτε την f αν $f'(x) = -2f(x)$ για κάθε x και $f(0) = 5$.
●●○ → Λύση 2.6/5
- 6 Να λύσετε την εξίσωση $x^5 + x = 2$ και την ανίσωση $x^5 + x > 2$.
●●● → Λύση 2.6/6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαφορικός Λογισμός

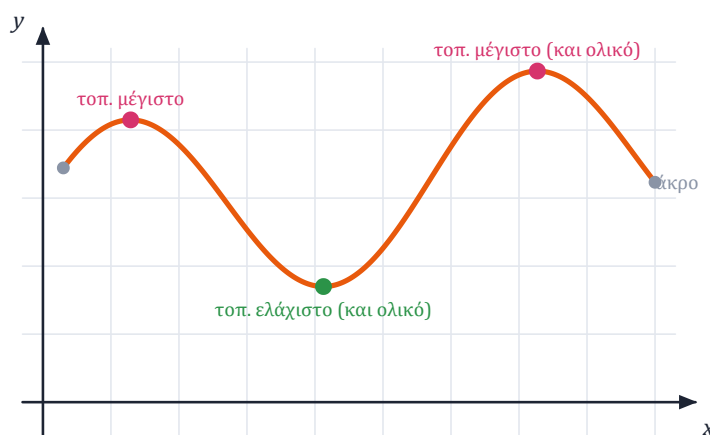
ΜΑΘΗΜΑ 2.7

Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

Ορισμοί

ΟΡΙΣΜΟΣ — Τοπικά ακρότατα

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ανάλογα ορίζεται το **τοπικό ελάχιστο**. Τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα λέγονται **τοπικά ακρότατα**: το x_0 λέγεται **θέση τοπικού ακροτάτου**.



Τοπικά και ολικά ακρότατα

Το θεώρημα του Fermat

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Θεώρημα του Fermat

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε

$$f'(x_0) = 0.$$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 . Τότε υπάρχει $\delta > 0$ με $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και $f(x) \leq f(x_0)$ σε αυτό, δηλαδή $f(x) - f(x_0) \leq 0$.

- Για $x \in (x_0 - \delta, x_0)$: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ (αρνητικός προς αρνητικό), οπότε $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$.
- Για $x \in (x_0, x_0 + \delta)$: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$, οπότε $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$.

Άρα $f'(x_0) = 0$. Όμοια για τοπικό ελάχιστο. ■

🔑 **ΚΛΕΙΔΙ** — Πού αναζητούμε τοπικά ακρότατα (πιθανές θέσεις)

1. Στα εσωτερικά σημεία όπου η f' μηδενίζεται (κρίσιμα σημεία).
2. Στα εσωτερικά σημεία όπου η f δεν παραγωγίζεται.
3. Στα άκρα του πεδίου ορισμού (αν ανήκουν σε αυτό).

⚠️ **ΠΡΟΣΟΧΗ!** — Το Fermat δεν είναι «αν και μόνο αν»

Το $f'(x_0) = 0$ είναι **αναγκαία** αλλά **όχι ικανή** συνθήκη: η $f(x) = x^3$ έχει $f'(0) = 0$ αλλά όχι ακρότατο. Επίσης η $|x|$ έχει ελάχιστο στο 0 χωρίς να είναι εκεί παραγωγίσιμη.

🔵 Κριτήριο πρώτης παραγώγου

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Κριτήριο για τοπικά ακρότατα

Έστω f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 του, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

- Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι **τοπικό μέγιστο**.
- Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι **τοπικό ελάχιστο**.
- Αν η $f'(x)$ **διατηρεί πρόσημο** στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ **δεν** είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Τοπικά ακρότατα

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της $f(x) = x^4 - 4x^3$.

ΛΥΣΗ

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$. Ρίζες 0 (διπλή) και 3. Πρόσημο: $f' < 0$ για $x < 0$ και για $0 < x < 3$, $f' > 0$ για $x > 3$.

Στο 0 η f' **δεν** αλλάζει πρόσημο: δεν υπάρχει ακρότατο (η εφαπτομένη είναι οριζόντια, αλλά η f συνεχίζει να μειώνεται). Στο 3: τοπικό (και ολικό) ελάχιστο $f(3) = 81 - 108 = -27$. ■

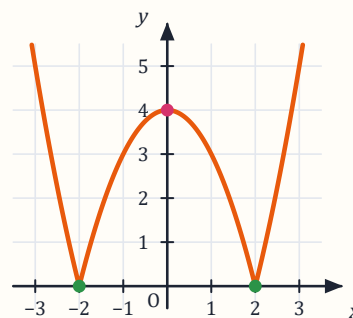
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Ακρότατα με απόλυτη τιμή

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της $f(x) = |x^2 - 4|$.

ΛΥΣΗ

Για $|x| > 2$: $f'(x) = 2x$ · για $|x| < 2$: $f'(x) = -2x$. Στα ± 2 η f δεν είναι παραγωγίσιμη (αλλά είναι συνεχής). Πρόσημο: $f' < 0$ στο $(-\infty, -2)$, $f' > 0$ στο $(-2, 0)$, $f' < 0$ στο $(0, 2)$, $f' > 0$ στο $(2, +\infty)$.

Τοπικά ελάχιστα $f(-2) = f(2) = 0$ (σημεία μη παραγωγισιμότητας!) και τοπικό μέγιστο $f(0) = 4$.



Ολικά ακρότατα σε κλειστό διάστημα

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Ολικά ακρότατα συνεχούς f στο $[\alpha, \beta]$

1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία στο (α, β) και τα σημεία όπου η f δεν παραγωγίζεται.
2. Υπολογίζουμε την f σε αυτά και στα άκρα α, β .
3. Η μεγαλύτερη τιμή είναι το ολικό μέγιστο, η μικρότερη το ολικό ελάχιστο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Ολικά ακρότατα

Να βρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της $f(x) = x^3 - 3x + 1$ στο $[0, 2]$.

ΛΥΣΗ

$f'(x) = 3(x^2 - 1) = 0 \iff x = \pm 1$. στο $(0, 2)$ μόνο το 1. $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 3$.
Μέγιστη τιμή 3, ελάχιστη -1 .

Εφαρμογές: ανισότητες και πλήθος ριζών

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Ανισότητα με ακρότατο

Να αποδειχθεί ότι $\ln x \leq \frac{x}{e}$ για κάθε $x > 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

ΛΥΣΗ

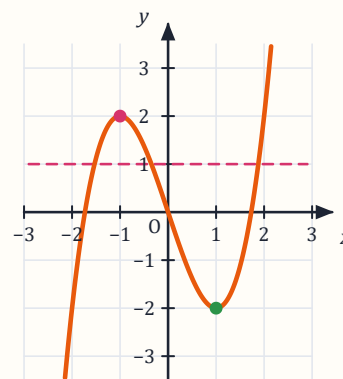
$h(x) = \frac{x}{e} - \ln x$, $h'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x} = \frac{x-e}{ex}$: < 0 στο $(0, e)$, > 0 στο $(e, +\infty)$. Ολικό ελάχιστο $h(e) = 1 - 1 = 0$, άρα $h(x) \geq 0$, με ισότητα μόνο για $x = e$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Πλήθος ριζών με παράμετρο

Να βρεθεί για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^3 - 3x = \alpha$ έχει τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ΛΥΣΗ

Μελετάμε την $f(x) = x^3 - 3x$: $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$.
 Τοπικό μέγιστο $f(-1) = 2$, τοπικό ελάχιστο $f(1) = -2$,
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = \pm\infty$. Η οριζόντια ευθεία $y = \alpha$ τέμνει τη C_f σε τρία
 σημεία ακριβώς όταν βρίσκεται **ανάμεσα** στο τοπικό ελάχιστο
 και στο τοπικό μέγιστο: $-2 < \alpha < 2$.



✗ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** — Ελέγχουμε μόνο τα κρίσιμα σημεία

✗ «Η $f(x) = |x|$ έχει $f'(x) = \pm 1 \neq 0$, άρα δεν έχει ακρότατα.»

✓ Ξεχάσαμε τα σημεία όπου η f **δεν** παραγωγίζεται: στο 0 η $|x|$ έχει ελάχιστο. Ελέγχουμε **όλες** τις πιθανές θέσεις.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Η μελέτη ακροτάτων, ανισοτήτων και πλήθους ριζών είναι «βασικό εργαλείο» για τα θέματα Γ και Δ. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με κατηγοριοποιημένα θέματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 2.7 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

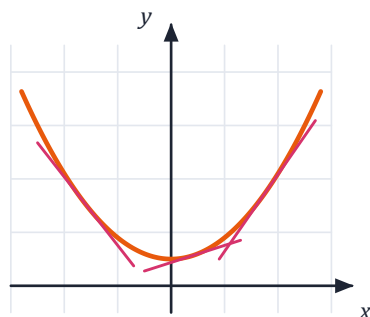
- 1 Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.
 ●○○ → Λύση 2.7/1
- 2 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = x^2 e^{-x}$.
 ●○○ → Λύση 2.7/2
- 3 Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $f(x) = x + 2 \sin x$ στο $[0, \pi]$.
 ●●○ → Λύση 2.7/3
- 4 Να αποδείξετε ότι $x^4 - 4x + 3 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 ●●○ → Λύση 2.7/4
- 5 Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln x = \alpha x$ για $\alpha > 0$.
 ●●○ → Λύση 2.7/5
- 6 Να βρείτε τα α, β ώστε η $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$ να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 1$ με τιμή -2 , και να εξετάσετε το είδος του.
 ... → Λύση 2.7/6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Διαφορικός
Λογισμός

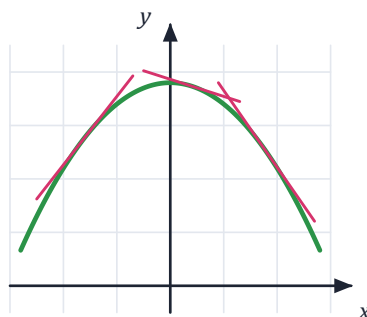
ΜΑΘΗΜΑ 2.8

Κυρτότητα – Σημεία καμπής

Κυρτή και κοίλη συνάρτηση



Κυρτή: η κλίση αυξάνεται, η C_f «πάνω» από τις εφαπτομένες



Κοίλη: η κλίση μειώνεται, η C_f «κάτω» από τις εφαπτομένες

ΟΡΙΣΜΟΣ — Κυρτή – κοίλη

Έστω f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Η f λέγεται:

- **κυρτή** (ή ότι «στρέφει τα κοίλα προς τα άνω») στο Δ , αν η f' είναι **γνησίως αύξουσα** στο εσωτερικό του Δ .
- **κοίλη** («στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω») στο Δ , αν η f' είναι **γνησίως φθίνουσα** στο εσωτερικό του Δ .

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Κριτήριο κυρτότητας

Έστω f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του.

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό x του Δ , η f είναι **κυρτή** στο Δ .
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό x του Δ , η f είναι **κοίλη** στο Δ .

❗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Η θέση της εφαπτομένης

Αν η f είναι **κυρτή** σε ένα διάστημα Δ , η εφαπτομένη της C_f σε οποιοδήποτε σημείο του Δ βρίσκεται **κάτω** από τη C_f (με εξαίρεση το σημείο επαφής). Αν είναι **κοίλη**, η εφαπτομένη βρίσκεται **πάνω** από τη C_f . Αυτή η ιδιότητα δίνει πολλές χρήσιμες ανισότητες, π.χ. $e^x \geq x + 1$ (η e^x είναι κυρτή και η $y = x + 1$ είναι η εφαπτομένη της στο 0).

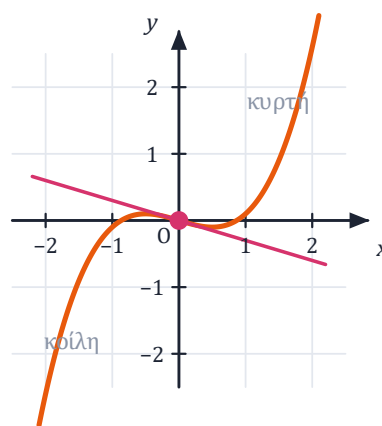
⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Το αντίστροφο του κριτηρίου δεν ισχύει

Η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ (η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα), αλλά $f''(0) = 0$. Άρα «κυρτή» δεν σημαίνει « $f'' > 0$ παντού».

Σημεία καμπής

ΟΡΙΣΜΟΣ — Σημείο καμπής

Έστω f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο όμως η C_f έχει εφαπτομένη. Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) (ή αντίστροφα), τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται **σημείο καμπής** της C_f .



Σε ένα σημείο καμπής η C_f αλλάζει «καμπυλότητα» και η εφαπτομένη **διαπερνά** την καμπύλη.

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Αναγκαία συνθήκη

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε $f''(x_0) = 0$.

Σημείο καμπής: η εφαπτομένη «διαπερνά» την καμπύλη

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Πιθανές θέσεις σημείων καμπής

1. Τα εσωτερικά σημεία όπου η f'' μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία όπου η f δεν είναι δύο φορές παραγωγίσιμη (αλλά υπάρχει εφαπτομένη).

Ένα τέτοιο σημείο είναι σημείο καμπής **μόνο αν η f'' αλλάζει πρόσημο** εκατέρωθέν του (και υπάρχει εφαπτομένη).

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ!

Το $f''(x_0) = 0$ δεν αρκεί: η $f(x) = x^4$ έχει $f''(0) = 0$ αλλά **δεν** έχει σημείο καμπής στο 0 (είναι κυρτή παντού).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Κυρτότητα και σημεία καμπής

Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα η $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ και να βρεθούν τα σημεία καμπής.

ΛΥΣΗ

$$f'(x) = 4x^3 - 12x, f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1).$$

x	$-\infty \dots -1$	$-1 \dots 1$	$1 \dots +\infty$
$f''(x)$	+	-	+
f	κυρτή $\cup$	κοίλη $\cap$	κυρτή $\cup$

Η f'' αλλάζει πρόσημο στα ± 1 : σημεία καμπής $(-1, f(-1)) = (-1, 0)$ και $(1, 0)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Ανισότητα από κυρτότητα

Να αποδειχθεί ότι $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$.

ΛΥΣΗ

$f(x) = \ln x$: $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, άρα η f είναι κοίλη. Η εφαπτομένη της στο $(1, 0)$ είναι $y = x - 1$ (αφού $f'(1) = 1$) και, λόγω κοιλότητας, βρίσκεται **πάνω** από τη C_f : $\ln x \leq x - 1$, με ισότητα μόνο για $x = 1$. ■

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Σημείο καμπής ως αριθμός

✗ «Το σημείο καμπής είναι το $x = 1$.»

✓ Το σημείο καμπής είναι **σημείο της C_f** , άρα έχει **δύο συντεταγμένες**: $A(1, f(1))$. Το $x = 1$ είναι η **θέση** (τετμημένη) του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 2.8 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να μελετήσετε την κυρτότητα της $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ και να βρείτε το σημείο καμπής.

●○○

→ Λύση 2.8/1

2 Να μελετήσετε την κυρτότητα της $f(x) = e^{-x^2}$.

●○○

→ Λύση 2.8/2

3 Να βρείτε τα α, β ώστε η C_f της $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$ να έχει σημείο καμπής το $(1, 2)$.

●●○

→ Λύση 2.8/3

4 Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x \leq x$ για $x \geq 0$, χρησιμοποιώντας κυρτότητα στο $[0, \pi]$ και μια απλή παρατήρηση για $x > \pi$.

●●○

→ Λύση 2.8/4

5 Αν η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(0) = 2$, να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2x + 1$ για κάθε x .

●●●

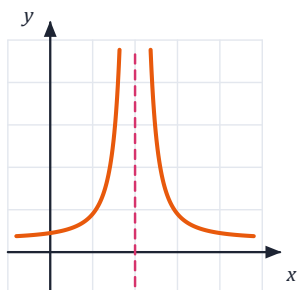
→ Λύση 2.8/5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Διαφορικός
Λογισμός

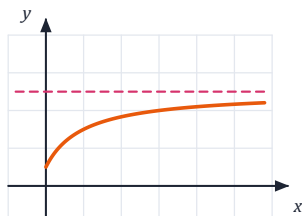
ΜΑΘΗΜΑ 2.9

Ασύμπτωτες – Κανόνες De L'Hospital

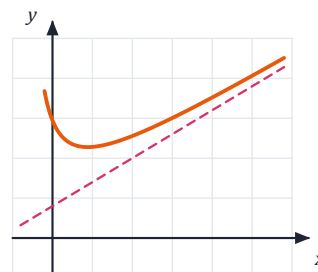
Ασύμπτωτες



Κατακόρυφη $x = x_0$



Οριζόντια $y = \ell$



Πλάγια $y = \lambda x + \beta$

ΟΡΙΣΜΟΣ — Ασύμπτωτες

- Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f αν ένα τουλάχιστον από τα $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.
- Η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$).
- Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** (πλάγια, αν $\lambda \neq 0$) της C_f στο $+\infty$ αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$. Ανάλογα στο $-\infty$.

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Υπολογισμός πλάγιας ασύμπτωτης

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}.$$

Το ίδιο ισχύει στο $-\infty$.

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Πού ψάχνουμε ασύμπτωτες

- Κατακόρυφες:** στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού που δεν ανήκουν σε αυτό, και στα σημεία όπου η f δεν είναι συνεχής. (Μια συνεχής στο x_0 συνάρτηση δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη εκεί.)
- Οριζόντιες / πλάγιες:** μόνο στο $\pm\infty$, και μόνο αν το πεδίο ορισμού «φτάνει» εκεί.
- Οι **πολυωνυμικές** συναρτήσεις βαθμού ≥ 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
- Μια **ρητή** $\frac{P}{Q}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη αν $\deg P \leq \deg Q$, και πλάγια αν $\deg P = \deg Q + 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Όλες οι ασύμπτωτες

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

ΛΥΣΗ

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Κατακόρυφη: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f = \frac{2}{0^+} = +\infty$, άρα $x = 1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Πλάγια: $\lambda = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} = 1$. $\beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$. Η $y = x + 1$ είναι ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$. (Άρα δεν υπάρχει οριζόντια.)

Κανόνες De L'Hospital

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Κανόνας De L'Hospital (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Κανόνας De L'Hospital (μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. (Τα θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια.)

⚠ **ΠΡΟΣΟΧΗ!** — Παραγωγίζουμε ΧΩΡΙΣΤΑ αριθμητή και παρονομαστή

Ο κανόνας **δεν** είναι ο κανόνας του πηλίκου! Γράφουμε $\frac{f'}{g'}$, όχι $\left(\frac{f}{g}\right)'$. Και τον εφαρμόζουμε **μόνο** σε μορφές $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ — ελέγχουμε **πάντα** πρώτα τη μορφή.

💡 **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ** — Άλλες απροσδιόριστες μορφές

- $0 \cdot (\pm\infty)$: γράφουμε $f \cdot g = \frac{f}{1/g}$ ή $\frac{g}{1/f}$ για να γίνει $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$.
- $(+\infty) - (+\infty)$: κάνουμε ομώνυμα ή βγάζουμε κοινό παράγοντα.
- $0^0, \infty^0, 1^\infty$: γράφουμε $f^g = e^{g \ln f}$ και βρίσκουμε το όριο του εκθέτη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Βασικές εφαρμογές

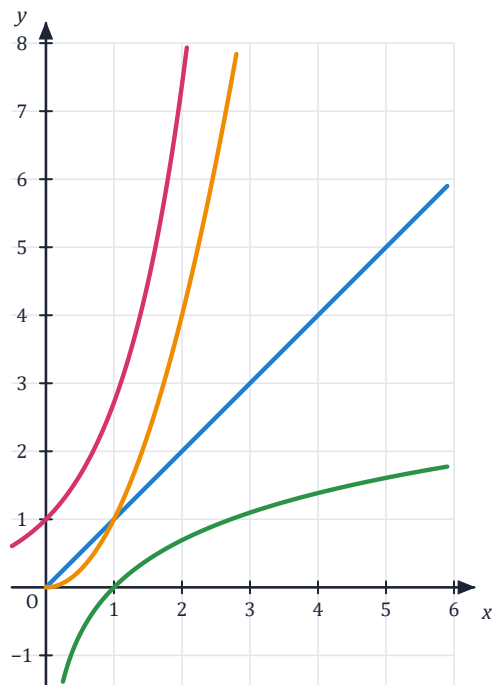
Να βρεθούν: (α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ (γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$.

ΛΥΣΗ

(α) Μορφή $\frac{0}{0}$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$, πάλι $\frac{0}{0}$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$.

(β) Μορφή $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0$.

(γ) $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$.



Η «ιεραρχία» στο $+\infty$: $\ln x$ (πράσινη), x (μπλε), x^2 (πορτοκαλί), e^x (κόκκινη)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Η «ιεραρχία» στο $+\infty$

Από τα (β), (γ) φαίνεται κάτι γενικό: στο $+\infty$ ο λογάριθμος μεγαλώνει πιο αργά από κάθε δύναμη του x , και κάθε δύναμη του x πιο αργά από την e^x :

$$\ln x \ll x^\alpha \ll e^x \quad (\alpha > 0).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Μορφή $0 \cdot \infty$

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

ΛΥΣΗ

$$x \ln x = \frac{\ln x}{1/x}, \text{ μορφή } \frac{-\infty}{+\infty}: \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Μορφή 1^∞

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

ΛΥΣΗ

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}. \text{ Για τον εκθέτη: } x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \text{ (μορφή } \frac{0}{0}\text{), και με } u = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+:$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+u}}{1} = 1. \text{ Άρα το όριο είναι } e^1 = e.$$

✖ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** — De L'Hospital χωρίς απροσδιοριστία

$$\times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1.$$

✓ Η μορφή είναι $\frac{1}{2}$ (όχι απροσδιόριστη)· απλώς αντικαθιστούμε: το όριο είναι $\frac{1}{2}$. Η τυφλή εφαρμογή του κανόνα δίνει λάθος αποτέλεσμα!



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Οι ασύμπτωτες και ο κανόνας De L'Hospital είναι απαραίτητα εργαλεία για τη μελέτη συναρτήσεων. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με όλες τις απροσδιόριστες μορφές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 2.9 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$.

●○○

→ Λύση 2.9/1

2 Να υπολογίσετε: (α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - x}{x^3}$ (β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$.

●○○

→ Λύση 2.9/2

3 Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ στο $+\infty$ και την οριζόντια στο $-\infty$.

●●○

→ Λύση 2.9/3

4 Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

●●○

→ Λύση 2.9/4

5 Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

●●●

→ Λύση 2.9/5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Διαφορικός
Λογισμός

ΜΑΘΗΜΑ 2.10

Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης

Η πορεία μελέτης

🔦 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Τα βήματα της πλήρους μελέτης

1. Πεδίο ορισμού (και συμμετρίες: άρτια $f(-x) = f(x)$ / περιττή $f(-x) = -f(x)$ · περιοδικότητα).
2. Συνέχεια και όρια στα άκρα του πεδίου ορισμού.
3. Πρώτη παράγωγος: μονοτονία και ακρότατα.
4. Δεύτερη παράγωγος: κυρτότητα και σημεία καμπής.
5. Ασύμπτωτες.
6. Πίνακας μεταβολών που συγκεντρώνει όλα τα παραπάνω.
7. Σημεία τομής με τους άξονες και **χάραξη** της γραφικής παράστασης.

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Συμμετρίες

Αν η f είναι **άρτια**, η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y/y · αν είναι **περιττή**, ως προς την αρχή των αξόνων. Τότε αρκεί να τη μελετήσουμε για $x \geq 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Πλήρης μελέτη ρητής συνάρτησης

Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

ΛΥΣΗ

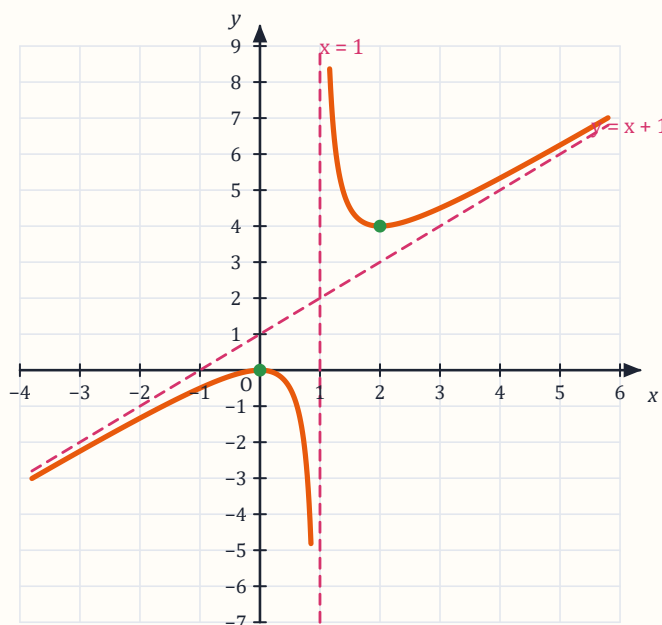
1. Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R} - \{1\}$. Συνεχής ως ρητή.

2. Μονοτονία - ακρότατα: $f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Πρόσημο του $x(x-2)$: + για $x < 0$, - στα $(0, 1)$ και $(1, 2)$, + για $x > 2$. Τοπικό μέγιστο $f(0) = 0$, τοπικό ελάχιστο $f(2) = 4$.

3. Κυρτότητα: $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ (διαίρεση), άρα $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$: κοίλη στο $(-\infty, 1)$, κυρτή στο $(1, +\infty)$. Σημείο καμπής δεν υπάρχει (το 1 δεν ανήκει στο πεδίο).

4. Ασύμπτωτες: κατακόρυφη $x = 1$ ($\lim_{1^-} f = -\infty$, $\lim_{1^+} f = +\infty$)· πλάγια $y = x + 1$ στο $\pm\infty$ (αφού $f(x) - (x+1) = \frac{1}{x-1} \rightarrow 0$).

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		+	0	-		-	0	+	
f''		-		-		+		+	
f	$-\infty$	$\nearrow \cap$	0	$\searrow \cap$		$\searrow \cup$	4	$\nearrow \cup$	$+\infty$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Πλήρης μελέτη με εκθετική

Να μελετηθεί η $f(x) = x e^{-x}$.

ΛΥΣΗ

Πεδίο: $\mathbb{R}$, συνεχής.

Μονοτονία: $f'(x) = e^{-x}(1-x)$: αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ · ολικό μέγιστο $f(1) = \frac{1}{e}$.

Κυρτότητα: $f''(x) = e^{-x}(x-2)$: κοίλη στο $(-\infty, 2]$, κυρτή στο $[2, +\infty)$ · σημείο καμπής $(2, \frac{2}{e^2})$.

Όρια - ασύμπτωτες: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ (και $\frac{f(x)}{x} = e^{-x} \rightarrow +\infty$, άρα καμία ασύμπτωτη στο $-\infty$).

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (De L'Hospital): οριζόντια ασύμπτωτη $y = 0$ στο $+\infty$.



✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Πίνακας χωρίς τα σημεία εκτός πεδίου

✗ Στον πίνακα μεταβολών της $\frac{x^2}{x-1}$ «ενώνουμε» τα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, 2)$ σε ένα.

✓ Στα σημεία που **δεν** ανήκουν στο πεδίο ορισμού βάζουμε **διπλή κάθετη γραμμή** ($\parallel$): εκεί η συνάρτηση «σπάει» και η μονοτονία μελετάται χωριστά σε κάθε διάστημα.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Θέλεις να εξασκηθείς στη χάραξη γραφικών παραστάσεων; Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με διαδραστικά γραφήματα και πλήρεις μελέτες συναρτήσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 2.10 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να μελετήσετε πλήρως την $f(x) = x^3 - 3x^2$.

●●○

→ Λύση 2.10/1

2 Να μελετήσετε την $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

●●○

→ Λύση 2.10/2

3 Να μελετήσετε την $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

●●●

→ Λύση 2.10/3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Διαφορικός
Λογισμός

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

Επαναληπτικά θέματα Διαφορικού Λογισμού

Ο «χάρτης» του κεφαλαίου

ΣΥΝΟΨΗ — Τι πρέπει να ξέρεις να κάνεις

Δεξιότητα	Μάθημα
Παράγωγος με τον ορισμό, παραγωγισιμότητα σε σημείο αλλαγής τύπου, εφαπτομένη	2.1 – 2.2
Παραγωγή με κανόνες και αλυσίδα, εφαπτομένη από εξωτερικό σημείο	2.3
Ρυθμός μεταβολής, σχετικοί ρυθμοί	2.4
Rolle, Θ.Μ.Τ. (ύπαρξη ξ , ανισότητες)	2.5
Σταθερή συνάρτηση, εύρεση τύπου, μονοτονία, πλήθος ριζών	2.6
Fermat, ακρότατα, ανισότητες, εξισώσεις με παράμετρο	2.7
Κυρτότητα, σημεία καμπής, θέση εφαπτομένης	2.8
Ασύμπτωτες, De L'Hospital, πλήρης μελέτη	2.9 – 2.10

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Θέμα τύπου Πανελλαδικών

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. (α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (β) Να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή και να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη 1. (γ) Να αποδειχθεί ότι $e^x \geq ex$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (δ) Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

ΛΥΣΗ

(α) $f'(x) = e^x - 1$: < 0 για $x < 0$, > 0 για $x > 0$. Φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, αύξουσα στο $[0, +\infty)$, ολικό ελάχιστο $f(0) = 0$.

(β) $f''(x) = e^x > 0$: κυρτή στο $\mathbb{R}$. $f(1) = e - 2$, $f'(1) = e - 1$. Εφαπτομένη: $y - (e - 2) = (e - 1)(x - 1)$, δηλαδή $y = (e - 1)x - 1$.

(γ) Λόγω κυρτότητας η C_f βρίσκεται **πάνω** από την εφαπτομένη της (εκτός από το σημείο επαφής): $f(x) \geq (e - 1)x - 1$, δηλαδή $e^x - x - 1 \geq (e - 1)x - 1$, ή $e^x \geq ex$ για κάθε x , με ισότητα μόνο για $x = 1$.

(δ) Μορφή $\frac{0}{0}$, De L'Hospital: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2x} = \frac{1}{2}$.

🔗 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Ανισότητες από κυρτότητα

Όταν σε μια ανισότητα το ένα μέλος είναι **ευθεία** και το άλλο μια κυρτή (ή κοίλη) συνάρτηση, σκέψου αμέσως: «μήπως η ευθεία είναι εφαπτομένη;». Αν ναι, η ανισότητα προκύπτει αμέσως από τη θέση της εφαπτομένης. Και ένας γρήγορος έλεγχος με έναν αριθμό σε προστατεύει από λάθη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Θέμα τύπου Πανελλαδικών με εύρεση τύπου

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x f(x)$ για κάθε x και $f(0) = 1$. (α) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = e^{x^2}$. (β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 2 - x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.

ΛΥΣΗ

(α) Θέτουμε $g(x) = e^{-x^2} f(x)$. Τότε $g'(x) = e^{-x^2} (f'(x) - 2x f(x)) = 0$, άρα g σταθερή: $g(x) = g(0) = 1$, δηλαδή $f(x) = e^{x^2}$.

(β) $h(x) = e^{x^2} + x - 2$, συνεχής, $h(0) = -1 < 0$, $h(1) = e - 1 > 0$: ρίζα στο $(0, 1)$ (Bolzano). $h'(x) = 2xe^{x^2} + 1 > 0$ για $x \geq 0$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ και η ρίζα μοναδική εκεί. ■



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Θέλεις πλήρη επαναληπτικά διαγωνίσματα στον Διαφορικό Λογισμό, σε επίπεδο Πανελλαδικών; Στο mathgreece.com θα τα βρεις με αναλυτικές λύσεις — πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα Επ. 2 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 **1** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ στο σημείο με τετμημένη 1.
●●○ → Λύση Επ. 2/1
- 2 **2** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 3x - 5 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα και να βρείτε μεταξύ ποιων διαδοχικών ακεραίων βρίσκεται.
●●○ → Λύση Επ. 2/2
- 3 **3** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + \ln x}{e^x}$.
●●○ → Λύση Επ. 2/3
- 4 **4** Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ με $f(0) = f(1) = f(2) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ με $f''(\xi) = 0$.
●●● → Λύση Επ. 2/4
- 5 **5** Να βρείτε όλες τις τιμές του $\alpha > 0$ για τις οποίες ισχύει $\alpha^x \geq 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
●●● → Λύση Επ. 2/5

3

Ολοκληρωτικός Λογισμός



Τα μαθήματα του κεφαλαίου

- 3.1** Αόριστο ολοκλήρωμα
- 3.2** Μέθοδοι ολοκλήρωσης
- 3.3** Διαφορικές εξισώσεις
- 3.4** Ορισμένο ολοκλήρωμα
- 3.5** Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ – Θεμελιώδες θεώρημα
- 3.6** Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού
- 3.7** Εμβαδόν επίπεδου χωρίου
- Επ. 3** Επαναληπτικά θέματα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Τι θα κατακτήσεις

- Να βρίσκεις παράγουσες και αόριστα ολοκληρώματα.
- Να εφαρμόζεις παραγοντική ολοκλήρωση και αντικατάσταση· να ολοκληρώνεις ρητές συναρτήσεις.
- Να λύνεις απλές διαφορικές εξισώσεις.
- Να υπολογίζεις ορισμένα ολοκληρώματα και να χρησιμοποιείς το Θεμελιώδες Θεώρημα.
- Να μελετάς συναρτήσεις της μορφής $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.
- Να υπολογίζεις εμβαδά επίπεδων χωρίων.

Ο Διαφορικός Λογισμός απαντά στο ερώτημα «πόσο γρήγορα αλλάζει ένα μέγεθος;». Ο Ολοκληρωτικός Λογισμός κάνει την αντίστροφη ερώτηση: «αν ξέρω πόσο γρήγορα αλλάζει, πόσο άλλαξε συνολικά;». Η απάντηση οδηγεί στην παράγουσα, στο ολοκλήρωμα και στον υπολογισμό εμβαδών καμπυλόγραμμων χωρίων. Το εντυπωσιακό είναι ότι τα δύο «προβλήματα» — εφαπτομένη και εμβαδόν — συνδέονται με ένα μόνο θεώρημα, το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Ολοκληρωτικός
Λογισμός

ΜΑΘΗΜΑ 3.1

Αόριστο ολοκλήρωμα

Αρχική συνάρτηση (παράγουσα)

ΟΡΙΣΜΟΣ — Αρχική συνάρτηση

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ λέγεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

Π.χ. η $F(x) = x^3$ είναι παράγουσα της $f(x) = 3x^2$, αλλά και οι $x^3 + 5$, $x^3 - \sqrt{2}$... — κάθε συνάρτηση της μορφής $x^3 + c$.

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Όλες οι παράγουσες

Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε:

- όλες οι συναρτήσεις $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ , και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$.

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για την πρώτη: $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$. Για τη δεύτερη: αν G είναι παράγουσα, τότε $G'(x) = f(x) = F'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$, οπότε (συνέπεια του Θ.Μ.Τ., μάθημα 2.6) υπάρχει σταθερά c με $G(x) = F(x) + c$.

Το αόριστο ολοκλήρωμα

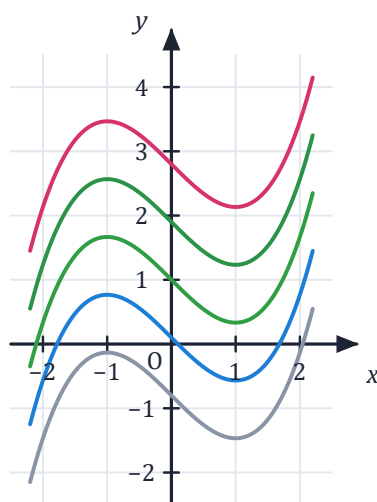
ΟΡΙΣΜΟΣ — Αόριστο ολοκλήρωμα

Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας f σε ένα διάστημα Δ λέγεται **αόριστο ολοκλήρωμα** της f στο Δ και συμβολίζεται

$$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

όπου F μια παράγουσα της f . Η f λέγεται **ολοκληρωτέα** συνάρτηση.

Από τον ορισμό, $\int f'(x) dx = f(x) + c$.



Οι παράγουσες διαφέρουν κατά σταθερά: «παράλληλες» καμπύλες

🔑 **ΚΛΕΙΔΙ** — Πίνακας βασικών αόριστων ολοκληρωμάτων

Ολοκλήρωμα	Αποτέλεσμα
$\int 0 \, dx$	c
$\int 1 \, dx$	$x + c$
$\int x^\alpha \, dx, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\int \frac{1}{x} \, dx$	$\ln x + c$
$\int \sin x \, dx$	$-\cos x + c$
$\int \cos x \, dx$	$\sin x + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx$	$-\cot x + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$	$\tan x + c$
$\int e^x \, dx$	$e^x + c$
$\int a^x \, dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Ιδιότητες

Αν οι f, g έχουν παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda \in \mathbb{R}^*$:

$$\int \lambda f(x) \, dx = \lambda \int f(x) \, dx, \quad \int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx.$$

⚠ **ΠΡΟΣΟΧΗ!** — Τα ολοκληρώματα ορίζονται σε ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Ο τύπος $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$ ισχύει **χωριστά** σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Σε κάθε διάστημα η σταθερά μπορεί να είναι διαφορετική.

✖ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** — Το ολοκλήρωμα γινομένου

$$\int x e^x \, dx \neq \frac{x^2}{2} \cdot e^x + c.$$

✓ Δεν υπάρχει «κανόνας γινομένου» που να δίνει γινόμενο ολοκληρωμάτων. Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται με **παραγοντική ολοκλήρωση** (επόμενο μάθημα): $(x-1)e^x + c$. Έλεγχος με παραγώγιση: $((x-1)e^x)' = e^x + (x-1)e^x = xe^x$ ✓.

💡 **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ** — Έλεγχος πάντα με παραγώγιση

Για να ελέγξεις αν βρήκες σωστά ένα αόριστο ολοκλήρωμα, **παραγώγισε το αποτέλεσμα**: πρέπει να πάρεις την ολοκληρωτέα συνάρτηση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Βασικά ολοκληρώματα

Να υπολογιστούν: (α) $\int (4x^3 - 6x + 2) dx$ (β) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x} \right) dx$ (γ) $\int \frac{x^2 + 1}{x^2} dx$ (δ) $\int (3e^x - 2\eta\mu x) dx$.

ΛΥΣΗ

(α) $x^4 - 3x^2 + 2x + c$.

(β) $\sqrt{x} = x^{1/2}$: $\frac{x^{3/2}}{3/2} + 2 \ln|x| + c = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2 \ln x + c$ (εδώ $x > 0$).

(γ) $\int (1 + x^{-2}) dx = x - \frac{1}{x} + c$ (σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$).

(δ) $3e^x + 2\sigma\upsilon\nu x + c$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Εύρεση συνάρτησης από την παράγωγο

Να βρεθεί η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν $f'(x) = 6x^2 - 2x$ και $f(1) = 4$.

ΛΥΣΗ

$f(x) = \int (6x^2 - 2x) dx = 2x^3 - x^2 + c$. $f(1) = 2 - 1 + c = 4 \Rightarrow c = 3$. Άρα $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Κίνηση

Ένα κινητό ξεκινά από τη θέση $S(0) = 2$ m με ταχύτητα $v(t) = 3t^2 + 4t$ m/s. Να βρεθεί η θέση του τη χρονική στιγμή $t = 2$.

ΛΥΣΗ

$S(t) = \int v(t) dt = t^3 + 2t^2 + c$, με $S(0) = c = 2$. Άρα $S(2) = 8 + 8 + 2 = 18$ m.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Συνθήκη με δεύτερη παράγωγο

Να βρεθεί η f αν $f''(x) = 6x$, $f'(0) = 1$ και $f(0) = 2$.

ΛΥΣΗ

$f'(x) = 3x^2 + c_1$, $f'(0) = c_1 = 1$. $f(x) = x^3 + x + c_2$, $f(0) = c_2 = 2$. Άρα $f(x) = x^3 + x + 2$.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με τεστ αυτοματισμού στα βασικά ολοκληρώματα και πολλές ασκήσεις εύρεσης συνάρτησης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 3.1 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Να υπολογίσετε: (α) $\int (x^4 - 3x^2 + 5) dx$ (β) $\int \frac{3}{x^2} dx$ (γ) $\int (2\sin x + e^x) dx$.

●○○ → Λύση 3.1/1
- 2** Να υπολογίσετε $\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x} dx, x > 0$.

●○○ → Λύση 3.1/2
- 3** Να βρείτε την f αν $f'(x) = e^x + \frac{1}{x}, x > 0$, και $f(1) = e$.

●●○ → Λύση 3.1/3
- 4** Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης $y = f(x)$ που διέρχεται από το $(0, 1)$ και έχει σε κάθε σημείο της κλίση $2x - 3$.

●●○ → Λύση 3.1/4
- 5** Να βρείτε την f αν $f''(x) = 12x^2 + 2$, η C_f διέρχεται από το $(1, 3)$ και έχει εκεί εφαπτομένη παράλληλη στην $y = 5x$.

●●● → Λύση 3.1/5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Ολοκληρωτικός
Λογισμός
ΜΑΘΗΜΑ 3.2**Μέθοδοι ολοκλήρωσης**

Παραγοντική ολοκλήρωση
★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Παραγοντική ολοκλήρωση

Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες με συνεχείς παραγώγους σε ένα διάστημα, τότε

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από τον κανόνα του γινομένου, $(fg)' = f'g + fg'$, άρα $fg' = (fg)' - f'g$. Ολοκληρώνοντας: $\int fg' = fg - \int f'g$. ■

ΚΛΕΙΔΙ — Ποια συνάρτηση «γίνεται» g'

Μορφή ολοκληρώματος	Θέτουμε ως g'	Θέτουμε ως f
$\int P(x)e^{\alpha x} dx$	$e^{\alpha x}$	το πολυώνυμο $P(x)$
$\int P(x)\eta\mu(\alpha x)dx,$ $\int P(x)\sigma\upsilon\nu(\alpha x)dx$	το τριγωνομετρικό	το πολυώνυμο $P(x)$
$\int P(x) \ln x dx$	το πολυώνυμο $P(x)$	$\ln x$
$\int e^{\alpha x}\eta\mu(\beta x)dx$	οποιοδήποτε — εφαρμόζουμε δύο φορές και λύνουμε ως προς το ολοκλήρωμα	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Πολυώνυμο επί εκθετική

Να υπολογιστεί το $\int x e^{2x} dx$.

ΛΥΣΗ

$$e^{2x} = \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)', \text{ οπότε}$$

$$\int x \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx = x \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c = \frac{e^{2x}(2x - 1)}{4} + c. \quad \blacksquare$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Με λογάριθμο

Να υπολογιστούν: (α) $\int \ln x dx$ (β) $\int x \ln x dx$.

ΛΥΣΗ

$$(\alpha) \int (x)' \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c.$$

$$(\beta) \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c.$$

■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Δύο φορές παραγοντική – «κυκλική»

Να υπολογιστεί το $I = \int e^x \eta \mu x \, dx$.

ΛΥΣΗ

$$I = \int (e^x)' \eta \mu x \, dx = e^x \eta \mu x - \int e^x \sigma \nu x \, dx = e^x \eta \mu x - [e^x \sigma \nu x + \int e^x \eta \mu x \, dx], \quad \text{δηλαδή} \quad I = e^x (\eta \mu x - \sigma \nu x) - I. \text{ Άρα}$$

$$I = \frac{e^x (\eta \mu x - \sigma \nu x)}{2} + c.$$

■

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση**★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Μέθοδος αντικατάστασης**

Αν $u = g(x)$, με g παραγωγίσιμη και g' συνεχής, και F μια παράγουσα της f , τότε

$$\int f(g(x)) g'(x) \, dx = \int f(u) \, du = F(u) + c = F(g(x)) + c.$$

Πρακτικά: θέτουμε $u = g(x)$, οπότε $du = g'(x) \, dx$.

→ ΠΟΡΙΣΜΑ — Χρήσιμα αποτελέσματα

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} \, dx = \ln |g(x)| + c, \quad \int e^{g(x)} g'(x) \, dx = e^{g(x)} + c, \quad \int g^\nu(x) g'(x) \, dx = \frac{g^{\nu+1}(x)}{\nu+1} + c.$$

$$\text{Επίσης, για } \alpha \neq 0: \int e^{\alpha x} \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c, \int \sigma \nu(\alpha x) \, dx = \frac{\eta \mu(\alpha x)}{\alpha} + c, \int \eta \mu(\alpha x) \, dx = -\frac{\sigma \nu(\alpha x)}{\alpha} + c.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Αντικατάσταση

Να υπολογιστούν: (α) $\int 2x(x^2 + 1)^5 \, dx$ (β) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} \, dx$ (γ) $\int x e^{x^2} \, dx$ (δ) $\int \epsilon \phi x \, dx$.

ΛΥΣΗ

$$(\alpha) u = x^2 + 1, du = 2x \, dx: \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + c = \frac{(x^2+1)^6}{6} + c.$$

(β) Ο αριθμητής είναι η παράγωγος του παρονομαστή: $\ln(x^2 + 3x + 5) + c$ (ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός).

$$(\gamma) u = x^2, du = 2x \, dx: \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{e^{x^2}}{2} + c.$$

$$(\delta) \int \frac{\eta \mu x}{\sigma \nu x} \, dx = - \int \frac{(\sigma \nu x)'}{\sigma \nu x} \, dx = - \ln |\sigma \nu x| + c.$$

■

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

🔍 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Ρητή συνάρτηση $\frac{P(x)}{Q(x)}$

1. Αν $\deg P \geq \deg Q$: κάνουμε **διαίρεση** $P = Q\Pi + v$, οπότε $\frac{P}{Q} = \Pi + \frac{v}{Q}$ με $\deg v < \deg Q$.
2. Αν ο αριθμητής είναι (πολλαπλάσιο της) παράγωγος του παρονομαστή: $\ln |Q|$.
3. Αν ο παρονομαστής αναλύεται σε **διαφορετικούς** πρωτοβάθμιους παράγοντες, «σπάμε» σε **απλά κλάσματα**:

$$\frac{\alpha x + \beta}{(x - \rho_1)(x - \rho_2)} = \frac{A}{x - \rho_1} + \frac{B}{x - \rho_2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Απλά κλάσματα

Να υπολογιστεί το $\int \frac{x+5}{x^2-x-2} dx$.

ΛΥΣΗ

$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. Αναζητούμε A, B με $\frac{x+5}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$, δηλαδή $x + 5 = A(x + 1) + B(x - 2)$. Για $x = 2$: $7 = 3A$, $A = \frac{7}{3}$. Για $x = -1$: $4 = -3B$, $B = -\frac{4}{3}$. Άρα

$$\int \frac{x+5}{x^2-x-2} dx = \frac{7}{3} \ln |x-2| - \frac{4}{3} \ln |x+1| + c.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Διαίρεση πρώτα

Να υπολογιστεί το $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$.

ΛΥΣΗ

$\frac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \frac{2}{x-1}$. Άρα $\int = \frac{x^2}{2} + x + 2 \ln |x-1| + c$.

📌 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Τριγωνομετρικά: «υποβιβασμός» δύναμης

Για $\int \eta\mu^2 x dx$ και $\int \sigma\upsilon\nu^2 x dx$ χρησιμοποιούμε $\eta\mu^2 x = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$, $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$. Π.χ. $\int \eta\mu^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\eta\mu 2x}{4} + c$.

❌ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Ξεχνάμε τον συντελεστή της αντικατάστασης

$$\times \int e^{3x} dx = e^{3x} + c.$$

$$\checkmark \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + c. \text{ Έλεγχος: } \left(\frac{e^{3x}}{3}\right)' = e^{3x} \checkmark.$$



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Η επιλογή της σωστής μεθόδου ολοκλήρωσης θέλει εξάσκηση. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με «οδηγό αναγνώρισης» μεθόδου και δεκάδες λυμένα ολοκληρώματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 3.2 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1

Να υπολογίσετε: (α) $\int x \sin x \, dx$ (β) $\int x^2 e^x \, dx$.

●○○

→ Λύση 3.2/1

2

Να υπολογίσετε: (α) $\int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx$ ($x > -1$) (β) $\int \eta \mu x \sin^3 x \, dx$.

●○○

→ Λύση 3.2/2

3

Να υπολογίσετε το $\int \frac{1}{x^2 - 4} dx$.

●●○

→ Λύση 3.2/3

4

Να υπολογίσετε το $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

●●○

→ Λύση 3.2/4

5

Να υπολογίσετε το $\int e^{-x} \sin x \, dx$.

●●●

→ Λύση 3.2/5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Ολοκληρωτικός
Λογισμός

ΜΑΘΗΜΑ 3.3

Διαφορικές εξισώσεις

Τι είναι διαφορική εξίσωση

Μια **διαφορική εξίσωση** είναι μια εξίσωση στην οποία άγνωστος είναι μια **συνάρτηση** $y = y(x)$ και στην οποία εμφανίζεται η παράγωγός της. Π.χ. η $y' = 2y$ ζητά όλες τις συναρτήσεις που η παράγωγός τους είναι διπλάσια από τις ίδιες. **Λύση** είναι κάθε συνάρτηση που την επαληθεύει· το σύνολο όλων των λύσεων λέγεται **γενική λύση**.

Εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές

ΟΡΙΣΜΟΣ — Χωριζόμενες μεταβλητές

Διαφορική εξίσωση με **χωριζόμενες μεταβλητές** λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha(y) y' = \beta(x),$$

όπου $\alpha(y)$ συνάρτηση μόνο του y και $\beta(x)$ συνάρτηση μόνο του x .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Επίλυση

Γράφουμε $y' = \frac{dy}{dx}$ και «χωρίζουμε» τις μεταβλητές: $\alpha(y) dy = \beta(x) dx$. Ολοκληρώνουμε κάθε μέλος ως προς τη δική του μεταβλητή: $A(y) = B(x) + c$, όπου A, B παράγουσες των α, β . Από εδώ λύνουμε (αν γίνεται) ως προς y .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Εκθετική αύξηση

Να λυθεί η $y' = \alpha y$ με $y > 0$, και να βρεθεί η λύση με $y(0) = y_0$.

ΛΥΣΗ

$\frac{y'}{y} = \alpha \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \alpha dx \Rightarrow \ln y = \alpha x + c_1 \Rightarrow y = e^{c_1} e^{\alpha x} = c e^{\alpha x}, c > 0$. Με $y(0) = y_0$: $y = y_0 e^{\alpha x}$. (Αυτή είναι η «εκθετική αύξηση» για $\alpha > 0$ ή «εκθετική μείωση» για $\alpha < 0$ — πληθυσμοί, ραδιενεργός διάσπαση, τόκοι.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Χωριζόμενες με πολυώνυμα

Να βρεθεί η λύση της $y' = \frac{x}{y}, y > 0$, με $y(0) = 2$.

ΛΥΣΗ

$y dy = x dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y^2 = x^2 + 2c$. Με $y(0) = 2$: $2c = 4$, άρα $y = \sqrt{x^2 + 4}$.

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

ΟΡΙΣΜΟΣ — Γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

Λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$y' + \alpha(x)y = \beta(x).$$

ΚΛΕΙΔΙ — Μέθοδος του ολοκληρωτικού παράγοντα

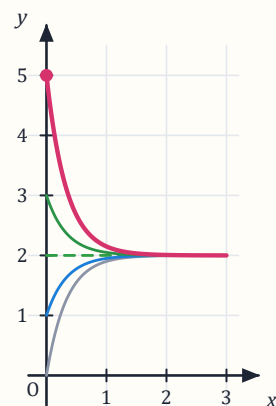
1. Βρίσκουμε μια παράγουσα $A(x)$ της $\alpha(x)$.
2. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με $e^{A(x)}$: τότε το πρώτο μέλος γίνεται $(ye^{A(x)})'$, αφού $(ye^A)' = y'e^A + y\alpha(x)e^A$.
3. Άρα $(ye^{A(x)})' = \beta(x)e^{A(x)}$, οπότε $ye^{A(x)} = B(x) + c$, όπου B παράγουσα της $\beta(x)e^{A(x)}$.
4. Λύνουμε ως προς y : $y = e^{-A(x)}(B(x) + c)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Γραμμική με σταθερούς συντελεστές

Να λυθεί η $y' + 3y = 6$ με $y(0) = 5$. (Στο σχήμα: διάφορες λύσεις της γενικής λύσης· κόκκινη η ζητούμενη.)

ΛΥΣΗ

$\alpha(x) = 3$, $A(x) = 3x$. Πολλαπλασιάζουμε με e^{3x} : $(ye^{3x})' = 6e^{3x}$, άρα $ye^{3x} = 2e^{3x} + c$ και $y = 2 + ce^{-3x}$. Από $y(0) = 2 + c = 5$: $c = 3$. Λύση: $y = 2 + 3e^{-3x}$. ■



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Γραμμική με μεταβλητούς συντελεστές

Να λυθεί η $y' + \frac{y}{x} = 3x$, $x > 0$.

ΛΥΣΗ

$A(x) = \ln x$, $e^{A(x)} = x$. Πολλαπλασιάζουμε με x : $xy' + y = 3x^2$, δηλαδή $(xy)' = 3x^2$, άρα $xy = x^3 + c$ και $y = x^2 + \frac{c}{x}$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Νόμος ψύξης του Newton

Ένα φλιτζάνι καφέ θερμοκρασίας 90°C αφήνεται σε δωμάτιο 20°C . Η θερμοκρασία του $\theta(t)$ ικανοποιεί $\theta'(t) = -0,1(\theta(t) - 20)$ (t σε λεπτά). Να βρεθεί η $\theta(t)$ και η θερμοκρασία μετά από 10 λεπτά.

ΛΥΣΗ

Για $y(t) = \theta(t) - 20$: $y' = -0,1y$, άρα $y = y(0)e^{-0,1t} = 70e^{-0,1t}$. Επομένως $\theta(t) = 20 + 70e^{-0,1t}$ και $\theta(10) = 20 + 70e^{-1} \approx 45,8^\circ\text{C}$. ■

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Ξεχνάμε τη σταθερά

$\times y' = 2y \Rightarrow y = e^{2x}$.

✓ Η γενική λύση είναι $y = ce^{2x}$. η σταθερά προσδιορίζεται μόνο αν δοθεί αρχική συνθήκη. Χωρίς σταθερά «χάνουμε» άπειρες λύσεις.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Οι διαφορικές εξισώσεις περιγράφουν σχεδόν κάθε φαινόμενο της Φυσικής και της Βιολογίας. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με εφαρμογές και λυμένες ασκήσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 3.3 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να λύσετε την $y' = -2xy$, $y > 0$, με $y(0) = 3$.

●○○

→ Λύση 3.3/1

2 Να λύσετε την $y' - y = 0$ με $y(1) = e^2$.

●○○

→ Λύση 3.3/2

3 Να λύσετε την $y' + 2y = e^{-x}$.

●●○

→ Λύση 3.3/3

4 Να λύσετε την $y' + 2xy = x$.

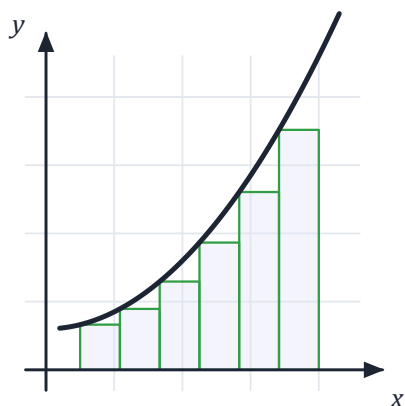
●●○

→ Λύση 3.3/4

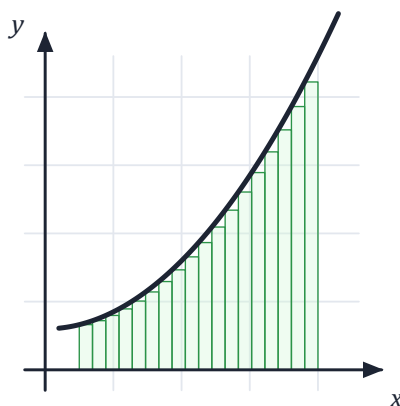
5 Ο πληθυσμός μιας καλλιέργειας διπλασιάζεται κάθε 3 ώρες, με ρυθμό ανάλογο του πληθυσμού. Αν αρχικά υπάρχουν 500 βακτήρια, πόσα θα υπάρχουν μετά από 10 ώρες;

●●●

→ Λύση 3.3/5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Ολοκληρωτικός
Λογισμός
ΜΑΘΗΜΑ 3.4**Ορισμένο ολοκλήρωμα**
Το πρόβλημα του εμβαδού


Κάτω άθροισμα (ορθογώνια «κάτω» από την καμπύλη)



Με περισσότερα ορθογώνια η προσέγγιση βελτιώνεται

Πώς βρίσκουμε το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$, από $x = \alpha$ έως $x = \beta$; Χωρίζουμε το $[\alpha, \beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα πλάτους $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{\nu}$, διαλέγουμε σε καθένα ένα σημείο ξ_k και σχηματίζουμε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων

$$S_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k) \Delta x.$$

Όσο αυξάνεται το ν , το άθροισμα προσεγγίζει όλο και καλύτερα το εμβαδόν.

ΟΡΙΣΜΟΣ — Ορισμένο ολοκλήρωμα

Αν η f είναι **συνεχής** στο $[\alpha, \beta]$, το όριο $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} S_\nu$ υπάρχει, είναι πραγματικός αριθμός και δεν εξαρτάται από την επιλογή των ξ_k . Λέγεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της f από το α στο β και συμβολίζεται

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Επίσης ορίζουμε $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$ και, για $\alpha > \beta$, $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ — Η μεταβλητή είναι «βουβή»

Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι **αριθμός** και δεν εξαρτάται από το γράμμα της μεταβλητής:
 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(u) du.$

ΚΛΕΙΔΙ — Γεωμετρική σημασία

Αν $f(x) \geq 0$ στο $[\alpha, \beta]$, το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ είναι το **εμβαδόν** του χωρίου που ορίζεται από τη C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$. Π.χ. $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\beta - \alpha)$ (εμβαδόν ορθογωνίου).

Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Ιδιότητες

Έστω f, g συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- Γραμμικότητα:** $\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$.
- Προσθετική ιδιότητα:** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$.
- Θετικότητα:** αν $f(x) \geq 0$ στο $[\alpha, \beta]$ ($\alpha < \beta$), τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$. Αν επιπλέον η f δεν είναι παντού μηδέν, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$.
- Μονοτονία:** αν $f(x) \geq g(x)$ στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f \geq \int_{\alpha}^{\beta} g$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Η προσθετική ιδιότητα δεν θέλει $\alpha < \gamma < \beta$

Η ισότητα $\int_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\gamma} + \int_{\gamma}^{\beta}$ ισχύει για **οποιαδήποτε** α, β, γ του διαστήματος (με τη σύμβαση για αντεστραμμένα άκρα). Η θετικότητα όμως θέλει $\alpha < \beta$: για $\alpha > \beta$ το πρόσημο αντιστρέφεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Με γεωμετρία

Να υπολογιστεί το $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$.

ΛΥΣΗ

Η $y = \sqrt{4 - x^2}$ είναι το πάνω ημικύκλιο του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$. Το ολοκλήρωμα είναι το εμβαδόν του ημικυκλίου: $\frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 2\pi$. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Ιδιότητες

Αν $\int_0^3 f(x) dx = 5$ και $\int_1^3 f(x) dx = 2$, να βρεθούν τα $\int_0^1 f(x) dx$ και $\int_3^0 (2f(x) - 1) dx$.

ΛΥΣΗ

$$\int_0^1 f = \int_0^3 f - \int_1^3 f = 3. \quad \int_3^0 (2f - 1) = -\int_0^3 (2f - 1) = -(2 \cdot 5 - 3) = -7. \quad \blacksquare$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 3.4 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1** Να υπολογίσετε με γεωμετρία: (α) $\int_0^4 3 dx$ (β) $\int_0^2 x dx$ (γ) $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx$.

●○○

→ Λύση 3.4/1

- 2** Αν $\int_1^4 f(x) dx = 6$ και $\int_1^4 g(x) dx = -2$, να βρείτε το $\int_1^4 (3f(x) - 2g(x) + x) dx$.

●●○

→ Λύση 3.4/2

- 3** Αν η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ με $f(x) \geq x^2$ και f όχι ταυτοτικά ίση με x^2 , να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx > \frac{1}{3}$.

→ Λύση 3.4/3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Ολοκληρωτικός
Λογισμός

ΜΑΘΗΜΑ 3.5

Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ – Θεμελιώδες θεώρημα

Το ολοκλήρωμα ως συνάρτηση του άνω άκρου

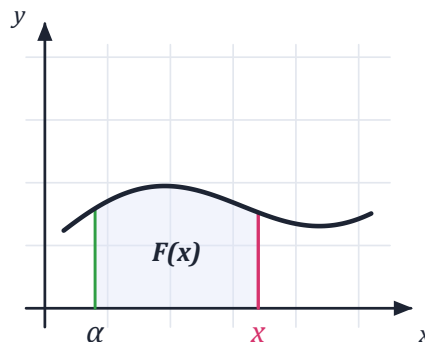
Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha \in \Delta$, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ορίζεται ο αριθμός $\int_{\alpha}^x f(t) dt$. Έτσι προκύπτει μια νέα συνάρτηση:

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt, \quad x \in \Delta.$$

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Θεμελιώδες Θεώρημα (1ο μέρος)

Αν η f είναι **συνεχής** σε ένα διάστημα Δ και $\alpha \in \Delta$, τότε η $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$ είναι **παράγουσα** της f στο Δ :

$$\left(\int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$



$F(x)$: το «συσσωρευμένο» εμβαδόν από το α ως το x

→ **ΠΟΡΙΣΜΑ** — Με σύνθεση

Αν η f είναι συνεχής στο Δ και η g παραγωγίσιμη με τιμές στο Δ , τότε

$$\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα έχει λοιπόν παράγουσα.

Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

★ **ΘΕΩΡΗΜΑ** — Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω f **συνεχής** σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι **μια** παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha) = [G(x)]_{\alpha}^{\beta}.$$

✍ **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Η $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$ είναι παράγουσα της f (1ο μέρος). Επειδή και η G είναι παράγουσα, υπάρχει c με $G(x) = F(x) + c$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Για $x = \alpha$: $G(\alpha) = F(\alpha) + c = 0 + c$, άρα $c = G(\alpha)$. Τότε $G(x) = F(x) + G(\alpha)$ και για $x = \beta$: $G(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt + G(\alpha)$, δηλαδή $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$. ■

ΛΙΓΗ ΙΣΤΟΡΙΑ

Το Θεμελιώδες Θεώρημα, που διατυπώθηκε από τους Newton και Leibniz, είναι η «γέφυρα» ανάμεσα στον Διαφορικό και στον Ολοκληρωτικό Λογισμό: δείχνει ότι η ολοκλήρωση και η παραγωγή είναι **αντίστροφες** διαδικασίες. Πριν από αυτό, ο υπολογισμός εμβαδών (από την εποχή του Αρχιμήδη!) απαιτούσε πολύπλοκα όρια αθροισμάτων· μετά από αυτό, αρκεί να βρούμε μια παράγουσα.

Μέθοδοι στο ορισμένο ολοκλήρωμα

🔑 ΚΛΕΙΔΙ — Παραγοντική και αντικατάσταση με άκρα

- **Παραγοντική:** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x) dx.$
- **Αντικατάσταση:** $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du$, όπου $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$ — **αλλάζουμε και τα άκρα!**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Υπολογισμός με το θεμελιώδες θεώρημα

Να υπολογιστούν: (α) $\int_1^2 (3x^2 - 2x) dx$ (β) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ (γ) $\int_1^e \frac{1}{x} dx.$

ΛΥΣΗ

$$(α) [x^3 - x^2]_1^2 = (8 - 4) - (1 - 1) = 4. (β) [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1. (γ) [\ln x]_1^e = 1.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Παραγοντική με άκρα

Να υπολογιστεί το $\int_0^1 x e^x dx.$

ΛΥΣΗ

$$[x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Αντικατάσταση με άκρα

Να υπολογιστεί το $\int_0^2 x \sqrt{x^2 + 5} dx.$

ΛΥΣΗ

$u = x^2 + 5, du = 2x dx.$ Για $x = 0: u = 5$. για $x = 2: u = 9$. Άρα

$$\frac{1}{2} \int_5^9 \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_5^9 = \frac{1}{3} (27 - 5\sqrt{5}).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Παράγωγος ολοκληρώματος

Να βρεθεί η παράγωγος των: (α) $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$, $x > 0$ (β) $G(x) = \int_0^{x^2} \eta\mu(t^2) dt$ (γ) $H(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.

ΛΥΣΗ

(α) $F'(x) = \frac{e^x}{x}$. (β) $G'(x) = \eta\mu(x^4) \cdot 2x$.

(γ) $H(x) = \int_0^{2x} e^{-t^2} dt - \int_0^x e^{-t^2} dt$, άρα $H'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Μελέτη συνάρτησης-ολοκληρώματος

Δίνεται $F(x) = \int_0^x (t^2 - 4) dt$. Να βρεθούν τα ακρότατα της F .

ΛΥΣΗ

$F'(x) = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$: τοπικό μέγιστο στο -2 και τοπικό ελάχιστο στο 2 . Επειδή $F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$: $F(-2) = \frac{16}{3}$, $F(2) = -\frac{16}{3}$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Ξεχνάμε να αλλάξουμε τα άκρα

$\times \int_0^2 2x(x^2 + 1)^3 dx = \int_0^2 u^3 du = 4$.

✓ Με $u = x^2 + 1$ τα άκρα γίνονται 1 και 5: $\int_1^5 u^3 du = \frac{625-1}{4} = 156$.

✗ ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ — Παράγωγος ολοκληρώματος με μεταβλητό άνω άκρο

$\times \left(\int_0^{x^2} e^t dt \right)' = e^{x^2}$.

✓ Κανόνας αλυσίδας: $e^{x^2} \cdot (x^2)' = 2xe^{x^2}$.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Το Θεμελιώδες Θεώρημα και η συνάρτηση $\int_a^x f$ εμφανίζονται σταθερά στα θέματα Γ και Δ των Πανελλαδικών. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με όλες τις κατηγορίες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 3.5 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να υπολογίσετε: (α) $\int_0^1 (e^x + 2x) dx$ (β) $\int_0^\pi \eta\mu x dx$ (γ) $\int_1^4 \sqrt{x} dx$.

→ Λύση 3.5/1

2 Να υπολογίσετε το $\int_1^e \ln x dx$.

→ Λύση 3.5/2

- 3** Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$.
 ●●○ → Λύση 3.5/3
-
- 4** Να βρείτε την παράγωγο της $F(x) = \int_x^{x^3} \ln t \, dt, x > 0$.
 ●●○ → Λύση 3.5/4
-
- 5** Να βρείτε τη συνεχή f αν $\int_0^x f(t) \, dt = x^3 + 2x$ για κάθε x .
 ●●○ → Λύση 3.5/5
-
- 6** Να βρείτε τη συνεχή $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = 2 + \int_0^x f(t) \, dt$ για κάθε x .
 ●●● → Λύση 3.5/6
-

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Ολοκληρωτικός
Λογισμός

ΜΑΘΗΜΑ 3.6

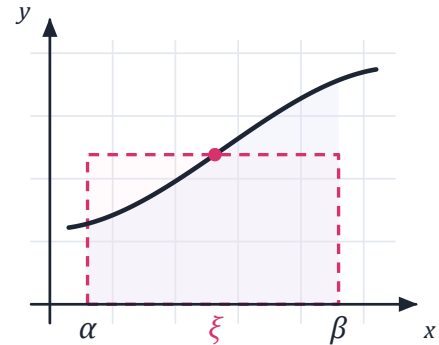
Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού

Η μέση τιμή μιας συνάρτησης

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού

Αν η f είναι **συνεχής** στο $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$



Το ορθογώνιο ύψους $f(\xi)$ έχει εμβαδόν ίσο με το $\int$

✍ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $F' = f$. Από το Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}$, δηλαδή $f(\xi) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$. ■

Ο αριθμός $\bar{f} = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ λέγεται **μέση τιμή** της f στο $[\alpha, \beta]$. Γεωμετρικά, για $f \geq 0$, είναι το ύψος του ορθογωνίου με βάση $[\alpha, \beta]$ που έχει το **ίδιο εμβαδόν** με το χωρίο κάτω από τη C_f .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Μέση τιμή

Να βρεθεί η μέση τιμή της $f(x) = x^2$ στο $[0, 3]$ και το ξ του θεωρήματος.

ΛΥΣΗ

$$\bar{f} = \frac{1}{3} \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3. \quad \xi^2 = 3 \Rightarrow \xi = \sqrt{3} \in (0, 3). \quad \blacksquare$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Μέση θερμοκρασία

Η θερμοκρασία σε μια πόλη t ώρες μετά τα μεσάνυχτα είναι $T(t) = 15 - 5 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ (°C). Ποια είναι η μέση θερμοκρασία από τις 6 π.μ. έως τις 6 μ.μ.;

ΛΥΣΗ

$$\bar{T} = \frac{1}{12} \int_6^{18} \left(15 - 5 \sin \frac{\pi t}{12}\right) dt = \frac{1}{12} \left[15t - \frac{60}{\pi} \eta \mu \frac{\pi t}{12}\right]_6^{18} = \frac{1}{12} \left[180 - \frac{60}{\pi}(-1 - 1)\right] = 15 + \frac{10}{\pi} \approx 18,2 \text{ } ^\circ\text{C}. \quad \blacksquare$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 3.6 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να βρείτε τη μέση τιμή της $f(x) = \eta\mu x$ στο $[0, \pi]$.

●○○

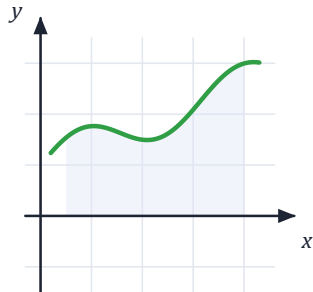
→ Λύση 3.6/1

2 Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $e^\xi = e - 1$.

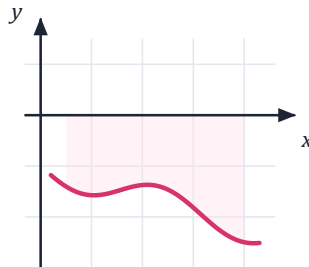
●●○

→ Λύση 3.6/2

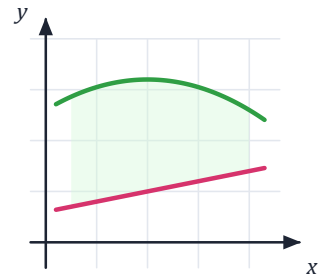
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Ολοκληρωτικός
Λογισμός
ΜΑΘΗΜΑ 3.7**Εμβαδόν επίπεδου χωρίου**

Τρεις περιπτώσεις


$$f \geq 0: E = \int f$$



$$f \leq 0: E = -\int f$$



$$\text{Μεταξύ } C_f \text{ και } C_g: E = \int |f - g|$$

★ ΘΕΩΡΗΜΑ — Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

Έστω f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$.

1. Αν $f(x) \geq 0$, το εμβαδόν του χωρίου Ω μεταξύ της C_f , του $x'x$ και των $x = \alpha, x = \beta$ είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.
2. Αν $f(x) \leq 0$, τότε $E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.
3. Γενικά, το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των C_f, C_g και των $x = \alpha, x = \beta$ είναι

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx.$$

Ειδικότερα, αν $f(x) \geq g(x)$ στο $[\alpha, \beta]$: $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$.

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ! — Εμβαδόν $\neq$ ολοκλήρωμα!

Το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ είναι το **αλγεβρικό** άθροισμα εμβαδών: τα κομμάτια κάτω από τον $x'x$ μετράνε **αρνητικά**. Για το (πάντα θετικό) εμβαδόν πρέπει να «σπάσουμε» το ολοκλήρωμα στις ρίζες και να πάρουμε απόλυτες τιμές. Π.χ. $\int_0^{2\pi} \eta\mu x dx = 0$, ενώ το εμβαδόν είναι 4.

💡 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ — Πώς υπολογίζουμε εμβαδόν

1. Βρίσκουμε τα **σημεία τομής** των καμπυλών ($f(x) = g(x)$) — αν δεν δίνονται τα άκρα, αυτά είναι τα άκρα.
2. Βρίσκουμε το **πρόσημο** της $f - g$ σε κάθε υποδιάστημα (ποια καμπύλη είναι «πάνω»).
3. Σπάμε το ολοκλήρωμα στα σημεία αλλαγής προσήμου και ολοκληρώνουμε «πάνω μείον κάτω».
4. Σχεδιάζουμε **πάντα** ένα πρόχειρο σχήμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 — Εμβαδόν με αλλαγή προσήμου

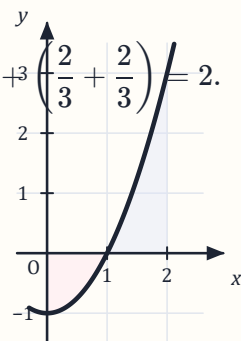
Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της C_f , $f(x) = x^2 - 1$, του $x'x$ και των ευθειών $x = 0, x = 2$

ΛΥΣΗ

Η f είναι αρνητική στο $[0, 1)$ και θετική στο $(1, 2]$. Άρα

$$E = - \int_0^1 (x^2 - 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx = - \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = \frac{2}{3} + 3 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) = 2.$$

(Σημείωση: $\int_0^2 (x^2 - 1) dx = \frac{2}{3}$, όχι το εμβαδόν!)



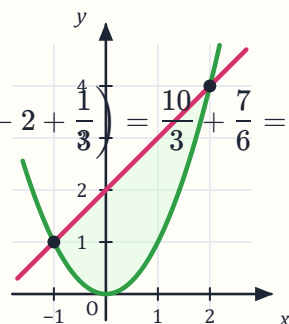
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Χωρίο μεταξύ δύο καμπυλών

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $y = x^2$ και $y = x + 2$.

ΛΥΣΗ

Τομές: $x^2 = x + 2 \iff x = -1$ ή $x = 2$. Στο $[-1, 2]$ είναι $x + 2 \geq x^2$. Άρα

$$E = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2}.$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Με εκθετική και λογάριθμο

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της C_f , $f(x) = \ln x$, του άξονα x' και της ευθείας $x = e$.

ΛΥΣΗ

Η $\ln x$ μηδενίζεται στο 1 και είναι θετική για $x > 1$. Το χωρίο είναι από $x = 1$ ως $x = e$: $E = \int_1^e \ln x dx = [x \ln x - x]_1^e = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Εμβαδόν με παράμετρο

Να βρεθεί το $\alpha > 0$ ώστε το χωρίο μεταξύ της $y = x^2$, του x' και της $x = \alpha$ να έχει εμβαδόν 9.

ΛΥΣΗ

$$\int_0^\alpha x^2 dx = \frac{\alpha^3}{3} = 9 \Rightarrow \alpha^3 = 27 \Rightarrow \alpha = 3.$$

✗ **ΣΥΧΝΟ ΛΑΘΟΣ** — «Πάνω μείον κάτω» με λάθος σειρά

$$\times E = \int_{-1}^2 (x^2 - (x+2)) dx = -\frac{9}{2}.$$

✓ Ένα εμβαδόν **δεν** μπορεί να είναι αρνητικό! Ολοκληρώνουμε «πάνω καμπύλη μείον κάτω καμπύλη». Αν βγει αρνητικό, αντιστρέψαμε τη σειρά.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Τα εμβαδά είναι το «επιστέγασμα» της Ανάλυσης και συχνό θέμα εξετάσεων. Στο mathgreece.com θα βρεις πλήρες δωρεάν φροντιστήριο με σχήματα και λύσεις για όλες τις περιπτώσεις. Καλή επιτυχία!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα 3.7 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

- 1 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της $y = 4 - x^2$ και του άξονα x' .
●○○ → Λύση 3.7/1
- 2 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της $y = e^x$, του x' και των $x = 0, x = 2$.
●○○ → Λύση 3.7/2
- 3 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $y = x^3$ και $y = x$.
●●○ → Λύση 3.7/3
- 4 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της $y = \eta\mu x$ και του x' στο $[0, 2\pi]$.
●●○ → Λύση 3.7/4
- 5 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της $C_f, f(x) = \frac{1}{x}$, του x' και των $x = 1, x = \lambda$ ($\lambda > 1$).
●●○ Για ποιο λ είναι ίσο με 2;
→ Λύση 3.7/5
- 6 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της $C_f, f(x) = xe^x$, του x' και των $x = -1, x = 1$.
●●● → Λύση 3.7/6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Ολοκληρωτικός
Λογισμός

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

Επαναληπτικά θέματα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Ο «χάρτης» του κεφαλαίου

ΣΥΝΟΨΗ — Τι πρέπει να ξέρεις να κάνεις

Δεξιότητα	Μάθημα
Παράγουσες, αόριστα ολοκληρώματα, εύρεση f από f'	3.1
Παραγοντική, αντικατάσταση, ρητές συναρτήσεις	3.2
Διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών και γραμμικές	3.3
Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος	3.4
Θεμελιώδες θεώρημα, παράγωγος $\int_{\alpha}^{g(x)} f$, μελέτη $F(x) = \int_{\alpha}^x f$	3.5
Μέση τιμή συνάρτησης	3.6
Εμβαδά επίπεδων χωρίων	3.7

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Θέμα τύπου Πανελλαδικών

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - x$, $x > 0$. (α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το ελάχιστό της. (β) Να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή. (γ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της C_f , του x' και των ευθειών $x = 1$, $x = e$.

ΛΥΣΗ

(α) $f'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$: < 0 στο $(0, 1)$, > 0 στο $(1, +\infty)$. Φθίνουσα στο $(0, 1]$, αύξουσα στο $[1, +\infty)$, ελάχιστο $f(1) = -1$.

(β) $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$: κυρτή.

(γ) Στο $[1, e]$: $f(1) = -1$, $f(e) = 0$ και η f είναι αύξουσα, άρα $f(x) \leq 0$ εκεί. $E = - \int_1^e (x \ln x - x) dx$. Με παραγοντική: $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$. Άρα

$$\int_1^e (x \ln x - x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_1^e = \left(\frac{e^2}{2} - \frac{3e^2}{4} \right) - \left(-\frac{3}{4} \right) = \frac{3 - e^2}{4},$$

οπότε $E = \frac{e^2 - 3}{4}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Θέμα τύπου Πανελλαδικών με συνάρτηση-ολοκλήρωμα

Δίνεται $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, x \in \mathbb{R}$. (α) Να αποδειχθεί ότι η F είναι γνησίως αύξουσα και περιττή. (β) Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα. (γ) Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$.

ΛΥΣΗ

(α) $F'(x) = e^{-x^2} > 0$: γνησίως αύξουσα. Με αντικατάσταση $t = -u$: $F(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2} dt = -\int_0^x e^{-u^2} du = -F(x)$: περιττή.

(β) $F''(x) = -2xe^{-x^2}$: κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$, σημείο καμπής $(0, 0)$.

(γ) Μορφή $\frac{0}{0}$ ($F(0) = 0$). De L'Hospital: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2}}{1} = 1$.



ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;

Θέλεις πλήρη επαναληπτικά διαγωνίσματα σε όλη την Ανάλυση; Στο mathgreece.com θα τα βρεις, μαζί με θέματα Πανελλαδικών και αναλυτικές λύσεις — πλήρες και δωρεάν φροντιστήριο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Μάθημα Επ. 3 · Οι λύσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου

●○○ βασική ●●○ μέτρια ●●● απαιτητική

1 Να υπολογίσετε: (α) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$ (β) $\int_0^{\pi/2} x \eta \mu x dx$.

●○○

→ Λύση Επ. 3/1

2 Να βρείτε τη συνεχή f για την οποία $\int_0^x t f(t) dt = x^3 - x^2$ για κάθε x .

●●○

→ Λύση Επ. 3/2

3 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $y = \sqrt{x}$ και $y = \frac{x}{2}$.

●●○

→ Λύση Επ. 3/3

4 Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση $y' = y \sin x, y > 0$, με $y(0) = 1$.

●●○

→ Λύση Επ. 3/4

5 Έστω f συνεχής στο $[0, 1]$ με $\int_0^1 f(x) dx = 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ με $f(\xi) = 2\xi$.

●●●

→ Λύση Επ. 3/5

6 Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \leq 1$.

●●●

→ Λύση Επ. 3/6

Τυπολόγιο – Όλη η ύλη με μια ματιά

Στις σελίδες αυτές συγκεντρώνονται οι βασικοί τύποι, τα θεωρήματα και οι προϋποθέσεις τους, οργανωμένα ανά κεφάλαιο. Χρησιμοποίησέ τες για γρήγορη επανάληψη — και θυμήσου ότι στις εξετάσεις **οι προϋποθέσεις των θεωρημάτων γράφονται πάντα**.

◆ Κεφάλαιο 1 • Όριο – Συνέχεια

Θέμα	Τύπος / πρόταση
Σύνθεση	$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$
Αντίστροφη	f 1-1: $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$, $C_f, C_{f^{-1}}$ συμμετρικές ως προς $y = x$
Γν. μονότονη	$\Rightarrow$ 1-1 (όχι αντίστροφα)
Όριο – πλευρικά	$\lim_{x \rightarrow x_0} f = \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f = \ell$
Τριγωνομετρικά	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0, \eta\mu x \leq x $
Κριτήριο παρεμβολής	$h \leq f \leq g, \lim h = \lim g = \ell \Rightarrow \lim f = \ell$
Ρητή στο $\pm\infty$	λόγος μεγιστοβάθμιων όρων
Απροσδιόριστες	$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$
Συνέχεια	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
Bolzano	f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, $f(\alpha)f(\beta) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (\alpha, \beta) : f(x_0) = 0$
Ενδιάμεσες τιμές	f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, $f(\alpha) \neq f(\beta)$, η μεταξύ τους $\Rightarrow \exists x_0 : f(x_0) = \eta$
Μέγιστη – ελάχιστη	f συνεχής στο $[\alpha, \beta] \Rightarrow f([\alpha, \beta]) = [m, M]$

◆ Κεφάλαιο 2 · Διαφορικός Λογισμός

Θέμα	Τύπος / πρόταση
Παράγωγος	$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
Εφαπτομένη	$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
Παραγωγίσιμη	$\Rightarrow$ συνεχής (όχι αντίστροφα)
Παράγωγοι	$(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}, (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x, (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$
	$(e^x)' = e^x, (\ln x)' = \frac{1}{x}, (\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha, (\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
Κανόνες	$(fg)' = f'g + fg', \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$
Rolle	συνεχής $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη (α, β) , $f(\alpha) = f(\beta) \Rightarrow \exists \xi : f'(\xi) = 0$
Θ.Μ.Τ.	συνεχής $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη $(\alpha, \beta) \Rightarrow \exists \xi : f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$
Σταθερή	$f' = 0$ σε διάστημα $\Rightarrow f$ σταθερή· $f' = g' \Rightarrow f = g + c$
Μονοτονία	$f' > 0 \Rightarrow$ γν. αύξουσα, $f' < 0 \Rightarrow$ γν. φθίνουσα (σε διάστημα)
Fermat	τοπ. ακρότατο σε εσωτερικό σημείο + παραγωγίσιμη $\Rightarrow f'(x_0) = 0$
Κυρτότητα	$f'' > 0 \Rightarrow$ κυρτή, $f'' < 0 \Rightarrow$ κοίλη
Σημείο καμπής	$f''(x_0) = 0$ και αλλαγή προσήμου της f''
Πλάγια ασύμπτωτη	$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \beta = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \lambda x)$
De L'Hospital	μορφές $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'}{g'}$

■ Κεφάλαιο 3 · Ολοκληρωτικός Λογισμός

Θέμα	Τύπος / πρόταση
Παράγουσες	όλες οι $F + c$
Βασικά	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ (\alpha \neq -1), \int \frac{dx}{x} = \ln x , \int e^x dx = e^x, \int \sin x dx = -\eta\mu x,$ $\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x$
Παραγοντική	$\int f g' = f g - \int f' g$
Αντικατάσταση	$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \text{ (στο ορισμένο: αλλάζουν τα άκρα)}$
Γραμμική Δ.Ε.	$y' + \alpha(x)y = \beta(x): \text{πολλαπλασιάζουμε με } e^{A(x)}$
$y' = \alpha y$	$y = ce^{\alpha x}$
Ιδιότητες	$\int_\alpha^\beta = \int_\alpha^\gamma + \int_\gamma^\beta, \int_\beta^\alpha = -\int_\alpha^\beta, f \geq 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta f \geq 0 \ (\alpha < \beta)$
Θεμελιώδεις	$\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)' = f(x), \left(\int_\alpha^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))g'(x)$
	$\int_\alpha^\beta f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$
Θ.Μ.Τ. ολοκληρωτικού	$f(\xi) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta f(x)dx$
Εμβαδόν	$E = \int_\alpha^\beta f(x) - g(x) dx$

■ ΘΕΛΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ;



Θέλεις αυτό το τυπολόγιο σε μορφή κάρτας, μαζί με επαναληπτικά διαγωνίσματα και θέματα Πανελλαδικών; Θα τα βρεις στο mathgreece.com — πλήρες και ολοκληρωμένο δωρεάν φροντιστήριο.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Λύσεις των ασκήσεων

Εδώ θα βρεις αναλυτικές λύσεις για όλες τις άλυτες ασκήσεις του βοηθήματος, οργανωμένες ανά κεφάλαιο και μάθημα. Συμβουλή: προσπάθησε πρώτα μόνος σου τουλάχιστον 15 λεπτά — η λύση διαβάζεται πολύ πιο ουσιαστικά όταν έχεις ήδη παλέψει με την άσκηση.

Για ακόμη περισσότερες λυμένες ασκήσεις και θέματα εξετάσεων:

mathgreece.com

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

Λύσεις · Μάθημα 1.1 — Πραγματικοί αριθμοί

1 (α) $[-2, 5]$ (β) $(-1, +\infty)$ (γ) $-1 \leq x \leq 5: [-1, 5]$.

2 $|x - 3| > 2 \iff x < 1 \text{ ή } x > 5: (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$.

3 $\frac{1}{2} < \frac{1}{\beta} < 1$ (θετικοί αντίστροφοι).

Πολλαπλασιάζοντας θετικές: $2 \cdot \frac{1}{2} < \frac{\alpha}{\beta} < 4 \cdot 1$,
δηλαδή $1 < \frac{\alpha}{\beta} < 4$.

4 Από την τριγωνική ανισότητα: $|x - 1| + |x + 1| = |1 - x| + |x + 1| \geq |(1 - x) + (x + 1)| = 2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

Λύσεις · Μάθημα 1.2α — Η έννοια της συνάρτησης – Γραφική παράσταση

1 (α) $x \leq 2: (-\infty, 2]$. (β) $x > 0$ και $\ln x \neq 0: (0, 1) \cup (1, +\infty)$. (γ) $(x - 2)(x - 3) \geq 0: (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

2 $y'y: f(0) = -3$, σημείο $(0, -3)$. $x'x: e^{2x} = 4 \iff x = \ln 2$, σημείο $(\ln 2, 0)$.

3 $f(x) - g(x) = x(x - 1)(x + 1) < 0 \iff x < -1$
ή $0 < x < 1$.

4 $e^x \in (0, +\infty)$, άρα $f(\mathbb{R}) = (1, +\infty)$. Για τη $g(x > 1)$: το $x - 1$ παίρνει όλες τις τιμές του $(0, +\infty)$ και ο λογάριθμος όλες τις τιμές του $\mathbb{R}$: $g(D_g) = \mathbb{R}$.

5 Η C προκύπτει από την παραβολή $y = x^2 - 1$ αναδιπλώνοντας το τμήμα της για $-1 < x < 1$ (κορυφή $(0, -1) \rightarrow (0, 1)$). Η οριζόντια ευθεία $y = \kappa$ τέμνει τη C σε 4 σημεία ακριβώς όταν $0 < \kappa < 1$.

6 Άλλη πλευρά $10 - x$, $0 < x < 10$. $d(x) = \sqrt{x^2 + (10 - x)^2} = \sqrt{2x^2 - 20x + 100} = \sqrt{2(x - 5)^2 + 50}$. Το $2(x - 5)^2$ παίρνει τιμές στο $[0, 50]$ για $x \in (0, 10)$, άρα $d \in [\sqrt{50}, 10) = [5\sqrt{2}, 10)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

Λύσεις · Μάθημα 1.2β — Ισότητα – Πράξεις – Σύνθεση συναρτήσεων

1 $D_f = \mathbb{R}^*$, $D_g = (0, +\infty)$: δεν είναι ίσες. Είναι ίσες στο $(0, +\infty)$. (Στο $\mathbb{R}^*$ ισχύει $f(x) = 2 \ln |x|$.)

2 $(f \circ g)(x) = 2(x^2 - 3) + 1 = 2x^2 - 5$, $(g \circ f)(x) = (2x + 1)^2 - 3 = 4x^2 + 4x - 2$, και οι δύο με πεδίο $\mathbb{R}$.

3 $x \geq 0$ και $\sqrt{x} - 2 > 0 \iff x > 4$. $D = (4, +\infty)$, $(g \circ f)(x) = \ln(\sqrt{x} - 2)$.

4 $f(x + 1) = (x + 1)^2 + 2$. Θέτοντας $u = x + 1$: $f(u) = u^2 + 2$, δηλαδή $f(x) = x^2 + 2$.

5 Για $x = y = 0$: $f(0) = 2f(0)$, άρα $f(0) = 0$. Για $y = -x$: $f(0) = f(x) + f(-x)$, άρα $f(-x) = -f(x)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

Λύσεις · Μάθημα 1.3 — Μονότονες συναρτήσεις – Ακρότατα – Αντίστροφη συνάρτηση

1 Για $0 \leq x_1 < x_2$: $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Rightarrow -2\sqrt{x_1} > -2\sqrt{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Γνησίως φθίνουσα.

2 Γνησίως αύξουσα, άρα 1-1. $y = 3x - 5 \iff x = \frac{y+5}{3}$. $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.

3 $D_f = (1, +\infty)$, γνησίως αύξουσα. $y = \ln(x-1) + 2 \iff x = e^{y-2} + 1$, για κάθε $y \in \mathbb{R}$. $f^{-1}(x) = e^{x-2} + 1, x \in \mathbb{R}$.

4 Για $x_1 < x_2$: $x_1^3 < x_2^3$ και $x_1 < x_2$, άρα $f(x_1) < f(x_2)$: γνησίως αύξουσα, άρα 1-1. Τότε $x^2 = 4x - 3 \iff x = 1$ ή $x = 3$.

5 $x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$, άρα $2 < f(x) \leq 3$. Μέγιστο $f(0) = 3$. ελάχιστο δεν υπάρχει (οι τιμές πλησιάζουν το 2 χωρίς να το πιάνουν).

6 Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, $f(\alpha) < f(\beta) \iff \alpha < \beta$ (αν $\alpha \geq \beta$ θα ήταν $f(\alpha) \geq f(\beta)$). Άρα $x^2 - 2x < 3 \iff (x-3)(x+1) < 0 \iff -1 < x < 3$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

Λύσεις · Μάθημα 1.4 — Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

1 Από αριστερά 6, από δεξιά $9 - 3 = 6$. Το όριο είναι 6.

2 Για $x > 0$: $\frac{x(x-1)}{x} = x - 1 \rightarrow -1$. Για $x < 0$: $\frac{x(x-1)}{-x} = -(x-1) \rightarrow 1$. Το όριο στο 0 δεν υπάρχει.

3 $\alpha + \beta = 4$ και $2\alpha - \beta = 4$. Προσθέτοντας: $3\alpha = 8$, $\alpha = \frac{8}{3}, \beta = \frac{4}{3}$.

4 $f(x) = (f(x) - 3x) + 3x \rightarrow 1 + 6 = 7$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

Λύσεις · Μάθημα 1.5α — Ιδιότητες των ορίων – Υπολογισμός ορίων

1 (α) $-2 + 1 + 4 = 3$ (β) 1 (γ) 5.

2 (α) $\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x} \rightarrow 2$. (β) $\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+3}{x-2} \rightarrow -\frac{1}{4}$.

3 Πολλαπλασιάζουμε με $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$: $\frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \rightarrow 1$.

4 $\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \rightarrow \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$.

5 $f(x) = (x-1)g(x)$ με $g \rightarrow 2$, άρα $\lim f = 0$. Το δεύτερο: $\frac{f(x)}{x-1} + (x+1) \rightarrow 2 + 2 = 4$.

6 Αναγκαία $\alpha + \beta + 2 = 0$, δηλαδή $\beta = -\alpha - 2$. Τότε $\alpha x^2 - (\alpha + 2)x + 2 = (x-1)(\alpha x - 2)$, οπότε το όριο είναι $\alpha - 2 = 5$: $\alpha = 7, \beta = -9$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

Λύσεις · Μάθημα 1.5β — Κριτήριο παρεμβολής – Τριγωνομετρικά όρια – Όριο σύνθετης

1 (α) $\frac{\eta\mu 5x}{5x} \cdot \frac{2x}{\eta\mu 2x} \cdot \frac{5}{2} \rightarrow \frac{5}{2}$. (β) $x \cdot \frac{x}{\eta\mu x} \rightarrow 0 \cdot 1 = 0$.

2 $-x^2 \leq x^2 \eta\mu \frac{1}{x^2} \leq x^2$, και τα άκρα $\rightarrow 0$. Όριο 0.

3 $\frac{\eta\mu x}{x} - \sin x \rightarrow 1 - 1 = 0$.

4 $\left(\frac{\eta\mu 2x}{2x}\right)^2 \cdot 4 \rightarrow 4$.

5 Για $x \neq 0$ διαιρούμε με $x^2 > 0$: $1 - x^2 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + x^2$. Τα άκρα $\rightarrow 1$, άρα το όριο είναι 1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

Λύσεις · Μάθημα 1.6 — Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- 1 (α) $\frac{-5}{0^+} = -\infty$. (β) $3 - x \rightarrow 0^-: -\infty$. (γ) Μορφή $(+\infty) + (-\infty)$: γράφουμε $\frac{1}{x} + \ln x = \frac{1+x \ln x}{x}$.
επειδή $x \ln x \rightarrow 0$ (θα το αποδείξουμε με De L'Hospital στο 2.9), ο αριθμητής $\rightarrow 1$ και ο παρονομαστής $\rightarrow 0^+: +\infty$.
- 2 Αριθμητής $\rightarrow 5$. $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$: για $x \rightarrow 2^-$ αρνητικό, για $x \rightarrow 2^+$ θετικό. Πλευρικά: $-\infty$ και $+\infty$.

- 3 Μορφή $\infty - \infty$. Ομώνυμα: $\frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1} \rightarrow \frac{1}{2}$.
- 4 Ο παρονομαστής $\rightarrow 0^+$. Πρέπει ο αριθμητής να τείνει σε αρνητικό αριθμό: $2\alpha - 1 < 0 \iff \alpha < \frac{1}{2}$. (Για $\alpha = \frac{1}{2}$ ο αριθμητής είναι $\frac{x-2}{2}$ και το πηλίκο $\frac{1}{2(x-2)}$ δεν έχει όριο.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

Λύσεις · Μάθημα 1.7 — Όριο συνάρτησης στο άπειρο

- 1 (α) $2x^3 \rightarrow -\infty$. (β) $\frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$.
- 2 (α) 0 (β) $-\ln x \rightarrow -\infty$ (γ) $+\infty$.
- 3 Συζυγής: $\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}} = \frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \rightarrow \frac{2}{2} = 1$.
- 4 $|\frac{\eta\mu x}{x}| \leq \frac{1}{x}$ για $x > 0$, άρα $-\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}$ και από κριτήριο παρεμβολής το όριο είναι 0. (Σύγκρινε με το $\lim_{x \rightarrow 0} = 1!$)
- 5 Πρέπει $\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} - \alpha - \frac{\beta}{x} \rightarrow 0$, δηλαδή $\alpha = 1$. Τότε $\sqrt{x^2+2x} - x \rightarrow 1$ (με συζυγή: $\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} \rightarrow 1$), οπότε $1 - \beta = 0, \beta = 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

Λύσεις · Μάθημα 1.8α — Συνέχεια συνάρτησης

- 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 = f(0)$: συνεχής.
- 2 Δεξιά: $\frac{1}{\sqrt{x+9}+3} \rightarrow \frac{1}{6}$. Αριστερά και τιμή: $1 + \kappa$. Άρα $\kappa = -\frac{5}{6}$.
- 3 Για $x \neq 0$: $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x} \rightarrow 1$. Από τη συνέχεια $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
- 4 Από την άσκηση 5 του 1.2β, $f(0) = 0$, άρα $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = 0$. Τότε $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0) + f(h)) = f(x_0)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

Λύσεις · Μάθημα 1.8β — Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων σε διάστημα

- 1 $f(x) = x^4 - 3x + 1$ συνεχής στο $[0, 1]$, $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -1 < 0$. Bolzano.
- 2 $h(x) = \ln x + x - 3$, συνεχής στο $[1, e]$, $h(1) = -2 < 0$, $h(e) = e - 2 > 0$: ρίζα στο $(1, e)$. Η h είναι γνησίως αύξουσα (άθροισμα γνησίως αυξουσών), άρα η ρίζα είναι μοναδική.
- 3 Για $x \neq 1, 2$ η εξίσωση γράφεται $(x-2) + (x-1) = 0$. Θεωρούμε $h(x) = 2x - 3$, συνεχής στο $[1, 2]$, $h(1) = -1$, $h(2) = 1$: ρίζα στο $(1, 2)$ (είναι το $\frac{3}{2}$, που ικανοποιεί και την αρχική).
- 4 Γνησίως αύξουσα και συνεχής. $f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = [1, e+1]$. $\lim_{-\infty} f = 0 + (-\infty) = -\infty$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

5 Ρίζες $-2, 0, 2$. Δοκιμές: $f(-3) = -15 < 0$,
 $f(-1) = 3 > 0$, $f(1) = -3 < 0$, $f(3) = 15 > 0$.
 Άρα $f < 0$ στα $(-\infty, -2)$, $(0, 2)$ και $f > 0$ στα
 $(-2, 0)$, $(2, +\infty)$.

6 Η τιμή $\eta = 2$ βρίσκεται μεταξύ των $f(1) = 3$ και
 $f(3) = 1$. Από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών
 υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ με $f(\xi) = 2$.

7 Αν $f(\alpha) = f(\beta)$, παίρνουμε $\xi = \alpha$. Αλλιώς ο
 αριθμός $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ (μέσος όρος) βρίσκεται **γνήσια**
 μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, οπότε από το θεώρημα
 ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με την
 ιδιότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 · Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

Λύσεις · Μάθημα Επ. 1 — Επαναληπτικά θέματα: Όριο – Συνέχεια

1 $(\alpha) x^2 + 2x + 4 \rightarrow 12$ $(\beta) 2$ $(\gamma) 4$.

2 Η f γράφεται $1 - \frac{2}{e^x+1}$, γνησίως αύξουσα, άρα $1-1$.
 $y = \frac{e^x-1}{e^x+1} \iff e^x = \frac{1+y}{1-y}$, που έχει λύση μόνο για
 $-1 < y < 1$. $f^{-1}(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$.

3 Πρέπει $1 + \alpha + \beta = 0$ (αλλιώς το όριο θα ήταν
 άπειρο). Τότε $x^2 + \alpha x - (1 + \alpha) = (x - 1)(x +$
 $1 + \alpha)$ και το όριο είναι $2 + \alpha = 3$: $\alpha = 1$, $\beta = -2$.

4 $h(x) = xe^x - 1$ συνεχής στο $[0, 1]$, $h(0) = -1$,
 $h(1) = e - 1 > 0$: ρίζα. Για $0 \leq x_1 < x_2$: $x_1 e^{x_1} <$
 $x_2 e^{x_2}$ (γινόμενο μη αρνητικών γνησίως αυξουσών),
 άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και η
 ρίζα μοναδική εκεί. (Για $x < 0$ είναι $xe^x < 0 < 1$,
 άρα δεν υπάρχουν άλλες ρίζες.)

5 Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με x :
 $\frac{\frac{f(x)+\mu x}{x} + \frac{\mu x}{x}}{1 + \frac{f(x)}{x}} \rightarrow \frac{3+1}{1+3} = 1$.

6 $f^2(x) = 1 + x^2 > 0$, άρα η f δεν μηδενίζεται
 πουθενά και, ως συνεχής, διατηρεί σταθερό
 πρόσημο. Αφού $f(0) = -1 < 0$, είναι $f(x) < 0$ για
 κάθε x , οπότε $f(x) = -\sqrt{1 + x^2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Διαφορικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 2.1 — Η έννοια της παραγώγου

1 $\frac{1-1}{x-2} = \frac{2-x}{2x(x-2)} = -\frac{1}{2x} \rightarrow -\frac{1}{4}$.

2 $\frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1 \rightarrow 3$. Εφαπτομένη $y = 3x - 2$.

3 $f(2) = 0$. $\frac{|x-2|(x+1)}{x-2}$: από αριστερά $-(x+1) \rightarrow -3$,
 από δεξιά $x+1 \rightarrow 3$. Διαφορετικά: δεν είναι
 παραγωγίσιμη.

4 $\frac{x|x|}{x} = |x| \rightarrow 0$. Παραγωγίσιμη με $f'(0) = 0$.

5 Η $f(x) - 3 = (x - 1) \cdot g(x)$ με $g \rightarrow 4$, άρα $\lim f =$
 3 και, από συνέχεια, $f(1) = 3$. Τότε το δοσμένο όριο
 είναι ο ορισμός της $f'(1)$: $f'(1) = 4$.

6 Συνέχεια: $1 + \alpha = 2$, $\alpha = 1$. Από αριστερά:
 $\frac{e^x+1-2}{x} = \frac{e^x-1}{x} \rightarrow 1$. Από δεξιά: $\frac{\beta x}{x} = \beta$. Άρα $\beta = 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Διαφορικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 2.2 — Παραγωγίσιμες συναρτήσεις – Παράγωγος συνάρτησης

1 $f'(0) = 1$: $y = x$. $g'(0) = 1$: $y = x + 1$.

2 Εφαπτομένη στο $(\alpha, \ln \alpha)$: $y = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha) + \ln \alpha$.
 Για $(0, 0)$: $0 = -1 + \ln \alpha$, $\alpha = e$. Σημείο $(e, 1)$.

3 $f' = 4x^3 + \sin x$, $f'' = 12x^2 - \eta \mu x$, $f''' = 24x -$
 $\sin x$.

4 $3x^2 = 12 \iff x = \pm 2$. Στο $(2, 8)$: $y = 12x - 16$.
 Στο $(-2, -8)$: $y = 12x + 16$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Διαφορικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 2.3 — Κανόνες παραγώγισης

- 1 (α) $2xe^{-x} - (x^2 - 1)e^{-x} = e^{-x}(-x^2 + 2x + 1)$. (β) $\frac{2x(x-2)-(x^2+1)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}$. (γ) $3\eta\mu^2 x \sin x$.
- 2 (α) $\frac{2x}{x^2+4}$ (β) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ (γ) $3^{2x} \ln 3 \cdot 2$ (δ) $\frac{-\eta\mu x}{\sin x} = -\epsilon\phi x$.
- 3 $f(x) = e^{x \ln \eta\mu x}$, $f'(x) = (\eta\mu x)^x (\ln \eta\mu x + x \frac{\cos x}{\eta\mu x})$.
- 4 Στο $(\alpha, \frac{1}{\alpha})$: $y = -\frac{1}{\alpha^2}(x - \alpha) + \frac{1}{\alpha} = -\frac{x}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha}$. Για $(2, 0)$: $-\frac{2}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha} = 0 \iff \alpha = 1$. Εφαπτομένη $y = -x + 2$.
- 5 $f'(x) = g(x^2) + x g'(x^2) \cdot 2x$. $f'(1) = 2 + 2 \cdot 3 = 8$.
- 6 Θέλουμε $x_0 > 0$ με $\ln x_0 = \alpha x_0^2$ και $\frac{1}{x_0} = 2\alpha x_0$. Από τη δεύτερη $\alpha x_0^2 = \frac{1}{2}$, άρα $\ln x_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = \sqrt{e}$ και $\alpha = \frac{1}{2e}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Διαφορικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 2.4 — Ρυθμός μεταβολής

- 1 $v = 3t^2 - 12t + 9$, $v(2) = -3$ m/s. $\alpha = 6t - 12$, $\alpha(2) = 0$ m/s².
- 2 $E = \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha^2$, $E' = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\alpha' = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 \cdot 3 = 15\sqrt{3}$ cm²/s.
- 3 Από ομοιότητα $r = \frac{h}{2}$, οπότε $V = \frac{1}{3}\pi \frac{h^2}{4}h = \frac{\pi h^3}{12}$. $V' = \frac{\pi h^2}{4}h'$. Για $h = 4$: $2 = 4\pi h'$, $h' = \frac{1}{2\pi} \approx 0,16$ m/min.
- 4 $d(t) = \sqrt{(60t)^2 + (80t)^2} = 100t$, άρα $d'(t) = 100$ km/h για κάθε t (και φυσικά για $t = 2$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Διαφορικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 2.5 — Θεώρημα Rolle – Θεώρημα Μέσης Τιμής

- 1 Συνεχής, παραγωγίσιμη, $f(0) = f(\pi) = 0$. συνξ = $0 \Rightarrow \xi = \frac{\pi}{2}$.
- 2 $\frac{27-0}{3} = 9 = 3\xi^2 \Rightarrow \xi = \sqrt{3} \in (0, 3)$.
- 3 Είναι η παράγωγος της $F(x) = x^3 + \alpha x^2 - (\alpha + 1)x$, με $F(0) = 0$ και $F(1) = 1 + \alpha - \alpha - 1 = 0$. Rolle στο $[0, 1]$.
- 4 Αν $\alpha = \beta$ ισχύει. Αλλιώς Θ.Μ.Τ. για την $\eta\mu\alpha$: $\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta = \text{συνξ}(\alpha - \beta)$, άρα $|\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta| = |\text{συνξ}||\alpha - \beta| \leq |\alpha - \beta|$.
- 5 Θ.Μ.Τ. στο $[1, 3]$: $f(3) - f(1) = 2f'(\xi) \leq 4$, άρα $f(3) \leq 5$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Διαφορικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 2.6 — Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

- 1 $f'(x) = e^x(x+1)$: < 0 για $x < -1$, > 0 για $x > -1$. Φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$, αύξουσα στο $[-1, +\infty)$.
- 2 $D = (0, +\infty)$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Φθίνουσα στο $(0, 1]$, αύξουσα στο $[1, +\infty)$.
- 3 $(f(x) - x^2 - \eta\mu x)' = 0$, άρα $f(x) = x^2 + \eta\mu x + c$ και $f(0) = c = 4$: $f(x) = x^2 + \eta\mu x + 4$.
- 4 $h(x) = e^x - 1 - x$, $h'(x) = e^x - 1$: αρνητική για $x < 0$, θετική για $x > 0$. Φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, αύξουσα στο $[0, +\infty)$, άρα $h(x) \geq h(0) = 0$.
- 5 $(e^{2x}f(x))' = e^{2x}(f'(x) + 2f(x)) = 0$, άρα $e^{2x}f(x) = 5$ και $f(x) = 5e^{-2x}$.

- 6 $h(x) = x^5 + x$, $h'(x) = 5x^4 + 1 > 0$: γνησίως αύξουσα. $h(1) = 2$, άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = 1$ και η ανίσωση $h(x) > h(1) \iff x > 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Διαφορικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 2.7 — Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

- 1 $f'(x) = 6(x-2)(x+1)$. Τοπικό μέγιστο $f(-1) = 12$, τοπικό ελάχιστο $f(2) = -15$.
- 2 $f'(x) = xe^{-x}(2-x)$. Τοπικό ελάχιστο $f(0) = 0$ (και ολικό, αφού $f \geq 0$), τοπικό μέγιστο $f(2) = 4e^{-2}$.
- 3 $f'(x) = 1 - 2\eta\mu x = 0 \iff x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. $f(0) = 2$, $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \approx 2,26$, $f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} \approx 0,89$, $f(\pi) = \pi - 2 \approx 1,14$. Μέγιστη $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$, ελάχιστη $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$.
- 4 $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$: πρόσημο του $x - 1$. Ολικό ελάχιστο $f(1) = 0$.
- 5 Για $x > 0$: $\alpha = \frac{\ln x}{x} = g(x)$. $g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$: αύξουσα στο $(0, e]$, φθίνουσα στο $[e, +\infty)$, μέγιστο $g(e) = \frac{1}{e}$. $\lim_{0^+} g = -\infty$, $\lim_{+\infty} g = 0^+$. Άρα: $\alpha > \frac{1}{e}$: καμία ρίζα. $\alpha = \frac{1}{e}$: μία ($x = e$). $0 < \alpha < \frac{1}{e}$: δύο ρίζες.
- 6 $f(1) = 1 + \alpha + \beta = -2$ και $f'(1) = 3 + 2\alpha + \beta = 0$. Αφαιρώντας: $2 + \alpha = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = -3$. $f(x) = x^3 - 3x$, $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$: στο 1 τοπικό ελάχιστο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Διαφορικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 2.8 — Κυρτότητα – Σημεία καμπής

- 1 $f''(x) = 6x - 6$: κοίλη στο $(-\infty, 1]$, κυρτή στο $[1, +\infty)$. Σημείο καμπής $(1, 0)$.
- 2 $f' = -2xe^{-x^2}$, $f'' = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$. Κυρτή στα $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$, $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$, κοίλη στο $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$. Σημεία καμπής $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2})$.
- 3 $f''(1) = 6 + 2\alpha = 0$, $\alpha = -3$. $f(1) = 1 - 3 + \beta = 2$, $\beta = 4$. (Η $f'' = 6x - 6$ αλλάζει πρόσημο στο 1 ✓.)
- 4 Στο $[0, \pi]$: $(\eta\mu x)'' = -\eta\mu x \leq 0$, με ισότητα μόνο στα άκρα, άρα κοίλη· η εφαπτομένη στο 0 είναι η $y = x$ και βρίσκεται πάνω από την καμπύλη: $\eta\mu x \leq x$. Για $x > \pi > 1$: $\eta\mu x \leq 1 < x$.
- 5 Η εφαπτομένη της C_f στο $(0, 1)$ είναι $y = 2x + 1$ και, λόγω κυρτότητας, βρίσκεται κάτω από τη C_f .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Διαφορικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 2.9 — Ασύμπτωτες – Κανόνες De L'Hospital

- 1 Κατακόρυφη $x = -3$ (αριθμητής $\rightarrow -7 \neq 0$). Οριζόντια $y = 2$ στο $\pm\infty$.
- 2 (α) Τρεις φορές De L'Hospital: $\frac{\sin x - 1}{3x^2} \rightarrow \frac{-\eta\mu x}{6x} \rightarrow -\frac{1}{6}$. (β) $\frac{1/x}{2x} \rightarrow \frac{1}{2}$.
- 3 $+\infty$: $\frac{f(x)}{x} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 2$, $f(x) - 2x = \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \rightarrow 0$: $y = 2x$. $-\infty$: $x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \rightarrow 0$: $y = 0$.
- 4 $x^x = e^{x \ln x}$ και $x \ln x \rightarrow 0$ (Παράδειγμα 2). Άρα το όριο είναι $e^0 = 1$.
- 5 Ομώνυμα: $\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$, μορφή $\frac{0}{0}$. De L'Hospital: $\frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x}$, πάλι $\frac{0}{0}$: $\frac{e^x}{2e^x + xe^x} \rightarrow \frac{1}{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Διαφορικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 2.10 — Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης

- 1** $f' = 3x(x-2)$: $\nearrow$ στο $(-\infty, 0]$, $\searrow$ στο $[0, 2]$, $\nearrow$ στο $[2, +\infty)$. τοπ. μέγιστο $f(0) = 0$, τοπ. ελάχιστο $f(2) = -4$. $f'' = 6x - 6$: κοίλη στο $(-\infty, 1]$, κυρτή στο $[1, +\infty)$, σημείο καμπής $(1, -2)$. Χωρίς ασύμπτωτες (πολυώνυμο), $\lim_{\pm\infty} f = \pm\infty$. Ρίζες 0 (διπλή) και 3.
- 2** $D = (0, +\infty)$. $f' = \frac{1-\ln x}{x^2}$: $\nearrow$ στο $(0, e]$, $\searrow$ στο $[e, +\infty)$, μέγιστο $\frac{1}{e}$. $f'' = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$: κοίλη στο $(0, e^{3/2}]$, κυρτή μετά, σημείο καμπής $(e^{3/2}, \frac{3}{2}e^{-3/2})$. $\lim_{0+} f = -\infty$: κατακόρυφη $x = 0$. $\lim_{+\infty} f = 0$: οριζόντια $y = 0$. Ρίζα $x = 1$.
- 3** Περιττή. $f' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$: $\searrow$ στο $(-\infty, -1]$, $\nearrow$ στο $[-1, 1]$, $\searrow$ στο $[1, +\infty)$. ελάχιστο $f(-1) = -\frac{1}{2}$, μέγιστο $f(1) = \frac{1}{2}$. $f'' = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$: σημεία καμπής στα 0, $\pm\sqrt{3}$. Οριζόντια ασύμπτωτη $y = 0$. Σύνολο τιμών $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 · Διαφορικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα Επ. 2 — Επαναληπτικά θέματα Διαφορικού Λογισμού

- 1** $f(1) = \ln 2$, $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $f'(1) = 1$. $y = x - 1 + \ln 2$.
- 2** $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$: γνησίως αύξουσα, το πολύ μία ρίζα. $f(1) = -1$, $f(2) = 9$: ρίζα στο $(1, 2)$.
- 3** $\frac{x^3}{e^x} \rightarrow 0$ (τρεις φορές De L'Hospital) και $\frac{\ln x}{e^x} \rightarrow 0$. Άρα το όριο είναι 0.
- 4** Rolle στα $[0, 1]$ και $[1, 2]$: υπάρχουν $\xi_1 \in (0, 1)$, $\xi_2 \in (1, 2)$ με $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. Rolle στην f' στο $[\xi_1, \xi_2]$: υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (0, 2)$ με $f''(\xi) = 0$.
- 5** Η $g(x) = \alpha^x - 1 - x$ έχει $g(0) = 0$, άρα η ανισότητα σημαίνει ότι το 0 είναι θέση ολικού ελαχίστου. Από Fermat: $g'(0) = \ln \alpha - 1 = 0$, άρα αναγκαστικά $\alpha = e$. Αντίστροφα, για $\alpha = e$ ισχύει $e^x \geq 1 + x$ (μάθημα 2.6). Άρα $\alpha = e$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Ολοκληρωτικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 3.1 — Αόριστο ολοκλήρωμα

- 1** (α) $\frac{x^5}{5} - x^3 + 5x + c$ (β) $-\frac{3}{x} + c$ (γ) $2\eta\mu x + e^x + c$.
- 2** $\int (x^2 - 2 + \frac{1}{x}) dx = \frac{x^3}{3} - 2x + \ln x + c$.
- 3** $f(x) = e^x + \ln x + c$, $f(1) = e + c = e$, $c = 0$:
 $f(x) = e^x + \ln x$.
- 4** $f(x) = x^2 - 3x + c$, $f(0) = 1$: $f(x) = x^2 - 3x + 1$.
- 5** $f'(x) = 4x^3 + 2x + c_1$, $f'(1) = 6 + c_1 = 5 \Rightarrow c_1 = -1$. $f(x) = x^4 + x^2 - x + c_2$, $f(1) = 1 + c_2 = 3 \Rightarrow c_2 = 2$. $f(x) = x^4 + x^2 - x + 2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Ολοκληρωτικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 3.2 — Μέθοδοι ολοκλήρωσης

- 1** (α) $x\eta\mu x - \int \eta\mu x dx = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + c$. (β) $x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2(x-1)e^x + c = e^x(x^2 - 2x + 2) + c$.
- 2** (α) $\ln(x^3 + 1) + c$. (β) $u = \sigma\upsilon\nu x$, $du = -\eta\mu x dx$:
 $-\frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{4} + c$.
- 3** $\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1/4}{x-2} - \frac{1/4}{x+2}$. Αποτέλεσμα $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c$.

4 $u = \ln x, du = \frac{dx}{x}: \frac{\ln^2 x}{2} + c.$

5 Δύο φορές παραγοντική: $I = \int (-e^{-x})' \sin x \, dx = -e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \eta \mu x \, dx = -e^{-x} \sin x - [-e^{-x} \eta \mu x + \int e^{-x} \sigma \nu x \, dx].$ Άρα $2I = e^{-x} (\eta \mu x - \sigma \nu x)$ και $I = \frac{e^{-x} (\eta \mu x - \sigma \nu x)}{2} + c.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Ολοκληρωτικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 3.3 — Διαφορικές εξισώσεις

1 $\frac{dy}{y} = -2x \, dx \Rightarrow \ln y = -x^2 + c \Rightarrow y = Ce^{-x^2}.$
 $y(0) = 3: y = 3e^{-x^2}.$

2 $y = ce^x, ce = e^2 \Rightarrow c = e: y = e^{x+1}.$

3 Πολλαπλασιάζουμε με $e^{2x}: (ye^{2x})' = e^x, ye^{2x} = e^x + c, y = e^{-x} + ce^{-2x}.$

4 $A = x^2: (ye^{x^2})' = xe^{x^2}, ye^{x^2} = \frac{e^{x^2}}{2} + c, y = \frac{1}{2} + ce^{-x^2}.$

5 $P(t) = 500e^{kt}, e^{3k} = 2 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{3}. P(10) = 500 \cdot 2^{10/3} \approx 500 \cdot 10,08 \approx 5040$ βακτήρια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Ολοκληρωτικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 3.4 — Ορισμένο ολοκλήρωμα

1 (α) 12 (β) τρίγωνο $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$ (γ) τεταρτοκύκλιο $\frac{9\pi}{4}.$

2 $18 + 4 + \int_1^4 x \, dx = 22 + \frac{16-1}{2} = 22 + 7,5 = 29,5.$

3 Η $f(x) - x^2 \geq 0$, συνεχής, όχι παντού 0, άρα $\int_0^1 (f(x) - x^2) \, dx > 0$, δηλαδή $\int_0^1 f > \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Ολοκληρωτικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 3.5 — Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ – Θεμελιώδες θεώρημα

1 (α) $[e^x + x^2]_0^1 = e + 1 - 1 = e$ (β) $[-\sin x]_0^\pi = 2$
 (γ) $[\frac{2}{3}x^{3/2}]_1^4 = \frac{2}{3}(8 - 1) = \frac{14}{3}.$

2 $[x \ln x - x]_1^e = (e - e) - (0 - 1) = 1.$

3 $\frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1)]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$

4 $F'(x) = \ln(x^3) \cdot 3x^2 - \ln x = 9x^2 \ln x - \ln x = \ln x (9x^2 - 1).$

5 Παραγωγίζοντας: $f(x) = 3x^2 + 2.$

6 Η f είναι παραγωγίσιμη (το δεξί μέλος είναι) και $f'(x) = f(x)$, με $f(0) = 2$. Άρα $f(x) = 2e^x.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Ολοκληρωτικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 3.6 — Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού

1 $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \eta \mu x \, dx = \frac{2}{\pi}.$

2 Θ.Μ.Τ. ολοκληρωτικού για την e^x στο $[0, 1]: e^\xi = \int_0^1 e^x \, dx = e - 1.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Ολοκληρωτικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα 3.7 — Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

1 Ρίξεις ± 2 . $\int_{-2}^2 (4 - x^2) \, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2 = \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$

2 $\int_0^2 e^x \, dx = e^2 - 1.$

3 Τομές $-1, 0, 1$. Στο $[-1, 0]$: $x^3 \geq x$ στο $[0, 1]$: $x \geq x^3$. $E = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

4 $\int_0^\pi \eta \mu x \, dx - \int_\pi^{2\pi} \eta \mu x \, dx = 2 + 2 = 4$.

5 $E(\lambda) = \ln \lambda = 2 \iff \lambda = e^2$.

6 Η f είναι αρνητική στο $[-1, 0)$ και θετική στο $(0, 1]$.
Παράγουμε: $(x-1)e^x - \int_{-1}^0 x e^x dx = -[(x-1)e^x]_{-1}^0 = -(-1 + 2e^{-1}) = 1 - \frac{2}{e}$. $\int_0^1 x e^x dx = 1$.
Σύνολο $2 - \frac{2}{e}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 · Ολοκληρωτικός Λογισμός

Λύσεις · Μάθημα Επ. 3 — Επαναληπτικά θέματα Ολοκληρωτικού Λογισμού

1 (α) $[\ln(x^2 + 1)]_0^1 = \ln 2$. (β) $[-x \sin x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 0 + 1 = 1$.

2 Παραγωγίζοντας: $xf(x) = 3x^2 - 2x$, άρα $f(x) = 3x - 2$ για $x \neq 0$, και από συνέχεια $f(0) = -2$:
 $f(x) = 3x - 2$.

3 Τομές: $\sqrt{x} = \frac{x}{2} \iff x = 0$ ή $x = 4$. Στο $[0, 4]$:
 $\sqrt{x} \geq \frac{x}{2}$. $E = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{4} \right]_0^4 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$.

4 $\frac{dy}{y} = \sin x \, dx \Rightarrow \ln y = \eta \mu x + c, y(0) = 1 \Rightarrow c = 0$: $y = e^{\eta \mu x}$.

5 $g(x) = f(x) - 2x$, συνεχής, $\int_0^1 g = 1 - 1 = 0$. Από Θ.Μ.Τ. ολοκληρωτικού υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ με $g(\xi) = \int_0^1 g = 0$.

6 Για $x \in [0, 1]$: $1 \leq 1 + x^2 \leq 2$, άρα $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$.
Ολοκληρώνοντας στο $[0, 1]$ (μονοτονία ολοκληρώματος) προκύπτει το ζητούμενο.

Τα Μαθηματικά δεν τελειώνουν εδώ...

Αυτό το βοήθημα σε συνόδευσε σε όλη την ύλη της Ανάλυσης της Γ' Λυκείου: από τις συναρτήσεις και τα όρια μέχρι τις παραγώγους, τα ολοκληρώματα και τα εμβαδά. Αν θέλεις να συνεχίσεις, να λύσεις περισσότερες ασκήσεις, να δεις βίντεο-εξηγήσεις ή να προετοιμαστείς για διαγωνίσματα, σε περιμένει ένα πλήρες και ολοκληρωμένο **δωρεάν** φροντιστήριο:

mathgreece.com

- Θεωρία βήμα-βήμα για κάθε μάθημα
- Εκατοντάδες λυμένες και άλυτες ασκήσεις
- Διαγωνίσματα και θέματα εξετάσεων
- Υλικό για όλες τις τάξεις του Γυμνασίου και του Λυκείου

«Τα Μαθηματικά είναι η γλώσσα με την οποία ο Θεός έγραψε το σύμπαν» — Galileo Galilei.